

3. Приближенные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений

3.1 Цель работы

Целью работы является изучение численных методов решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

3.2 Задание

Найти все корни уравнения с точностью до пяти знаков после запятой. Для одного из корней сделать ручные расчеты трех шагов приближений по всем методам.

Методы нахождения корней:

- Метод деления отрезка пополам.
- Метод хорд.
- Метод касательных (методом Ньютона).
- Метод итераций.

Найти также все корни уравнения с помощью встроенной функции MathCAD *root*.

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
1	$x^2 + \sin x = 0,5$	11	$x^3 + 3x + 9 = 12x^2$
2	$2\sin x + 0,3x + 1 = x^2$	12	$3\sin x + 0,6x = 0,8$
3	$x^3 + 0,5 = 1,4\sin x$	13	$2\cos x + 0,5x = 1$
4	$0,1x^2 + 2 = x \cdot \ln(x + 1)$	14	$3x + 8\sin x = 9$
5	$0,1x^3 + x + 5 = 2x^2$	15	$2,5x + 4\cos 2x = 10$
6	$x^3 - 0,4x^2 + 11 = 10,5x$	16	$1,5x^3 + 3x + 8 = 7x^2$
7	$1,3x^2 - \ln(x + 2) = 3$	17	$3x + 9,5 = x^3 + 5x^2$
8	$2,5x = 8\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	18	$2x^3 + 3 = 7\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$
9	$x^3 + 7 = 15\sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$	19	$5x^2 + 2,5x = 1,3 + x^3$
10	$0,5x^3 + 3 = 2x^2$	20	$x^3 = 3\sin x + 2x + 1,5$

3.3 Теоретические сведения

Пусть уравнение имеет вид $f(x)=0$. Функция $f(x)$ определена в некотором конечном или бесконечном интервале $a \leq x \leq b$. Всякое значение x^* обращающее функцию $f(x)$ в нуль называется корнем уравнения. При отыскании приближенных значений корней уравнения приходится решать две задачи:

- Отделение корней. Отыскиваются ограниченные области, в каждой из которых заключен один и только один корень уравнения.

- Вычисление корней с заданной точностью.

3.3.1 Приемы отделения корней

При отделении корней уравнения полезны следующие теоремы:

Теорема 1. Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значение разных знаков на концах промежутка $[a, b]$ так, что $f(a) \cdot f(b) < 0$, то внутри этого отрезка содержится, по меньшей мере, один корень уравнения $f(x) = 0$.

Теорема 2. Корень x^* будет единственным, если при выполнении условий, изложенных в предыдущей теореме, производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри $[a, b]$

3.3.2 Графический способ отделения корней

Интервалы, в которых находятся корни уравнения $f(x) = 0$ приближенно можно определить из графика функций $y = f(x)$ и $y = f'(x)$. Сначала строится укрупненный график, из которого делается вывод о наличии действительных корней у уравнения и их количества. Затем путем изменения масштаба (выделить в отдельном графике каждый из корней) найти промежутки, в которых находятся корни.

3.3.3 Аналитические методы отделения корней

Из теорем 1 и 2 следует, что, если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна и монотонна, на концах имеет разные знаки, то уравнение $f(x) = 0$ внутри $[a, b]$ имеет единственный корень.

Признаком монотонности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ является знакопостоянство ее первой производной на отрезке.

При аналитическом методе отделения корней функции $f(x)$ нужно найти корни производной $f'(x)$, которые укажут интервалы, подозрительные на содержание корней уравнения $f(x) = 0$. На концах этих интервалов проверяется условие первой теоремы. Если выполняется условие $f(a) \cdot f(b) < 0$, то интервал содержит корень.

3.3.4 Метод деления отрезка пополам

Дана функция $y = f(x)$ непрерывная на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющая условию $f(a) \cdot f(b) < 0$. Точка $\frac{a+b}{2}$ разбивает начальный отрезок на два:

$$\left[a, \frac{a+b}{2} \right] \text{ и } \left[\frac{a+b}{2}, b \right].$$

Отрезок, на концах которого функция имеет одинаковые знаки, отбрасываем, как не содержащий корень. Оставшийся отрезок обозначим $[a_1, b_1]$.

Длина этого отрезка равна $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. На k -м шаге деления отрезка пополам его длина будет равна:

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}.$$

Т.к. $\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = 0$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = x^*$.

Процесс деления отрезка пополам прекращается при условии:

$$|b_k - a_k| < \varepsilon,$$

где ε - требуемая точность вычисления корня уравнения. В качестве приближенного значения корня принимается $x^* = \frac{a_k + b_k}{2}$.

Пример вычисления корня уравнения методом деления отрезка пополам в **MathCAD** показан в п. 3.4.2.

Процесс вычисления корня уравнения методом деления отрезка пополам показан на Рис. 3.1.а.

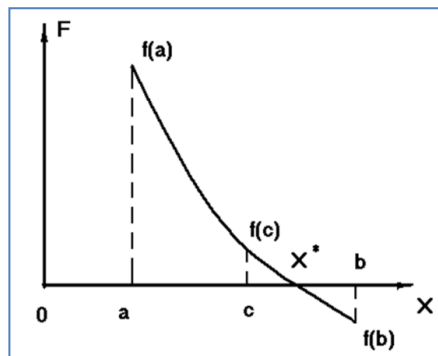


Рис. 3.1.а. Метод деления отрезка пополам

3.3.5 Метод хорд

Дана функция $y = f(x)$ непрерывная на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющая условию $f(a) \cdot f(b) < 0$. Очередное приближение x_k корня уравнения $f(x) = 0$ в методе хорд вычисляется по формуле:

$$x_k = x_{k-1} + \frac{f(x_{k-1}) \cdot (x_{k-1} - d)}{f(d) - f(x_{k-1})},$$

где x_{k-1} - предыдущее приближение корня, d - неподвижная граница отрезка.

В качестве начального приближения x_0 принимается одна из границ отрезка, удовлетворяющая условию:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0,$$

где $f''(x_0)$ - значение второй производной функции в точке x_0 .

Противоположная граница будет неподвижной (точка d). Вычисления корня прекращаются при условии, что:

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon.$$

Пример вычисления корня уравнения методом хорд в **MathCAD** показан в п. 3.4.3. Процесс вычисления корня уравнения методом хорд показан на Рис 3.1.б.

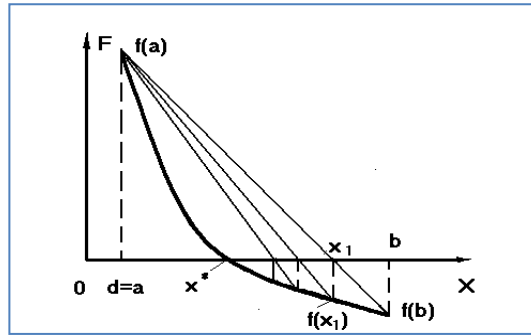


Рис 3.1.б. Метод хорд

3.3.6 Метод касательных (метод Ньютона)

Даны функция $y = f(x)$ и ее первая производная $f'(x)$, непрерывные на отрезке $[a, b]$. Функция удовлетворяет условию $f(a) \cdot f(b) < 0$. Очередное приближение x_k корня уравнения $f(x) = 0$ в методе касательных вычисляется по формуле:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})},$$

где x_{k-1} - предыдущее приближение корня.

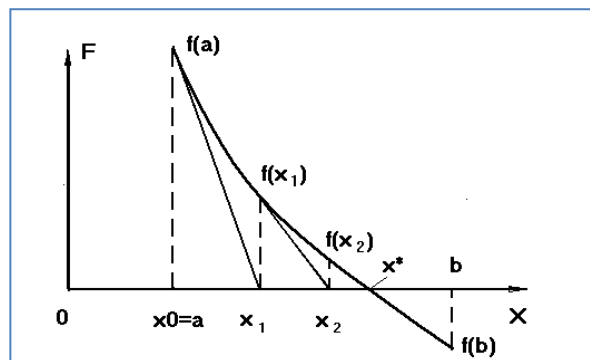
В качестве начального приближения x_0 принимается одна из границ отрезка, удовлетворяющая условию:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Вычисления корня прекращаются при условии, что:

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon.$$

Пример вычисления корня уравнения методом касательных в **MathCAD** показан в п.3.6.4. Процесс вычисления корня уравнения методом касательных показан на Рис. 3.1.в.



Рис, 3.1.в. Метод касательных (метод Ньютона)

3.3.7 Метод итераций

Требуется найти корень уравнения $f(x) = 0$, который расположен внутри промежутка $[a, b]$. Предполагается, что $f(x)$ непрерывна и имеет единственный корень на промежутке $[a, b]$.

Исходное уравнение преобразуется к виду:

$$x = \Phi(x).$$

Пусть x_0 - некоторая точка из промежутка $[a, b]$. Подставим x_0 в преобразованное уравнение и вычислим x_1 :

$$x_1 = \Phi(x_0).$$

Затем вычислим x_2, x_3 и т.д. На k -м шаге вычислим x_k :

$$x_k = \Phi(x_{k-1}).$$

Если последовательность $x_1, x_2, \dots, x_k$ при $k \rightarrow \infty$ имеет конечный предел $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, то x^* является корнем уравнения.

Теорема 3. Если $\Phi(x)$ определена и дифференцируема на всей числовой оси и существует положительное число $q < 1$ такое, что для всех x выполняется неравенство $|\Phi'(x)| < q$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень и процесс итерации сходится к этому корню независимо от выбора числа x_0 .

Чтобы уравнение $f(x) = 0$ удовлетворяло требованию теоремы 3, его следует преобразовать следующим образом.

Умножим левую и правую части уравнения на некоторый множитель L . Тогда получим

$$L \cdot f(x) = 0.$$

Добавим в левую и правую части уравнения по x и поменяем их местами:

$$x = x + L \cdot f(x).$$

Введем обозначение $\Phi(x) = x + L \cdot f(x)$. Тогда:

$$\Phi'(x) = 1 + L \cdot f'(x)$$

Если множитель L выбрать таким, чтобы

$$|1 + L \cdot f'(x)| < 1,$$

то условие теоремы 3 будут выполнены, что гарантирует сходимость итерационного процесса к корню уравнения.

Пример вычисления корня уравнения методом итераций в **MathCAD** показан в п.3.4.5.

3.3.8 Использование встроенной функции Mathcad *root*

Уравнение должно быть записано в виде $f(x) = 0$.

Для решения такого уравнения используется встроенная функция **root**, которая, в зависимости от типа задачи, может включать либо два, либо четыре аргумента и, соответственно, работает несколько по-разному:

- **root**($f(x), x$);
- **root**($f(x), x, a, b$), где a, b - границы интервала, внутри которого происходит поиск корня.

Первый тип функции **root** требует дополнительного задания начального значения переменной x . Для этого нужно просто предварительно присвоить x некоторое число. Поиск корня будет производиться вблизи этого числа. Таким образом, присвоение начального значения требует априорной информации о примерной локализации корня. Если уравнение имеет несколько корней, то будет

найден корень, ближайший к заданному начальному значению. Для нахождения других корней надо изменить начальное значение.

Иногда удобнее задавать не начальное приближение к корню, а интервал $[a, b]$, внутри которого корень заведомо находится. В этом случае следует использовать функцию **root** с четырьмя аргументами, а присваивать начальное значение x не нужно.

Когда **root** имеет четыре аргумента, следует помнить о двух ее особенностях: внутри интервала $[a, b]$ не должно находиться более одного корня, иначе будет найден один из них, заранее неизвестно, какой именно и значения $f(a)$ и $f(b)$ должны иметь разный знак, иначе будет выдано сообщение об ошибке.

Пример вычисления корня уравнения с помощью функции **root** показан в п.3.4.6.

3.4 Пример выполнения работы

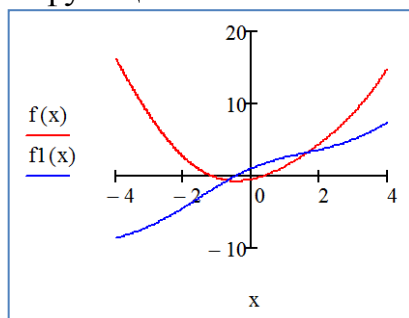
Найти все корни уравнения $x^2 + \sin x = 0,5$.

3.4.1 Определение отрезков, содержащих корни

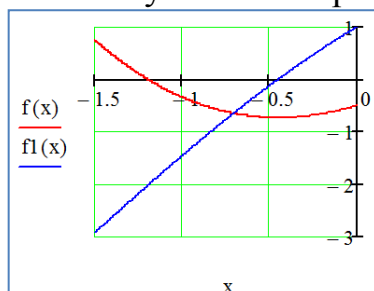
Зададим функцию $f(x)$ и ее первую и вторую производные $f'(x)$ и $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &:= x^2 + \sin(x) - 0.5 \\ f1(x) &:= \frac{d}{dx}f(x) \rightarrow 2 \cdot x + \cos(x) \\ f2(x) &:= \frac{d}{dx}f1(x) \rightarrow 2 - \sin(x) \end{aligned}$$

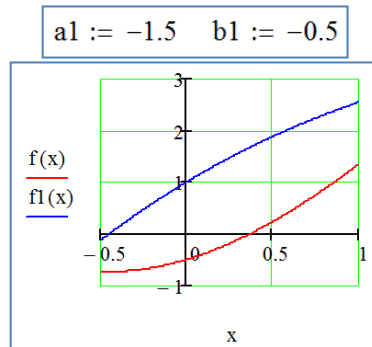
Построим графики этих функций:



Из графика видно, что исходное уравнение имеет два корня. Найдем промежутки, в которых выполняются условия теорем 1 и 2.



Из графика видно, что первый корень находится в промежутке $[-1,5; -0,5]$: знаки функции на концах промежутка разные, производная отрицательна (функция убывает).



Второй корень находится в промежутке $[0; 0,5]$.

$a2 := 0 \quad b2 := 0.5$

3.4.2 Нахождение корней методом деления отрезка пополам

Ниже приведена программа нахождения корня методом деления отрезка пополам. В программе используются следующие обозначения.

- **xs** – левый конец отрезка;
- **xf** – правый конец отрезка;
- **c** – середина отрезка;
- **eps** – погрешность вычисления корня.

```

rdiv2(xs,xf,eps) := while |xs - xf| > eps
    c ← (xs + xf) / 2
    xs ← c if f(c)·f(xs) > 0
    xf ← c otherwise
    x ← (xs + xf) / 2

```

Нахождение корней с помощью программы:

```

eps := 10-4
rdiv2(a1,b1,eps) = -1.19608
rdiv2(a2,b2,eps) = 0.37088

```

3.4.3 Нахождение корней методом хорд

Ниже приведена программа нахождения корня методом хорд. В программе дополнительно используются следующие обозначения.

- **x0** – предыдущее приближение корня;
- **x1** – следующее приближение корня;
- **xd** – неподвижная точка.

```

rhord(xs,xf,eps) :=
  x0 ← if (f(xs)·f2(xs) > 0, xs, xf)
  xd ← if (f(xs)·f2(xs) < 0, xs, xf)
  x1 ←  $\frac{xd \cdot f(x0) - x0 \cdot f(xd)}{f(x0) - f(xd)}$ 
  while |x1 - x0| > eps
    x0 ← x1
    x1 ←  $\frac{xd \cdot f(x0) - x0 \cdot f(xd)}{f(x0) - f(xd)}$ 

```

Нахождение корней с помощью программы:

```
rhord(a1,b1,eps) = -1.19604
```

```
rhord(a2,b2,eps) = 0.37088
```

3.4.4 Нахождение корней методом касательных

Ниже приведена программа нахождения корня методом касательных.

```

kasat(xs,xf,eps) :=
  x0 ← if (f(xs)·f2(xs) > 0, xs, xf)
  x1 ←  $x0 - \frac{f(x0)}{f1(x0)}$ 
  while |x1 - x0| > eps
    x0 ← x1
    x1 ←  $x0 - \frac{f(x0)}{f1(x0)}$ 

```

Нахождение корней с помощью программы:

```
kasat(a1,b1,eps) = -1.19608
```

```
kasat(a2,b2,eps) = 0.37089
```

3.4.5 Нахождение корней методом итераций

Итерационная функция:

```
 $\Phi(z,L) := z + L \cdot f(z)$ 
```

Производная итерационной функции:

```
 $\Phi1(z,L) := \frac{d}{dz} \Phi(z,L) \rightarrow L \cdot (2 \cdot z + \cos(z)) + 1$ 
```

Проверка условия сходимости итерационного процесса для нахождения первого корня:

```
 $\Phi1(a1,1) = -1.929$ 
```

```
 $\Phi1(b1,1) = 0.878$ 
```

Видно, что условие сходимости не выполняется. Найдем значение корректирующего коэффициента λ_1 :

```

L1 := 1
Given
|Φ1(a1,L1)| < 1
|Φ1(b1,L1)| < 1
λ1 := Find(L1) = 0.683

```

Проверка условия сходимости итерационного процесса для нахождения второго корня:

```

Φ1(a2,1) = 2
Φ1(b2,1) = 2.878

```

Видно, что условие сходимости не выполняется. Найдем значение корректирующего коэффициента λ_2 :

```

L2 := -1
Given
|Φ1(a2,L2)| < 1
|Φ1(b2,L2)| < 1
λ2 := Find(L2) = -1

```

Программа для нахождения корней методом итераций:

```

riter(xs,xf,eps,λ) :=
  x0 ← xs
  x1 ← xf
  while |x0 - x1| > eps
    x0 ← x1
    x1 ← x0 + λ·f(x0)
  x1

```

Нахождение корней с помощью программы:

```

riter(a1,b1,eps,λ1) = -1.1961
riter(a2,b2,eps,λ2) = 0.37085

```

3.4.6 Нахождение корней с помощью встроенной функции *root*.

```

x1 := root(f(x),x,a1,b1) = -1.19608
x2 := root(f(x),x,a2,b2) = 0.37089

```

3.5 Содержание отчета

1. Титульная страница с названием работы.
2. Задание.
3. Цель работы и краткие теоретические сведения.
4. Результат выполнения задания (в том числе ручные расчеты).

5. Выводы по проделанной работе (сравнение полученных результатов).

3.6 Контрольные вопросы

1. Какими методами находится отрезок, содержащий корень уравнения?
2. При каких условиях на отрезке имеется корень уравнения?
3. Как можно графически представить процесс приближенного вычисления корня уравнения методом половинного деления?
4. Как можно графически представить процесс приближенного вычисления корня уравнения методом хорд?
5. Как можно графически представить процесс приближенного вычисления корня уравнения методом касательных?
6. Как можно графически представить процесс приближенного вычисления корня уравнения методом итераций?
7. Как выбирается начальное приближение корня уравнения в методе хорд и в методе касательных?
8. Как преобразовывается исходное уравнение в методе итераций?
9. Как выбирается корректирующий коэффициент в методе итераций?

3.7 Литература

1. Волков Е.А. Численные методы: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд. - М., Наука, 1987.
2. Копченкова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М., Наука, 1972.
3. Дьяконов В. П. **MathCAD** 8-12 для студентов. М.: СОЛОН-Пресс.- 2005.