

ЗАЧЕТНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

(Название файла: ФИО, группа. Оформление с титульным листом, решать можно от руки, но сдаем в формате PDF. Номер варианта по номеру в списке.)

З а д а ч а 1. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В вариантах 1–16 ось вращения Ox , в вариантах 17–29 ось вращения Oy .

1.1 $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0.$

1.3 $y = 3\sin x, y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi.$

1.5 $y = \sin^2 x, x = \pi/2, y = 0.$

1.7 $y = xe^x, y = 0, x = 1.$

1.9 $y = 2x - x^2, y = -x + 2.$

1.11 $y = x^2, y^2 - x = 0.$

1.13 $y = 1 - x^2, x = 0, x = \sqrt{y-2}, x = 1.$

1.15 $y = x^3, y = \sqrt{x}.$

1.17 $y = \arccos(x/3), y = \arccos x, y = 0.$

1.19 $y = x^2, x = 2, y = 0.$

1.21 $y = \sqrt{x-1}, y = 0, y = 1, x = 0,5.$

1.23 $y = (x-1)^2, y = 1.$

1.25 $y = x^3, y = x^2.$

1.27 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = 0.$

1.29 $y = x^3, y = x.$

1.2 $2x - x^2 - y = 0, 2x^2 - 4x + y = 0.$

1.4 $y = 5\cos x, y = \cos x, x = 0, x \geq 0.$

1.6 $x = \sqrt[3]{y-2}, x = 1, y = 1.$

1.8 $y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0.$

1.10 $y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1.$

1.12 $x^2 + (y-2)^2 = 1.$

1.14 $y = x^2, y = 1, x = 2.$

1.16 $y = \sin(\pi x/2), y = x^2.$

1.18 $y = \arcsin(x/5), y = \arcsin x, y = \pi/2.$

1.20 $y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 1.$

1.22 $y = \ln x, x = 2, y = 0.$

1.24 $y^2 = x - 2, y = 0, y = x^3, y = 1.$

1.26 $y = \arccos \frac{x}{5}, y = \arccos \frac{x}{3}, y = 0.$

1.28 $y = x^2 - 2x + 1, x = 2, y = 0.$

З а д а ч а 2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

2.1. $r = 4 \cos 3\varphi, r = 2 (r \geq 2).$

2.2 $r = \cos 2\varphi.$

2.3. $r = \sqrt{3} \cos \varphi, r = \sin \varphi,$
 $(0 \leq \varphi \leq \pi/2).$

2.4. $r = 4 \sin 3\varphi, r = 2 (r \geq 2).$

2.5. $r = 2 \cos \varphi, r = 2\sqrt{3} \sin \varphi,$
 $(0 \leq \varphi \leq \pi/2).$

2.6. $r = \sin 3\varphi.$

2.7. $r = 6 \sin 3\varphi, r = 3 (r \geq 3).$

2.8. $r = \cos 3\varphi.$

2.9. $r = \cos \varphi, r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4),$
 $(-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2).$

2.10. $r = \sin \varphi, r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4),$
 $(0 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$

2.11. $r = 6 \cos 3\varphi, r = 3 (r \geq 3).$

2.12. $r = 1/2 + \sin \varphi.$

2.13. $r = \cos \varphi,$
 $r = \sin \varphi, (0 \leq \varphi \leq \pi/2).$

2.14. $r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4),$
 $r = \sqrt{2} \sin(\varphi - \pi/4), (\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4).$

2.15. $r = \cos \varphi, r = 2 \cos \varphi.$

2.16. $r = \sin \varphi, r = 2 \sin \varphi.$

2.17. $r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi.$

2.18. $r = 1/2 + \cos \varphi.$

$$2.19. r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi.$$

$$2.20. r = (5/2) \sin \varphi, r = (3/2) \sin \varphi.$$

$$2.21. r = (5/2) \cos \varphi, r = (3/2) \cos \varphi.$$

$$2.22. r = 4 \cos 4\varphi.$$

$$2.23. r = \sin 6\varphi.$$

$$2.24. r = 2 \cos \varphi, r = 3 \cos \varphi.$$

$$2.25. r = \cos \varphi + \sin \varphi.$$

$$2.26. r = 2 \sin 4\varphi.$$

$$2.27. r = 2 \cos 6\varphi.$$

$$2.28. r = \cos \varphi - \sin \varphi.$$

$$2.29. r = 3 \sin \varphi, r = 5 \sin \varphi.$$

З а д а ч а 3. Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

$$3.1. \begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi$$

$$3.2. \begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$3.3. \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t) \\ y = 4(\sin t - t \cos t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2$$

$$3.4. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi$$

$$3.5. \begin{cases} x = 10 \cos^3 t \\ y = 10 \sin^3 t \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$3.6. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t) \\ y = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi$$

$$3.7. \begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases} \\ \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$3.8. \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3$$

$$3.9. \begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t) \\ y = 3(\sin t - t \cos t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3$$

$$3.10. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3$$

$$3.11. \begin{cases} x = 6 \cos^3 t \\ y = 6 \sin^3 t \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3$$

$$3.12. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t) \\ y = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq \pi$$

$$3.13. \begin{cases} x = 2,5(t - \sin t) \\ y = 2,5(1 - \cos t) \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq \pi$$

$$3.14. \begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$3.15. \begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t) \\ y = 6(\sin t - t \cos t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi$$

$$3.16. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$3.17. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t \\ y = 8 \sin^3 t \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/6$$

$$3.18. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t) \\ y = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$3.19. \begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases} \\ \pi/2 \leq t \leq 2\pi/3$$

$$3.20. \begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/3$$

$$3.21. \begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t) \\ y = 8(\sin t - t \cos t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/4$$

$$3.22. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$3.23. \begin{cases} x = 4 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases} \\ \pi/6 \leq t \leq \pi/4$$

$$3.24. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t) \\ y = e^t (\cos t - \sin t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 3\pi/2$$

$$3.25. \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$3.26. \begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi$$

$$3.27. \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t) \\ y = 2(\sin t - t \cos t) \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$3.28. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases} \\ 0 \leq t \leq 3\pi$$

$$3.29. \begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases} \\ 0 \leq t \leq \pi/4$$

Задача 4. Вычислить интеграл или установить его расходимость

1. а) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4}} dx,$

б) $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

2. а) $\int_2^{+\infty} \frac{3^x dx}{3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3},$

б) $\int_0^2 \sqrt{\frac{\arcsin(x/2)}{4-x^2}} dx.$

3. а) $\int_0^{+\infty} e^{-2x}(4x-3) dx,$

б) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{8-x^3}}.$

4. а) $\int_{-\infty}^0 x^2 e^{3x} dx;$

б) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x dx.$

5. а) $\int_0^{+\infty} \frac{e^x \operatorname{arctg} e^x}{1+e^{2x}} dx;$

б) $\int_3^6 \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}.$

6. а) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x \sqrt{x}};$

б) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$

7. а) $\int_{-\infty}^0 (5x-2)e^{3x} dx;$

б) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}.$

8. а) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt{x}};$

б) $\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x}-1}}.$

9. а) $\int_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)} dx;$

б) $\int_0^3 \sqrt{\frac{\arcsin \frac{x}{3}}{\sqrt[4]{9-x^2}}} dx.$

10. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)};$

б) $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{16-x^4}}.$

$$11. \quad \text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1-9x)\sqrt{x}}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

$$12. \quad \text{a) } \int_{-\infty}^0 (3x+4)e^{4x} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$13. \quad \text{a) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(\sqrt{x}-1)}; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{x dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$$

$$14. \quad \text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+4)}{x^2} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x-1}}.$$

$$15. \quad \text{a) } \int_0^{+\infty} \sqrt{x+1} \ln(x+1) dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}.$$

$$16. \quad \text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^3} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}.$$

$$17. \quad \text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

$$18. \quad \text{a) } \int_{-\infty}^0 (1-6x)e^{2x} dx; \quad \text{б) } \int_1^4 \frac{dx}{(x-3)^3}.$$

$$19. \quad \text{a) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{5/3}} dx; \quad \text{б) } \int_{2,5}^4 \frac{dx}{x^2-5x+6}.$$

$$20. \quad \text{a) } \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}; \quad \text{б) } \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx.$$

$$21. \quad \text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{e^x-1}.$$

22. a) $\int_0^{+\infty} (4-3x)e^{-3x} dx;$

б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-16x^4}}.$

23. a) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}(7-x)};$

б) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+8x^3}}.$

24. a) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}}{(e^x+4)^2} dx;$

б) $\int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}.$

25. a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(\sqrt[3]{x+4})x};$

б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-4x^2}}.$

26. a) $\int_0^{+\infty} e^{-4x}(2-9x) dx;$

б) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

27. a) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x-3}};$

б) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{8-8x^3}}.$

28. a) $\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x-12};$

б) $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

29. a) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx;$

б) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$