Образец решения РГЗ по теме
"Кривые второго порядка на плоскости. Прямая на плоскости"

***Задания* 1–3.**

<u>Пример 1.</u> Привести к каноническому виду уравнение

$$648x^2 - 540xy + 873y^2 - 2484\sqrt{13}\ x - 1854\sqrt{13}\ y - 4095 = 0.$$

Решение. Сначала сделаем поворот осей координат, заменив x и y на новые переменные x' и y' по формулам

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi; \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases} \qquad (1)$$

При этом угол φ ищется так, чтобы в общем уравнении кривой 2-го порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

коэффициент B после преобразования стал равен нулю. Для этого необходимо, чтобы $\operatorname{tg}\varphi$ удовлетворял уравнению

$$B\operatorname{tg}^2\varphi + (A - C)\operatorname{tg}\varphi - B = 0. \qquad (2)$$

Подставив в это уравнение коэффициенты $A = 648$, $B = -540/2 = -270$, $C = 873$, получим:

$$-270\operatorname{tg}^2\varphi + (648 - 873)\operatorname{tg}\varphi + 270 = 0$$

$$-270\operatorname{tg}^2\varphi - 225\operatorname{tg}\varphi + 270 = 0 \quad \Big| : (-45)$$

$$\Rightarrow \quad 6\operatorname{tg}^2\varphi + 5\operatorname{tg}\varphi - 6 = 0,$$

$$(\operatorname{tg}\varphi)_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{-5 \pm 13}{12} = \left[\begin{array}{l} 2/3; \\ -3/2. \end{array}\right.$$

Выберем угол поворота $\varphi \in (0;\ \pi/2)$, тогда $\varphi = \operatorname{arctg}(2/3)$. Найдем по известным тригонометрическим формулам синус и косинус выбранного угла φ:

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}; \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}. \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{2/3}{\sqrt{1 + 4/9}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4/9}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

Подставим найденные синус и косинус в соотношения (1):

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}x' - \dfrac{2\sqrt{13}}{13}y'; \\ y = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}x' + \dfrac{3\sqrt{13}}{13}y', \end{cases}$$

а полученные выражения — в исходное уравнение:

$$648\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}x' - \frac{2\sqrt{13}}{13}y'\right)^2 - 540\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}x' - \frac{2\sqrt{13}}{13}y'\right)\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}x' + \frac{3\sqrt{13}}{13}y'\right) + 873\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}x' + \frac{3\sqrt{13}}{13}y'\right)^2 -$$

$$-2484\sqrt{13}\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}x' - \frac{2\sqrt{13}}{13}y'\right) - 1854\sqrt{13}\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}x' + \frac{3\sqrt{13}}{13}y'\right) - 4095 = 0,$$

затем раскроем скобки. Для удобства приведения подобных слагаемых будем записывать результат "в столбик", подобные под подобными:

$$\frac{5832}{13}x'^2-\frac{7776}{13}x'y'+\frac{2592}{13}y'^2-$$
$$-\frac{3240}{13}x'^2-\frac{2700}{13}x'y'-\frac{3240}{13}y'^2+$$
$$+\frac{3492}{13}x'^2+\frac{10476}{13}x'y'+\frac{7857}{13}y'^2-7452x'+4968y'-$$
$$-3708x'-5562y'-4095=0.$$

$$\Rightarrow\ \frac{6084}{13}x'^2+0\cdot x'y'+\frac{13689}{13}y'^2-3744x'+10530y'-4095=0,$$
$$\Rightarrow\ 468x'^2+1053y'^2-3744x'+10530y'-4095=0.$$

Каждый коэффициент полученного выражения делится на 9 и на 13, после сокращения получим

$$4x'^2+9y'^2-32x'+90y'-35=0,$$

Выделим теперь полные квадраты относительно переменных x и y:

$$4x'^2-32x'=4(x'^2-8x)=4(x'^2-2\cdot 4x'+4^2-4^2)=4(x'^2-2\cdot 4x'+4^2)-4\cdot 4^2=4(x'-4)^2-64;$$
$$9y'^2+90y'=9\left(y'^2+2\cdot 5y'+25\right)-9\cdot 25=9(y'+5)^2-175,$$

тогда

$$4x'^2+9y'^2-32x'+90y'-35=4(x'-4)^2-64+9(y'+5)^2-225-35=0,$$
$$4(x'-4)^2+9(y'+5)^2=324.$$

Чтобы получить каноническое уравнение, разделим все на 324:

$$\frac{(x'-4)^2}{81}+\frac{(y'+5)^2}{36}=1.$$

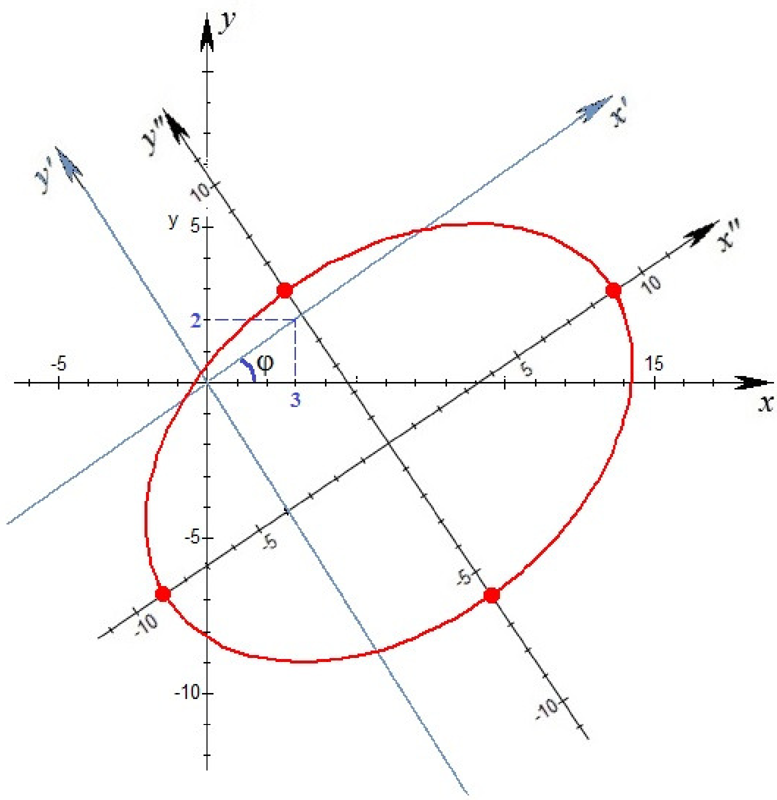

Рис. 1.

Данное уравнение является уравнением эллипса с центром в точке $O'(4;-5)$ в системе координат $Ox'y'$, повернутой относительно исходной системы на угол φ, для которого $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2}{3}$. Полуоси эллипса: $a=9,\ b=6$.

Изобразим эллипс. Для начала нарисуем оси декартовой системы координат Oxy. Система координат $Ox'y'$ наклонена относительно Oxy на угол φ, тангенс которого равен 2/3. Это значит, что ось Ox' проходит через начало координат и точку (2; 3) (см.рис.1). Центр эллипсп находится в точке $x'=4$; $y'=-5$, где точка находится относительно координат $Ox'y'$. Обозначим как $Ox''y''$ систему координат, параллельную $Ox'y'$ и имеющцю центр в точке $x'=4$; $y'=-5$. В этой системе эллипс имеет каноническое уравнение

$$\frac{x''^2}{9^2}+\frac{y''^2}{6^2}=1,$$

а значит пересекает координатную ось Оx'' в точках ± 9 и ось Оy'' — в точках ± 6. Отметим эти точки и изобразим искомый эллипс (см.рис.1).

Задача решена.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$100x^2+170xy-308y^2-10\sqrt{26}\,x+518\sqrt{26}\,y-1807=0.$$

$B\,\mathrm{tg}^2\varphi+(A-C)\,\mathrm{tg}\,\varphi-B=0$

Решение. Сначала сделаем поворот осей координат, заменив x и y на новые переменные x' и y' по формулам (1). Найдем угол φ из уравнения (2), где $A=100$, $B=170/2=85$, $C=-308$, получим:

$$85\,\mathrm{tg}^2\varphi+408\,\mathrm{tg}\,\varphi-85=0\;\Big|:17$$

$$\Rightarrow\quad 5\,\mathrm{tg}^2\varphi+24\,\mathrm{tg}\,\varphi-5=0,$$

$$(\mathrm{tg}\,\varphi)_{1,2}=\frac{-24\pm\sqrt{576+100}}{10}=\frac{-24\pm 26}{10}=\left[\begin{array}{l}1/5;\\-5.\end{array}\right.$$

Выберем угол поворота $\varphi\in(0;\ \pi/2)$, тогда $\varphi=\mathrm{arctg}(1/5)$,

$$\Rightarrow\ \sin\varphi=\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}=\frac{1/5}{\sqrt{1+1/25}}=\frac{\sqrt{26}}{26},\quad \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1+1/25}}=\frac{5\sqrt{26}}{26}.$$

Подставим найденные синус и косинус в соотношения (1):

$$\begin{cases}x=\dfrac{5\sqrt{26}}{26}x'-\dfrac{\sqrt{26}}{26}y';\\[2mm] y=\dfrac{\sqrt{26}}{26}x'+\dfrac{5\sqrt{26}}{26}y',\end{cases}$$

а полученные выражения — в исходное уравнение:

$$100\left(\frac{5\sqrt{26}}{26}x'-\frac{\sqrt{26}}{26}y'\right)^2+170\left(\frac{5\sqrt{26}}{26}x'-\frac{\sqrt{26}}{26}y'\right)\left(\frac{\sqrt{26}}{26}x'+\frac{5\sqrt{26}}{26}y'\right)-308\left(\frac{\sqrt{26}}{26}x'+\frac{5\sqrt{26}}{26}y'\right)^2-$$

$$-10\sqrt{26}\left(\frac{5\sqrt{26}}{26}x'-\frac{\sqrt{26}}{26}y'\right)+518\sqrt{26}\left(\frac{\sqrt{26}}{26}x'+\frac{5\sqrt{26}}{26}y'\right)-1807=0,$$

и упростим его:

$$\begin{aligned}&\frac{1250}{13}x'^2-\frac{500}{13}x'y'+\frac{50}{13}y'^2-\\&+\frac{425}{13}x'^2+\frac{2040}{13}x'y'-\frac{425}{13}y'^2+\\&-\frac{154}{13}x'^2-\frac{1540}{13}x'y'-\frac{3850}{13}y'^2-50x'+10y'-\\&\qquad\qquad+518x'+2590y'-1807=0.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad 117x'^2-325y'^2+468x'+2600y'-1807=0\;\Big|:13$$

$$\Rightarrow\quad 9x'^2-25y'^2+36x'+200y'-139=0.$$

Выделим теперь полные квадраты относительно переменных x и y:

$$\Rightarrow \quad 9(x'^2 + 4x' + 4) - 36 - 25(y'^2 - 8y' + 16) + 400 - 139 = 0;$$

$$\Rightarrow \quad 9(x' + 2)^2 - 25(y' - 4)^2 + 225 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad 9(x' + 2)^2 - 25(y' - 4)^2 = -225,$$

$$\frac{(x' + 2)^2}{5^2} - \frac{(y' - 4)^2}{3^2} = -1.$$

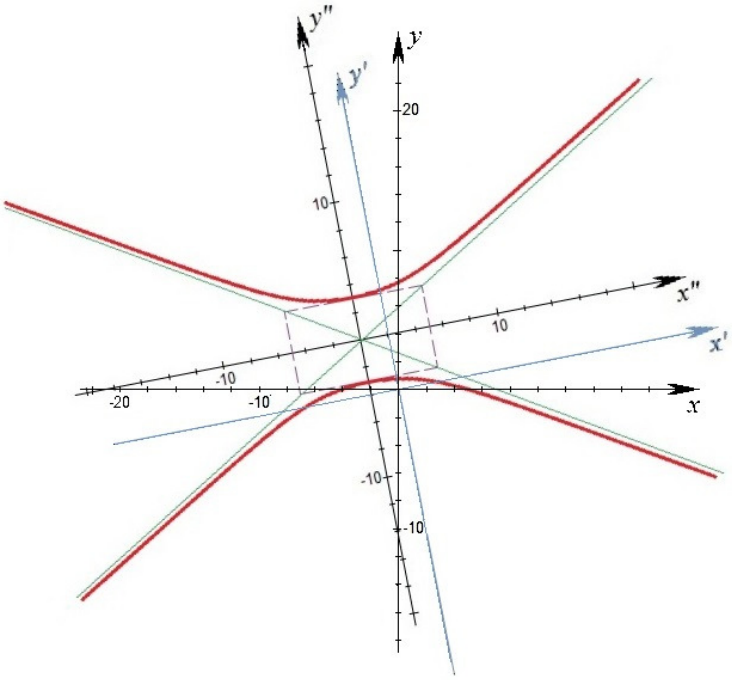

Рис. 2.

Данное уравнение является уравнением сопряденной гиперболы $O'(-2;4)$ в системе координат $Ox'y'$, повернутой относительно исходной системы на угол φ, для которого $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{5}$.

Полуоси гиперболы: $a = 5$, $b = 3$.

Для правильного построения гиперболы нарисуем в системе координат О$x''y''$ вспомогательный прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям и проходят через точки ± 3 оси Оy'' и ± 5 оси Оx'' (см. рис.2). Через противоположные вершины этого прямоугольника проходят две прямые — диагонали гиперболы (зеленые линии на рис.2).

Гипербола не пересекает ось Оx'', а ось Оy'' пересекает в точках ± 3 и приближается к асимптотам, удаляясь от начала координат.

Задание 4.

Прямая ℓ на плоскости Oxy проходит через точки $A(-1;\ 4)$ и $B(6;-7)$.

а) Составить каноническое, параметрические, общее уравнение этой прямой, ее уравнение в отрезках и уравнение с угловым коэффициентом.

б) Найти расстояние от точки $C(-5;3)$ до прямой ℓ.

в) Через точку C провести прямую $\ell_2 \parallel \ell$ и прямую $\ell_3 \perp \ell$.

Решение. а) Уравнение прямой, проходящей ***через две заданные точки*** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. $\Rightarrow$ $\dfrac{x+1}{6+1} = \dfrac{y-4}{-7-4}$

получаем **каноническое уравнение прямой:** $\boxed{\dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y-4}{-11}.}$

Приравняв каждую дробь к параметру t и выразив x и y, получим:

$$\frac{x+1}{7} = \frac{y-4}{-11} = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x+1}{7} = t \\ \dfrac{y-4}{-11} = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 1 = 7t \\ y - 4 = -11t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = 7t - 1 \\ y = 4 - 11t \end{cases}} —$$

параметрические уравнения прямой.

Замечание: из этих уравнений можно найти направляющий вектор прямой: $\vec{s} = \{7;-11\}$.

Домножим в каноническом уравнении правую и левую часть на 77 и перенесем все слагаемые в левую часть, тогда получим

$$\frac{x+1}{7}=\frac{y-4}{-11}\Bigg|\cdot 77 \quad\Rightarrow\quad 11(x+1)=-7(y-4) \quad\Rightarrow\quad 11x+11+7y-28=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{11x+7y-17=0}$$

— **общее уравнения прямой.**

Замечание: из общего уравнения можно найти нормаль к прямой: $N=\{11;7\}$.

Для проверки: $\vec{N}\cdot\vec{s}=7\cdot 11+(-11)\cdot 7=0 \;\Rightarrow\; \vec{N}\perp\vec{s}$.

Преобразуем общее уравнение прямой:

$$11x+7y-17=0 \quad\Rightarrow\quad 11x+7y=17\,\big|:17 \quad\Rightarrow\quad \frac{11}{17}x+\frac{7}{17}y=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{x}{17/11}+\frac{y}{17/7}=1}$$

— **уравнение прямой в отрезках,** где $a=\frac{17}{11}$ и $b=\frac{17}{7}$ — точки пересечения прямой с Ox и Oy.

И наконец, выразив из общего уравнения прямой y, получим:

$$11x+7y-17=0 \quad\Rightarrow\quad 7y=-11x+17\,\big|:7 \quad\Rightarrow\quad \boxed{y=-\frac{11}{7}x+\frac{17}{7}}$$

— **уравнение прямой с угловым коэффициентом.**

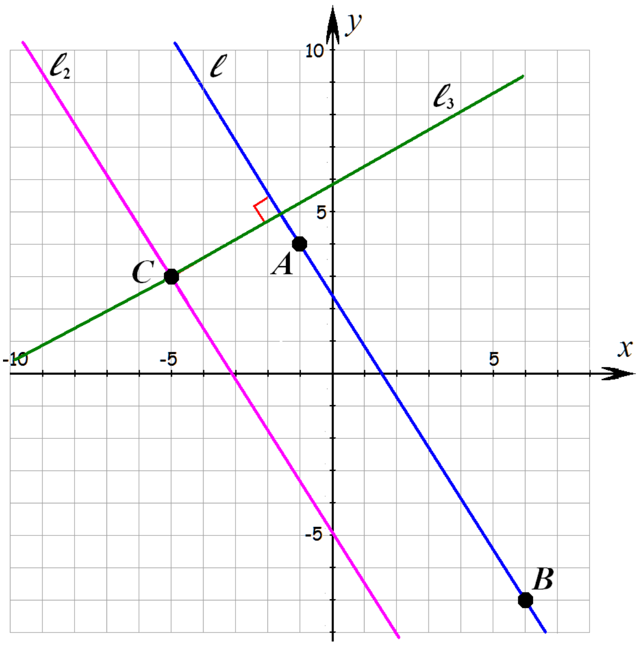

Рис. 3.

б) Найдем расстояние от точки $C(-5;\,3)$ до найденной прямой:

$$d=\frac{|Ax^*+By^*+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|11\cdot(-5)+7\cdot 3-17|}{\sqrt{11^2+7^2}}=\frac{51}{\sqrt{170}}\approx 3{,}91.$$

в) Если прямая $\ell_2 \,//\, \ell$, то их нормали совпадают. Тогда можно составить общее уравнение прямой ℓ_2, учитывая, что она проходит через точку $C(-5;\,3)$:

$$11(x+5)+7(y-3)=0 \quad\Rightarrow$$

$$11x+55+7y-21=0 \quad\Rightarrow\quad 11x+7y+34=0$$

— **общее уравнения прямой ℓ_2.**

Если прямая $\ell_3\perp\ell$, то нормаль к ℓ_3 совпадает с направляющим вектором прямой ℓ. Тогда:

$$7(x+5)-11(y-3)=0 \quad\Rightarrow\quad 7x+35-11y+33=0 \quad\Rightarrow\quad 7x-11y+68=0$$

— **общее уравнения прямой ℓ_3.**

Прямые ℓ, ℓ_2 и ℓ_3 изображены на рис. 3.