

Лабораторная работа N 4

по дисциплине «Алгоритмизация и программирование»
на тему: «Вычисления значений рядных функций»

1 Цель работы

Цель лабораторной работы состоит в формировании умений:

- вычисления значений рядных функций.

2 Задание

2.1 Формулировка задания

Есть f – рядная функция, есть F – функция взятая из «math.h».

Необходимо:

- написать программу для вычисления значения рядной и библиотечной функции;
- вычислить невязку δ (дельту) формула (1) значений рядной функции и стандартной функции Windows, взятой из библиотеки «math.h»;
- проанализировать динамику изменения значения невязки в зависимости от количества слагаемых в ряде.

$$\delta = \sqrt{|f^2(x) - F^2(x)|}, \quad (1)$$

где f – рядная функция,

F – библиотечная функция.

Вычисления ряда проводить до условия минимизации значения разности двух соседних членов ряда меньше заданного ε формула (2). Ряд рассчитывать через рекуррентную форму расчета ряда, что есть в приложении А и Б в конце документа.

$$|f_k(x) - f_{k-1}(x)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Результаты вычислений оформить в виде таблицы! Пример таблицы находится под вариантами заданий в пункте **2.4. Требования.**

2.2 Варианты

Вариант заданной собственной функции:

1) вычислить:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k};$$

2) π – число «пи», вычислить:

$$\frac{\pi}{4} + x = x + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1};$$

3) e – число Эйлера, вычислить:

$$e + x = x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!};$$

4) вычислить:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!};$$

5) вычислить:

$$\sin^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!};$$

6) вычислить:

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(3^{2n} + 3)x^{2n}}{(2n)!};$$

7) вычислить:

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

8) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\sin^3(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n+1} - 3}{(2n+1)!} x^{2n+1};$$

9) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\operatorname{actg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

10) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{4x}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 - x^2};$$

11) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots;$$

12) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\operatorname{arccctg}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}, \quad (x^2 < +\infty);$$

13) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots;$$

14) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

15) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\operatorname{cosec}(\pi x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x^2 - k^2};$$

16) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \frac{4x}{\pi} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 - x^2};$$

17) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (x^2 < \infty);$$

18) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\cos^2(x) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!};$$

19) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\operatorname{ctg} \pi x = \frac{1}{x\pi} + \frac{2x}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - k^2};$$

20) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\sec\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k-1}{(2k-1)^2 - x^2};$$

21) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \right), \quad (|x| < 1);$$

22) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\frac{1-x}{1} \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}, \quad (x^2 < 1);$$

23) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$a^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x \ln a)^k}{k!};$$

24) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$x \cdot \cos(3x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{2n} x^{2n+1}}{(2n)!};$$

25) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots;$$

26) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2} = x^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(2k-1)^2 - x^2}{(1^2 - x^2)(3^2 - x^2)^2 \cdots [(2k-1)^2 - x^2]^2};$$

27) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$e^x(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k(k+1)}{k!};$$

28) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!};$$

29) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} k x^{k-1};$$

30) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\frac{1}{x-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{x^{2^{k-1}} + 1} \quad (x^2 > 1);$$

31) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\operatorname{arcth}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (x^2 < 1);$$

32) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!};$$

33) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\sec(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x^2 < \pi^2/4);$$

34) ВЫЧИСЛИТЬ:

$$\operatorname{th}(x) = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} \quad (x^2 < \pi^2/4);$$

35) вычислить:

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(2^{2n-1} - 1)|B_{2n}|x^{2n-1}}{(2n)!} \quad (x^2 < \pi^2).$$

2.3 Дополнительные материалы

Для вычисления числа Бернулли B_n можно воспользоваться формулами (3), (4) или (5), где $B_0 = 1$.

$$B_n = (-1)^n \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left((-1)^{k-1} \frac{B_k(2n)(2n-1)(2n-2) \dots (2n-2k+2)}{(2k)!} \right) \right]. \quad (3)$$

$$B_n = \sum_{k=2}^{2n+1} \left((-1)^{k-1} \frac{(2n+1)(2n) \dots (2n-k+2)}{k!} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k-1} m^{2n} \right). \quad (4)$$

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n C_{n+1}^{k+1} B_{n-k}. \quad (5)$$

Для вычисления числа Эйлера E_n можно воспользоваться формулой 5.

$$E_n = \frac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2n+1}}. \quad (5)$$

2.4 Требования

В работе должны вводиться с клавиатуры следующие переменные: точность ε , границы промежутка вычисления x_{start} и x_{end} , шаг Δx и значение x_{ideal} для точного расчёта.

В результате работы на экране пользователя должно быть выведена таблица с вычислением значения заданной функции на отрезке $[x_{start}, x_{end}]$ для заданной точности ε (см. табл. 1).

Далее пользователю должно быть предложено ввести значение x_{ideal} , и после этого выведена таблица с вычислением значения функции для заданного x_{ideal} для различных значений точности $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \dots 10^{-7}\}$ (см. табл. 2).

Таблица 1 – Форма вывода данных для разных x

x	$f(x)$	$F(x)$	δ
x_{start}			
$\vdots$			
x_{end}			

Таблица 2 – Форма вывода данных для разной точности

ε	$f(x_{ideal})$	$F(x_{ideal})$	δ
0,1			
0,01			
$\vdots$			
0,0000001			

3 Отчёт

Отчёт должен содержать следующие разделы: титульный лист, описание программы, задание, текст программы, примеры работы программы, выводы.

Приложение А

Рег $\sum_k (-1)^{k+1} \cdot \frac{2^{2k-1} x^{2k}}{(2k)!}$

Для четвертой работы требуется посчитать приращение ряда, пример рассмотрен далее

Пример 1

1) Сначала необходимо посчитать: $Z_n; Z_{n-1}; \frac{Z_n}{Z_{n-1}}$

$$Z_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$$

$$Z_{n-1} = (-1)^n \cdot \frac{2^{2n-3} x^{2n-2}}{(2(n-1))!}$$

$$\frac{Z_n}{Z_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2n-1} x^{2n} \cdot (2(n-1))!}{(-1)^n \cdot (2n)! \cdot 2^{2n-3} x^{2n-2}} = \boxed{-\frac{x^2 \cdot 4}{2n(2n-1)}}$$

приращение

2) Теперь посчитаем первый и второй член ряда

$$Z_1 = (-1)^{1+1} \cdot \frac{2^{2 \cdot 1 - 1} x^{2 \cdot 1}}{2 \cdot 1!} = \frac{2 \cdot x^2}{2 \cdot 1} = \boxed{x^2}$$

первый член ряда

$$Z_2 = (-1)^{2+1} \cdot \frac{2^{2 \cdot 2 - 1} x^{2 \cdot 2}}{4!} = \boxed{-\frac{x^4}{3}}$$

второй член ряда

3) Теперь посчитаем второй член ряда через приращение, для этого первый член ряда умножим на приращение, поставив вместо n двойку (n=2)

$$Z_2 = \boxed{x^2} \cdot \left(-\frac{x^2 \cdot 4}{2 \cdot 2(4-1)} \right) = \boxed{-\frac{x^4}{3}}$$

$$Z_2 = Z_2$$

Совпали, если все правильно посчитано, то так и должно быть, если нет, то в предыдущем шаге/ах ошибка/и

4) Теперь посчитаем третий член ряда, через ряд и с помощью приращения

$$Z_3 = (-1)^{3+1} \cdot \frac{2^5 x^6}{6!}$$

$$Z_3 = \boxed{-\frac{x^4}{3}} \cdot \left(-\frac{x^2 \cdot 4}{2 \cdot 3(6-1)} \right) = \frac{x^6 \cdot 2^2 \cdot 2^3}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3} = \frac{x^6 \cdot 2^5}{6!}$$

умножить

5) Некоторые замечательные свойства:

$$Z_{n+1} < Z_n$$

$$Z_{n+1} < \epsilon_{ps}$$

+ проверьте ряд на сходимость

Рисунок 1 – пример расчета простого ряда через приращение

Пример 2

$$\sum_k \frac{x^k}{(2k)!}$$

Req

1) Z_n ; Z_{n-1} ; $\frac{Z_n}{Z_{n-1}}$

$$Z_n = \frac{x^n}{(2n)!} ; Z_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{(2n-2)!}$$

$$\frac{Z_n}{Z_{n-1}} = \frac{x^n \cdot (2n-2)!}{(2n)! \cdot x^{n-1}} = \boxed{\frac{x}{(2n) \cdot (2n-1)}}$$

$(2n) \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)!$

2) $Z_1 = \frac{x^1}{2!} = \boxed{\frac{x}{2}}$

$Z_2 = \frac{x^2}{4!} = \boxed{\frac{x^2}{24}}$

$Z_2 = Z_2$
//

3) $Z_2 = \frac{\boxed{\frac{x}{2}} \cdot x}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \boxed{\frac{x^2}{24}}$

4) $Z_3 = \frac{x^3}{6!}$

$Z_3 = \frac{x^2 \cdot x}{24 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \boxed{\frac{x^3}{6!}}$

$Z_3 = Z_3$
good

Рисунок 2 – пример № 2 расчета ряда через приращение.

Приложение Б

$$\sin 3(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{3^{2n+1} - 3}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$Z_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{3^{2n+1} - 3}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$Z_{n-1} = (-1)^n \cdot \frac{3^{2n-1} - 3}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{Z_n}{Z_{n-1}} &= \frac{(-1)^{n+1} \cdot \frac{3^{2n+1} - 3}{(2n+1)!} x^{2n+1}}{(-1)^n \cdot \frac{3^{2n-1} - 3}{(2n-1)!} x^{2n-1}} = \\ &= (-1) \frac{\frac{3^{2n+1} - 3}{(2n+1)(2n)(2n-1)!} x^{2n-1} \cdot x^2}{\frac{3^{2n-1} - 3}{(2n-1)!} x^{2n-1}} = \\ &= - \frac{\frac{3^{2n+1} - 3}{(2n+1)(2n)} \cdot x^2}{\frac{3^{2n-1} - 3}{(2n-1)!}} = \\ &= - \frac{(3^{2n+1} - 3)x^2}{(2n+1)(2n)(3^{2n-1} - 3)} = K \\ &\quad 3^{2n-1} = A_n \end{aligned}$$

$$K_z = -\frac{(A \cdot 9 - 3)x^2}{(2n+1)(2n)(A-3)}; K_A = \frac{3^{2n+1}}{3^{2n-1}} = 9$$

$$N=1$$

$$Z_1 = - \cdot \frac{24}{6} x^3 \quad A_1=3$$

$$Z_2 = Z_1 * K = - \cdot \frac{24}{6} x^3 * - \frac{(A \cdot 9 - 3)x^2}{(2n+1)(2n)(A-3)}$$

$$A_2 = A_1 * K_A = 27$$