

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК НА ЖЕСТКИХ И УПРУГО-ПОДАТЛИВЫХ ОПОРАХ

*Методические указания к расчетно-графической работе
для студентов бакалавриата направлений подготовки
07.03.01, 08.03.01 и специальности 21.05.04*

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2016**

Введение

Учебной программой курса «Строительная механика» предусматривается изучение методики расчета многопролетных неразрезных балок в рамках выполнения студентами расчетно-графической работы.

Цель работы состоит в развитии у обучающихся навыков решения данного вида задач – важных при использовании в последующих учебных предметах и производственной практике.

Работа состоит из двух частей: расчета многопролетной балки на жестких опорах и расчета многопролетной балки на упруго-податливых опорах.

В данных методических указаниях рассматриваются теоретические положения расчета многопролетных балок, основанные на использовании уравнений трех и пяти моментов.

Указания сопровождаются примерами, позволяющими выбрать правильный путь решения.

Методические указания предназначены для использования как при проведении практических занятий, так и для самостоятельной работы студентов.

В практике проектирования инженерных сооружений и конструирования машин важным видом статически-неопределимых конструкций являются многопролетные неразрезные балки. Например, строительные балки, перекрывающие несколько пролетов или валы в механизмах на трех и более опорных подшипниках. Такое закрепление балок позволяет повысить их прочность и жесткость.

Определение в неразрезных балках опорных реакций с помощью одних лишь уравнений статики невозможно в связи с тем, что количество этих неизвестных реакций превышает количество уравнений статики.

Поэтому при раскрытии статической неопределимости неразрезных балок в дополнение к уравнениям статики составляют уравнения совместности деформаций в количестве равном степени статической неопределимости или равном числу "лишних" опорных связей, наложенных на балку.

1. Общие положения

Многопролетные статически неопределимые балки (неразрезные балки) являются весьма распространенными конструктивными элементами в строительстве.

Рассчитывать неразрезные балки можно несколькими методами, отличающимися подходом при раскрытии их статической неопределимости. Наиболее простыми из них является:

- при расчете балок на жестких опорах – метод на основе теоремы трех моментов;
- при расчете балок на упруго-податливых опорах – метод на основе теоремы пяти моментов.

После раскрытия статической неопределимости балок строят для них эпюры изгибающих моментов – M и перерезывающих сил – Q .

По максимальным значениям M и Q подбираются сечения балок.

2. Теорема трех моментов

Рассмотрим многопролетную балку на жестких опорах (рис. 1, а).

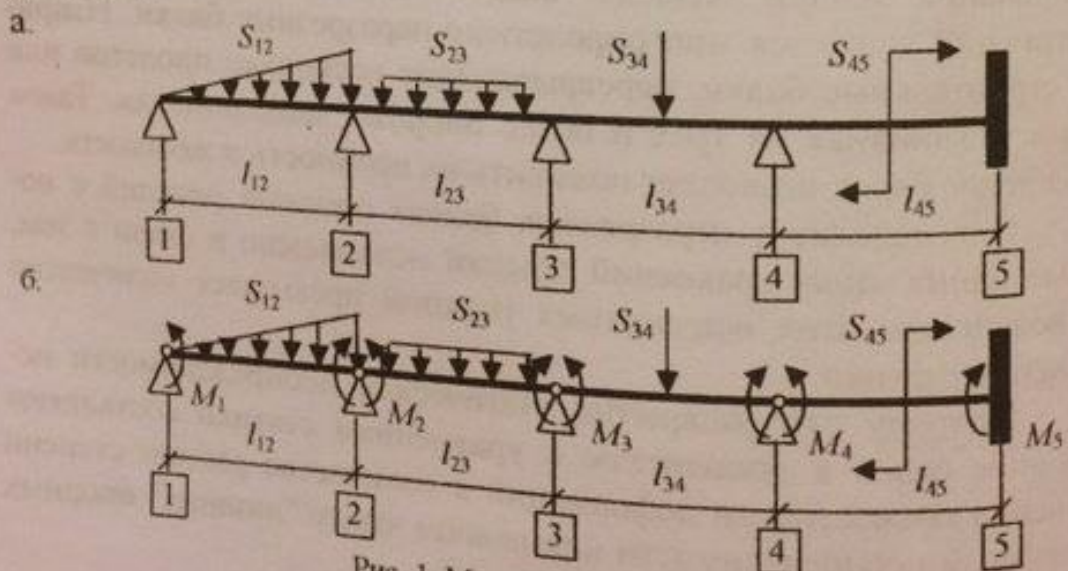


Рис. 1. Многопролетная балка:
а – в неразрезном виде,
б – в разрезанном виде с добавлением реактивных опорных моментов

Для раскрытия статической неопределенности и составления уравнений неразрывности деформаций мысленно рассежем балку над опорами и соединим части балки в этих местах шарнирами (см. рис. 1, б).

При этом от произведенных действий и внешней нагрузки осевая линия балки приобретет измененный вид по сравнению с ситуацией до врезания шарниров.

Для того чтобы вернуть балку в исходное до рассечения положение, надо приложить реактивные опорные моменты, компенсирующие введение шарниров (рис. 2).

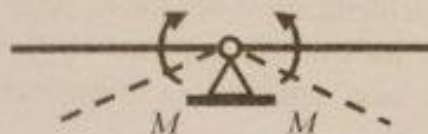


Рис. 2. Добавление реактивных опорных моментов в зоны введенных шарниров

Моменты слева и справа от опоры в месте рассечения равны между собой, т. к. это один и тот же момент.

Реактивные опорные моменты принимаются в качестве основных неизвестных при раскрытии статической неопределенности балки.

Рассмотрим участок неразрезной балки от 2-й до 4-й опор (см. рис. 1, б).

Этот участок балки после введения шарниров можно представить в виде двух однопролетных балок, нагруженных различными внешними нагрузками, обозначенными в общем виде — S_{ij} и реактивными опорными моментами — M_i (рис. 3).

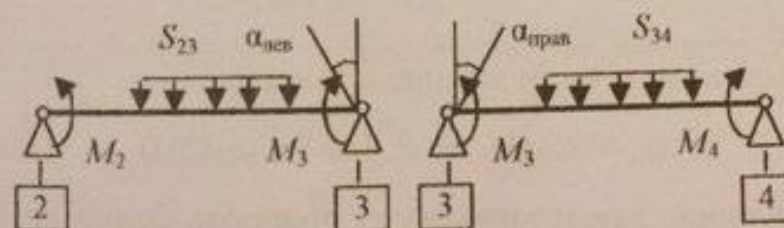


Рис. 3. Представление участка неразрезной балки в виде двух однопролетных балок

В реальной неразрезанной балке упругая линия плавно изменяется по ее длине и углы поворота на каждой опоре слева и справа от нее равны между собой –

$$\alpha_{\text{лев}} = \alpha_{\text{прав}}$$

В реальной разрезной балке, преобразованной из неразрезной, осевая линия является ломанной, а углы, в общем случае, не будут равны между собой

Однако в теории приведенное выше условие равенства углов используется при составлении уравнения неразрывности деформаций для определения неизвестных реактивных опорных моментов после преобразования неразрезной балки в "разрезную".

Из выше представленной неразрезной балки выделим 3-ю опору и составим для нее уравнение неразрывности деформаций (см. рис. 1, б, и см. рис. 3).

Уравнение неразрывности деформаций на 3-й опоре примет вид –

$$\alpha_{32} = \alpha_{34},$$

где α_{32} – угол поворота левой балки на 3-й опоре в сторону 2-й опоры;

α_{34} – угол поворота правой балки на 3-й опоре в сторону 4-й опоры.

Полный угол поворота балки на 3-й опоре в левую от опоры 3 сторону – α_{32} будет складываться из отдельных углов от нижеследующих параметров нагружения.

1) от действия опорных моментов M_2 и M_3 :

$$- \alpha_{32}(M_2),$$

$$- \alpha_{32}(M_3).$$

2) от действия в пролете внешней нагрузки S_{23} –

$$- \alpha_{32}(S_{23}).$$

В общем виде угол будет представлен –

$$\alpha_{32} = \alpha_{32}(M_2) + \alpha_{32}(M_3) + \alpha_{32}(S_{23}).$$

Аналогично представим угол поворота балки на 3-й опоре в правую от опоры 3 сторону –

$$\alpha_{34} = \alpha_{34}(M_3) + \alpha_{34}(M_4) + \alpha_{34}(S_{34}).$$

Примем правило знаков для углов поворота от опорных моментов.

- положительным будем считать угол поворота по часовой стрелке;
- отрицательный – против часовой стрелки.

Определим углы поворота $\alpha_{32}(M_2)$ и $\alpha_{23}(M_3)$ в частной форме например по методу начальных параметров, как углы поворота однопролетной балки, нагруженной опорным моментом M_i или M_j (рис. 4).

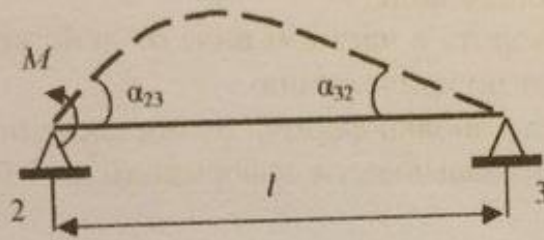


Рис. 4. Влияние реактивного момента M на углы поворота в опорах 2 и 3

Углы α_{ij} и α_{ji} от опорных моментов в частной форме по известным стандартным формулам с учетом направления поворота имеют вид:

$$\alpha_{23} = \frac{-Ml}{3EJ};$$

$$\alpha_{32} = \frac{Ml}{6EJ}.$$

Углы α_{ij} и α_{ji} от внешней нагрузки называются углами раскрытия и обозначаются буквой θ . Они находятся также при помощи метода готовых формул в зависимости от вида нагружения (см. Приложение)

Представим углы поворота балки от опорных моментов и внешней нагрузки в частно-общей форме (см. рис. 3).

Это углы α_{32} и α_{34} :

$$\alpha_{32} = \frac{M_2 l_{23}}{6E_{23} J_{23}} + \frac{M_3 l_{23}}{3E_{23} J_{23}} + \theta_{23};$$

$$\alpha_{34} = -\frac{M_3 l_{34}}{3E_{34} J_{34}} - \frac{M_4 l_{34}}{6E_{34} J_{34}} + \theta_{34}, \quad (1)$$

где θ_{23} и θ_{34} – углы раскрытия от внешней нагрузки, представленные в общем виде.

Углы поворота в частном виде от действия внешней нагрузки – S определяют по приложению.

После подстановки формул по определению углов поворотов (1) в уравнение неразрывности деформаций на 3-й опоре оно примет вид –

$$\alpha_{32} = \alpha_{34};$$

$$\frac{M_2 l_{23}}{6E_{23} J_{23}} + \frac{M_3 l_{23}}{3E_{23} J_{23}} + \theta_{23} = -\frac{M_3 l_{34}}{3E_{34} J_{34}} - \frac{M_4 l_{34}}{6E_{34} J_{34}} + \theta_{34}.$$

Чтобы получить уравнение неразрывности деформаций на 2-й и 4-й опорах, достаточно в этих формулах поменять индексы, т. е. соответственно уменьшить и увеличить на единицу их номера.

Некоторую особенность при составлении уравнения неразрывности деформаций представляют крайние опоры.

Рассмотрим случай, когда крайняя левая опора – опора 1 является шарнирной (рис. 5).

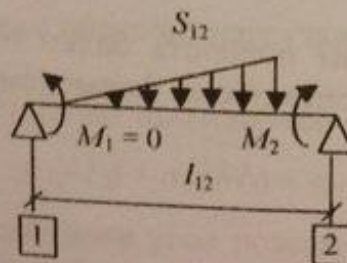


Рис. 5. Влияние места расположения опоры на составление уравнения неразрывности – левая опора шарнирная

Уравнение неразрывности для нее не составляют, так как $M_1 = 0$. И поэтому уравнения неразрывности начинают составлять со 2-й опоры.

Рассмотрим случай, когда крайняя левая опора – опора 1 является жесткой заделкой (рис. 6).

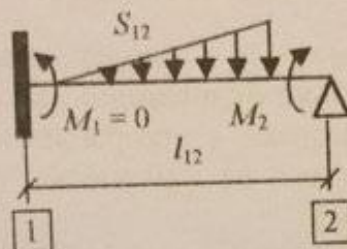


Рис. 6. Влияние места расположения опоры на составление уравнения неразрывности – левая опора жесткая

Для жесткой заделки уравнения составляются с учетом ее неподвижности.

Уравнение неразрывности для 1-й опоры (жесткой заделки) представляет собой –

$$\alpha_{лев} = \alpha_{пр.}$$

Однако, в связи с тем, что опора является жесткой заделкой, $\alpha_{лев} = \alpha_{пр} = \alpha_{12} = 0$, и поэтому уравнение неразрывности для 1-й опоры принимает вид –

$$-\frac{M_1 l_{12}}{3E_{12} J_{12}} - \frac{M_2 l_{12}}{6E_{12} J_{12}} + \theta_{12} = 0.$$

Количество уравнений неразрывности деформаций для рассчитываемой балки равно количеству опор.

В связи с тем, что в каждое уравнение входит не более трех неизвестных опорных моментов, такой метод раскрытия статической неопределимости балок получил название – "Теорема трех моментов".

После нахождения значений опорных моментов каждый пролет рассчитываемой балки рассматривается как отдельная свободно опертая однопролетная балка, на которую помимо заданной пролетной нагрузки действуют найденные реактивные опорные мо-

менты представленные как внешние.

Значения моментов (внутренних сил) в конкретных точках на общей эпюре изгибающих моментов находят в виде суммы значений моментов составляющих эпюр –

$$M_p = M_S + M_M,$$

где M_S – значения моментов с эпюры изгибающих моментов, построенной только от внешней пролетной нагрузки;

M_M – значения моментов с эпюры изгибающих моментов, построенной только от найденных опорных моментов (линейной эпюры).

Эпюра M_S строится для каждого пролета, как для однопролетной свободно опертой по концам балки, с учетом всей действующей в данном пролете внешней нагрузки, за исключением реактивных опорных моментов.

Ординаты эпюры откладываются в сторону растянутых волокон балки.

Эпюра M_M строится на том же чертеже и в том же масштабе следующим образом:

- значение опорных моментов – M_i откладывают в опорных сечениях в сторону сжатых данными моментами волокон;
- полученные точки соединяют прямыми линиями.

В результате наложения двух эпюр ординаты результирующей эпюры – M_p определятся отрезками между ломаной линией M_M , которую следует рассматривать как осевую линию результирующей эпюры, и линией M_S .

Величина опорной реакции – R_i , действующей на промежуточную, i -ю, опору многопролетной балки от опертых на нее смежных пролетов балки определяется формулами:

$$\begin{aligned} R_i &= R_{i,i-1} + R_{i,i+1}; \\ R_{i,i-1} &= R_{i,i-1}(S) + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i}; \\ R_{i,i+1} &= R_{i,i+1}(S) + \frac{M_i - M_{i+1}}{l_{i+1}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $R_{i,i-1}(S)$ и $R_{i,i+1}(S)$ – статически определимые реакции на i -й опоре от пролетных нагрузок S , вычисляемые в

предположении свободного опирания пролетов на опоры;

M_i, M_{i-1} и M_{i+1} – величины опорных моментов на i -й, $(i-1)$ -й и $(i+1)$ -й опорах, подставляемые с учетом знака;

l_i и l_{i+1} – длина i -го и $(i+1)$ -го пролетов балки.

Эпюры перерезывающих сил строят, рассматривая каждый пролет, как однопролетную балку с заданной пролетной нагрузкой и известными реакциями опор.

3. Теорема пяти моментов

Многопролетная балка может опираться не только на жесткие, но и на упруго-податливые опоры (рис. 7).

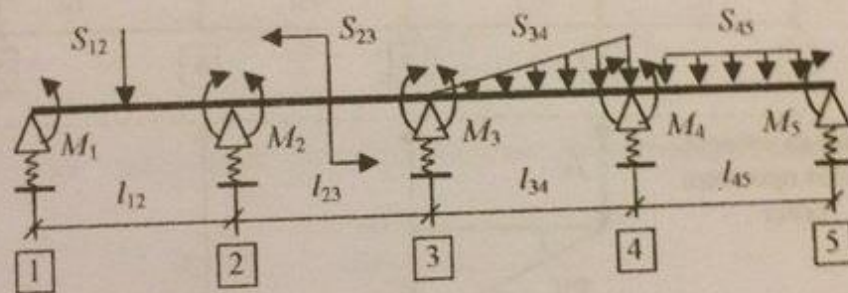


Рис. 7. Многопролетная неразрезная балка на упруго-податливых опорах

Упругое проседание опоры от нагрузки определяется –

$$f_i = A_i R_i,$$

где A_i – коэффициент податливости (коэффициент пропорциональности между проседанием i -й опоры и давлением на нее);

R_i – давление балки на i -ю опору численно равно опорной реакции (опорная реакция имеет противоположное направление).

Раскрытие статической неопределенности многопролетных балок на податливых опорах осуществляется аналогично тому, как это делается в теореме трех моментов, т. е. уравнение неразрывности деформаций имеет вид –

$$\alpha_{\text{лев}} = \alpha_{\text{прав}}$$

Это уравнение означает, что углы поворота балки на избранной опоре слева и справа от нее равны.

Однако при составлении уравнений суммарных углов поворота балки на податливой опоре есть особенности, ибо появляются дополнительные неизвестные (углы поворота, вызванные проседанием опор).

Рассмотрим расчетную схему многопролетной балки на упругих опорах (рис. 8).

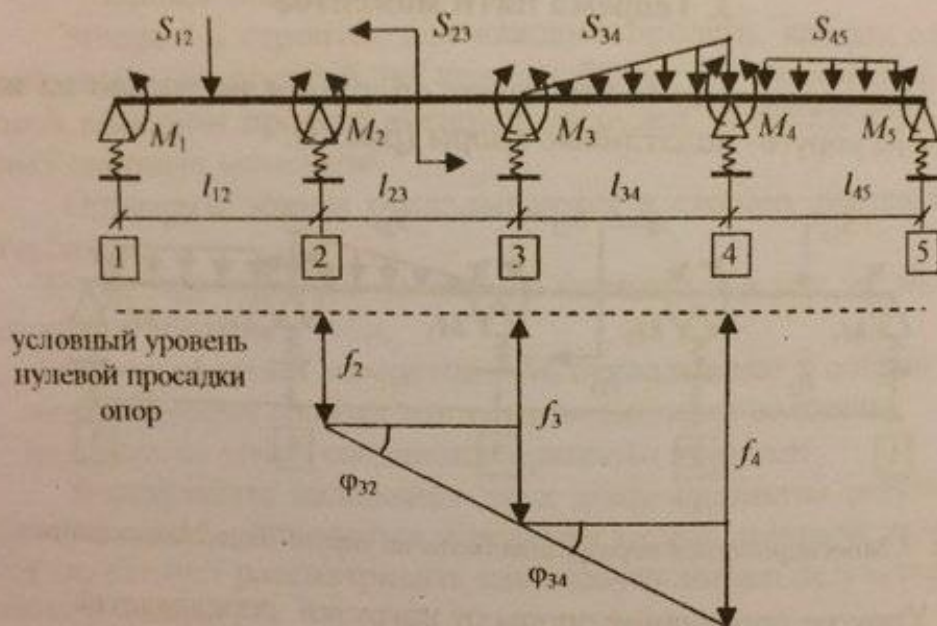


Рис. 8. Определение дополнительных углов поворота в неразрезной балке, вызванных проседанием опор

Выделим третью опору.

Для нее определим дополнительные углы поворотов, вызванные проседанием опор балки. Они геометрически равны (см. рис. 8).

$$\varphi_{32} = \frac{f_3 - f_2}{l_{23}},$$

$$\varphi_{34} = \frac{f_4 - f_3}{l_{34}}.$$

Составим уравнение неразрывности деформаций для 3-й опоры –

$$\alpha_{32} = \alpha_{34},$$

где

$$\alpha_{32} = \alpha_{32}(M_2) + \alpha_{32}(M_3) + \alpha_{32}(S_{23}) + \varphi_{23};$$

$$\alpha_{34} = \alpha_{34}(M_2) + \alpha_{34}(M_3) + \alpha_{34}(S_{34}) + \varphi_{34},$$

или

$$\alpha_{32} = + \frac{M_2 l_{23}}{6E_{23} J_{23}} + \frac{M_3 l_{23}}{3E_{23} J_{23}} + \theta_{32} + \frac{f_3 - f_2}{l_{23}};$$

$$\alpha_{34} = - \frac{M_3 l_{34}}{3E_{34} J_{34}} - \frac{M_4 l_{34}}{6E_{34} J_{34}} + \theta_{34} + \frac{f_4 - f_3}{l_{34}}.$$

Тогда уравнение неразрывности деформаций для третьей опоры –

$$\alpha_{32} = \alpha_{34}$$

после подстановки значений углов поворота примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{M_2 l_{23}}{6E_{23} J_{23}} + \frac{M_3 l_{23}}{3E_{23} J_{23}} + \theta_{32} + \frac{f_3 - f_2}{l_{23}} = \\ = - \frac{M_3 l_{34}}{3E_{34} J_{34}} - \frac{M_4 l_{34}}{6E_{34} J_{34}} + \theta_{34} + \frac{f_4 - f_3}{l_{34}}. \end{aligned}$$

Для каждой опоры составляется подобное уравнение, и из них составляется основная система уравнений. Число уравнений в этой системе должно соответствовать, числу неизвестных опорных моментов.

В основной системе уравнений присутствуют дополнительные неизвестные – f_i .

Для определения этих неизвестных составляется вспомогательная система уравнений, число которых соответствует числу неизвестных коэффициентов податливости опор –

$$f_i = A_i \cdot R_i.$$

Вспомогательное уравнение по определению f_3 для 3-й опоры в соответствии с (2) имеет вид –

$$f_3 = A_3 [R_{32} + R_{34}]$$

Опорные реакции выражаются через неизвестные опорные моменты и известную внешнюю пролетную нагрузку:

$$R_{32} = -\frac{M_2}{l_{23}} + \frac{M_3}{l_{23}} + R_{32}(S_{23});$$

$$R_{34} = \frac{M_3}{l_{34}} - \frac{M_4}{l_{34}} + R_{34}(S_{24}).$$

Тогда упругое проседание опоры (коэффициент податливости) будет иметь вид –

$$\begin{aligned} f_3 &= A_3 [R_{32} + R_{34}] = \\ &= A_3 \left[\left(-\frac{M_2}{l_{23}} + \frac{M_3}{l_{23}} + R_{32}(S_{23}) \right) + \left(\frac{M_3}{l_{34}} - \frac{M_4}{l_{34}} + R_{34}(S_{24}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Для каждого проседания составляется подобное уравнение по его определению и из них составляется вспомогательная система уравнений. После этого все f_i подставляются в основную систему уравнений. В результате подстановки и приведения подобных членов получается общая система уравнений, в каждое из которых входит не более пяти неизвестных опорных моментов, поэтому этот метод раскрытия статической неопределимости балок получил название – "Теорема пяти моментов".

После решения системы уравнений и нахождения значений опорных моментов каждый пролет рассчитываемой балки рассматривается как отдельная свободно опертая балка, на которую помимо

заданной пролетной нагрузки действуют найденные опорные моменты.

Эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил строятся аналогично изложенному выше порядку для жестких опор.

На основании построенных эпюр внутренних усилий подбирается и проверяется сечение балки или балок.

4. Пример расчета неразрезной балки на жестких и упруго-податливых опорах

Рекомендуемый порядок расчета:

- 1) строят расчетную схему балки с введением реактивных опорных моментов;
- 2) составляют систему уравнений для определения неизвестных опорных моментов;
- 3) решают систему уравнений и определяют из нее значения опорных моментов;
- 4) вычисляют опорные реакции;
- 5) строят эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
- 6) подбирают сечение балки и производят проверку прочности.

Дано

Двух- пролетная неразрезная балка закреплена жесткими заделками с двух концов и подвижной опорой в центральной части (рис. 9).

Жесткость балки – EJ по ее длине постоянна.

Подвижная опора выполнена в двух вариантах:

- жестком (рис. 9, а);
- упруго- податливым (рис. 9, б).

Коэффициент податливости средней опоры –

$$A = n \frac{l^3}{EJ},$$

где $n = 1$.

Задание

- 1) раскрыть статическую неопределимость балки;
- 2) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
- 3) вычислить опорные реакции;
- 4) подобрать из условия прочности двутавровое сечение.

В процессе решения рассмотреть два случая:

- 1) случай 1 – средняя опора жесткая (рис. 9, а);
- 2) случай 2 – средняя опора податливая (рис. 9, б).

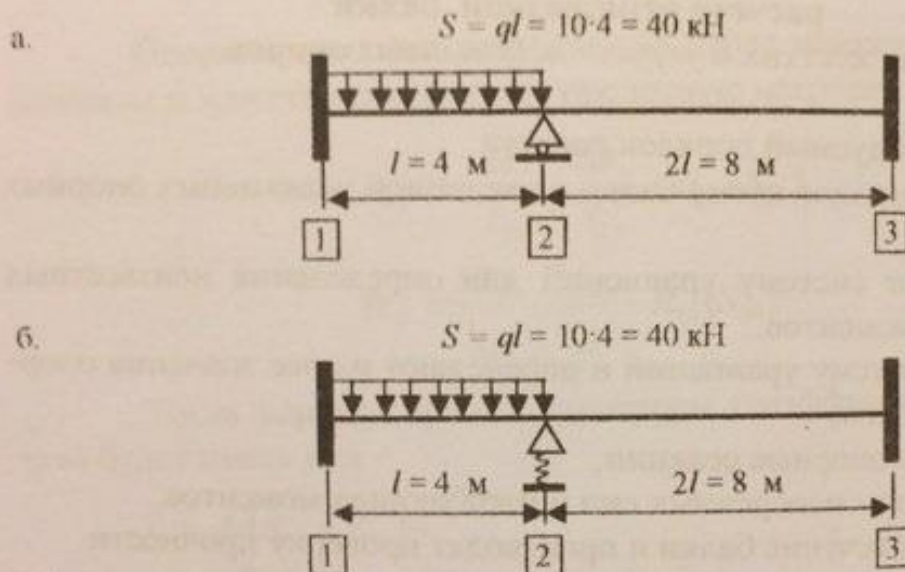


Рис. 9. Расчетные схемы к примеру расчета неразрезной балки.

а – на трех жестких опорах;

б – на двух жестких и одной упруго- податливой опоре

Решение

А. Случай 1. Промежуточная 2-я опора – жесткая (см. рис. 9, а).

1. Раскрытие статической неопределимости.

1. Мысленно разрежем балку на опорах (вставим шарниры) и приложим реактивные опорные моменты, компенсирующие введение шарниров. Опорные моменты примем за дополнительные лишние неизвестные (рис. 10).
2. Для каждой опоры балки составим уравнения неразрывности деформаций по теореме трех моментов.

Для 1-й опоры при жесткой заделке слева угол $\alpha_{12} = 0$, тогда уравнение неразрывности деформаций –

$$\alpha_{лев} = \alpha_{прав}$$

с учетом угла раскрытия взятого из приложения примет вид –

$$\alpha_{12} = \alpha_{21};$$

$$0 = -\frac{M_1 l_{12}}{3EJ} - \frac{M_2 l_{12}}{6EJ} + \frac{ql_{12}^3}{24EJ}. \quad (3)$$

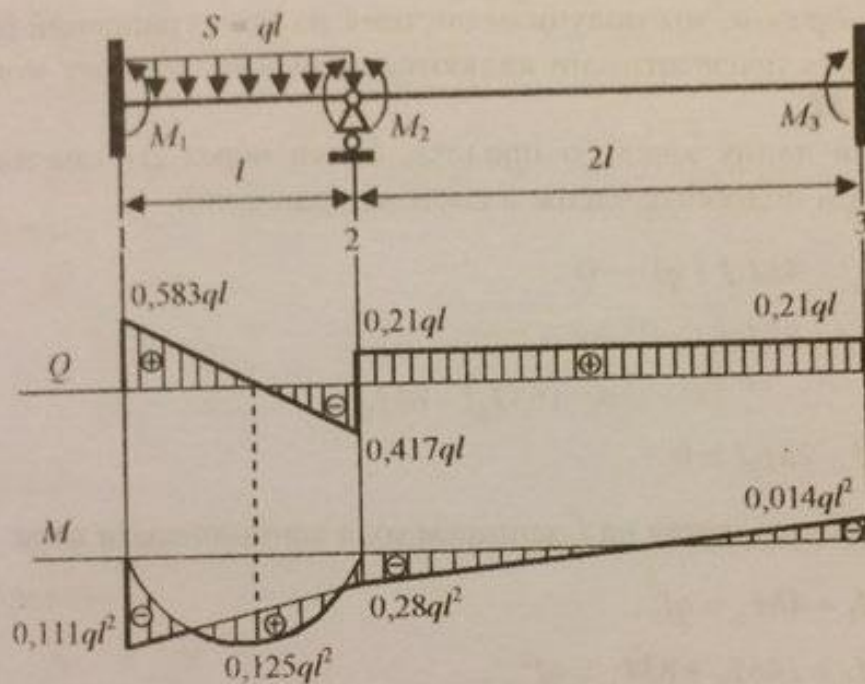


Рис. 10. Построение эпюр поперечных сил – Q и изгибающих моментов – M для балки с жесткой промежуточной опорой

Для 2-й (промежуточной) опоры уравнение с учетом угла раскрытия взятого из приложения имеет вид –

$$\frac{M_1 l_{12}}{6EJ} + \frac{M_2 l_{12}}{3EJ} - \frac{ql_{12}^3}{24EJ} = -\frac{M_2 l_{23}}{3EJ} - \frac{M_3 l_{23}}{6EJ} \quad (4)$$

Для 3-й опоры при жесткой заделке справа угол $\alpha_{32} = 0$, и уравнение неразрывности деформаций принимает вид –

$$\frac{M_2 l_{23}}{6EJ} + \frac{M_3 l_{23}}{3EJ} = 0 \quad (5)$$

3. Таким образом, мы получили систему из трех уравнений (3) ÷ (5), в которых неизвестными являются значения опорных моментов M_1, M_2, M_3 .
4. Выразив длину каждого пролета, балки через его значения $-l$, приведем подобные члены в системе уравнений:

$$\begin{aligned} -8M_1 l - 4M_2 l + ql^3 &= 0; \\ +4M_1 l + 8M_2 l - ql^3 &= \\ &= -16M_2 l - 8M_3 l; \\ +M_2 l + 2M_3 l &= 0. \end{aligned}$$

5. Сократив уравнения на l , запишем их в каноническом виде:

$$\begin{aligned} +8M_1 + 4M_2 &= ql^2; \\ +4M_1 + 24M_2 + 8M_3 &= ql^2; \\ + M_2 + 2M_3 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

6. Решим полученную систему уравнений в матричной форме. В общем случае решение имеет вид:

$$\alpha_{11}M_1 + \alpha_{12}M_2 + \alpha_{13}M_3 = b_1;$$

$$\alpha_{21}M_1 + \alpha_{22}M_2 + \alpha_{23}M_3 = b_2;$$

$$\alpha_{31}M_1 + \alpha_{32}M_2 + \alpha_{33}M_3 = b_3,$$

где

$$M_1 = \begin{vmatrix} b_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ b_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ b_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} : D;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & b_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & b_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & b_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix} : D;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & b_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & b_3 \end{vmatrix} : D;$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix};$$

$$D \neq 0.$$

Для системы (6) в соответствии с решаемой задачей параметры равны:

$$D = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 24 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 8(24 \cdot 2 - 8 \cdot 1) - 4(4 \cdot 2 - 8 \cdot 0) + 0(4 \cdot 1 - 24 \cdot 0) =$$

$$= +288;$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} ql^2 & 4 & 0 \\ ql^2 & 24 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} : D =$$

$$= [ql^2(24 \cdot 2 - 8 \cdot 1) - 4(ql^2 \cdot 2 - 8 \cdot 0) + 0 \cdot (ql^2 \cdot 1 - 24 \cdot 0)] : 288 =$$

$$= +0,111 \cdot ql^2;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 8 & ql^2 & 0 \\ 4 & ql^2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} : D =$$

$$= [8(ql^2 \cdot 2 - 0 \cdot 8) - ql^2(4 \cdot 2 - 0 \cdot 8) + 0 \cdot (4 \cdot 0 - 0 \cdot ql^2)] : 288 =$$

$$= +0,028 \cdot ql^2;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & ql^2 \\ 4 & 24 & ql^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} : D =$$

$$= [8(24 \cdot 0 - ql^2 \cdot 1) - 4(4 \cdot 0 - 0 \cdot ql^2) + ql^2(4 \cdot 1 - 24 \cdot 0)] : 288 =$$

$$= -0,014 \cdot ql^2;$$

Окончательно:

$$M_1 = +0,111 \cdot ql^2;$$

$$M_2 = +0,028 \cdot ql^2;$$

$$M_3 = -0,014 \cdot ql^2.$$

Система уравнений может быть также решена с использованием любой стандартной компьютерной математической программы.

7. Определим опорные реакции через найденные опорные моменты по формулам (2).

Для 1-й, 2-й и 3-й опор получим соответственно:

$$\begin{aligned}
 R_1 = R_{12} &= \\
 &= +R_{12}(S) + \frac{M_1}{l_{12}} - \frac{M_2}{l_{12}} = \\
 &= +\frac{ql}{2} + \frac{0,111 \cdot ql^2}{l} - \frac{0,028 \cdot ql^2}{l} = \\
 &= +0,583ql;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_2 = +R_{21} + R_{23} &= \\
 &= +R_{21}(S) + \frac{M_2}{l_{12}} - \frac{M_1}{l_{12}} + \frac{M_2}{l_{23}} - \frac{M_3}{l_{23}} = \\
 &= +\frac{ql}{2} + \frac{0,028 \cdot ql^2}{l} - \frac{0,111 \cdot ql^2}{l} + \frac{0,028 \cdot ql^2}{2l} - \frac{-0,014 \cdot ql^2}{2l} = \\
 &= +0,438 \cdot ql;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_3 = R_{32} &= \\
 &= \frac{M_3}{l_{23}} - \frac{M_2}{l_{23}} = \\
 &= \frac{-0,014 \cdot ql^2}{2l} - \frac{+0,028 \cdot ql^2}{2l} = \\
 &= -0,021 \cdot ql.
 \end{aligned}$$

8. Для проверки правильности нахождения опорных реакций используем уравнение статики, проецируя все силы, действующие на балку, на вертикальную ось y -

$$\begin{aligned}
 \Sigma y &= 0; \\
 +0,583 \cdot ql - ql + 0,438 \cdot ql - 0,021 \cdot ql &= \\
 = +1,02 \cdot ql - 1,02 \cdot ql &= 0.
 \end{aligned}$$

II. Построение эпюр внутренних усилий (см. рис. 10).

Эпюра изгибающих моментов.

1. Проводим нулевую линию.
2. От нее откладываем над 1-й, 2-й и 3-й опорами величины соответствующих опорных моментов в сторону растягиваемых данными моментами волокон.
3. Полученные точки соединяем прямыми линиями, образуя эпюру опорных моментов.
4. Для каждого пролета, как для однопролетной, свободно опертой по концам балки, строим эпюру изгибающих моментов от всей внешней нагрузки в данном пролете, откладывая ординаты моментов от нулевой линии в сторону сжатых волокон.
5. В результате наложения двух эпюр получаем результирующую эпюру изгибающих моментов, которую заштриховываем, представляя числовые значения в характерных точках.

Эпюра поперечных сил.

1. Эпюры поперечных сил при известных значениях опорных реакций и внешней нагрузки строятся обычным порядком, как для простых статически определимых балок (см. рис. 10).

III. Подбор сечения.

Определим максимальный изгибающий момент.

На эпюре изгибающих моментов видно, что максимальный момент находится в месте заделки (1-я опора) (см. рис. 10).

Он равен –

$$\begin{aligned} |M_{\max}| &= 0,111 \cdot ql \cdot l = \\ &= 0,111 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 4 = 17,76 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

2. Определим момент сопротивления –

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \\ &= \frac{17,76 \text{ кН} \cdot \text{м}}{180000 \text{ кПа}} = 98,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3, \end{aligned}$$

где $[\sigma]$ – нормативное напряжение; для стали $[\sigma] = 180000$ кПа.

3. Выберем двутавр, соответствующий расчетному моменту сопротивления.

По сортаменту прокатной стали подбираем двутавровую балку № 16 с $W_x = 109 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$.

Б. Случай 2. Промежуточная 2-я опора балки является податливой (см. рис. 9, б).

I. Раскрытие статической неопределенности.

Раскрытие статической неопределенности заданной балки с упруго-податливой промежуточной опорой осуществляется аналогично порядку, изложенному в первой части расчета, с прибавлением дополнительных неизвестных углов поворота от проседания второй опоры (рис. 11).

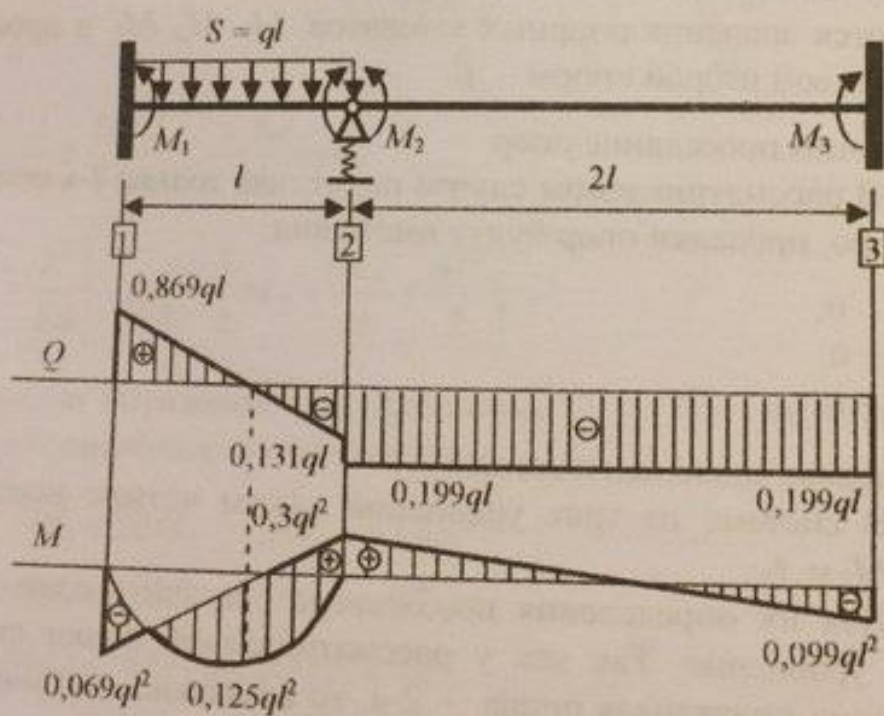


Рис. 11. Построение эпюр поперечных сил – Q и изгибающих моментов – M для балки с упруго-податливой промежуточной опорой

Для каждой опоры балки составим уравнения неразрывности деформаций по теореме пяти моментов, учитывая, что 1-я и 3-я опоры – жесткие (жесткая заделка), а 2-я – податливая.

Уравнения для 1-й, 2-й и 3-й опор соответственно:

$$-\frac{M_1 l_{12}}{3EJ} - \frac{M_2 l_{12}}{6EJ} + \frac{ql_{12}^3}{24EJ} + \frac{f_2 - f_1}{l_{12}} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{M_1 l_{12}}{6EJ} + \frac{M_2 l_{12}}{3EJ} - \frac{ql_{12}^3}{24EJ} + \frac{f_2 - f_1}{l_{12}} = -\frac{M_2 l_{23}}{3EJ} - \frac{M_3 l_{23}}{6EJ} + \frac{f_3 - f_2}{l_{23}}; \quad (8)$$

$$\frac{M_2 l_{23}}{6EJ} + \frac{M_3 l_{23}}{3EJ} + \frac{f_3 - f_2}{l_{23}} = 0. \quad (9)$$

2. В полученной системе из трех уравнений (7) ÷ (9) неизвестными являются значения опорных моментов: M_1 , M_2 , M_3 и проседание податливой второй опоры – f_2 .

3. Обозначим проседание опор.

В рассматриваемом случае податлива только 2-я опора, следовательно, просадки опор будут иметь вид:

$$f_1 = 0;$$

$$f_2 \neq 0;$$

$$f_3 = 0.$$

4. Определим число неизвестных.

В системе из трех уравнений имеем четыре неизвестных: M_1 , M_2 , M_3 и f_2 .

Для их определения необходимо составить одно дополнительное уравнение. Так как у рассматриваемой балки существует только одна податливая опора – 2-я, то возможно составить дополнительное уравнение только для этой опоры.

5. Составим в добавление к уравнениям (7) ÷ (9) дополнительное уравнение для 2-й опоры –

$$f_2 = AR_2 = A \left[-\frac{M_1}{l_{12}} + \frac{M_2}{l_{12}} + \frac{ql}{2} + \frac{M_2}{l_{23}} - \frac{M_3}{l_{23}} \right] \quad (10)$$

В результате получена система (7) ÷ (10) из четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

6. Заменяем в полученной системе (7) ÷ (10) обобщенные пролеты балки $-l_j$ через их заданные размеры $-l$, подставим значения проседания опор и умножим все части уравнений (7) ÷ (9) на жесткость балки:

$$\frac{M_1 l}{3} - \frac{M_2 l}{6} + \frac{ql^3}{24} + \frac{f_2 EJ}{l} = 0;$$

$$\frac{M_1 l}{6} + \frac{M_2 l}{3} - \frac{ql^3}{24} + \frac{f_2 EJ}{l} = -\frac{2M_2 l}{3} - \frac{2M_3 l}{6} - \frac{f_2 EJ}{2l};$$

$$\frac{2M_2 l}{6} + \frac{2M_3 l}{3} - \frac{f_2 EJ}{2l} = 0;$$

$$f_2 = \frac{l^2}{EJ} \left[-M_1 + \frac{3}{2}M_2 - \frac{M_3}{2} + \frac{ql^2}{2} \right].$$

7. Подставим выражение f_2 в уравнения (7) ÷ (9) и после соответствующих преобразований получим:

$$\begin{cases} -32M_1 + 32M_2 - 12M_3 = -13ql^2; \\ -32M_1 + 46M_2 - 10M_3 = -17ql^2; \\ + 6M_1 - 5M_2 + 11M_3 = + 3l^2. \end{cases}$$

8. Решив систему трех уравнений, определим значения опорных моментов:

$$M_1 = 0,69 \cdot ql^2;$$

$$M_2 = -0,3 \cdot ql^2;$$

$$M_3 = 0,099 \cdot ql^2.$$

9. Определим опорные реакции для 1-й, 2-й и 3-й опор соответственно:

$$\begin{aligned} R_1 = R_{12} &= \\ &= R_{12}(S) + \frac{M_1}{l_{12}} - \frac{M_2}{l_{12}} = \\ &= \frac{ql}{2} + \frac{0,069ql^2}{l} - \frac{-0,3ql^2}{l} = \\ &= +0,869ql; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 = R_{21} + R_{23} &= \\ &= R_{21}(S) + \frac{M_2}{l_{12}} - \frac{M_1}{l_{12}} + \frac{M_2}{l_{23}} - \frac{M_3}{l_{23}} = \\ &= \frac{ql}{2} + \frac{-0,3ql^2}{l} - \frac{0,069ql^2}{l} + \frac{-0,3ql^2}{2l} - \frac{0,099ql^2}{2l} = \\ &= -0,068ql; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3 = R_{32} &= \\ &= \frac{M_3}{l_{23}} - \frac{M_2}{l_{23}} = \\ &= \frac{0,099ql \cdot l}{2l} - \frac{-0,3ql \cdot l}{2l} = \\ &= +0,199ql. \end{aligned}$$

10. Для проверки правильности вычислений опорных реакций составим уравнение равновесия, проектируя все силы, действующие на балку, на вертикальную ось –

$$\begin{aligned} \Sigma y &= 0; \\ R_1 - R_2 + R_3 - S &= \\ &= +0,869ql - 0,068ql + 0,199ql - ql = \\ &= +1,869ql - 1,869ql = 0. \end{aligned}$$

II. Построение эпюр внутренних усилий.

1. Построение эпюр изгибающих моментов и перерезывающих сил производится аналогично изложенному в первом случае расчета.
2. Эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил представлены на рис. 11.

III. Подбор сечения.

Определим максимальный изгибающий момент.

Из эпюры изгибающих моментов (см. рис. 11) видно, что момент максимален на расстоянии $0,869 \cdot l$ от 1-й опоры (заделки) –

$$\begin{aligned} |M_{\max}| &= 0,32ql \cdot l = \\ &= 0,32 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 4 = 51,2 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

2. Определим момент сопротивления –

$$\begin{aligned} W_x &= \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \\ &= \frac{51,2 \text{ кН} \cdot \text{м}}{180000 \text{ кПа}} = 284,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3. \end{aligned}$$

3. Выберем двутавр, соответствующий расчетному моменту сопротивления.

По сортаменту прокатной стали подбираем двутавровую балку № 24 ($W_x = 289 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$).

5. Использование измененного уравнения трех моментов

Кроме описанного способа раскрытия статической неопределенности неразрезных балок существует и другой способ применения уравнения трех моментов. Он основан на рассмотренном способе с некоторыми особенностями, позволяющими считать в отдельных случаях его более практичным и приемлемым для использования.

Получим измененное уравнение трех моментов. Для этого рассмотрим неразрезную балку на трех шарнирных опорах, имеющую консоли (рис. 12).

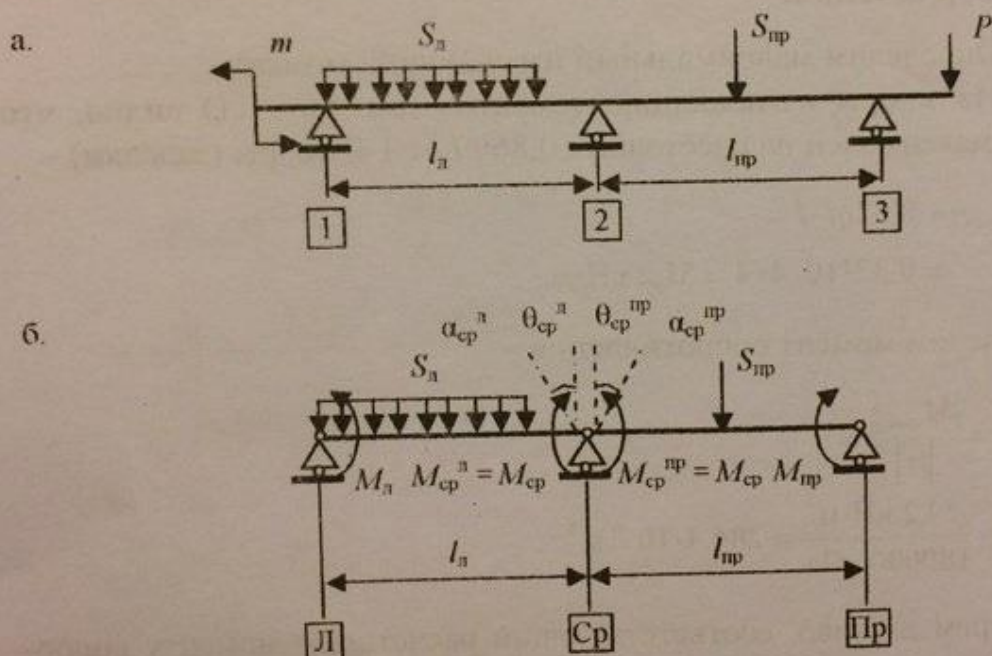


Рис. 12. Схема к выводу уравнения трех моментов для неразрезной балки:
а – неразрезная балка;

б – разрезная балка эквивалентная по работе неразрезной;

S_n, S_{np} – обобщенная внешняя пролетная нагрузка;

$\alpha_{cp}^n, \alpha_{cp}^{np}$ – углы поворота на средней опоре от всей нагрузки действующей на левую или правую балку

$\theta_{cp}^n, \theta_{cp}^{np}$ – углы раскрытия от пролетной нагрузки

Выразим левый и правый углы поворота на средней опоре, возникающие от нагрузки, действующей на левую и правую балки, включая внешнюю пролетную нагрузку и реактивные опорные моменты:

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{ср}}^{\text{л}} &= \alpha(M_{\text{л}}) + \alpha(M_{\text{ср}}) + \alpha(S_{\text{л}}) = \\ &= \frac{M_{\text{л}} l_{\text{л}}}{6EI_x} + \frac{M_{\text{ср}} l_{\text{л}}}{3EI_x} + \theta_{\text{ср}}^{\text{л}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{\text{ср}}^{\text{пр}} &= \alpha(M_{\text{пр}}) + \alpha(M_{\text{ср}}) + \alpha(S_{\text{пр}}) = \\ &= -\frac{M_{\text{пр}} l_{\text{пр}}}{6EI_x} - \frac{M_{\text{ср}} l_{\text{пр}}}{3EI_x} - \theta_{\text{ср}}^{\text{пр}}.\end{aligned}$$

- где $\alpha(M_{\text{л}})$, $\alpha(M_{\text{ср}})$, $\alpha(M_{\text{пр}})$ – углы поворота на средней опоре от реактивных опорных моментов;
 $\alpha(S_{\text{л}})$, $\alpha(S_{\text{пр}})$ – углы поворота на средней опоре от внешней нагрузки, за исключением реактивных опорных моментов;
 $\theta_{\text{ср}}^{\text{л}}$, $\theta_{\text{ср}}^{\text{пр}}$ – углы раскрытия, выше обозначенные как $\alpha(S_{\text{л}})$, $\alpha(S_{\text{пр}})$, и равные им.

Условие неразрывности деформаций на средней опоре, как было указано ранее, имеет вид –

$$\alpha_{\text{ср}}^{\text{л}} = \alpha_{\text{ср}}^{\text{пр}}.$$

После подстановки полученных выше значений углов поворотов уравнение совместности примет вид:

$$\begin{aligned}\frac{M_{\text{л}} l_{\text{л}}}{6EI_x} + \frac{M_{\text{ср}} l_{\text{л}}}{3EI_x} + \theta_{\text{ср}}^{\text{л}} &= \\ &= -\frac{M_{\text{пр}} l_{\text{пр}}}{6EI_x} - \frac{M_{\text{ср}} l_{\text{пр}}}{3EI_x} - \theta_{\text{ср}}^{\text{пр}}.\end{aligned}$$

Проведем преобразования уравнений:

$$\frac{M_{\pi} l_{\pi}}{6EI_x} + \frac{M_{\text{cp}} l_{\pi}}{3EI_x} + \frac{M_{\text{np}} l_{\text{np}}}{6EI_x} + \frac{M_{\text{cp}} l_{\text{np}}}{3EI_x} =$$

$$= -\theta_{\text{cp}}^{\pi} - \theta_{\text{cp}}^{\text{np}};$$

$$\frac{M_{\pi} l_{\pi}}{6EI_x} + \frac{M_{\text{cp}} l_{\pi}}{3EI_x} + \frac{M_{\text{cp}} l_{\text{np}}}{3EI_x} + \frac{M_{\text{np}} l_{\text{np}}}{6EI_x} =$$

$$= -(\theta_{\text{cp}}^{\pi} + \theta_{\text{cp}}^{\text{np}});$$

$$\frac{M_{\pi} l_{\pi}}{6EI_x} + \frac{M_{\text{cp}} l_{\pi} + M_{\text{cp}} l_{\text{np}}}{3EI_x} + \frac{M_{\text{np}} l_{\text{np}}}{6EI_x} =$$

$$= -(\theta_{\text{cp}}^{\pi} + \theta_{\text{cp}}^{\text{np}});$$

$$\frac{M_{\pi} l_{\pi}}{6EI_x} + \frac{M_{\text{cp}} (l_{\pi} + l_{\text{np}})}{3EI_x} + \frac{M_{\text{np}} l_{\text{np}}}{6EI_x} =$$

$$= -(\theta_{\text{cp}}^{\pi} + \theta_{\text{cp}}^{\text{np}});$$

$$\frac{M_{\pi} l_{\pi}}{6EI_x} + \frac{2 \cdot M_{\text{cp}} (l_{\pi} + l_{\text{np}})}{2 \cdot 3EI_x} + \frac{M_{\text{np}} l_{\text{np}}}{6EI_x} =$$

$$= -(\theta_{\text{cp}}^{\pi} + \theta_{\text{cp}}^{\text{np}});$$

$$\frac{M_{\pi} l_{\pi}}{6EI_x} + \frac{2 \cdot M_{\text{cp}} (l_{\pi} + l_{\text{np}})}{6EI_x} + \frac{M_{\text{np}} l_{\text{np}}}{6EI_x} =$$

$$= -(\theta_{\text{cp}}^{\pi} + \theta_{\text{cp}}^{\text{np}});$$

$$\frac{M_{\pi} l_{\pi} + 2 \cdot M_{\text{cp}} (l_{\pi} + l_{\text{np}}) + M_{\text{np}} l_{\text{np}}}{6EI_x} =$$

$$= -(\theta_{\text{cp}}^{\pi} + \theta_{\text{cp}}^{\text{np}}).$$

После проведенных преобразований уравнение трех моментов окончательно приобретет вид –

$$M_{\text{д}} l_{\text{д}} + 2 \cdot M_{\text{ср}} (l_{\text{д}} + l_{\text{пр}}) + M_{\text{ср}} l_{\text{пр}} = -6EI_x (\theta_{\text{ср}}^{\text{д}} + \theta_{\text{ср}}^{\text{пр}}).$$

6. Особенности расчета многопролетных балок с помощью измененного уравнения трех моментов

Наиболее часто раскрытие статической неопределимости многопролетных балок производится с помощью, так называемого, уравнения трех моментов.

Практичнее первоначально рассмотреть применение уравнения трех моментов на балках являющихся один раз статически неопределимыми.

Существует несколько видов один раз статически неопределимых многопролетных неразрезных балок.

1. Балка на трех опорах имеющая две консоли.
2. Балка на трех опорах не имеющая консолей.
3. Балка на трех опорах имеющая одну консоль.
4. Балка с жесткой заделкой и одной шарнирно-подвижной опорой с консолью или без консоли.

Раскрытие статической неопределимости имеет свои особенности в зависимости от их вида.

Наиболее удобно рассмотреть использование уравнения трех моментов на балке с одной шарнирно-неподвижной, двумя шарнирно-подвижных опорами и двумя консолями (рис. 13).

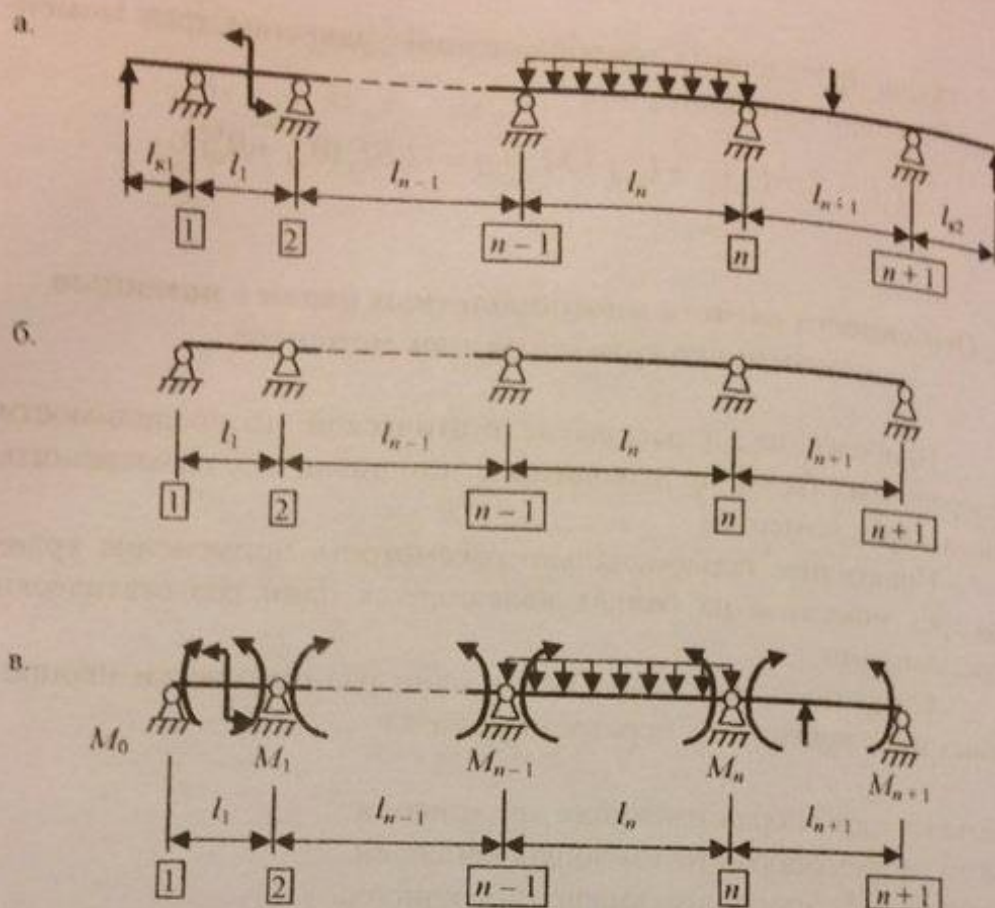


Рис. 13. Преобразование неразрезной балки с консолями в расчетную схему для использования уравнения трех моментов.
 а – заданная система (ЗС);
 б – основная система (ОС);
 в – эквивалентная система (ЭС)

На рис. 13, а показана нагруженная многопролетная балка с консолями, лежащая на ряде промежуточных опор, с которыми она соединена шарнирно.

Опоры нумеруются слева направо цифрами 1, 2, ..., $n-1$, n , $n+1$ и т. д. Длины пролетов обозначаются слева направо буквами l_1 , l_2 , ..., l_{n-1} , l_n , l_{n+1} и т. д.

Консоли необходимо отбросить, заменив действие консольных нагрузок соответствующими моментами, вычисленными отно-

сительно ближайшей опоры, тем самым, приводя заданную балку к виду, представленному на рис. 13, б.

В случае жесткого защемления концевого сечения неразрезной балки (рис. 14, а) защемление необходимо заменить дополнительным фиктивным пролетом бесконечно малой длины ($l_1 = 0$), как показано на рис. 14, б.

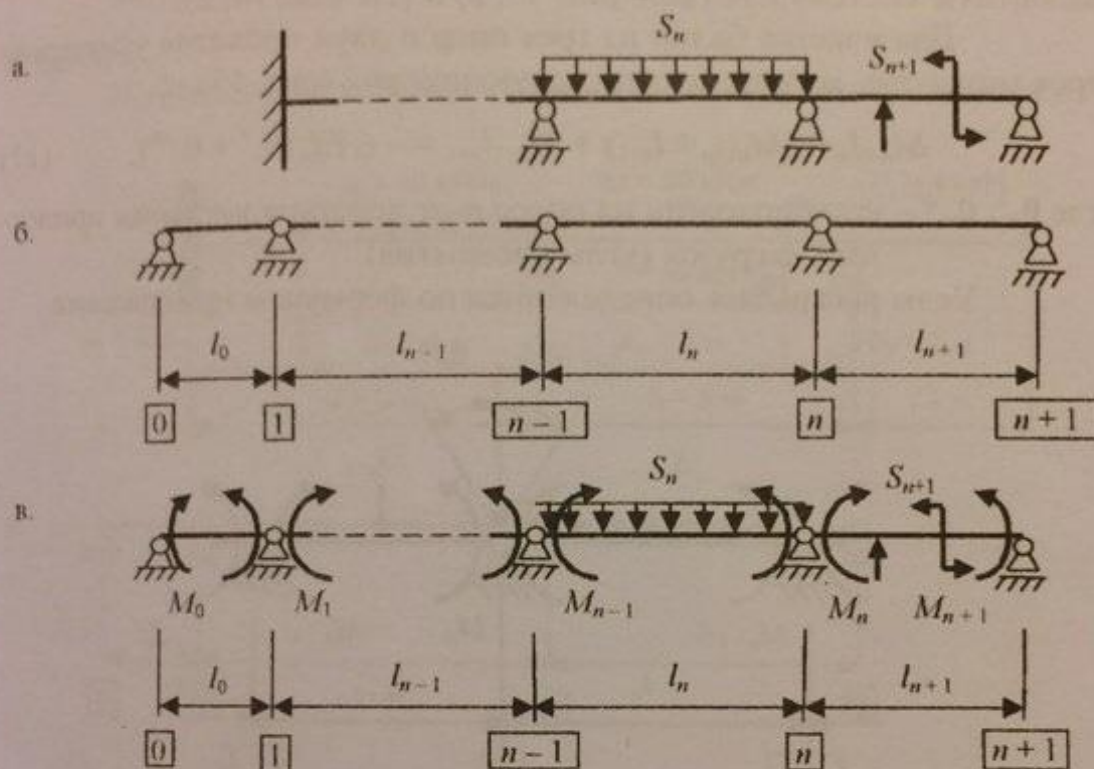


Рис. 14. Преобразование балки с защемлением в расчетную схему:

- а – заданная система (ЗС);
- б – основная система (ОС);
- в – эквивалентная система (ЭС)

При образовании многопролетной балки, т. е. заданной системы (ЗС) в основную систему (ОС) в нее вводятся шарниры над промежуточными опорами. Этим самым удаляются связи, препятствующие взаимному повороту смежных (примыкающих слева и справа к любой промежуточной опоре) сечений балки (см. рис. 13, в) и (см. рис. 14, в).

При введении шарниров в балку необходимо обеспечить геометрическую неизменяемость получаемой основной системы, исключив горизонтальное перемещение балки.

Прикладывая к основной системе заданную нагрузку и лишние неизвестные изгибающие моменты M_1, \dots, M_{n-1}, M_n , возникающие в сечениях над промежуточными опорами, получают эквивалентную систему (ЭС) (см. рис. 13, в) и (см. рис. 14, в).

Для участка балки из трех опор и двух пролетов уравнение трех моментов, которое имеет следующий вид (рис. 15) –

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6EI_x(\theta_n^n + \theta_n^{np}), \quad (11)$$

где $\theta_n^n, \theta_n^{np}$ – углы поворота на опоре n от действия внешних пролетных нагрузок (углы раскрытия).

Углы раскрытия определяются по формулам приложения.

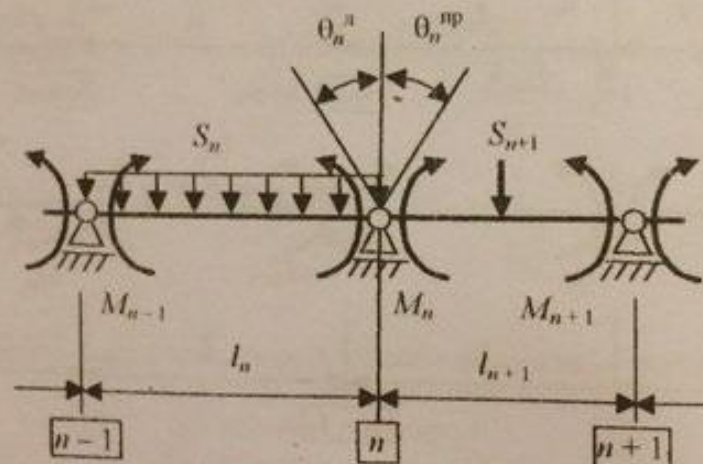


Рис. 15. Схема участка балки для составления уравнения трех моментов

В случае направления пролетных нагрузок на схеме в противоположную сторону по отношению к показанным в приложении, углы поворота принимаются отрицательными.

7. Пример расчета неразрезной балки на прочность по измененному уравнению трех моментов

Дано Статически-неопределимая неразрезная балка нагружена внешней нагрузкой (рис. 16, а).
 Материал балки: сталь ВСтЗсп5 (сталь 3), $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Задание Подобрать двутавровое сечение балки из условия прочности.

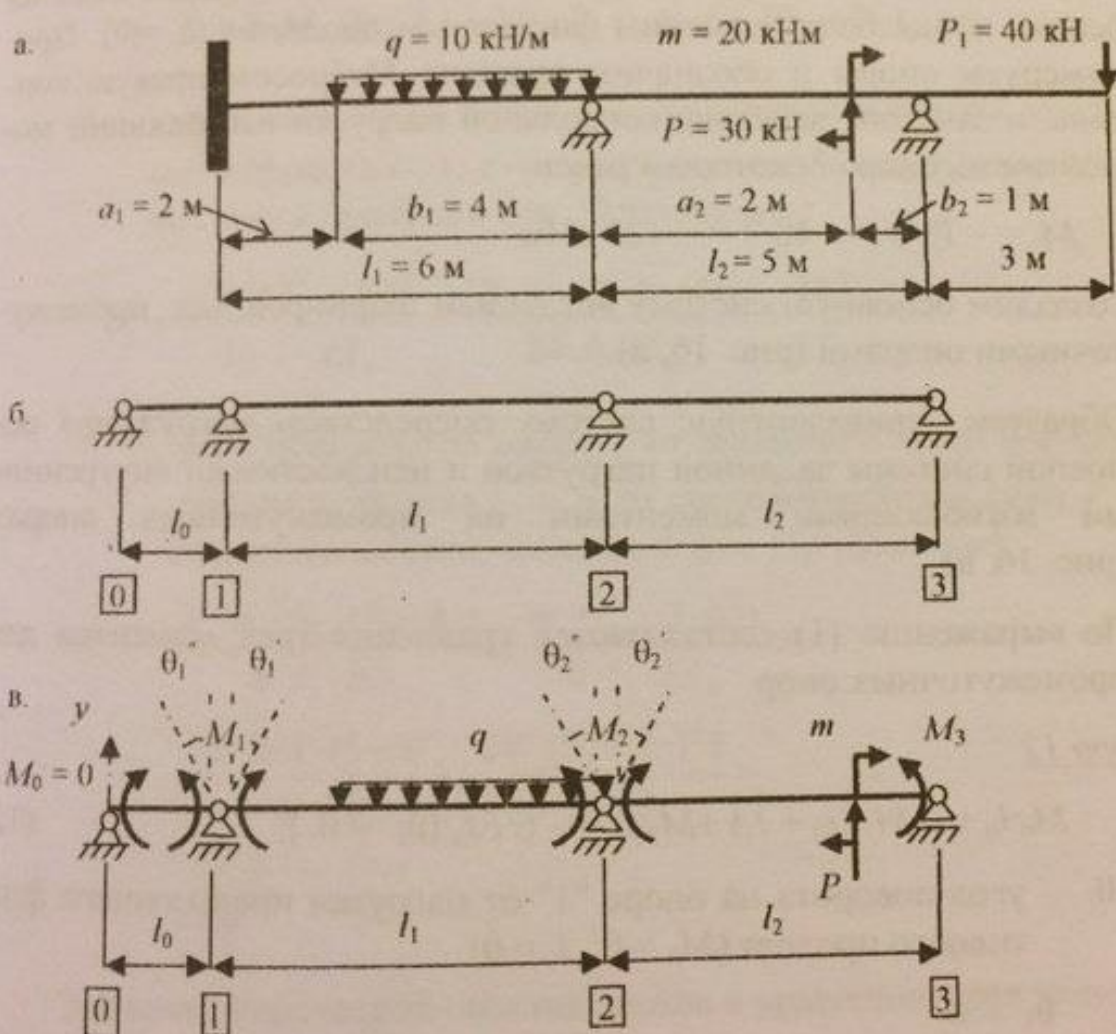


Рис. 16. Порядок расчета многопролетной неразрезной балки.

а – заданная система;

б – основная система;

в – эквивалентная система

Решение

А. Раскрытие статической неопределимости неразрезной балки

1. Определим степень статической неопределимости –

$$k = n_1 - n_2 = 5 - 3 = 2.$$

где n_1 – количество неизвестных опорных реакций;

n_2 – количество независимых уравнений статики.

2. Приведем заданную многопролетную балку (см. рис. 16, а) к варианту шарнирного опирания (рис. 16, б). Для этого защемление на левом конце балки заменим фиктивным пролетом ($l_0 = 0$). Прономеруем опоры и обозначим пролеты. Отбросим правую консоль, и заменим действие консольной нагрузки изгибающим моментом на опоре 3, который равен –

$$M_3 = -P_1 \cdot 3 = -40 \cdot 3 = -120 \text{ кНм.}$$

3. Создадим основную систему введением шарниров над промежуточными опорами (рис. 16, в).

4. Образует эквивалентную систему посредством нагружения основной системы заданной нагрузкой и неизвестными внутренними изгибающими моментами на промежуточных опорах (рис. 16, в).

5. По выражению (1) составляются уравнения трех моментов для промежуточных опор.

Опора 12

$$M_0 \cdot l_0 + 2 \cdot M_1 \cdot (l_0 + l_1) + M_2 \cdot l_1 = -6 \cdot EI_x \cdot (\theta_1'' + \theta_1'), \quad (12)$$

где θ_1'' – угол поворота на опоре "1" от нагрузки предыдущего фиктивного пролета ($M_0 = 0$; $l_0 = 0$):

$$\theta_1'' = 0.$$

θ_1' – угол поворота на опоре "1" от пролетной нагрузки последующего пролета – l_1 , т. е. от распределенной нагрузки q на правой части пролета l_1 , (см. прил.).

$$\theta_1 = \frac{q \cdot b_1^2 (2 \cdot l_1^2 - b_1^2)}{24 \cdot l_1 \cdot EI_x} = \frac{10 \cdot 4^2 \cdot (2 \cdot 6^2 - 4^2)}{24 \cdot 6 \cdot EI_x} = \frac{62,2}{EI_x}$$

Значения параметров подставляются в уравнение трех моментов (2):

$$\begin{aligned} 0 \cdot 0 + 2 \cdot M_1 \cdot (0 + 6) + M_2 \cdot 6 &= -6 \cdot 62,6; \\ \underline{12 \cdot M_1 + 6 \cdot M_2} &= \underline{-373,2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Опора 2

$$M_1 \cdot l_1 + 2 \cdot M_2 (l_1 + l_2) + M_3 \cdot l_2 = -6 \cdot EI_x (\theta_2'' + \theta_2'), \quad (14)$$

где θ_2'' – угол поворота на опоре 2 от пролетной нагрузки предыдущего пролета l_1 , т. е. от распределенной нагрузки q на правой части пролета l_1 (см. Приложение):

$$\theta_2'' = \frac{q \cdot b_1^2 (2l_1 - b_1)^2}{24 \cdot l_1 \cdot EI_x} = \frac{10 \cdot 4^2 \cdot (2 \cdot 6 - 4)^2}{24 \cdot 6 \cdot EI_x} = \frac{71,1}{EI_x}$$

θ_2' – угол поворота на опоре 2 от пролетной нагрузки последующего пролета l_2 , т. е. от сосредоточенной силы P и от сосредоточенного момента m (см. Приложение):

$$\begin{aligned} \theta_2' &= -\frac{P \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot (l_2 + b_2)}{6 \cdot l_2 \cdot EI_x} - \frac{m \cdot (l_2^2 - 3 \cdot b_2^2)}{6 \cdot l_2 \cdot EI_x} = \\ &= -\frac{30 \cdot 4 \cdot 1 \cdot (5 + 1)}{6 \cdot 5 \cdot EI_x} - \frac{20 \cdot (5^2 - 3 \cdot 1^3)}{6 \cdot 5 \cdot EI_x} = \\ &= -\frac{38,7}{EI_x}. \end{aligned}$$

Значения параметров подставляются в уравнение трех моментов (4):

$$\begin{aligned} M_1 \cdot 6 + 2 \cdot M_2 \cdot (6 + 5) + (+120) \cdot 5 &= -6 \cdot (71,1 - 38,7); \\ \underline{6 \cdot M_1 + 22 \cdot M_2} &= \underline{405,6}. \end{aligned} \quad (15)$$

Составим систему уравнений трех моментов (13) и (15):

$$\begin{cases} 12M_1 + 6M_2 = -373,2 \\ 6M_1 + 22M_2 = -405,6 \end{cases}$$

После решения системы получим:

$$M_1 = -46,69 \text{ кНм,}$$

$$M_2 = +31,17 \text{ кНм.}$$

Б. Расчет статически определимой многопролетной балки

1. Построим эпюру поперечных сил – эпюру Q (рис. 17, а) и эпюру изгибающих моментов – эпюру M (рис. 17, б) от пролетных нагрузок и опорных моментов для каждого пролета в отдельности используя любой метод, применяемый при расчете статически определимых балок на двух опорах либо консольной балки.

2. Определим опорные реакции балки

Опорные реакции балки определяются по скачкам на эпюре Q в зонах опор – скачки указаны стрелками (рис. 17, а):

$$\begin{aligned} R_1 &= 26,28 \text{ кН} && \text{(направлена вверх);} \\ R_2 &= 40,23 - 13,72 = 26,51 \text{ кН} && \text{(направлена вниз);} \\ R_3 &= 40 \text{ кН} && \text{(направлена вниз).} \end{aligned}$$

В. Выполнение проверок правильности раскрытия статической неопределимости балки

1. Выполним статическую проверку:

$$\Sigma P_{iy} = 0;$$

$$+ R_1 - q \cdot 4 - R_2 + P + R_3 - P_1 = 0;$$

$$+ 26,28 - 40 - 26,51 + 30 + 50,23 - 40 = 0;$$

$$+ 106,51 - 106,51 = 0.$$

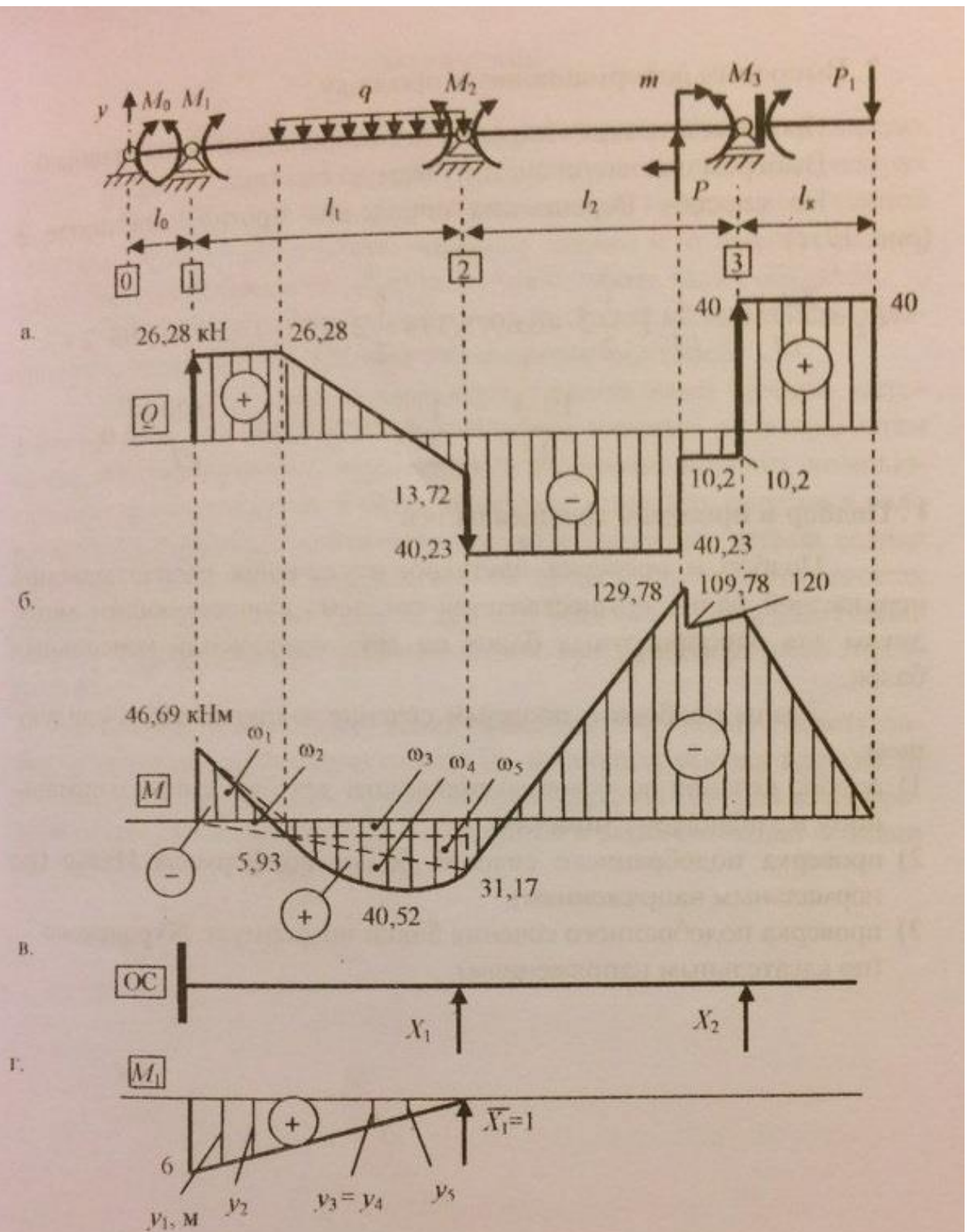


Рис. 17. Результаты расчетов внутренних усилий и деформационная проверка:
 а – эпюра поперечных сил,
 б – эпюра изгибающих моментов,
 в – основная система метода сил,
 г – единичная эпюра изгибающих моментов

2. Выполним деформационную проверку.

Прогибы в точках опирания многопролетной балки равны 0.
Выберем основную систему метода сил (рис. 17, в).

По способу Верещагина определим прогиб на опоре 2 (рис. 17, г):

$$\delta_2 = \frac{\sum \omega_i y_i}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 46,69 \cdot 5,33 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5,93 \cdot 4,67 + 4 \cdot 5,93 \cdot 2 + \right. \\ \left. + \frac{10 \cdot 4^3}{12} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 25,24 \cdot 1,33 \right) = \frac{0,249}{EI_x} \cong 0.$$

Г. Подбор и проверка сечения балки

Подбор и проверка двутаврового сечения рассчитываемой неразрезной балки осуществляется согласно существующим методикам для однопролетных балок на двух опорах или консольных балок.

Этапы подбора и проверки сечения заключаются в следующем:

- 1) подбор сечения по условию прочности для балок по максимальному изгибающему моменту;
- 2) проверка подобранного сечения балки по формуле Навье (по нормальным напряжениям);
- 3) проверка подобранного сечения балки по формуле Журавского (по касательным напряжениям).

Заключение

Расчеты многопролетных неразрезных статически неопределимых балок на жестких опорах и на упруго-податливых опорах встречаются весьма часто в проектировочной и производственной практике. Кроме того расчеты каркасов зданий и отдельных рам не могут быть выполнены без представления о работе таких объектов.

Освоение расчета многопролетных балок на прочность является важной частью подготовки инженеров-строителей.

Освоение специалистами-проектировщиками ручной методики расчета, построения эпюр и подбора сечений по результатам исследования позволяет переходить к изучению методик компьютерного проектирования. Учитывая, что возможность ошибок в ходе введения данных при компьютерном моделировании весьма велика и их выявление весьма затруднительно, представления о результатах расчета на основе интуитивного анализа весьма полезно. Получение навыков такого анализа возможно только при ручном расчете конструкций.

Дополнительно: получение сведений по ручному расчету позволяет в производственных условиях, проводить оценку прочности несложных строительных объектов, подбирать их сечения или определять допустимую нагрузку не прибегая к дорогостоящей помощи специалистов-проектировщиков.

Задание к расчетно-графической работе

Дано

Две одинаковые неразрезные многопролетные балки нагружены внешней нагрузкой:

- 1-я балка – на жестких опорах (все опоры на жестком основании);
- 2-я балка – на жестких и упруго-податливых опорах (первая и последняя опоры на жестком основании; средние опоры на упруго-податливом основании).

Коэффициент податливости средних опор – $A = l^3/EJ$.

Материал балок – сталь ВСтЗсп5 (сталь 3).

Задание

Требуется рассчитать на прочность 2 неразрезные балки с одинаковыми расчетными схемами:

- первый раз принимать расчетную схему – как схему балки на жестких опорах;
- второй раз – как схему балки на жестких и упруго-податливых опорах.

В процессе расчета выполнить следующие действия:

- 1) раскрыть статическую неопределимость (способ задается преподавателем);
- 2) построить эпюры внутренних усилий: Q и M ;
- 3) провести статическую и кинематическую проверки балок;
- 4) подобрать и проверить двутавровые сечения балок.

Примечания:

- 1) задание выбирать в соответствии с шифром выданным преподавателем;
- 2) расчетные схемы неразрезных балок выбирать из табл. 1;
- 3) нагрузки, действующие на балки и размеры пролетов, выбирать из табл. 2;
- 4) нагрузки q и p в табл. 1, приведенные в ней со знаком минус (-), принимать противоположно-направленными по отношению показанным на схеме;
- 5) коэффициенты k и n принимать равными: $k = 0,5$; $n = 0,2$.
- 6) средние опоры балок принимать упруго-податливыми.

В шифре задания должна быть указана буква и три цифры (например – А-123):

- буква обозначает серию задания;
- первая цифра – номер схемы;
- вторая и третья цифры – цифры для выбора нагрузок и размеров пролетов балки – в процессе выбора они используются в шахматном порядке.

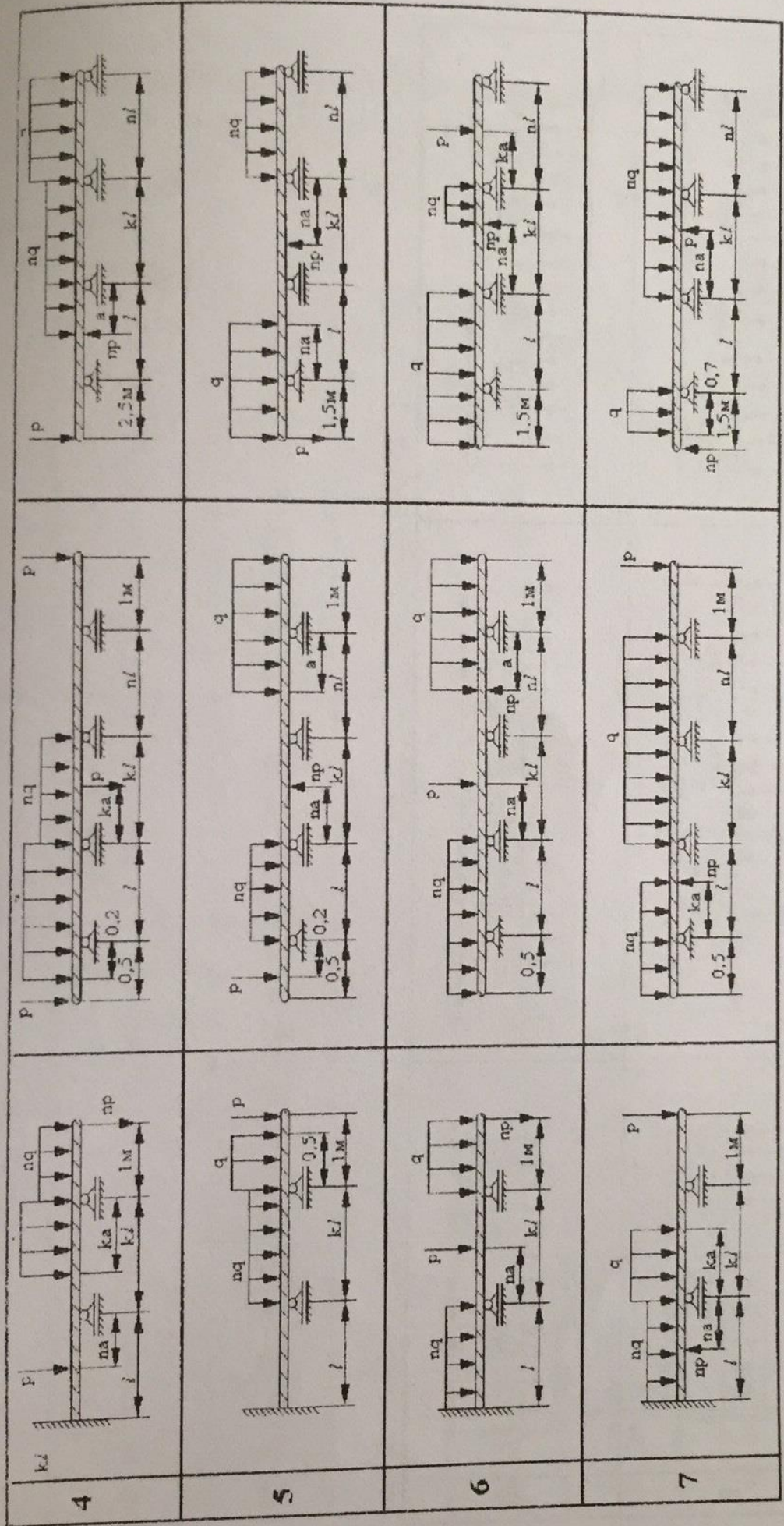
Таблица 1
 Расчетные схемы неразрезных балок к расчетно-графической работе

	А	В	С
0			
1			
2			
3			

Продолжение таблицы 1
С

В

А

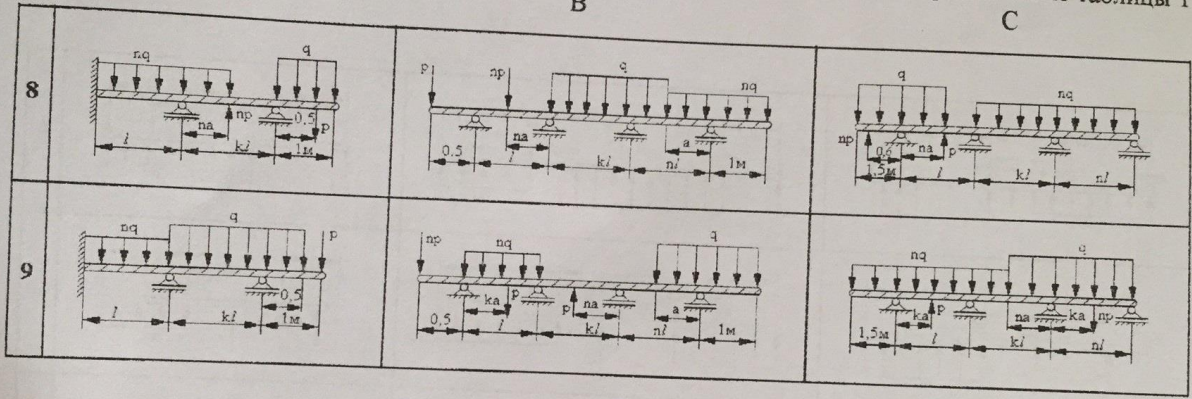


A

B

Продолжение таблицы 1

C

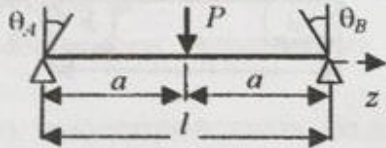
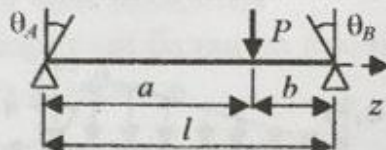
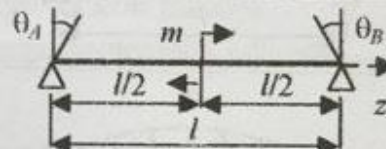
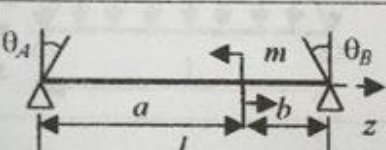
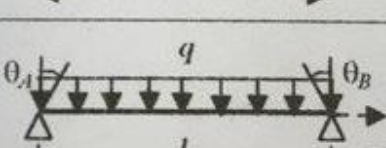
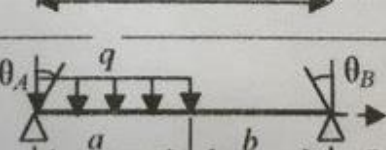
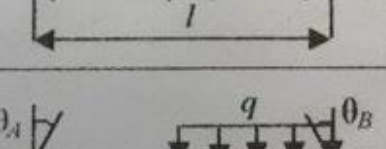


Нагрузки и размеры пролетов неразрезной балки Таблица 2

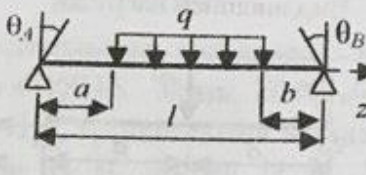
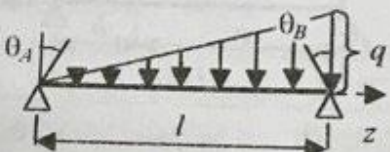
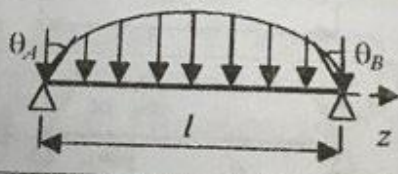
Буква в шифре	№ цифры в шифре	P , кН	q , кН/м	m , кНм	l , м	a , м	n/k
А	1	30	12	10	3,0	1,0	0,8/2
	2	32	14	12	6,2	1,2	1,0/2
	3	34	16	14	5,4	1,4	1,2/1
	4	36	18	16	5,6	1,6	1,4/1
	5	38	16	18	5,8	1,8	1,6/2
	6	40	14	20	6,0	1,6	1,8/2
	7	42	12	22	6,2	1,4	1,6/1
	8	44	10	24	6,4	1,2	1,4/1
	9	46	8,0	26	6,6	1,0	1,2/1
В	1	34	6,0	28	5,4	1,2	1,0/2
	2	36	8,0	30	5,6	1,4	1,2/1
	3	38	10	32	5,8	1,6	1,4/2
	4	40	12	34	6,0	1,8	1,6/1
	5	42	14	36	6,2	2,0	1,8/2
	6	44	16	38	6,4	1,8	1,6/2
	7	46	18	40	6,6	1,6	1,4/1
	8	48	20	38	6,8	1,4	1,2/2
	9	50	22	36	7,0	1,2	1,0/1
С	1	38	24	34	5,8	1,4	1,2/2
	2	40	22	32	6,0	1,6	1,4/2
	3	42	20	30	5,2	1,8	1,6/1
	4	44	18	28	6,4	2,0	1,8/2
	5	46	16	26	6,6	2,2	2,0/1
	6	48	14	24	6,8	2,0	1,8/2
	7	50	12	22	7,0	1,8	1,6/1
	8	52	10	20	7,8	1,6	1,4/2
	9	54	8	18	7,4	1,4	1,2/1

Приложение

Углы раскрытия опорных сечений однопролетной балки
в зависимости от нагрузки

Углы раскрытия θ_A (при $z = 0$)	Вид внешней нагрузки	Углы раскрытия θ_B (при $z = l$)
$\frac{Pl^2}{16 \cdot EJ}$		$\frac{Pl^2}{16 \cdot EJ}$
$\frac{Pab \cdot (l + b)}{6l \cdot EJ}$		$\frac{Pab \cdot (l + a)}{6l \cdot EJ}$
$\frac{ml}{24 \cdot EJ}$		$\frac{ml}{24 \cdot EJ}$
$\frac{m \cdot (l^2 - 3b^2)}{6l \cdot EJ}$		$\frac{1}{EJ} \cdot \frac{m \cdot (3a^2 - l^2)}{6l}$
$\frac{ql^3}{24 \cdot EJ}$		$\frac{ql^3}{24 \cdot EJ}$
$\frac{qa^2 \cdot (2l - a)^2}{24l \cdot EJ}$		$\frac{qa^2 \cdot (2l^2 - a^2)}{24l \cdot EJ}$
$\frac{qb^2 \cdot (2l^2 - b^2)}{24l \cdot EJ}$		$\frac{qb^2 \cdot (2l - b)^2}{24l \cdot EJ}$

Продолжение приложения

Углы раскрытия θ_A (при $z = 0$)	Вид внешней нагрузки	Углы раскрытия θ_B (при $z = l$)
$\frac{1}{EJ} \left[\frac{q \cdot (l^2 - b^2)}{24l} - \frac{q \cdot a^2 (2l - a)^2}{24l} \right]$		$-\frac{1}{EJ} \left[\frac{q \cdot (l^2 - a^2)}{24l} - \frac{q \cdot b^2 (2l - b)^2}{24l} \right]$
$\frac{7}{361} \frac{ql^3}{EJ}$		$\frac{1}{45} \frac{ql^3}{EJ}$
$\frac{q_0 l^3}{\pi^3 \cdot EJ}$		$-\frac{q_0 l^3}{\pi^3 \cdot EJ}$