Глава 1

Множества, графики, соответствия, отношения

1.1. Операции над множествами

Запись $x \in A$ означает, что элемент x *принадлежит* множеству A. Если x не является элементом множеств A, то пишут $x \notin A$ или $\overline{x \in A}$. Два множества A и B считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Будем писать $A = B$, если A и B равны и $A \neq B$ в противном случае.

Множество называется *пустым* и обозначается $\varnothing$, если оно не содержит элементов.

Будем говорить, множество A *включено* в множество B, и писать $A \subseteq B$, если каждый элемент множества A является элементом множества B. В этом случае A называется *подмножеством* множества B. Считается, что для любого A справедливо включение $\varnothing \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то будем писать $A \subset B$ и говорить, что множество A *строго включено* во множество B.

Семейство всех подмножеств данного множества A обозначается $P(A)$.

Мощностью конечного множества A будем называть число его элементов. Мощность конечного множества A обозначается $|A|$.

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Если все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого *универсального* множества U, то разность $U \setminus A$ называется *дополнением* A и обозначается $\overline{A}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Будем говорить, что множества A и B находятся *в общем положении*, и писать A ↀ B, если существуют такие элементы a, b, c, что $a \in A$ и $a \notin B$, $b \in$ В и $b \notin B$, $c \in A$ и $c \in B$.

Задание 1.1.1

1. Справедливо ли в общем случае утверждение: если $A \alpha B$ и $B \beta C$ и $C \gamma D$, то $A \delta D$?

2. Может ли при некоторых A, B, C и D выполниться набор условий: $A \alpha B$ и $B \beta C$ и $C \gamma D$ и $A \delta D$?

Таблица 1.1.1

№	α	β	γ	δ
1	$\subseteq$	$\in$	$\subset$	$\subseteq$
2	$\in$	$\in$	$\subseteq$	$\in$
3	$\subseteq$	$\subseteq$	$\in$	$\in$
4	$\in$	$\subseteq$	$\in$	$\subseteq$
5	$\subset$	$\subset$	$\in$	$\subseteq$
6	$\in$	$\in$	$\in$	$\subseteq$
7	$\in$	$\subset$	$\subseteq$	$\subset$
8	$\in$	$\in$	$\subseteq$	$\subseteq$
9	$\in$	$\subseteq$	$\in$	$\subset$
10	$\in$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$
11	$\in$	$\in$	$\subset$	$\in$
12	$\subseteq$	$\in$	$\subseteq$	$\in$
13	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\in$
14	$\subseteq$	$\in$	$\in$	$\subseteq$
15	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
16	$\subseteq$	$\subseteq$	$\in$	$\subset$
17	$\subset$	$\in$	$\subset$	$\in$
18	$\in$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\in$
19	$\subset$	$\subseteq$	$\subseteq$	$\subseteq$
20	$\in$	$\in$	$\subset$	$\in$
21	$\in$	$\subset$	$\subset$	$\subset$
22	$\subset$	$\subset$	$\in$	$\in$
23	$\in$	$\in$	$\subset$	$\subset$
24	$\subset$	$\subset$	$\subset$	$\in$
25	$\subset$	$\in$	$\in$	$\subset$
26	$\in$	$\subset$	$\in$	$\in$
27	$\in$	$\subset$	$\subset$	$\in$
28	$\subset$	$\in$	$\subseteq$	$\subset$
29	$\in$	$\subset$	$\subseteq$	$\subset$
30	$\subset$	$\subseteq$	$\in$	$\subset$

Примеры решения задания 1.1.1

Пример 1.

а) Справедливо ли в общем случае утверждение :
если $A \subset B$, $B \subseteq C$ и $C \subset D$, то $A \subseteq D$?

Пусть $x \in A$. Так как $A \subset B$, из определения включения следует, что $x \in B$. Так как $x \in B$ и $B \subseteq C$, то $x \in C$. Так как $x \in C$ и $C \subset D$, то $x \in D$. Итак, из того, что произвольный элемент $x \in A$ следует, что $x \in D$. На основании определения заключаем, что $A \subseteq D$, то есть данное утверждение верно.

б) Может при некоторых A, B, C и D выполняться набор условий: $A \subset B$, $B \subseteq C$ и $C \subset D$, и $A \subseteq D$?

Да, может. Это следует из справедливости утверждения в пункте а).

Примером могут служить множества $A = \{x\}$, $B = C = \{x, y\}$, $D = \{x, y, z\}$. Тогда $\{x\} \subset \{x, y\}$, $\{x, y\} \subseteq \{x, y\}$, $\{x, y\} \subset \{x, y, z\}$ и $\{x\} \subseteq \{x, y, z\}$.

Пример 2.

а*) Справедливо ли в общем случае утверждение:*
если $A \subset B$, $B \in C$ и $C \in D$, то $A \subseteq D$?

Пусть $A = \{x\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{\{x, y\}, z\}$, $D = \{\{\{x, y\}, z\}, w\}$.

Тогда $\{x\} \subset \{x, y\}$ и $\{x, y\} \in \{\{x, y\}, z\} \in \{\{\{x, y\}, z\}, w\}$.

Но в то же время неверно, что $\{x\} \subset \{\{\{x, y\}, z\}, w\}$, так как единственный элемент x множества A не является элементом множества D, состоящего из элементов $\{\{x, y\}, z\}$ и w. Итак, утверждение из нашего примера 2а) в общем случае неверно.

б) Может ли при некоторых A, B, C и D выполняться набор условий: $A \subset B$, $B \in C$, $C \in D$ и $A \subseteq D$?

Да, может. Например, $A = \varnothing$, $B = \{x\}$, $C = \{\{x\}, y\}$, $D = \{\{\{x\}, y\}, z\}$.

Тогда $\varnothing \subset \{x\}$, $\{x\} \in \{\{x\}, y\}$, $\{\{x\}, y\} \in \{\{\{x\}, y\}, z\}$ и в то же время $\varnothing \subseteq \{\{\{x\}, y\}, z\}$.

Задание 1.1.2

Для универсального множества $U = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$, множества A, заданного списком, и для B, являющегося множеством корней уравнения $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$.

1. Найти множества: $A \cup B$, $B \cap A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \vartriangle B$, $\overline{B}$, $C = (A \vartriangle B) \vartriangle A$.

2. Выяснить, какая из пяти возможностей выполнена для множеств A и C: $A \subset C$, или $C \subset A$, или $A = C$, или $A \cap C = \varnothing$, или $A \oplus B$.

3. Найти $P(B)$ и $|P(B)|$.

Таблица 1.1.2

№	A	α	β	γ	δ
1	−1,1,4,3	1	−12	−28	−16
2	−1,1,2,3	7	13	−3	−18
3	−1,1,3,4	−2	−12	18	27
4	−1,1,2,3	0	−17	36	−20
5	−2,1,3,4	0	−11	−18	−8
6	−1,1,4,5	3	−9	−23	−12
7	−3,−1,1,2	−2	−7	20	−12
8	−4,−1,1,2	0	−11	18	−8
9	−2,−1,3,5	3	−7	−15	18
10	−3,−1,1,2	5	1	−21	−18
11	−2,2,3,4	2	−7	−20	−12
12	−3,−1,2,4	−2	−15	−4	20
13	−1,−3,2,3	−5	1	21	−18
14	−4,−3,1,2	1	−7	−13	−6
15	−5,−1,1,3	6	0	−22	15

№	A	α	β	γ	δ
16	−1,1,2,3	−3	−3	7	6
17	−1,1,3,2	−7	12	4	−16
18	−2, −1,2,4	−1	−7	13	−6
19	−1,1,2,3	−4	3	4	−4
20	−1,1,2,3	−5	−3	13	10
21	−3,5,3,4	−11	39	−49	20
22	1,2,3,4	−6	8	6	9
23	−1,−2,1,2	−3	−2	12	−8
24	−1,2,5,4	0	−9	−4	12
25	−1,−2,−3,1	−4	−10	28	−15
26	1,4,2,3	3	−3	−7	6
27	−1,1,2,4	1	−12	4	16
28	−1,1,2,3	−2	−4	2	3
29	−1,4,2,3	−4	−2	12	9
30	−1,2,3,4	3	1	−3	−2

Пример решения задания 1.1.2

Решим задание 1.1.2 для $A=\{1,-2,3,-4\}$ *и уравнения*

$x^4-7x^3+6x^2+32x-32=0$.

Сначала найдём множество B корней данного уравнения. Подбором устанавливаем, что корнем исходного многочлена $x^4-7x^3+6x^2+32x-32$ является 1; поделив этот многочлен на $x-1$, получим многочлен x^3-6x^2+32.

Также подбором устанавливаем, что –2 является корнем многочлена x^3-6x^2+32 и делим этот многочлен на $x+2$. Получим многочлен $x^2-8x+16$. Его корни совпадают и равны 4.

Итак, множество B найдено, $B=\{-2,1,4\}$. Теперь решаем пункты 1—3 данного задания.

1. $A\cup B=\{-4,-2,1,3,4\}$, $B\cap A=\{-2,1\}$,

$A\setminus B=\{-4,3\}$, $B\setminus A=\{4\}$,

$A\vartriangle B=\{-4,3,4\}$, $\overline{B}=\{-5,-4,-3,-1,2,3,5\}$,

$C=(A\vartriangle B)\vartriangle A=\{-4,3,4\}\vartriangle\{1,-2,3,-4\}=\{4\}\cup\{1,-2\}=\{-2,1,4\}$.

2. Так как $-4\in A$ и $-4\notin C$, $4\in C$ и $4\notin A$, $1\in A\cap C$, значит, A ↀ B.

3. $P(B)=\{\varnothing,\{-2\},\{1\},\{4\},\{-2,1\},\{-2,4\},\{1,4\},\{-2,1,4\}\}$.

Как видим, $P(B)$ содержит 8 элементов, т. е. $|P(B)|=8$.

Задание 1.1.3

Пусть A, B и C — множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям α, β и γ соответственно. Изобразите в системе координат $x0y$ множество D, полученное из множеств A, B и C по формуле δ.

Таблица 1.1.3

№	Условия		№	Условия	
1	α	$x^2+y^2-6y\le 0$	2	α	$y-\frac{4}{x}\le 0$
	β	$y+x^2+1\ge 0$		β	$y^2+x^2-25\le 0$
	γ	$\lvert x\rvert\le 6;\quad -3\le y\le -2$		γ	$\lvert x\rvert\le 1;\quad \lvert y\rvert\le 1$
	δ	$(A\cup B)\Delta C$		δ	$(A\cap B)\setminus C$
3	α	$0\le y\le\sqrt{x}$	4	α	$\lvert x\rvert\le 5;\quad \lvert y\rvert\le 1$
	β	$2\le x\le 6;\quad -3\le y\le 1$		β	$\lvert x\rvert\le 1;\quad \lvert y\rvert\le 5$
	γ	$x^2+y^2-18x\le 0$		γ	$y^2+x^2-16\le 0$
	δ	$(A\cup B)\setminus C$		δ	$A\cup B\cup C$
5	α	$y-x^2-1\le 0$	6	α	$y-\frac{4}{x}\le 0$
	β	$y-x^2+3\ge 0$		β	$y+\frac{4}{x}\ge 0$
	γ	$x>0$		γ	$y^2+x^2-25\le 0$
	δ	$(A\cap B)\setminus C$		δ	$(A\cap B)\setminus C$
7	α	$x^2+y^2-4x\le 0$	8	α	$y-x^4-1\le 0$
	β	$x^2+y^2+4x\le 0$		β	$0\le y\le\sqrt{x}$
	γ	$\lvert x\rvert\le 2;\quad \lvert y\rvert\le 2$		γ	$x^2+y^2-4x\le 0$
	δ	$(A\cup B)\Delta C$		δ	$(A\cap B)\Delta C$
9	α	$y+x^2-5\le 0$	10	α	$y^2+x^2-9\le 0$
	β	$x^2+y^2-6y\le 0$		β	$\lvert y\rvert\le 4;\quad -6\le x\le 1$
	γ	$x>0$		γ	$y<0$
	δ	$A\setminus(B\cup C)$		δ	$(A\Delta B)\setminus C$

Таблица 1.1.3 (продолжение)

№	Условия		№	Условия	
11	α	$x-y>0$	12	α	$y+x^2-6\le 0$
	β	$x+y<0$		β	$\|x\|>2;\quad \|y\|>2$
	γ	$x^2+y^2\le 4$		γ	$x<y$
	δ	$(A\,\Delta\, B)\cup C$		δ	$A\cap B\cap C$
13	α	$y\le\sin x$	14	α	$x<y+3$
	β	$y>0{,}5$		β	$x>y-3$
	γ	$y>-2$		γ	$\|x\|<5;\quad \|y\|<2$
	δ	$(A\,\Delta\, B)\cap C$		δ	$(A\cap B)\backslash C$
15	α	$y-\dfrac{5}{x}\le 0$	16	α	$x^2+y^2+6y\le 0$
	β	$y+\dfrac{2}{x}\ge 0$		β	$y+x^2+1\ge 0$
	γ	$y\ge 1$		γ	$\|x\|\le 4;\quad -4\le y\le -2$
	δ	$(A\cap B)\backslash C$		δ	$A\cap(B\backslash C)$
17	α	$x^2+y^2-25\le 0$	18	α	$0\le y\le\sqrt{x}$
	β	$y-\dfrac{4}{x}\le 0$		β	$2\le x\le 6;\quad -3\le y\le 1$
	γ	$x^2+y^2-4\le 0$		γ	$x^2+y^2-18x\le 0$
	δ	$(A\backslash B)\cup C$		δ	$(A\,\Delta\, B)\,\Delta\, C$
19	α	$\|x\|\le 5;\quad \|y\|\le 1$	20	α	$x^2-y-2\ge 0$
	β	$\|x\|\le 1;\quad \|y\|\le 5$		β	$x^2-y+4\ge 0$
	γ	$x^2+y^2\le 16$		γ	$y>1$
	δ	$(A\cup B)\,\Delta\, C$		δ	$(A\cap B)\backslash C$

Таблица 1.1.3 (окончание)

№	Условия		№	Условия	
21	α	$\lvert x\rvert\le 5;\quad \lvert y\rvert\le 5$	22	α	$y+x^2-5\le 0$
	β	$y+\dfrac{4}{x}\ge 4$		β	$x^2+y^2-6y\le 0$
	γ	$y-\dfrac{4}{x}\le 0$		γ	$y\ge 0$
	δ	$A\setminus(B\cap C)$		δ	$(A\Delta B)\cap C$
23	α	$x^2-y\ge 0$	24	α	$y+x^2-6\le 0$
	β	$x+y\ge 0$		β	$x^2+y^2\le 4$
	γ	$\lvert x\rvert\le 2;\quad \lvert y\rvert\le 2$		γ	$x<y$
	δ	$(A\Delta B)\cup C$		δ	$(A\setminus B)\cap C$
25	α	$\lvert x\rvert\le 4;\quad \lvert y\rvert\le 4$	26	α	$x\ge\cos y$
	β	$x^2+y^2\le 25$		β	$x<0{,}5$
	γ	$y>0$		γ	$y>0$
	δ	$A\cap(B\setminus C)$		δ	$(A\Delta B)\cap C$
27	α	$y-x^2+4\ge 0$	28	α	$y-x^2-1\le 0$
	β	$\lvert x\rvert\le 2;\quad -4\le y\le 0$		β	$y-x^2+3\ge 0$
	γ	$x^2+y^2\le 1$		γ	$x^2+y^2\le 3$
	δ	$(A\cup B)\setminus C$		δ	$(A\cap B)\setminus C$
29	α	$y-\dfrac{4}{x}\le 0$	30	α	$2\le x\le 6;\quad -3\le y\le 1$
	β	$x^2+y^2-25\le 0$		β	$0\le y\le\sqrt{x}$
	γ	$\lvert x\rvert\le 4;\quad \lvert y\rvert\le 3$		γ	$x^2-12x+y^2\le 0$
	δ	$A\cap(B\setminus C)$		δ	$(A\Delta B)\Delta C$

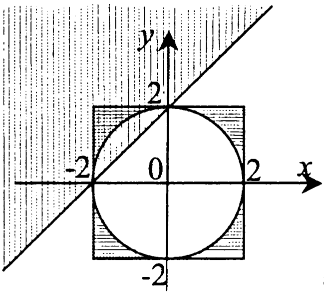
Пример решения задания 1.1.3

Пусть A, B и C — множества *точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям* $x+2>y$, $x^2+y^2\le 4$ *и* $|x|\le 2;$ $|y|\le 2$ *соответственно. Изобразите в системе координат* $x0y$ *множество* D, *полученное из множеств* A, B *и* C *по формуле* $A\setminus(B\Delta C)$.

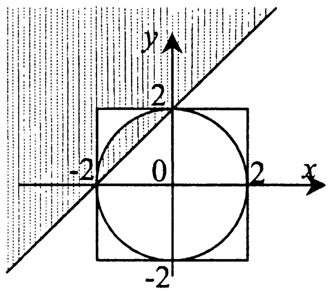
Множество B представляет из себя множество точек круга радиуса 2 с центром в начале координат, включающего границу, A – множество точек плоскости, расположенных выше и на прямой $y=x+2$, и C — множество точек, лежащих внутри и на границе квадрата $|x|\le 2;$ $|y|\le 2$.

Отметим горизонтальной штриховкой множество $B\Delta C$, а вертикальной — множество A (рис. 1.1.3, а).

Удалив из области, помеченной вертикальной штриховкой, точки области, помеченной горизонтальной штриховкой, мы получим множество точек, образующих D. Изобразим результат, отметив точки множества D вертикальной штриховкой (рис. 1.1.3, б).



а



б

Рис. 1.1.3

Задание 1.1.4

1. Существуют ли множества A, B, X такие, что выполняется набор условий α?

2. Существуют ли множества N, E, P такие, что выполняется набор условий β?

Таблица 1.1.4

№	α	β
1	$X \setminus B = A \setminus B = \overline{A \cup B} = \varnothing,\ \overline{B} \neq \varnothing$	$N \setminus E = N \setminus P = \varnothing,\ E \setminus P \neq \varnothing$
2	$B = \overline{A \cup B} = X \setminus B = \varnothing,\ \overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$	$E \setminus P = N \setminus E = \varnothing,\ N \setminus P \neq \varnothing$
3	$B \setminus A = A \cap X = \varnothing,\ B \cap X \neq \varnothing$	$N \cap E = \overline{E \cup N} = \overline{P} = \varnothing,\ N \neq \varnothing$
4	$B \setminus X = X \setminus A = \varnothing,\ B \neq \varnothing$	$P \setminus E = N \setminus E = \varnothing,\ (P \cap E) \setminus N \neq \varnothing$
5	$A \cap B = \overline{A \cup X} = \varnothing,\ B \setminus X \neq \varnothing$	$P \setminus N = E = N \setminus P = \varnothing,\ N \neq \varnothing$
6	$A \setminus X = B \setminus A = X \setminus A = \varnothing,\ B \neq \varnothing$	$P \cap N = (N \setminus P) \setminus E = \varnothing,\ N \setminus E \neq \varnothing$
7	$A \setminus X = B \setminus A = \overline{A} = \varnothing,\ \overline{X} \neq \varnothing$	$N \cup E = E \cap P = \varnothing,\ P \setminus N \neq \varnothing$
8	$A \setminus X = (B \setminus A) \cap X = \varnothing,\ X \setminus A \neq \varnothing$	$P \cap N = E \setminus P = P \setminus N = \varnothing,\ E \neq \varnothing$
9	$X \setminus B = (B \setminus A) \cap X = \varnothing,\ X \setminus A \neq \varnothing$	$E \setminus N = N \cap E = N \setminus P = \varnothing,\ N \neq \varnothing$
10	$\overline{A} = X \setminus B = B \setminus X = \varnothing,\ B \neq \varnothing$	$P \setminus N = \overline{P \cup E} = \varnothing,\ \overline{N} \cap \overline{E} \neq \varnothing$
11	$(X \setminus A) \setminus B = B \setminus A = \overline{X \cup B} = \varnothing,\ \overline{A} \neq \varnothing$	$N \setminus E = E \setminus P = P \setminus E = \varnothing,\ E \setminus N \neq \varnothing$
12	$B \setminus X = A \cap X = \varnothing, B \neq \varnothing$	$P \cap N \cap E = N \setminus P = \varnothing,\ N \cap E \neq \varnothing$
13	$A = X = (B \setminus A) \setminus X = \varnothing, B \neq \varnothing$	$N \setminus P = E \cap P = \varnothing,\ E \neq \varnothing$
14	$A \cap X = B \setminus A = \varnothing,\ X \neq \varnothing$	$P \setminus E = N \setminus E = \overline{N \cup E} = \varnothing,\ \overline{E} \neq \varnothing$
15	$A \setminus B = X \setminus A = \varnothing,\ X \setminus B \neq \varnothing$	$P \setminus N = N \setminus P = P \setminus E = \varnothing,\ \overline{E} \neq \varnothing$
16	$A \cap X = \overline{X} \cap \overline{A} = B \setminus A = \varnothing,\ A \cap B \neq \varnothing$	$N \setminus P = (N \cap P) \setminus E = \varnothing,\ N \setminus E \neq \varnothing$
17	$B \cap X = \overline{A \cup B} = \varnothing,\ X \setminus A \neq \varnothing$	$P \setminus E = N \setminus E = N \cap P = \varnothing,\ P \neq \varnothing$
18	$B \setminus A = B \setminus X = X \setminus B = \varnothing,\ B \neq \varnothing$	$P \setminus N = N \cap P = \varnothing,\ P \cap E \neq \varnothing$
19	$X \cap B = (X \setminus B) \setminus A = \varnothing,\ X \setminus A \neq \varnothing$	$E \Delta P = N \cap E = \varnothing,\ P \setminus N \neq \varnothing$
20	$A \cap B = X \setminus A = \varnothing,\ B \setminus A \neq \varnothing$	$N \setminus P = E \setminus N = \overline{N} = \varnothing,\ \overline{P} \neq \varnothing$
21	$X \setminus B = A \setminus X = \varnothing,\ A \setminus B \neq \varnothing$	$E = \overline{N \cup E} = P \setminus E = \varnothing,\ \overline{N} \cap \overline{E} \neq \varnothing$
22	$A \setminus B = A \setminus X = \varnothing,\ X \setminus B \neq \varnothing$	$E \setminus P = N \setminus P = \overline{N \cup P} = \varnothing,\ \overline{P} \neq \varnothing$

Таблица 1.1.4 *(окончание)*

№	α	β
23	$B \setminus X = A \setminus X = \varnothing,\ (B \cap X) \setminus A \neq \varnothing$	$N \setminus E = E \setminus P = \varnothing,\ N \neq \varnothing$
24	$B \setminus A = X = A \setminus B = \varnothing,\ A \neq \varnothing$	$P \cap N = \overline{P \cup E} = \varnothing,\ N \setminus E \neq \varnothing$
25	$B \cap A = (A \setminus B) \setminus X = \varnothing,\ A \setminus X \neq \varnothing$	$P \setminus E = N \setminus P = E \setminus P = \varnothing,\ N \neq \varnothing$
26	$A \cup X = X \cap B = \varnothing,\ B \setminus A \neq \varnothing$	$P \setminus E = N \setminus P = \overline{P} = \varnothing,\ \overline{E} \neq \varnothing$
27	$B \cap A = X \setminus B = B \setminus A = \varnothing,\ X \neq \varnothing$	$P \setminus E = (N \setminus P) \cap E = \varnothing,\ E \setminus P \neq \varnothing$
28	$X \setminus A = A \cap X = A \setminus B = \varnothing,\ A \neq \varnothing$	$E \setminus N = (N \setminus P) \cap E = \varnothing,\ E \setminus P \neq \varnothing$
29	$B \setminus A = \overline{B \cup X} = \varnothing,\ \overline{A} \cap \overline{X} \neq \varnothing$	$\overline{P} = E \setminus N = N \setminus E = \varnothing,\ N \neq \varnothing$
30	$A \cap X = \overline{B \cup A} = \overline{B} = \varnothing,\ A \neq \varnothing$	$N \setminus P = P \cap E = \varnothing,\ N \cap E \neq \varnothing$

Пример решения задания 1.1.4

1. Существуют ли множества A, B, X такие, что выполняется набор условий: $\overline{A \cup B} = \varnothing,\quad X \vartriangle A = \varnothing,\quad B \setminus A \neq \varnothing$?

Изобразим множества A, B, X в виде прямоугольников, расположенных на плоскости в общем положении, и поставим в каждой области, на которые плоскость разбита прямоугольниками, по одному символу: символ 4, например, обозначает список всех элементов, попавших во множества A и B, но не попавших в X, и т. д. Теперь составим множества A, B, X и универсальное множество U (рис. 1.1.4):

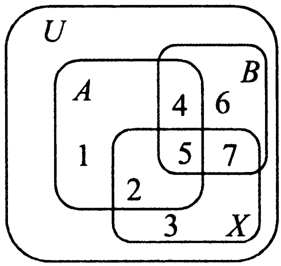


Рис. 1.1.4

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\quad A = \{1,2,4,5\},\quad B = \{4,5,6,7\},\quad X = \{2,3,5,7\}.$$

Изменим множества A, B, X так, чтобы выполнились условия нашего задания.

Из того, что $\overline{A \cup B} = \varnothing$, следует, что множество $U \setminus (A \cup B)$ не должно содержать элементов, т. е. из U удаляем **8** и 3.

Чтобы выполнилось условие $X \Delta A = \varnothing$, нужно удалить элементы списков 1, 4, 7. Тогда получится, что множества A, B, X и U имеют следующий вид: $A = \{2,5\} = X$, $B = \{5,6\}$, $U = \{2,5,6\}$. Заметим, что для этих множеств $B \setminus A = \{6\} \neq \varnothing$.

Если под символами 2, 5 и 6 будем понимать соответствующие числа, то мы получим конкретный пример множеств A, B, X, для которых выполнены все условия заданного набора требований.

2. Существуют ли множества N, E, P такие, что выполняется набор условий: $E \setminus N = P \setminus E = \varnothing$, $P \setminus N \neq \varnothing$?

Попробуем построить множества N, E, P так же, как мы это делали в п. 1. Пусть $N = \{1,2,4,5\}$, $E = \{4,5,6,7\}$, $P = \{2,3,5,7\}$. Чтобы выполнилось условие $E \setminus N = \varnothing$, удаляем элементы списков 6, 7. Для выполнения условия $P \setminus E = \varnothing$ удаляем элементы из списков 2, 3. Но тогда множество $P \setminus N$ не будет содержать элементов. Итак, мы показали, что этот набор условий противоречив, т. е. не существует множеств N, E, P таких, что выполнены условия упражнения.

Задание 1.1.5

Выяснить взаимное расположение множеств D, E, F, если A, B, X — произвольные подмножества универсального множества U.

Таблица 1.1.5

1	**D**	$B \cup \overline{X}$	2	**D**	$(A \cap B) \cup (A \setminus X) \cup \overline{B \cup X}$
	E	$(B \cap X) \cup (\overline{X} \setminus (A \cap B))$		**E**	$A \cup \overline{B} \cup X$
	F	$(\overline{B} \cap \overline{X}) \cup (B \cap (X \setminus A))$		**F**	$(\overline{B} \cap \overline{X}) \cup (B \cap A)$
3	**D**	$(A \Delta X) \cup (B \cap A)$	4	**D**	$(B \cap X) \cup \overline{A \cup X}$
	E	$A \cup X$		**E**	$((B \cup \overline{X}) \setminus A) \cup (X \cap B)$
	F	$(A \setminus X) \cup (B \cap X) \cup (X \setminus A)$		**F**	$\overline{A} \cup X$

***Таблица 1.1.5** (продолжение)*

5	***D***	$(X \cap B) \cup (A \setminus B) \cup \overline{A \cup X}$	**6**	***D***	$\overline{A \cup B} \cup (X \cap B)$
	E	$A \cup B \cup \overline{X}$		***E***	$(\overline{B} \cap \overline{A}) \cup (X \cap (B \setminus A))$
	F	$(A \Delta B) \cup (X \cap A) \cup \overline{X \cup B}$		***F***	$\overline{A} \cup X$
7	***D***	$\overline{A \Delta X} \cup (X \setminus B)$	**8**	***D***	$(A \setminus X) \cup \overline{A \cup B}$
	E	$(\overline{B \cap X} \setminus A) \cup (X \cap A)$		***E***	$(\overline{B} \cap \overline{A}) \cup ((A \setminus B) \setminus X)$
	F	$A \cup \overline{X} \cup \overline{B}$		***F***	$(A \setminus X) \cup \overline{B}$
9	***D***	$\overline{A \Delta X} \cup (A \cap B)$	**10**	***D***	$(\overline{B \cap X} \setminus A) \cup (X \setminus B)$
	E	$(A \cap X) \cup ((A \setminus B) \setminus X)$		***E***	$\overline{A \cup X} \cup (X \cap \overline{B})$
	F	$A \cup \overline{X}$		***F***	$\overline{A} \cup X$
11	***D***	$(A \Delta B) \cup (X \setminus A)$	**12**	***D***	$\overline{A \Delta X} \cup (X \cap (B \setminus A))$
	E	$((A \cup X) \setminus B) \cup ((X \cup B) \setminus A)$		***E***	$(A \cap B) \cup ((X \setminus B) \setminus A)$
	F	$\overline{A} \cup (A \setminus B)$		***F***	$\overline{A} \cup B$
13	**D**	$\overline{A \Delta X} \cup (X \setminus B)$	**14**	***D***	$(A \Delta B) \cup (X \cap B)$
	E	$\overline{A} \cup X$		***E***	$A \cup B$
	F	$(\overline{A} \cap \overline{X}) \cup (X \cap (A \setminus B))$		***F***	$(B \setminus A) \cup (A \cap X) \cup (A \setminus B)$
15	***D***	$\overline{A \cup B} \cup (X \cap A)$	**16**	***D***	$(X \cap B) \cup (B \setminus A) \cup \overline{A \cup X}$
	E	$A \cup \overline{B}$		***E***	$(\overline{A} \cap \overline{X}) \cup (X \cap B)$
	F	$((X \cup \overline{A}) \setminus B) \cup (X \cap A)$		***F***	$A \cup \overline{X} \cup B$
17	***D***	$(A \cap X) \cup (B \setminus X) \cup \overline{A \cup B}$	**18**	***D***	$(A \cap X) \cup \overline{B \cup X}$
	E	$(X \Delta B) \cup (B \cap A) \cup \overline{X \cup B}$		***E***	$A \cup \overline{B}$
	F	$X \cup \overline{A} \cup B$		***F***	$(\overline{B} \cap \overline{X}) \cup (A \cap (X \setminus B))$

***Таблица 1.1.5** (окончание)*

19	***D***	$\overline{A\triangle B}\cup(A\setminus X)$	**20**	***D***	$\overline{X\cup B}\cup(B\setminus A)$
	E	$B\cup\overline{X}\cup\overline{A}$		***E***	$(B\setminus A)\cup\overline{X}$
	F	$(\overline{A\cap X}\setminus B)\cup(A\cap B)$		***F***	$(\overline{B}\cap\overline{X})\cup((B\setminus X)\setminus A)$
21	***D***	$\overline{A}\cup B$	**22**	***D***	$\overline{A\cup B}\cup(\overline{X}\cap A)$
	E	$(A\cap B)\cup((B\setminus X)\setminus A)$		***E***	$A\cup(A\setminus B)$
	F	$\overline{A\triangle B}\cup(X\cap B)$		***F***	$(\overline{A\cap X}\setminus B)\cup(A\setminus X)$
23	***D***	$(B\setminus X)\cup\overline{B}$	**24**	***D***	$\overline{B\triangle X}\cup(A\cap(X\setminus B))$
	E	$(B\triangle X)\cup(A\setminus B)$		***E***	$\overline{B}\cup X$
	F	$((B\cup A)\setminus X)\cup((X\cup A)\setminus B)$		***F***	$(B\cap X)\cup((A\setminus X)\setminus B)$
25	***D***	$B\cup X$	**26**	***D***	$((A\setminus B)\cap X)\cup\overline{A\cup X}$
	E	$((X\triangle B)\cap B)\cup(X\cap(A\cup B))$		***E***	$(A\cap X)\cup(\overline{A}\setminus(X\cap B))$
	F	$(B\cap A)\cup(B\cap X)$		***F***	$\overline{A}\cup X$
27	***D***	$(X\cap B)\cup(B\setminus A)\cup\overline{A\cup X}$	**28**	***D***	$\overline{A\cup B}\cup(X\cap A)$
	E	$A\cup B\cup\overline{X}$		***E***	$((X\cup\overline{A})\setminus B)\cup(X\cap A)$
	F	$(X\cap B)\cup\overline{X\cup A}$		***F***	$\overline{B}\cup A$
29	***D***	$(A\triangle B)\cup(X\cap B)$	**30**	***D***	$(A\cap X)\cup\overline{X\cup B}$
	E	$B\cup A$		***E***	$(\overline{B}\cap\overline{X})\cup(A\cap(X\setminus B))$
	F	$(A\setminus B)\cup(A\cap X)\cup(B\setminus A)$		***F***	$\overline{B}\cup A$

Пример решения задания 1.1.5

Выяснить взаимное расположение множеств:

$D=(B\setminus X)\cup(A\setminus B)$, $E=(A\setminus(B\setminus X))$, $F=A\cup B$, *если* A, B, X *— произвольные подмножества универсального множества* U .

Возьмём множества A, B, X, находящиеся в общем положении:

$A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $X = \{2,3,5,7\}$. В нашем случае, как и при решении задания 1.1.3, цифры обозначают соответствующие списки переменных. Тогда $B \setminus X = \{4,6\}$, $A \setminus B = \{1,2\}$, $A \setminus (B \setminus X) = \{1,2,5\}$, $A \cup B = \{1,2,4,5,6,7\}$, $(B \setminus X) \cup (A \setminus B) = \{1,2,4,6\}$, то есть $D = \{1,2,4,6\}$, $E = \{1,2,5\}$, $F = \{1,2,4,5,6,7\}$.

Итак, видим, что включения $D \subseteq F$ и $E \subseteq F$ выполняются для произвольных множеств A, B, X.

Если символы 1,2,4,5,6,7 обозначают соответствующие числа, имеем, что $4 \in D$ и $4 \notin E$, $5 \in E$ и $5 \notin D$, $1 \in D \cap E$, то есть множества D и E могут находиться в общем положении.

Задание 1.1.6

Проверить, что для любых множеств A, B, C выполнение включения α влечёт выполнение включения β.

Таблица 1.1.6

№	α	β
1	$A \cap B \subseteq C$	$A \cup B \subseteq (A \Delta B) \cup (A \cap C)$
2	$A \cap B \subseteq C$	$A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup C$
3	$A \cap B \subseteq C$	$A \Delta C \subseteq (A \setminus B) \cup C$
4	$A \cap B \subseteq C$	$(B \setminus C) \cup (A \setminus C) \subseteq A \Delta B$
5	$A \cap B \subseteq C$	$B \subseteq (B \setminus A) \cup C$
6	$A \subseteq B \cup C$	$A \Delta C \subseteq (A \cap B) \cup C$
7	$A \subseteq B \cup C$	$A \setminus B \subseteq A \cap C$
8	$A \subseteq B \cup C$	$A \cup B \subseteq B \cup C$
9	$A \subseteq B \cup C$	$(A \setminus B) \cup (A \cap C) \subseteq C$
10	$A \subseteq B \cup C$	$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq B$

Таблица 1.1.6 (окончание)

№	α	β
11	$A \subseteq B \cup C$	$(A \setminus B) \setminus C \subseteq C \setminus A$
12	$A \cup B \subseteq C$	$A \Delta B \subseteq (A \cap B) \cup C$
13	$A \cup B \subseteq C$	$A \cap C \subseteq A \cup (B \setminus A)$
14	$A \cup B \subseteq C$	$A \cap B \subseteq (B \cap C) \cup (A \cap C)$
15	$A \cup B \subseteq C$	$B \setminus A \subseteq B \cap C$
16	$A \subseteq B \setminus C$	$A \cap B \subseteq A \setminus C$
17	$A \subseteq B \setminus C$	$C \cap B \subseteq B \setminus A$
18	$A \cup B \subseteq C$	$A \Delta C \subseteq C \setminus A$
19	$A \cup B \subseteq C$	$(B \setminus C) \cup (A \setminus B) \subseteq A \cap C$
20	$A \cup B \subseteq C$	$B \subseteq A \cup (C \setminus A)$
21	$B \setminus C \subseteq A$	$A \cup B \subseteq (B \cap C) \cup A$
22	$B \setminus C \subseteq A$	$B \Delta C \subseteq C \cup (A \cap B)$
23	$B \setminus C \subseteq A$	$B \setminus A \subseteq (C \setminus A) \cup (A \cap B)$
24	$B \setminus C \subseteq A$	$B \subseteq C \cup (B \cap A)$
25	$B \setminus C \subseteq A$	$B \Delta C \subseteq C \cup A$
26	$B \setminus C \subseteq A$	$B \subseteq C \cup (A \setminus C)$
27	$B \subseteq C \setminus A$	$A \cup (B \setminus C) \subseteq A \setminus B$
28	$B \subseteq C \setminus A$	$(A \setminus B) \cup ((B \setminus C) \setminus A) \subseteq A$
29	$B \subseteq C \setminus A$	$(B \setminus C) \cup (B \setminus A) \subseteq B \cap C$
30	$B \subseteq C \setminus A$	$C \cup B \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

Пример решения задания 1.1.6

Доказать, что для любых множеств A, B, C выполнение включения $A \setminus B \subseteq C$ влечёт выполнение включения $C \Delta A \subseteq (A \cap B) \cup C$.

Возьмём множества A, B, C, находящиеся в общем положении: $A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $C = \{2,3,5,7\}$. В нашем случае, как и при решении предыдущих заданий, цифры обозначают соответствующие списки переменных.

Тогда $A \setminus B = \{1,2\}$, из включения $A \setminus B \subseteq C$ следует, что список 1 пуст, $A = \{2,4,5\}$. Рассмотрим $C \Delta A$ и $(A \cap B) \cup C$. $C \Delta A = \{3,4,7\}$, $(A \cap B) \cup C = \{2,3,4,5,7\}$. Так как $\{3,4,7\} \subseteq$ $\subseteq \{2,3,4,5,7\}$, имеем, что включение $C \Delta A \subseteq (A \cap B) \cup C$ доказано в предположении, что выполнено включение $A \setminus B \subseteq C$.

Задание 1.1.7

Для произвольных множеств A, B, H проверить, является ли выполнение включения α необходимым и достаточным условием выполнения равенства β.

Таблица 1.1.7

№	α	β
1	$A \subseteq B \setminus H$	$H \setminus A = H \cup (A \setminus B)$
2	$A \subseteq B \setminus H$	$H = (H \setminus A) \cup ((A \setminus B) \setminus H)$
3	$A \subseteq B \setminus H$	$A \cap B = (A \setminus H) \cup (A \setminus B)$
4	$A \subseteq B \setminus H$	$B = (A \Delta B) \cup (A \setminus H)$
5	$A \subseteq B \setminus H$	$A \cup B = (B \setminus H) \cup (B \setminus A)$
6	$A \subseteq B \setminus H$	$B \setminus A = (A \Delta B) \cup (B \cap H)$
7	$A \subseteq B \setminus H$	$A \Delta H = H \cup (A \cap B)$
8	$A \subseteq B \setminus H$	$A \Delta B = (B \setminus A) \cup (H \cap B)$
9	$A \subseteq B \setminus H$	$A \cup H = (H \setminus A) \cup ((A \cap B) \setminus H)$

Таблица 1.1.7 (окончание)

№	α	β
10	$A \subseteq B \setminus H$	$A \cap B = (A \setminus B) \setminus H$
11	$A \subseteq B \setminus H$	$A \setminus H = A \cap (B \cup H)$
12	$A \subseteq B \setminus H$	$A \setminus B = A \cap B \cap H$
13	$A \subseteq B \cap H$	$H = (A \Delta H) \cup (B \cap A)$
14	$A \subseteq B \cap H$	$A \cup B = (B \cap H) \cup (B \setminus A)$
15	$A \subseteq B \cap H$	$A \Delta B = (B \setminus H) \cup (B \setminus A)$
16	$A \subseteq B \cap H$	$B \setminus H = (A \setminus B) \cup ((B \setminus A) \setminus H)$
17	$A \subseteq B \cap H$	$(B \setminus A) \setminus H = (B \setminus H) \cup (A \setminus B)$
18	$A \subseteq B \cap H$	$A \cap B = (A \setminus B) \cup (A \cap H)$
19	$A \subseteq B \cap H$	$A \setminus H = (A \cap H) \setminus B$
20	$A \subseteq B \cap H$	$H \setminus A = (A \Delta H) \cup (A \setminus B)$
21	$A \cup B \subseteq H$	$B \setminus A = (A \setminus H) \cup ((B \cap H) \setminus A)$
22	$A \cup B \subseteq H$	$A \cup H = H \cup (B \setminus A)$
23	$A \cup B \subseteq H$	$A \cap H = A \cup (B \setminus H)$
24	$A \cup B \subseteq H$	$H \setminus A = (A \Delta H) \cup (B \setminus A)$
25	$A \cup B \subseteq H$	$B \Delta H = (A \setminus B) \cup (H \setminus B)$
26	$A \cup B \subseteq H$	$A \cap B = ((A \Delta B) \setminus H) \cup (A \cap B \cap H)$
27	$A \cup B \subseteq H$	$A \Delta B = (H \cap (A \Delta B)) \cup ((A \cap B) \setminus H)$
28	$A \cap B \subseteq H$	$H \setminus A = (A \Delta H) \setminus (A \setminus B)$
29	$A \cap B \subseteq H$	$B \setminus H = (B \setminus A) \setminus H$
30	$A \cap B \subseteq H$	$A \cup B = (A \Delta B) \cup (B \cap H)$

Пример решения задания 1.1.7

Для произвольных множеств A, B, H проверить, является ли выполнение включения $A \cup B \subseteq H$ необходимым и достаточным условием выполнения равенства $A \Delta H = (B \setminus A) \cup (H \setminus A)$.

Рассмотрим множества A, B, H : $A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $H = \{2,3,5,7\}$. В нашем случае, как и при решении предыдущих заданий, цифры обозначают соответствующие списки переменных.

1. Посмотрим, какие множества мы получим, если потребуем выполнения условия $A \cup B \subseteq H$. $A \cup B = \{1,2,4,5,6,7\}$ и, чтобы было выполнено включение $A \cup B \subseteq H$, списки 1, 4, 6 должны быть пусты, и множества A, B, H будут таковы: $A = \{2,5\}$, $B = \{5,7\}$, $H = \{2,3,5,7\}$. Тогда $(B \setminus A) \cup (H \setminus A) = \{7\} \cup \{3,7\} = \{3,7\}$, $A \Delta H = \{3,7\}$ и равенство $A \Delta H = (B \setminus A) \cup (H \setminus A)$ выполнено.

2. Посмотрим, какой вид примут множества $A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $H = \{2,3,5,7\}$, чтобы выполнилось равенство

$$A \Delta H = (B \setminus A) \cup (H \setminus A).$$

$$A \Delta H = \{1,3,4,7\},\ (B \setminus A) \cup (H \setminus A) = \{6,7\} \cup \{3,7\} = \{3,6,7\}.$$

Для выполнения равенства $A \Delta H = (B \setminus A) \cup (H \setminus A)$ нужно, чтобы списки 1, 4 и 6 были пусты, и мы приходим к тем же множествам, что и в п. 1, т. е. $A = \{2,5\}$, $B = \{5,7\}$, $H = \{2,3,5,7\}$.

Видим, что в этом случае $A \cup B = \{2,5,7\} \subseteq H$.

Значит, доказано, что для любых множеств A, B, H выполнение включения $A \cup B \subseteq H$ является необходимым и достаточным условием выполнения равенства $A \Delta H = (B \setminus A) \cup (H \setminus A)$.

Задание 1.1.8

Решить систему соотношений относительно множества X и указать условия совместности системы.

Таблица 1.1.8

№	Система	№	Система	№	Система
1	$\begin{cases} B\cap X=A \\ B\cup X=C \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$	2	$\begin{cases} (A\,\Delta\, X)\cup B=C \\ C\backslash X=A\cup B \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$	3	$\begin{cases} B\backslash X=A \\ B\cup X=C \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$
4	$\begin{cases} (A\,\Delta\, C)=X\cap B \\ X\backslash B=A\backslash C \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$	5	$\begin{cases} C\backslash X=B\backslash A \\ B\cup X=C \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$	6	$\begin{cases} B\,\Delta\, C=C\backslash X \\ X\cup A=C \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$
7	$\begin{cases} A\cap X=B \\ A\Delta X=C \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$	8	$\begin{cases} X\backslash B=C\backslash A \\ A\,\Delta\, X=C\,\Delta\, B \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$	9	$\begin{cases} C\backslash X=A\cup(C\backslash B) \\ A\cup X=B \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$
10	$\begin{cases} X\backslash B=C\backslash A \\ C\cap X=A \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$	11	$\begin{cases} B\backslash X=A \\ B\cup X=C \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$	12	$\begin{cases} X\cup(B\backslash A)=C \\ C\backslash X=A\cap B \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$
13	$\begin{cases} B\,\Delta\, X=C\backslash A \\ A\cap X=C\cap B \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$	14	$\begin{cases} A\,\Delta\, X=C\backslash B \\ A\cup X=B\cap X \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$	15	$\begin{cases} A\backslash B=C\backslash X \\ B\cup X=C\backslash A \\ A\subseteq B\subseteq C \end{cases}$
16	$\begin{cases} C\backslash X=A\,\Delta\, B \\ X\cap A=X \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$	17	$\begin{cases} C\backslash X=A\cup(C\backslash B) \\ X\cap B=X \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$	18	$\begin{cases} C\backslash X=C\backslash(A\cup B) \\ A\backslash B=X \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$
19	$\begin{cases} C\backslash X=A\cap B \\ X\backslash A=B\Delta C \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$	20	$\begin{cases} C\backslash X=A\cup B \\ X\backslash B=C\backslash A \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$	21	$\begin{cases} A\cap X=A\backslash B \\ X\,\Delta\, B=A \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$
22	$\begin{cases} B\cup X=C \\ X\cap B=A \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$	23	$\begin{cases} (A\Delta X)\cup B=C \\ C\backslash X=A\cup B \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$	24	$\begin{cases} B\backslash X=A \\ X\cup B=C \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$

***Таблица 1.1.8** (окончание)*

№	Система	№	Система	№	Система
25	$\begin{cases} X \cup (B \setminus A) = C \\ C \setminus X = A \cap B \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	26	$\begin{cases} C \setminus A = X \Delta B \\ X \cap A = B \cap C \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	27	$\begin{cases} C \setminus A = X \Delta B \\ X \cup B = A \cap X \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$
28	$\begin{cases} C \setminus A = X \Delta B \\ (A \Delta B) \cup X = C \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	29	$\begin{cases} A \cap X = C \Delta B \\ X \setminus A = B \setminus C \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	30	$\begin{cases} C \setminus X = A \Delta C \\ X \cup B = C \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$

Пример решения задания 1.1.8

Решить задание 1.1.8 для системы

$$\begin{cases} B \Delta C = X \cap A \\ X \setminus C = A \cap B \\ C \subseteq A \cap B. \end{cases}$$

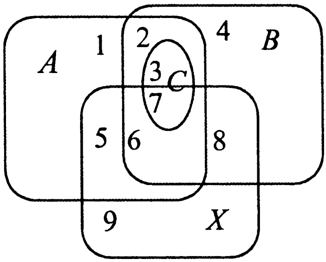


Рис. 1.1.8

I. Построим множества общего положения A, B, X и множество C (рис. 1.1.8) такие, что $C \subseteq A \cap B$ и $C \between X$.

Символом 1 обозначим список элементов множества A, не попавших ни в одно из множеств B, C, X, символом 7 — список элементов, попавших в каждое из множеств A, B, C, X и т. д. Будем иметь: $A = \{1,2,3,5,6,7\}$, $B = \{2,3,4,6,7,8\}$, $C = \{3,7\}$, $X = \{5,6,7,8,9\}$.

1. $B \Delta C = \{2,4,6,8\}$, $X \cap A = \{5,6,7\}$. Эти множества равны в силу первого уравнения системы, значит, списки элементов 2,4,5,7 и 8 пусты. Получили: $A = \{1,3,6\}$, $B = \{3,6\}$, $C = \{3\}$, $X = \{6,9\}$.

2. $X \setminus C = \{6,9\}$, $A \cap B = \{3,6\}$. Данные множества равны в силу второго уравнения системы, следовательно, списки элементов 3 и 9 пусты, и наши множества примут вид:

$$A = \{1,6\},\ B = \{6\},\ C = \varnothing,\ X = \{6\}.$$

Видим, что $X = B$, $B \subseteq A$, $C = \varnothing$.

II. Проверим, что множество $X = B$ является решением исходной системы.

Если $C = \varnothing$ и $B \subseteq A$, то $C \subseteq A \cap B$ и можно записать:

$B = \{b\}$, $A = \{a,b\}$, где a, b — списки элементов.

Пусть $X = B = \{b\}$, тогда: $B \Delta C = B \setminus C = \{b\}$,

$X \setminus C = X = \{b\}$, $\{\, b \,\}\{b\} = A \setminus X$, $C \cap X = \{a,b\} = A \cap B$.

Видим, что все соотношения системы удовлетворяются, т.е. множество $X = B$ является решением исходной системы при выполнении условий $B \subseteq A$, $C = \varnothing$.

<u>Ответ:</u> $X = B$, $B \subseteq A$, $C = \varnothing$.

Задание 1.1.9

Решить систему уравнений относительно множества X и указать условия совместности системы или доказать её несовместность.

Таблица 1.1.9

№	Система	№	Система	№	Система
1	$\begin{cases} A \cup X = B \cap X \\ A \cap X = C \cup X \\ \bar{A} \setminus X = C \setminus A \end{cases}$	2	$\begin{cases} A \setminus X = X \setminus B \\ X \setminus A = C \setminus X \\ \overline{B \cup X} = X \setminus A \end{cases}$	3	$\begin{cases} A \cap X = B \setminus X \\ X \setminus A = C \cup X \\ X \setminus C = A \cup B \end{cases}$
4	$\begin{cases} A \cup X = B \setminus X \\ X \setminus B = C \cup X \\ \bar{A} \setminus C = X \setminus A \end{cases}$	5	$\begin{cases} A \cup X = B \Delta \bar{C} \\ X \setminus C = B \cup X \\ \overline{B \cap X} = C \setminus A \end{cases}$	6	$\begin{cases} B \setminus C = A \Delta X \\ B \setminus X = A \setminus C \\ C \cap X = A \cap B \end{cases}$
7	$\begin{cases} B \setminus X = A \cap C \\ A \setminus X = C \setminus B \\ X \setminus C = A \cup B \end{cases}$	8	$\begin{cases} B \cup X = B \cap C \\ A \cup C = C \cap X \\ A \cup B = X \cap C \end{cases}$	9	$\begin{cases} A \cap X = B \cap A \\ C \setminus X = \overline{A \cup B} \\ \bar{A} = A \setminus B \end{cases}$
10	$\begin{cases} \overline{B \cap X} = X \cap C \\ B \cap C = B \setminus X \\ A \setminus (B \cup C) = C \setminus B \end{cases}$	11	$\begin{cases} X \setminus C = A \setminus B \\ A \setminus C = \overline{X \cap C} \\ (B \setminus X) \setminus A = A \setminus C \end{cases}$	12	$\begin{cases} C \cup X = A \setminus B \\ A \cap B = B \cup C \\ B \setminus A = X \cap C \end{cases}$

Таблица 1.1.9

№	Система	№	Система	№	Система
13	$\begin{cases} C\setminus X = A\setminus B \\ B\cup\overline{C} = X\cap C \\ X\cup\overline{B} = X\cap B \end{cases}$	14	$\begin{cases} B\cup X = C\cap X \\ B\cap X = A\cup X \\ \overline{B}\setminus X = A\setminus B \end{cases}$	15	$\begin{cases} B\setminus X = X\setminus C \\ X\setminus B = A\setminus X \\ \overline{C}\cap\overline{X} = X\setminus B \end{cases}$
16	$\begin{cases} B\cap X = C\setminus X \\ X\setminus B = A\cup X \\ X\setminus A = C\cup B \end{cases}$	17	$\begin{cases} B\cup X = C\setminus X \\ X\setminus C = A\cup X \\ \overline{B}\setminus A = X\setminus B \end{cases}$	18	$\begin{cases} B\cup X = C\Delta\overline{A} \\ X\setminus A = C\cup X \\ \overline{C\cap X} = A\setminus B \end{cases}$
19	$\begin{cases} C\setminus A = B\Delta X \\ C\setminus X = B\setminus A \\ A\cap X = B\cap C \end{cases}$	20	$\begin{cases} C\setminus X = B\cap A \\ B\setminus X = A\setminus C \\ X\setminus A = B\cup C \end{cases}$	21	$\begin{cases} C\cup X = C\cap A \\ B\cup A = A\cap X \\ B\cup C = X\cap A \end{cases}$
22	$\begin{cases} B\cap X = C\cap B \\ A\setminus X = \overline{C\cup B} \\ \overline{B} = B\setminus C \end{cases}$	23	$\begin{cases} \overline{C\cap X} = X\cap A \\ A\cap C = C\setminus X \\ B\setminus(C\cup A) = A\setminus C \end{cases}$	24	$\begin{cases} X\setminus A = B\setminus C \\ B\setminus A = \overline{X\cap A} \\ (C\setminus X)\setminus B = B\setminus A \end{cases}$
25	$\begin{cases} A\cup X = B\setminus C \\ B\cap C = A\cup C \\ C\setminus B = X\cap A \end{cases}$	26	$\begin{cases} A\setminus X = B\setminus C \\ C\cup\overline{A} = A\cap X \\ X\cup\overline{C} = X\cap C \end{cases}$	27	$\begin{cases} C\setminus X = X\setminus A \\ X\setminus C = B\setminus X \\ \overline{A\cup X} = X\setminus C \end{cases}$
28	$\begin{cases} C\cup X = A\setminus X \\ X\setminus A = B\cup X \\ \overline{C}\setminus B = X\setminus C \end{cases}$	29	$\begin{cases} A\setminus X = C\cap B \\ C\setminus X = B\setminus A \\ X\setminus B = A\cup C \end{cases}$	30	$\begin{cases} B\cup X = C\setminus A \\ A\cap C = A\cup B \\ A\setminus C = X\cap B \end{cases}$

Пример решения задания 1.1.9

Решить задание 1.1.9 для системы $\begin{cases} A\Delta X = B\setminus C \\ C\cap X = A\cup X \\ B\setminus X = A\setminus X \end{cases}$.

Построим множества общего положения A, B, C, X, являющиеся подмножествами универсального множества U. Для этого выпишем все 16 различных двоичных наборов размерности 4.

Пусть разряды этих наборов слева направо соответствуют множествам A, B, C, X (табл. 1.1.9).

Символом 1 обозначим список элементов универсального множества U, не попавших ни в одно из множеств A, B, C, X, символом 4 — список элементов, не попавших ни в A, ни в B, но попавших в C и X, и т. д. Будем иметь:

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$,

$A = \{9,10,11,12,13,14,15,16\}$,

$B = \{5,6,7,8,13,14,15,16\}$,

$C = \{3,4,7,8,11,12,15,16\}$,

$X = \{2,4,6,8,10,12,14,16\}$.

Таблица 1.1.9

№	A	B	C	X
1	0	0	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	1	1
5	0	1	0	0
6	0	1	0	1
7	0	1	1	0
8	0	1	1	1
9	1	0	0	0
10	1	0	0	1
11	1	0	1	0
12	1	0	1	1
13	1	1	0	0
14	1	1	0	1
15	1	1	1	0
16	1	1	1	1

1. $A \Delta X = \{2,4,6,8,9,11,13,15\}$, $B \setminus C = \{5,6,13,14\}$. Эти множества равны в силу первого уравнения системы, значит, списки элементов 2, 4, 5, 8, 9, 11, 14 и 15 пусты. Получили: $A = \{10,12,13,16\}$, $B = \{6,7,13,16\}$, $C = \{3,7,12,16\}$, $X = \{6,10,12,16\}$.

2. $C \cap X = \{12,16\}$, $A \cup X = \{6,10,12,13,16\}$.

Данные множества равны в силу второго уравнения системы, следовательно, списки элементов 6, 10, 13 пусты, и наши множества примут вид:

$A = \{12,16\}$, $B = \{7,16\}$, $X = \{12,16\}$, $C = \{3,7,12,16\}$.

3. $B \setminus X = \{7\}$, $A \setminus X = \varnothing$, в силу третьего уравнения системы получаем, что список 7 пуст, и $C = \{3,12,16\}$, $B = \{16\}$, $A = \{12,16\} = X$, $U = \{1,3,12,16\}$.

Видим, что $X = A$, $B \subseteq A \subseteq C \subseteq U$.

II. Проверим, что множество $X = A$ является решением исходной системы.

Если выполнены включения $B \subseteq A \subseteq C \subseteq U$, то можно записать:

$B = \{b\}$, $A = \{a,b\}$, $C = \{a,b,c\}$, $U = \{a,b,c,u\}$, где a,b,c,u — списки элементов.

Пусть $X = A = \{a,b\}$, тогда: $A \Delta X = \varnothing = B \setminus C$, $B \setminus X = \varnothing = A \setminus X$, $C \cap X = \{a,b\} = A \cup X$.

Видим, что все уравнения системы удовлетворяются, т. е. множество $X = A$ является решением исходной системы при выполнении включений $B \subseteq A \subseteq C \subseteq U$.

Ответ: $X = A$, $B \subseteq A \subseteq C \subseteq U$.

Задание 1.1.10

Для произвольных множеств A, B, C, D проверить равносильность систем α и β.

Таблица 1.1.10

№	α	β
1	$\begin{cases} A \cup B \subseteq C \\ C \cup B \subseteq A \cup D \\ C \cup A \subseteq B \cup D \\ A \cap C \subseteq B \end{cases}$	$\begin{cases} \overline{A \cup D} \subseteq A \setminus B \\ B \setminus C \subseteq A \setminus C \\ A \subseteq B \cap C \end{cases}$
2	$\begin{cases} C \cap B \subseteq A \cup D \\ A \cup B \subseteq C \cup D \\ B \cap D \subseteq A \Delta \overline{C} \end{cases}$	$\begin{cases} B \subseteq A \cup D \\ A \subseteq C \cup D \\ (B \cap C) \setminus A \subseteq \overline{C \cup D} \\ (B \cap A) \setminus C \subseteq (B \setminus A) \setminus D \end{cases}$
3	$\begin{cases} A \subseteq B \cup C \\ \overline{B} \subseteq D \subseteq \overline{A} \\ C \cup D \subseteq A \cup B \end{cases}$	$\begin{cases} D \cap A \subseteq C \setminus B \\ D \setminus B \subseteq A \cap D \\ \overline{B} \subseteq B \setminus A \end{cases}$

Таблица 1.1.10 (продолжение)

№	α	β
4	$\begin{cases} A \subseteq B \Delta C \\ C \subseteq B \Delta D \\ A \cap C \subseteq B \setminus D \end{cases}$	$\begin{cases} B \subseteq \overline{C \cap D} \\ C \setminus D \subseteq B \\ A \cap C \subseteq D \\ A \setminus B \subseteq C \cap B \end{cases}$
5	$\begin{cases} A \cap B \subseteq C \cap D \\ A \cap C \subseteq B \cup D \\ A \subseteq B \cup C \end{cases}$	$\begin{cases} A \setminus C \subseteq C \setminus D \\ A \cap B \subseteq C \cap D \\ A \subseteq D \cup \overline{C} \end{cases}$
6	$\begin{cases} A \cap D \subseteq B \Delta \overline{C} \\ A \cap B \subseteq C \cup D \\ \overline{D} \subseteq C \end{cases}$	$\begin{cases} C \subseteq D \\ A \setminus C \subseteq A \setminus B \\ A \cap C \subseteq B \cap C \end{cases}$
7	$\begin{cases} A \Delta D \subseteq B \setminus C \\ C \cap D \subseteq A \cup D \\ B \setminus D \subseteq A \setminus D \end{cases}$	$\begin{cases} D \subseteq A \cup B \\ A \subseteq D \cup \overline{C} \\ D \cap C \subseteq A \\ A \setminus D \subseteq B \end{cases}$
8	$\begin{cases} A \cup D \subseteq B \cap D \\ A \cap D \subseteq C \cup D \\ \overline{A} \setminus D \subseteq C \setminus A \end{cases}$	$\begin{cases} C \subseteq D \\ D \subseteq A \cup B \\ A \setminus B \subseteq C \setminus D \\ A \subseteq D \end{cases}$
9	$\begin{cases} A \subseteq C \cup D \\ B \setminus D \subseteq A \setminus C \\ A \cap B \subseteq D \cap C \\ D \subseteq B \cup \overline{A} \end{cases}$	$\begin{cases} A \cap D \subseteq B \cap C \cap D \\ A \cup B \subseteq C \cup D \\ B \subseteq D \end{cases}$
10	$\begin{cases} A \Delta B \subseteq C \\ B \cup D \subseteq A \cup C \\ C \setminus B \subseteq A \setminus D \end{cases}$	$\begin{cases} \overline{C} \subseteq A \cap B \\ D \setminus A \subseteq \overline{C} \\ C \subseteq A \cup B \end{cases}$

***Таблица 1.1.10** (продолжение)*

№	α	β
11	$\begin{cases} B\cup C\subseteq D \\ D\cup C\subseteq B\cup A \\ D\cup B\subseteq C\cup A \\ B\cap D\subseteq C \end{cases}$	$\begin{cases} \overline{B\cup A}\subseteq B\setminus C \\ C\setminus D\subseteq B\setminus D \\ B\subseteq C\cap D \end{cases}$
12	$\begin{cases} D\cap C\subseteq B\cup A \\ B\cup C\subseteq D\cup A \\ C\cap A\subseteq B\Delta\overline{D} \end{cases}$	$\begin{cases} C\subseteq B\cup A \\ B\subseteq D\cup A \\ (C\cap D)\setminus B\subseteq\overline{D\cup A} \\ (C\cap B)\setminus D\subseteq(C\setminus B)\cap\overline{A} \end{cases}$
13	$\begin{cases} B\subseteq C\cup D \\ \overline{C}\subseteq A\subseteq\overline{B} \\ D\cup A\subseteq C\cup B \end{cases}$	$\begin{cases} B\cap A\subseteq D\setminus C \\ A\setminus C\subseteq B\cap A \\ \overline{C}\subseteq C\setminus B \end{cases}$
14	$\begin{cases} B\subseteq C\Delta D \\ D\subseteq C\Delta A \\ B\cap D\subseteq C\setminus A \end{cases}$	$\begin{cases} C\subseteq\overline{D\cap A} \\ D\setminus A\subseteq C \\ B\cap D\subseteq A \\ B\setminus C\subseteq D\cap C \end{cases}$
15	$\begin{cases} C\cap B\subseteq A\cap D \\ B\cap D\subseteq C\cup A \\ B\subseteq D\cup C \end{cases}$	$\begin{cases} B\setminus D\subseteq D\setminus A \\ C\cap B\subseteq A\cap D \\ B\subseteq A\cup\overline{D} \end{cases}$
16	$\begin{cases} A\cap B\subseteq C\Delta\overline{D} \\ C\cap B\subseteq A\cup D \\ \overline{A}\subseteq D \end{cases}$	$\begin{cases} D\subseteq A \\ B\setminus D\subseteq B\setminus C \\ B\cap D\subseteq D\cap C \end{cases}$
17	$\begin{cases} A\Delta B\subseteq C\setminus D \\ A\cap D\subseteq A\cup B \\ C\setminus A\subseteq B\setminus A \end{cases}$	$\begin{cases} A\subseteq C\cup B \\ B\subseteq A\cup\overline{D} \\ A\cap D\subseteq B \\ B\setminus A\subseteq C \end{cases}$

Таблица 1.1.10 *(продолжение)*

№	α	β
18	$\begin{cases} A \cup B \subseteq C \cap A \\ A \cap B \subseteq A \cup D \\ \overline{B} \setminus A \subseteq D \setminus B \end{cases}$	$\begin{cases} D \subseteq A \\ A \subseteq C \cup B \\ B \setminus C \subseteq D \setminus A \\ B \subseteq A \end{cases}$
19	$\begin{cases} B \subseteq A \cup D \\ C \setminus A \subseteq B \setminus D \\ C \cap B \subseteq D \cap A \\ A \subseteq D \cup \overline{B} \end{cases}$	$\begin{cases} A \cap B \subseteq A \cap C \cap D \\ C \cup B \subseteq A \cup D \\ C \subseteq A \end{cases}$
20	$\begin{cases} C \Delta B \subseteq D \\ C \cup A \subseteq B \cup D \\ D \setminus C \subseteq B \setminus A \end{cases}$	$\begin{cases} \overline{D} \subseteq C \cap B \\ A \setminus B \subseteq \overline{D} \\ D \subseteq C \cup B \end{cases}$
21	$\begin{cases} D \cup C \subseteq A \\ D \cup A \subseteq B \cup C \\ A \cup C \subseteq D \cup B \\ C \cap A \subseteq D \end{cases}$	$\begin{cases} \overline{B \cup C} \subseteq C \setminus D \\ D \setminus A \subseteq C \setminus A \\ C \subseteq A \cap D \end{cases}$
22	$\begin{cases} D \cap A \subseteq B \cup C \\ D \cup C \subseteq B \cup A \\ D \cap B \subseteq C \Delta \overline{A} \end{cases}$	$\begin{cases} D \subseteq B \cup C \\ C \subseteq B \cup A \\ (A \cap D) \setminus C \subseteq \overline{B \cup A} \\ (C \cap D) \setminus A \subseteq (D \setminus B) \setminus C \end{cases}$
23	$\begin{cases} C \subseteq A \cup D \\ \overline{D} \subseteq B \subseteq \overline{C} \\ B \cup A \subseteq D \cup C \end{cases}$	$\begin{cases} B \cap C \subseteq A \setminus D \\ B \setminus D \subseteq B \cap C \\ \overline{D} \subseteq D \setminus C \end{cases}$
24	$\begin{cases} C \subseteq A \Delta D \\ A \subseteq D \Delta B \\ C \cap A \subseteq D \setminus B \end{cases}$	$\begin{cases} D \subseteq \overline{B \cap A} \\ A \setminus B \subseteq D \\ C \cap A \subseteq B \\ C \setminus D \subseteq D \cap A \end{cases}$

***Таблица 1.1.10** (окончание)*

№	α	β
25	$\begin{cases} C\cap D\subseteq A\cap B \\ C\cap A\subseteq D\cup B \\ C\subseteq D\cup A \end{cases}$	$\begin{cases} C\setminus A\subseteq A\setminus B \\ C\cap D\subseteq A\cap B \\ C\subseteq B\cup\overline{A} \end{cases}$
26	$\begin{cases} C\cap B\subseteq D\Delta\overline{A} \\ C\cap D\subseteq A\cup B \\ \overline{B}\subseteq A \end{cases}$	$\begin{cases} A\subseteq B \\ C\setminus A\subseteq C\setminus D \\ C\cap A\subseteq D\cap A \end{cases}$
27	$\begin{cases} C\Delta B\subseteq D\setminus A \\ A\cap B\subseteq C\cup B \\ D\setminus B\subseteq C\setminus B \end{cases}$	$\begin{cases} B\subseteq C\cup D \\ C\subseteq B\cup\overline{A} \\ A\cap B\subseteq C \\ C\setminus B\subseteq D \end{cases}$
28	$\begin{cases} C\cup B\subseteq D\cap B \\ C\cap B\subseteq A\cup B \\ \overline{C}\setminus B\subseteq A\setminus C \end{cases}$	$\begin{cases} A\subseteq B \\ B\subseteq C\cup D \\ C\setminus D\subseteq A\setminus B \\ C\subseteq B \end{cases}$
29	$\begin{cases} C\subseteq A\cup B \\ D\setminus B\subseteq C\setminus A \\ C\cap D\subseteq B\cap A \\ B\subseteq A\cup\overline{C} \end{cases}$	$\begin{cases} C\cap B\subseteq B\cap D\cap A \\ D\cup C\subseteq B\cup A \\ D\subseteq B \end{cases}$
30	$\begin{cases} C\Delta D\subseteq A \\ D\cup B\subseteq C\cup A \\ A\setminus D\subseteq C\setminus B \end{cases}$	$\begin{cases} \overline{A}\subseteq C\cap D \\ B\setminus C\subseteq\overline{A} \\ A\subseteq C\cup D \end{cases}$

Пример решения задания 1.1.10

Проверить равносильность систем

$$\begin{cases} B\cap D\subseteq A\cap C \\ B\cap A\subseteq D\cup C \\ B\subseteq D\cup A \end{cases} (*) \text{ и } \begin{cases} B\setminus A\subseteq A\setminus C \\ B\cap D\subseteq A\cap C \\ B\subseteq C\cup\overline{A} \end{cases} (**).$$

I. Возьмём множества общего положения A, B, C, D, являющиеся подмножествами универсального множества U, воспользовавшись техникой, описанной в решении примера 1.1.9. Будем иметь:

$$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\},$$

$$A=\{9,10,11,12,13,14,15,16\},\ B=\{5,6,7,8,13,14,15,16\},$$

$$C=\{3,4,7,8,11,12,15,16\},\ D=\{2,4,6,8,10,12,14,16\}.$$

1. Рассмотрим включения, вошедшие в систему (*).

$B\cap D=\{6,8,14,16\}$, $A\cap C=\{11,12,15,16\}$.

По условию, $\{6,8,14,16\}\subseteq\{11,12,15,16\}\Rightarrow$ список 6,8,14 пуст.

Значит, $A=\{9,10,11,12,13,15,16\}$, $B=\{5,7,13,15,16\}$,

$$C=\{3,4,7,11,12,15,16\},\ D=\{2,4,10,12,16\}.$$

$$B\cap A=\{13,15,16\},\ D\cup C=\{2,3,4,7,10,11,12,15,16\}.$$

Так как $\{13,15,16\}\subseteq\{2,3,4,7,10,11,12,15,16\}$, то $\{13\}=\varnothing$.

Множества A и B можно записать так:

$$A=\{9,10,11,12,15,16\},\ B=\{5,7,15,16\}.$$

И, наконец, $B\subseteq D\cup A$, то есть

$$\{5,7,15,16\}\subseteq\{2,4,9,10,11,12,15,16\}\Rightarrow\{5,7\}=\varnothing.$$

Итак, множества A, B, C и D таковы: $A=\{9,10,11,12,15,16\}$, $B=\{15,16\}$, $C=\{3,4,11,12,15,16\}$, $D=\{2,4,10,12,16\}$.

Проверим при полученных A, B, C и D выполнение включений (**):

$B\backslash A=\varnothing$, поэтому включение $B\backslash A\subseteq A\backslash C$ выполняется независимо от вида множества $A\backslash C$.

$B\cap D=\{16\}$, $A\cap C=\{11,15,16\}$, значит, $B\cap D\subseteq A\cap C$ и второе включение также выполнено.

Наконец, $\overline{A}=\{1,2,3,5,6,7,8,13,14\}$,

$C\cup\overline{A}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,11,12,13,14,15,16\}$ и $B\subseteq C\cup\overline{A}$.

Получили, что все множества A, B, C и D, удовлетворяющие системе включений (*), удовлетворяют также системе (**).

2. Пусть теперь выполняется система (**).

Так же, как и в первой части доказательства, возьмём множества

$$U = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16}\},$$

$$A = \{x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16}\},\ B = \{x_5,x_6,x_7,x_8,x_{13},x_{14},x_{15},x_{16}\},$$

$$C = \{x_3,x_4,x_7,x_8,x_{11},x_{12},x_{15},x_{16}\},\ D = \{x_2,x_4,x_6,x_8,x_{10},x_{12},x_{14},x_{16}\}.$$

$B\setminus A = \{x_5,x_6,x_7,x_8\}$, $\{ A\setminus C = \{x_9,x_{10},x_{13},x_{14}\}$, и из выполнения включения $B\setminus A \subseteq A\setminus C$ следует, что $\{x_5,x_6,x_7,x_8\} = \varnothing$.

Рассматриваемые множества примут вид:

$$U = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16}\},$$

$$A = \{x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{16}\},\ B = \{x_{13},x_{14},x_{15},x_{16}\},$$

$$C = \{x_3,x_4,x_{11},x_{12},x_{15},x_{16}\},\ D = \{x_2,x_4,x_{10},x_{12},x_{14},x_{16}\}.$$

$$B \cap D = \{x_{14},x_{16}\},\ A \cap C = \{x_{11},x_{12},x_{15},x_{16}\}.$$

Из включения $B \cap D \subseteq A \cap C$ следует, что $\{x_{14}\} = \varnothing$, значит,

$$U = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{15},x_{16}\},$$

$$A = \{x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{13},x_{15},x_{16}\},\ B = \{x_{13},x_{15},x_{16}\},$$

$$C = \{x_3,x_4,x_{11},x_{12},x_{15},x_{16}\},\ D = \{x_2,x_4,x_{10},x_{12},x_{16}\}.$$

$$\overline{A} = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\},$$

$$C \cup \overline{A} = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{11},x_{12},x_{15},x_{16}\},$$

Из включения $B \subseteq C \cup \overline{A}$ следует, что $\{x_{13}\} = \varnothing$, значит,

$$U = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{15},x_{16}\},$$

$$A = \{x_9,x_{10},x_{11},x_{12},x_{15},x_{16}\},\ B = \{x_{15},x_{16}\},$$

$$C = \{x_3,x_4,x_{11},x_{12},x_{15},x_{16}\},\ D = \{x_2,x_4,x_{10},x_{12},x_{16}\}.$$

Проверим для этих множеств выполнение включений системы (*): $B \cap D = \{x_{16}\}$, $\{ A \cap C = \{x_{11},x_{12},x_{15},x_{16}\}$ и включение $B \cap D \subseteq A \cap C$ выполнено.

$\{ B \cap A = \{x_{15},x_{16}\}$, $\{ D \cup C = \{x_2,x_3,x_4,x_{10},x_{11},x_{12},x_{15},x_{16}\}$, включение $B \cap A \subseteq D \cup C$ выполнено.

И, наконец, $D \cup A = \{x_2,x_4,x_9x_{10},x_{11},x_{12},x_{15},x_{16}\}$ и $B \subseteq D \cup A$ также верно. Итак, доказано, что системы (*) и (**) равносильны.