Указания по выполнению контрольных работ

Студент должен выполнять контрольные работы по заданным задачам конкретного варианта, номер которого получается из следующей формулы: следует разделить номер учебного шифра на 20, остаток от деления – номер варианта (если остаток 0, то номер варианта – 20).

При оформлении и выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

1. В начале работы должны быть ясно написаны фамилия студента, инициалы, номер студенческого билета, шифр, номер контрольной работы и дата отсылки работы в университет.
2. Контрольная работа выполняется в тетради (каждая контрольная работа в отдельной тетради), а не на листах, обязательно чернилами или шариковой ручкой (но не красными) с полями для замечаний рецензента.
3. Решения задач контрольной работы располагаются в порядке номеров, указанных в контрольных работах; перед решением задачи должно быть записано полностью ее условие, исходя из данных своего варианта задания. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, переписывая условие задачи, следует заменить общие данные конкретными из своего варианта.
4. Решения задач и объяснения к ним должны быть подробными, аккуратными, без сокращений слов; чертежи можно выполнять от руки.

Получив из университета прорецензированную работу, студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и недочеты. Если работа не зачтена, она должна быть в короткий срок выполнена заново целиком, или должны быть заново решены задачи, указанные рецензентом. Зачтенные контрольные работы предъявляют преподавателю на экзамене.

Краткие теоретические сведения

ТЕМА 1. МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ

Под множеством B понимается совокупность некоторых объектов, которые называют элементами множества B, при этом x является элементом множества В обозначают через $x \in B$, в противном случае $x \notin B$.

Элементы множества могут сами являться множествами. Множество можно задать перечислением принадлежащих ему элементов $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$) или указанием свойств, которым элементы множества должны удовлетворять.

Множество N – это множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, Z – множество целых чисел, Q – множество рациональных чисел, R – множество вещественных чисел, C – множество комплексных чисел.

Множество A называется подмножеством множества B и обозначается $A \subseteq B$, если все элементы множества A принадлежат B: $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in A$ следует, что $x \in B$.

Множество называется конечным, если оно состоит из определённого конечного числа элементов. В противном случае оно называется бесконечным. Например, множество студентов в аудитории конечно, а множество натуральных чисел бесконечно.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Множества A и B называются равными или совпадающими и обозначаются $A = B$, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Таким образом, чтобы доказать равенство множеств, требуется установить два включения, например: если $A = \{1, 6, 9\}$ и $B = \{9, 1, 6\}$, то $A = B$.

Множества удобно изобразить графически, в виде областей на плоскости. При этом подразумевается, что точки области соответствуют элементам множества. Такие графические представления множеств называются диаграммами Эйлера-Венна.

Объединением двух множеств A и B называется множество $C = A \cup B$, каждый элемент которого принадлежит множеству A, или множеству B, или им обоим: $A \cup B = \{x: x \in A \text{ или } x \in B\}$.

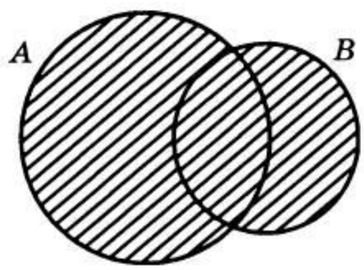


Рис. 1. Объединение множеств.

Пересечением двух множеств A и B называется множество $C = A \cap B$, каждый элемент которого принадлежит и множеству A и множеству B: $A \cap B = \{x: x \in A \text{ и } x \in B\}$.

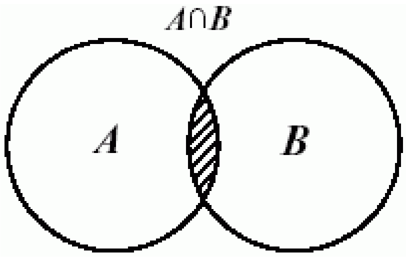


Рис. 2. Пересечение множеств.

Разностью двух множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, и обозначается $A \setminus B$: $A \setminus B = \{x: x \in A$ и $x \notin B\}$.

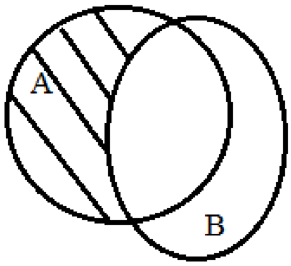


Рис. 3. Разность множеств.

Симметрической разностью множеств A и B называют множество $A \oplus B=(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

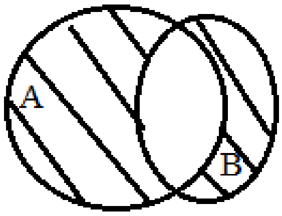


Рис. 4. Симметрическая разность множеств.

Введенные операции над множествами следующими свойствами:

1. Коммутативностью: $A \cup B = B \cup A$ и $A \cap B = B \cap A$;
2. Ассоциативностью: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ и $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
3. Идемпотентностью: $A \cup A = A$ и $A \cap A = A$;
4. Дистрибутивностью: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Множество вещественных чисел $X \subset R$ называется ограниченным сверху, если существует число b, такое что все элементы X не превосходят b. Множество называется ограниченным снизу, если существует число b, такое что все элементы X не меньше b.

Пример. Даны множества $M = \{6 \le x < 7 \mid x \in N\}$ и $P = \{3 \le x \le 8 \mid x \in N\}$. Найти: $M \cup P$; $M \cap P$; $M \setminus P$; $P \setminus M$. Результат запишите перечислением элементов полученного множества и в виде неравенства.

Решение.

Так как $M = \{6 \le x < 7 \mid x \in N\} = \{6\}$, $P = \{3 \le x \le 8 \mid x \in N\} = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, то $M \cup P = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\} = \{3 \le x \le 8 \mid x \in N\}$, $M \cap P = \{6\} = \{6 \le x < 7 \mid x \in N\}$, $M \setminus P = \varnothing$, $P \setminus M = \{3; 4; 5; 7; 8\} = \{3 \le x < 6 \mid x \in N\} \cup \{6 < x \le 8 \mid x \in N\}$.

Понятие функции является основным для математического анализа.

Пусть два непустых множества X и Y. Если каждому элементу x из множества X по определенному закону f ставится в соответствие один и только один элемент y из Y, то говорят, что задана функция $f(x)$.

Переменная x называется независимой переменной или аргументом, а переменная y - зависимой.

Множество X называется областью определения функции f и обозначается $D(f)$, множество всех $y \in Y$ – областью значений функции и обозначается $E(f)$.

Основными способами задания функции являются: аналитический, табличный и графический.

Аналитический способ состоит в том, что зависимость между переменными величинами задается в виде формулы (аналитического выражения), указывающей, какие и в каком порядке действия надо выполнить, чтобы получить значение функции, соответствующее данному значению аргумента.

Табличный способ предусматривает задание таблицы, в которой различным значениям аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$ поставлены соответствующие значения функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

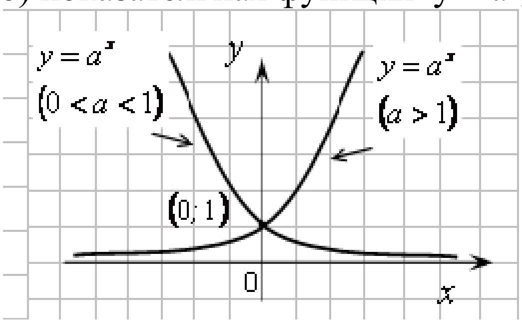
x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Графический способ задания функции состоит в том, что в данной системе координат задается некоторая кривая. Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком – его неточность.

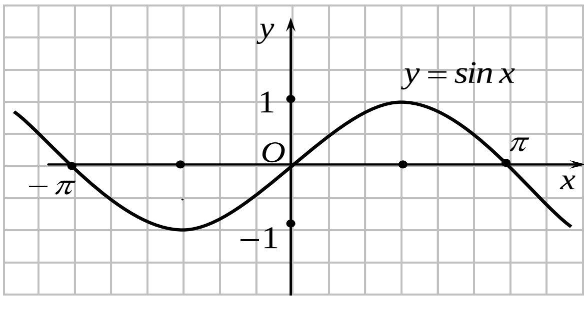
Основными элементарными функциями называются следующие функции:

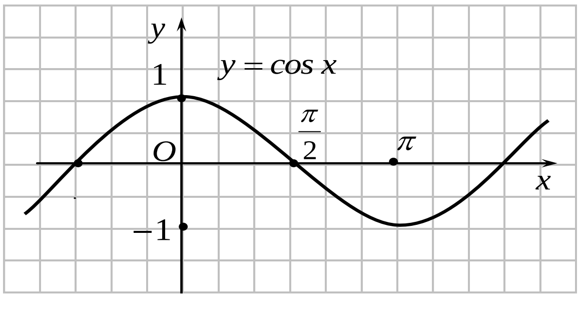
а) степенная функция $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in R$;

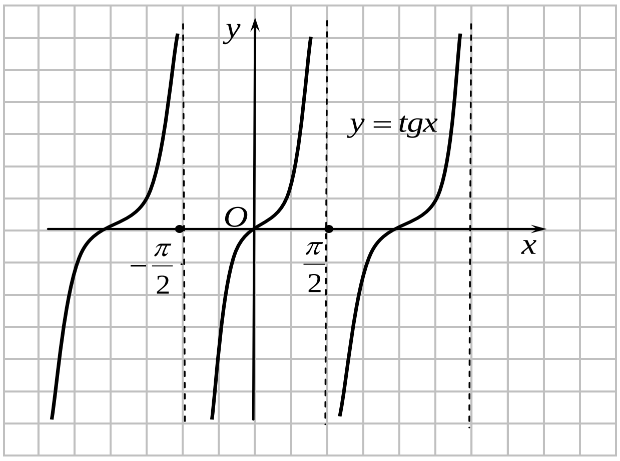
б) показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$;

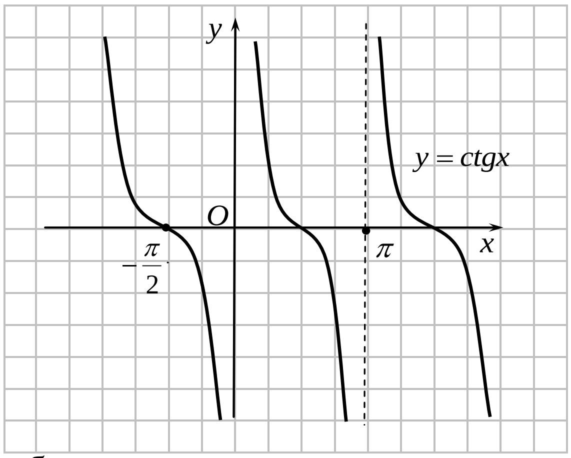


в) тригонометрические функции $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=tg\,x,\ y=ctg\,x$ **:**

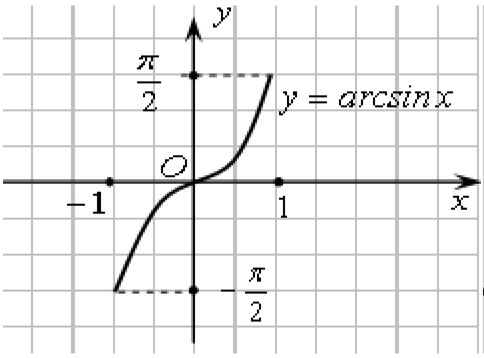


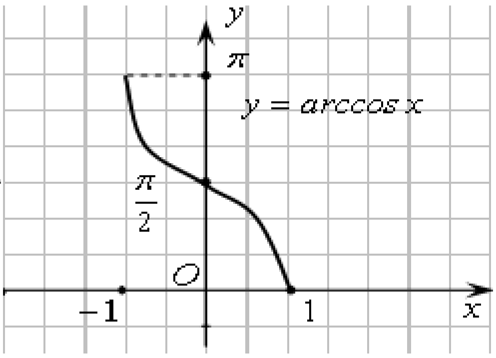


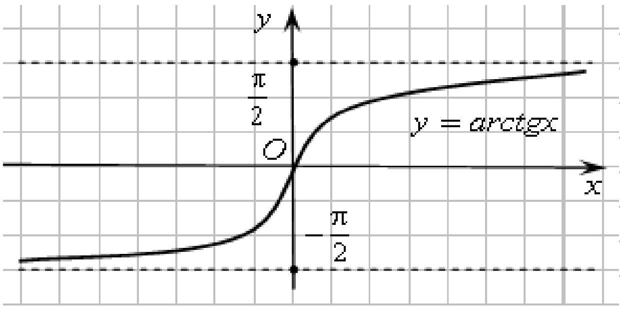


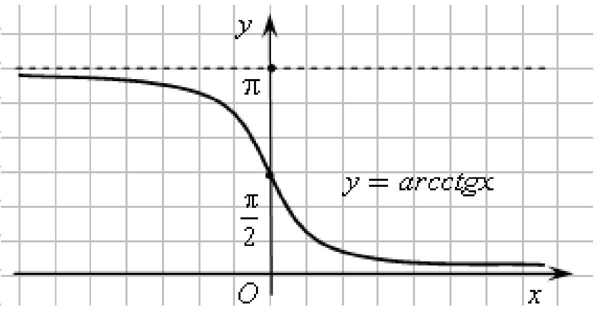


г) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\ x$, $y = arcctg\ x$

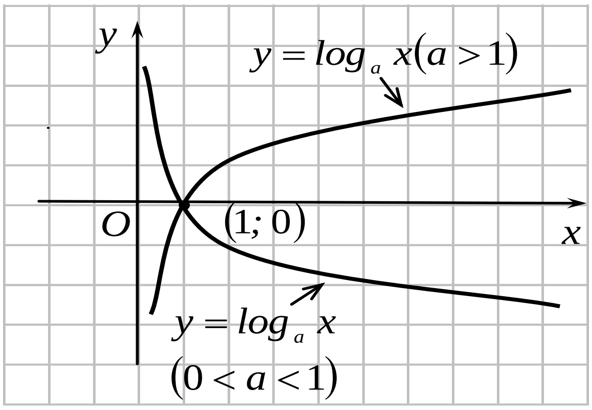








д) логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.



Элементарной функцией называется функция, построенная из основных элементарных функций и постоянных с помощью операций сложения, умножения и деления, а также композиции (построения сложной функции).

Пусть y является функцией от u, то есть $y = f(u)$, а u, в свою очередь, зависит от переменной x, то есть $u = \varphi(x)$. Тогда y также зависит от x: $y = f[\varphi(x)]$. Функция $y = f[\varphi(x)]$ называется сложной функцией, или функцией от функции, или суперпозицией функций.

Некоторые свойства функций.

Приведем некоторые свойства функций, необходимые при исследовании их поведения. К ним относятся: четность и нечетность, периодичность, ограниченность, монотонность.

Функция $y = f(x)$ называется четной, если при всех значениях аргумента выполняется равенство: $f(-x) = f(x)$.

График четной функции расположен симметрично относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если при всех значениях аргумента выполняется равенство: $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое положительное число $T \neq 0$, что $f(x \pm T) = f(x)$ в области определения функции.

Наименьшее из положительных чисел T, удовлетворяющих условию определения, называется периодом функции $f(x)$.

Например, функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ являются периодическими с периодом $T = 2\pi$.

Функция называется возрастающей (убывающей) в некоторой области изменения аргумента, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Если функция в некоторой области изменения аргумента является только возрастающей или только убывающей, то функция называется монотонной.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на множестве X, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$.

Например, функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ – ограниченные функции, т.к. $|\sin x| \le 1$ и $|\cos x| \le 1$ для $x \in (-\infty; +\infty)$.

Преобразование графиков

Из графика функции $y = f(x)$ получается график функции:

1) $y = f(x) + a$ – сдвигом вдоль оси Oy на a единиц (вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$;

2) $y = f(x - b)$ – сдвигом вдоль оси Ox на b единиц (вправо, если $b > 0$, и влево, если $b < 0$;

3) $y = kf(x)$ – растяжением вдоль оси Oy в k раз;

4) $y = f(mx)$ – сжатием по оси Ox в m раз;

5) $y = -f(x)$ – симметричным отражением относительно оси Ox;

6) $y = f(-x)$ – симметричным отражением относительно оси Oy;

7) $y = |f(x)|$, следующим образом: часть графика, расположенная не ниже оси Ox, остается без изменений, а «нижняя» часть графика симметрично отражается относительно оси Ox;

8) $y = f(|x|)$, следующим образом: правая часть графика (при $x \geq 0$) остается без изменений, а вместо «левой» строится симметричное отражение «правой» относительно оси Oy.

ТЕМА 2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Предел числовой последовательности и функции

Числовой последовательностью называется функция $x_n = \varphi(n)$, $n = 1,2,3,\ldots$ определенная на множестве натуральных чисел, которую будем обозначать $\{x_n\}$. Числа x_1, x_2, …, x_n называют *членами* последовательности: x_1 – 1-м членом последовательности, x_2 – 2-м членом последовательности,…, x_n – n-ым или *общим членом* последовательности.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ и записывают в виде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $\lim x_n = a$.

Окрестностью точки a называется интервал $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$ и обозначают $U_\varepsilon(a)$. С геометрической точки зрения вне ε-окрестности числа a будет находиться конечное число членов последовательности $\{x_n\}$, тогда как внутри ε-окрестности точки a всегда бесконечное число членов последовательности, независимо от величины ε.

Если последовательность, имеет предел, то она называется *сходящейся* (*сходится к а*), в противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M, что для любого номера n справедливо неравенство $x_n < M$ (т.е. все члены последовательности содержатся в интервале (-∞; M)).

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует такое число *m*, что для любого номера *n* справедливо неравенство (т.е. все члены последовательности содержатся в интервале (*m; +*∞)).

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого *n* выполнено неравенство $|x_n| < M$ (т.е. все члены последовательности содержатся в интервале *(-M; M*)).

Очевидно, ограниченная последовательность является ограниченной как сверху, так и снизу и обратно, ограниченная одновременно сверху и снизу последовательность является ограниченной.

Последовательность $\{x_n\}$, все члены которой равны одному и тому же числу, называется *постоянной*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей (невозрастающей)*, если для любого номера *n* справедливо неравенство $x_n \le x_{n+1}$ (соответственно $x_n \ge x_{n+1}$).

Невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если для любого номера *n* справедливо неравенство $x_n < x_{n+1}$ (соответственно $x_n > x_{n+1}$).

Возрастающие и убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

Теорема Вейерштрасса. Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Пример. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что число 2 является пределом последовательности $\left\{\dfrac{2n+3}{n+1}\right\}$.

Решение. Рассмотрим любое число ε и найдем для этого числа номер такой *Nε*, что для всех членов последовательности x_n, для которых n > *Nε*, будет иметь место $|x_n - a| = \left|\dfrac{2n+3}{n+1} - 2\right| = \left|\dfrac{2n+3-2n-2}{n+1}\right| = \left|\dfrac{1}{n+1}\right| < \varepsilon$

Решив последнее неравенство относительно *n*, получим n $> \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Следовательно, можем положить, например, $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$ (где $\left[\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right]$ –

целая часть). Таким образом, показано, что для любого числа ε >0 существует номер $N_{\varepsilon}=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$, такой, что $|x_n-2|<\varepsilon$ для всех членов последовательности с номерами n > $N\varepsilon$.

Таким образом, $\lim\frac{2n+3}{n+1}=2.$

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если ее предел равен нулю: $\lim x_n=0$.

Замечание. Любую сходящуюся последовательность $\{x_n\}$ можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n-a|>\frac{1}{\varepsilon}$ и обозначается $\lim x_n=\infty$.

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) сумма и произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

2) произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую есть бесконечно малая последовательность;

3) если последовательность $\{x_n\}$, все члены которой отличны от нуля, бесконечно малая последовательность, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно большая (символически это можно записать следующим образом: $\frac{1}{0}=\infty, \frac{1}{\infty}=0$).

Операции над пределами последовательностей:

Пусть даны две сходящиеся последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$: $\lim x_n=a$, $\lim y_n=b$. Тогда

1) $\lim k\,x_n=k\,a, \quad k\in R$;

2) $\lim(x_n+y_n)=a+b$;

3) $\lim(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$;

4) $\lim\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}, \quad b\neq 0$.

Число e. Последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ возрастает и ограничена сверху, а потому сходится. Ее пределом является число Эйлера e =2,71828182…, служащее основанием натуральных логарифмов. Таким образом, $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Пример. Вычислить предел $\lim\frac{\sin n}{n}$.

Решение.

Последовательность $\{\sin n\}$ является ограниченной, так как $|\sin n|$ для любого натурального *n*, а последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$- бесконечно малая последовательность, поэтому их произведение есть бесконечно малая последовательность, то есть $\lim\frac{\sin n}{n}=0$.

2.2. Предел функции в точке и на бесконечности

Пусть функция определена в некоторой ε - окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки (в этом случае говорят, что функция определена в *проколотой* ε - окрестности точки x_0).

Первое определение предела функции (*по Коши,* или «*на языке* εδ»): число *A* называется пределом функции *y* = *f(x)* при $x \to a$, если для любого ε > 0 существует $\delta=\delta(\varepsilon)$, такое, что $|f(x)-A|<\varepsilon$ при $0<|x-a|<\delta$ и записывается: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Следующее определение предела функции равносильно предыдущему и носит название *по Гейне*, или «*на языке последовательностей*»): число *A* называется *пределом функции y = f(x)* при $x\to a$, если для всякой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к x_0 и такой, что x $\neq x_0$ для любого *n*, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к *A*.

Пример. Доказать, что число 7 является пределом функции y = 2x + 1при $x\to 3$.

Решение.

Рассмотрим произвольное ε>0. Необходимо найти для него такое число δ>0, что для всех *x*, таких, что $|x-3|<\delta$, x ≠3, выполняется неравенство $|f(x)-7|=|2x+1-7|=|2x-6|<\varepsilon$ или $|x-3|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Если принять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то выполнены все условия определения предела по Коши, таким образом $\lim\limits_{x \to 3}(2x+1) = 7$.

Определение предела функции на бесконечности. Пусть функция $y = f(x)$ определена на бесконечном промежутке $(a; +\infty)$.

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого малого положительного ε существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех x > δ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ и записывается: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x \to a$ (*в точке* a), если для всякого числа $M > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x таких, что $|x - a| < \delta,\ x \neq a$, выполнено неравенство $|f(x)| > M$.

Функция называется *бесконечно малой при* $x \to a$ (*в точке* a), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Свойства бесконечно малых функций:

1. Сумма и произведение любого конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая функция при $x \to a$;
2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая функция;
3. Если функция $y = f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$, тогда $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая при $x \to a$.

Свойства пределов функции.

Приведем свойства пределов функции без доказательства:

1. Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то он единственный;
2. Если $f(x) \le g(x)$ для всех x из некоторой окрестности точки a, кроме, быть может самой точки a, функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел в точке a, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) \le \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
3. Если $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$ для всех x из некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a, и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = a$, то $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = a$.
4. Если c – постоянная величина, то $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы при $x \to a$, то

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} \varphi(x),$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \varphi(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}\quad (\lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0),$$

$$\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x).$$

5. Для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to a} x\right)$.

Говорят, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x \to a$ представляет собой неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Аналогично определяются неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}$.

Некоторые важные пределы:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ – первый замечательный предел;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ – второй замечательный предел;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e;\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.$$

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка n по сравнению с функцией $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n}$ = C, где $0<|C|<+\infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются равносильными (эквивалентными) бесконечно малыми при $x \to a$:

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Например, при $x \to 0$ имеем: $\sin x \sim x$; $tg\, x \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$ и т. п.

Замечание. При нахождении предела заменять эквивалентными бесконечно малыми функциями можно только множители и делители.

Пример. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{1-\cos x}$; 5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{arctg(x+2)}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{x-1}$.

Решение.

1. Разлагаем числитель и знаменатель дроби на множители, как квадратные трехчлены, по формуле $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни трёхчлена. Тогда

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+1)(x+2)}{2(x+2)(x-3/2)} = \lim_{x\to -2}\frac{x+1}{2x-3} = \frac{-2+1}{-4-3} = \frac{1}{7}.$$

2. Выяснив вначале, что при указанном изменении аргумента данная функция представляет отношение двух бесконечно малых величин (случай 0/0), перейдем к эквивалентным функциям:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2.$$

3. Уничтожаем иррациональность в числителе путём умножения числителя и знаменателя на $1+\sqrt{x+1}$, затем сокращаем дробь на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(x+1)}{x(1+\sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})} = -\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2}.$$

4. Применяем тригонометрическую формулу: $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 4;$$

5. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{arctg\,(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}(x-2) = -4,$ так как $arctg\,(x+2) \underset{x\to -2}{\approx} (x+2)$.

6. Убедившись, что имеет место, случай $\dfrac{\infty}{\infty}$, подвергаем функцию преобразованиям. Делим числитель и знаменатель дроби на x^2 (наивысшая здесь степень x^2), находим:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-1/x^2}{5+2/x}=\dfrac{3}{5}$; так как при x $\to\infty$ величины $1/x^2$ и 1/x являются бесконечно малыми.

7. При x $\to\infty$ основание степенно-показательной функции

f(x) = $\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{x-1}$ стремится к 1, т.к. $\dfrac{3x-2}{3x+4}=1-\dfrac{6}{3x+4}$, а показатель степени есть бесконечно малая функция. Таким образом, имеем неопределенность вида 1^{∞}. Сведем этот предел ко второму «замечательному пределу»:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-6}{3x=4}\right)^{\frac{3x+4}{-6}}\right]^{\frac{-6}{3x+4}\cdot(x-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-6(x-1)}{3x+4}}=$$

$$=e^{\frac{-6}{3}}=e^{-2}.$$

2.3. Непрерывность функций

Односторонние пределы. Если $x<a$ и $x\to a$, то условно пишут $x\to a-0$; аналогично, если $x>a$ и $x\to a$, то это записывается так $x\to a+0$. Числа $f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ и $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ называются соответственно *пределом слева* функции *f (x)* в точке *a* и *пределом справа* функции *f (x)* в точке *a* (если эти числа существуют).

Функция f (x) называется *непрерывной* в точке a, если:

1) эта функция определена в точке a, т. е. существует число f (a);
2) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a}$ f (x);
3) этот предел равен значению функции в точке a, т. е. $\lim\limits_{x\to a}$ f (x) = f (a).

Говорят, что функции *f*(*x*) терпит разрывы непрерывности при значении $x=x_0$ (или в точке x_0), принадлежащем области определения функции или являющемся граничным для этой области, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции. Например, функция $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ разрывна при $x=1$. Эта функция не определена в точке $x=1$, и как бы мы ни выбрали число *f*(1), пополненная функция *f(x)* не будет непрерывной при $x=1$. Если для функции *f(x)* существуют конечные пределы:

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ (причем не все три числа $f(x)$, $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ равны между собой), то x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода*. В частности, если $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, то x_0 называется *устранимой точкой разрыва.* Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x_0) = f(x_0-0) = f(x_0+0).$$

Точки разрыва функции, не являющиеся точками разрыва 1-го рода , называются *точками разрыва 2-го рода*. К точкам разрыва 2-го рода относятся также точки бесконечного разрыва, т. е. такие точки x_0 , для которых хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ равен ∞.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если эта функция определена в какой – нибудь точке x_0 и если

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Свойства функций, непрерывных в точке.

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}, (g(x)\neq 0)$ также непрерывны в точке x_0.

2. Если функция $u(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $f(u(x))$ непрерывна в точке x_0.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда для любого числа C, заключенного между числами $f(a)$ и $f(b)$, найдется хотя бы одна точка $x_0 \in [a;b]$, такая, что $f(x_0) = C$.

2. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$и принимает на его концах значения различных знаков. Тогда найдется хотя бы одна точка $x_0 \in [a;b]$, такая, что $f(x_0) = 0$.

3. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда эта функция ограничена на этом отрезке (*1-я теорема Вейерштрасса*).

4. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда эта функция достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений, т.е. существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a;b]$, что для любой точки $x \in [a;b]$справедливы неравенства $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ (*2-я теорема Вейерштрасса*).

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и построить график

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при} \quad 0 \le x \le 1; \\ 4 - 2x & \text{при} \quad 1 < x < 2; \\ 2x - 7 & \text{при} \quad 2 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Решение.

Неэлементарная функция φ(x) определена для всех значений $x \ge 0$. Она может иметь разрыв в точках $x = 1$ и $x = 2$, где меняется ее аналитическое выражение. Во всех остальных точках своей области определения функция φ (x) непрерывна, поскольку каждая из формул, которыми она задана, определяет собой элементарную функцию, непрерывную в своем интервале изменения аргумента x.

Исследуем непрерывность в точках $x = 1$ и $x = 2$:

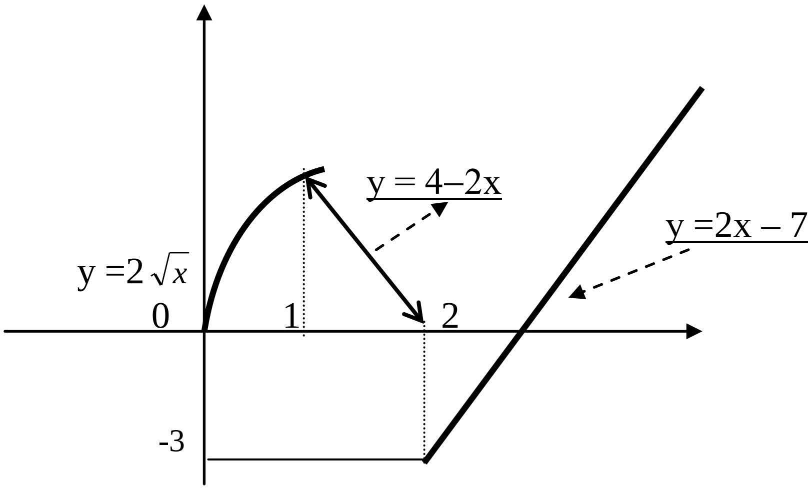
$$\lim_{x \to 1-0} \varphi(x) = \lim 2\sqrt{x} = 2; \quad \lim_{x \to 1+0} \varphi(x) = \lim(4 - 2x) = 2.$$

Согласно условию, значение функции φ (x) в точке x =1 определяется первой формулой: $\varphi(1) = 2\sqrt{1} = 2$. Следовательно, в точке x =1 выполняются все условия непрерывности: функция определена в окрестности точки x =1 и $\lim\limits_{x \to 1-0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} \varphi(x) = \varphi(1)$. Поэтому в точке x =1 функция φ(x) непрерывна.

$$\lim_{x \to 2-0} \varphi(x) = \lim_{x \to 2-0} (4 - 2x) = 0; \quad \lim_{x \to 2+0} \varphi(x) = \lim_{x \to 2+0} (2x - 7) = -3.$$

Здесь левый и правый пределы функции конечны, но не одинаковы, т.е. не выполняется 2-е условие непрерывности. Поэтому в точке x=2 функция имеет разрыв.

Скачек функции в точке разрыва конечный.



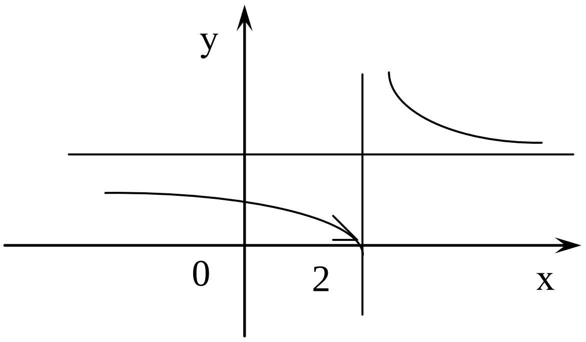
Пример. Исследовать функцию $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$ на непрерывность.

Решение.

Функция непрерывна всюду, за исключением точки $x_0 = 2$ (т.к. элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены). Найдем пределы слева и справа при $x \to 2$:

$$\lim_{x\to 2-0} = e^{\frac{1}{x-2}} = 0, \qquad \lim_{x\to 2+0} = e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty.$$

Следовательно, $x_0 = 2$ – точка разрыва II рода. Для схематического построения графика найдем предел функции на бесконечности: $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}=e^{0}=1$, откуда устанавливаем, что прямая $y = 1$ – горизонтальная асимптота.

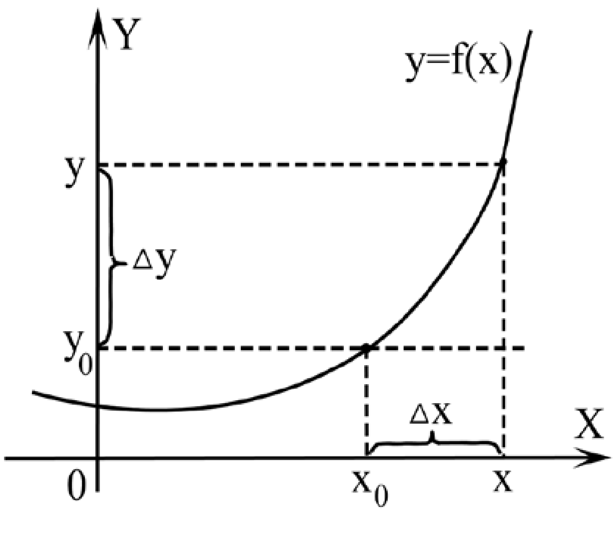


ТЕМА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Определение производной, ее геометрический смысл

Пусть функция *y = f(x)* определенная в некоторой окрестности фиксированной точки $x_0 \in (a;b)$.

Приращением аргумента называют разность $x - x_0$ и обозначают Δx.



Приращением функции в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, называется разность $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции *y = f(x)* называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при произвольном стремлении этого приращения к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что функция *f(x)* имеет в точке x_0 конечную производную, а также называют функцию *f(x)* дифференцируемой в точке x_0.

Если предел не существует, то говорят, что функция *f(x)* не имеет производной в точке x_0 , т.е. не дифференцируема в этой точке.

Операция нахождения производной называется дифференцированием. Если функция имеет конечную производную в каждой точке x интервала $(a;b)$, то ее называют дифференцируемой на интервале $(a;b)$. Эта производная будет представлять собой некоторую функцию аргумента x, определенную на интервале $(a;b)$.

Пример. Пользуясь определением производной, вычислите $f(0)$, если $f(x) = \sin x$.

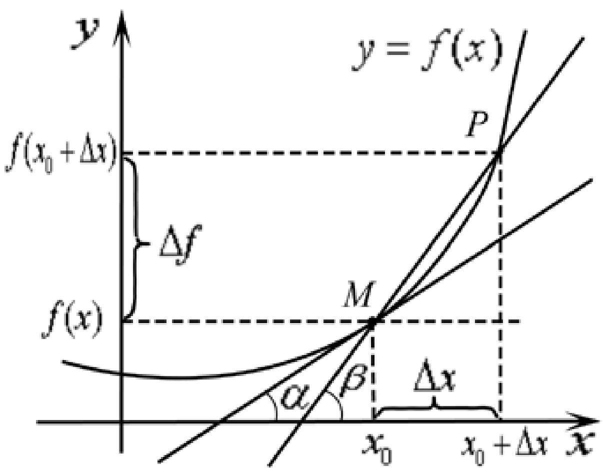
Решение.

Так как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})$,то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x.$$

Поэтому $f(0) = \cos 0 = 0$.

Геометрический смысл производной. Пусть функция *y = f(x)* определена на некотором промежутке $(a;b)$. Прямую, проходящую через две точки графика $M(x_0, f(x_0))$ и $P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, называют *секущей*.



Угол β наклона секущей M_0M_1 к оси Ox функционально зависит от приращения Δx и $tg\beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

При $\Delta x \to 0$ точка P приближается к точке M. Секущая MP при этом поворачивается вокруг точки M и стремится к своему предельному положению, которое однозначно определяется предельным значением α угла наклона β. При этом тангенс угла α равен по величине пределу разностного отношения, т.е. производной функции в точке x_0:

$$\kappa = tg\alpha = \lim_{P \to M} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Касательная к графику функции в точке $M(x_0, f(x_0))$ – это прямая, занимающая предельное положение секущей *MP* при $\Delta x \to 0$.

Если у функции *y = f(x)* в данной фиксированной точке x_0 есть производная, то в точке $(x_0, f(x_0))$ существует касательная к графику функции *y = f(x)*, причем угловой коэффициент ***k*** этой касательной равен производной .

3.2. Основные правила дифференцирования

При нахождении производной функции *y = f(x)* обычно используют правила дифференцирования и таблицу производных основных элементарных функций.

Производная *суммы* (разности) двух дифференцируемых функций равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Производная *произведения* двух дифференцируемых функций равна произведению первой функции на производную второй плюс произведение второй на производную первой, т. е.

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной $(cv)' = cv'$ $(c = const)$.

Следствие 2. Производная постоянной равна нулю: $C' = 0$.

Производная *частного* двух дифференцируемых функций определяется формулой

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad при\,(v \neq 0).$$

Производная сложной функции. Если y = f(u) и u = φ(x) – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции y=f(φ(x)) существует и равна производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной, т. е.

$$y'_x = y'_u y'_x, \; \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Производная обратной функции. Если y = f(x) и x = φ(y) – взаимно обратные дифференцируемые функции и $y'_x \neq 0$, то

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически, то есть уравнениями $x = x(t),\ y = y(t)\ (\alpha < t < \beta)$, где $x(t), y(t)$ – дифференцируемые функции и $x'(t) \neq 0$, то её производная y'_x определяется формулой

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Основные формулы дифференцирования. Если $u = u(x)$ – дифференцируемая функция, то:

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$;

$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x;$

$(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad (ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 1};$

$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha, \quad (e^x)' = e^x;$

$(\log_{\alpha} x)' = \dfrac{1}{x \ln \alpha}, \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}};$

$(arctg\, x)' = \dfrac{x}{1 + x^2}, \quad (arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}.$

Дифференциал функции. Если приращение функции представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o\,(\Delta x),$$

где A – постоянная, $o\,(\Delta x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δx, то слагаемое $A\Delta x$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают dy; функцию в этом случае называют дифференцируемой в точке x_0.

Так как $dx = \Delta x$, то $dy = f\,'(x)dx$.

Пример. Найти производную функции $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Решение.

Считая $1 - x^2 = u$ и применяя табличное значение, получаем

$$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}, y' = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Пример. Найти производную функции $y = \sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{6}$.

Решение.

Применяя табличное значение, находим

$$y' = \cos\frac{x}{3}\left(\frac{x}{3}\right)' - \sin\frac{x}{6}\left(\frac{x}{6}\right)' = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{6}\sin\frac{x}{6}.$$

Пример. Найти производную функции $y = ctg^2 3x$.

Решение.

По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$y' = -2\,ctg\,3x(ctg\,3x)' = -2ctg\,3x \cdot \frac{1}{\sin^2 3x}(3x)' = -\frac{6\,ctg\,3x}{\sin^2 3x}.$$

Пример. Найти производную функции $y = \frac{1}{tg^2 2x}$.

Решение.

Так как $y = \frac{1}{w}$, $w = v^2$, $v = \mathrm{tg}u$, $u = 2x$, то по табличному значению получаем $y'_x = y'_w \cdot w'_v \cdot v'_u \cdot u'_x$,

$$y' = -\frac{1}{tg^4 2x} \cdot 2\,tg\,2x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x}2 = -\frac{4}{tg^3 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} = -\frac{4\cos 2x}{\sin^3 2x}.$$

Пример. Найти производную функции $y = e^{\sin 3x}$.

Решение.

Случай сложной функции, полученной в результате нескольких суперпозиций, исчерпывается последовательным применением правила

$$y' = e^{\sin 3x}(\sin 3x)' = e^{\sin 3x}\cos 3x(3x)' = 3e^{\sin 3x}\cos 3x.$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln(1 + x^2)$.

Решение.

На основании табличных формул, получаем

$$y' = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Пример. Найти производную функцию, заданную уравнением $y\sin x = \cos(x - y)$.

Решение.

Это уравнение определяет функцию y = y(x) от *x*. Подставляя функцию y = y(x) в данное уравнение, получаем тождество $y(x)\sin x \equiv \cos(x - y(x))$.

Дифференцируем это тождество и из полученного уравнения находим $\mathrm{y}' = \mathrm{y}'(\mathrm{x})$:

$y'\sin x + y\cos x = -\sin(x-y)(1-y')$,

$y'\sin x + y\cos x = -\sin(x-y) + y'\sin(x-y)$,

$y\cos x + \sin(x-y) = y'(\sin(x-y) - \sin x)$, $y' = \dfrac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}$.

Пример. Найти производную функцию, заданную уравнениями $\mathrm{x} = \mathrm{t} - \sin \mathrm{t}$, $\mathrm{y} = 1 - \cos \mathrm{t}$.

Решение.

Эта функция задана параметрически. Так как $x_t' = 1 - \cos t$, $y_t' = \sin t$,

то имеем $y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t'} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$.

Пример. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

Решение.

Логарифмируя это равенство по основанию е, получаем $\ln y = \sin x \ln x$. Дифференцируя, находим $\dfrac{y'}{y} = \cos x \ln x + \sin x\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

откуда $y' = y\left(\cos x \ln x + \sin x\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$, $y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \sin \dfrac{x}{x}\right)$.

3.3. Правило Лопиталя.

Если функции *f(x)* и *φ(x)*, дифференцируемые в окрестности точки *x* = *a* обращаются в нуль и существует предел отношения $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \to a$, то существует предел отношения самих функций и

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Замечание. Если $f'(a) = 0$, $\varphi'(a) = 0$, функции $f'(x)$, $\varphi'(x)$ дифференцируемы в окрестности точки *x* = *a* и существует предел отношения $\dfrac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

С помощью тождественных преобразований к основному виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ можно свести неопределённости других видов, таких, как $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Решение.

При $x=0$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, применяем правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{\frac{1}{1+x}}=2.$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^{x}-1)}}$.

Решение.

При $x=0$ получаем неопределённость вида 0^{0}.

Обозначим $y=x^{\frac{1}{\ln(e^{x}-1)}}$ и прологарифмируем это равенство по основанию e:

$$\ln y=\frac{1}{\ln(e^{x}-1)}\ln x=\frac{\ln x}{\ln(e^{x}-1)}.$$

В правой части этого равенства при $x=0$ имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя дважды правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^{x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^{x}}{e^{x}-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{xe^{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{e^{x}+xe^{x}}=1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=1,\ \lim\limits_{x\to 0}y=e^{1}=e,\ \lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^{x}-1)}}=e.$

3.4 Исследование функций и построение их графиков

Необходимый признак монотонности:

1) если функция *f(x)* в интервале возрастает, то ее производная $f'(x)$ неотрицательна.

2) если функция *f(x)* в интервале убывает, то ее производная $f'(x)$ неположительна.

3) если функция *f(x)* в интервале не изменяется, то ее производная $f'(x)$ тождественна равна нулю.

Достаточный признак монотонности:

1) если производная $f'(x)$ всюду в интервале положительна, то функция f(x) в этом интервале возрастает;

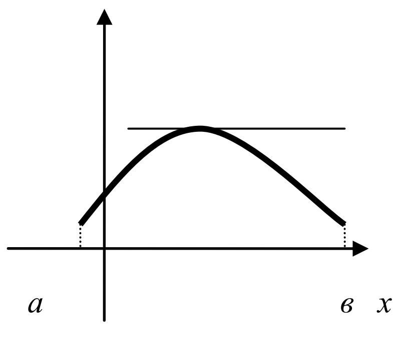
2) если производная $f'(x)$ всюду в интервале отрицательна, то функция f(x) в этом интервале убывает.

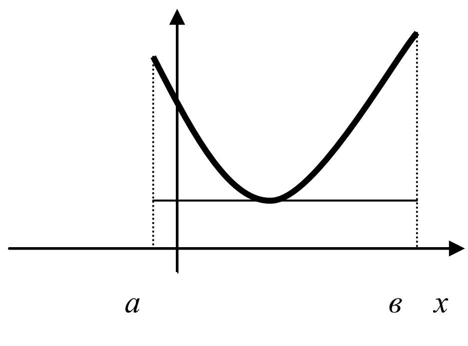
Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции f(x), если $f(x_0)$ есть наибольшее (наименьшее) значение функции f9x) в некоторой окрестности точки x_0. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Необходимый признак экстремума: если в точке x_0 функция f(x) достигает экстремума, то ее производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует.

*Достаточный признак экстремума: т*очка x_0 является точкой экстремума функции f(x), если производная $f'(x)$ при переходе x через x_0 меняет знак; при перемене знака "+" на "–" точка x_0 является точкой максимума; при перемене "–" на "+" точка x_0 является точкой минимума.

График функции называется выпуклым в данном промежутке, если он лежит ниже любой своей касательной; вогнутым, если он лежит выше любой своей касательной.





Точкой перегиба называется точка, отделяющая выпуклую дугу от вогнутой.

*Признак выпуклости и вогнутости линии: е*сли вторая производная $f''(x)$ всюду в интервале отрицательна, то дуга линии $y = f(x)$, соответствующая этому интервалу, выпуклая. Если вторая производная $f''(x)$ всюду в интервале положительна, то дуга линии $y = f(x)$, соответствующая этому интервалу, вогнутая.

Необходимый признак точки перегиба: если x_0 – абсцисса точки перегиба, то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует.

*Достаточный признак точки перегиба: т*очка (x_0,y_0) есть точка перегиба линии $y = f(x)$, если $f''(x)$ меняет знак при переходе x через x_0.

*Асимптоты линии: п*рямая линия $\boldsymbol{\gamma}$ называется асимптотой линии L, если расстояние точки линии L от прямой $\boldsymbol{\gamma}$ стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Следует различать вертикальные и наклонные асимптоты:

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то линия $y = f(x)$ имеет асимптоту $x = x_0$.

2) Если $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(kx+b)\right]=0$, то линия $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-kx)$.

Общее исследование функций и построение их графиков удобно выполнять по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Найти асимптоты графика функции.
3. Выяснить, не является ли функция чётной, нечетной или периодической.
4. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.
5. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости вверх и вниз.
6. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Построить график функции, используя все полученные результаты исследования. Если их окажется недостаточно, то следует найти ещё несколько точек графика функции, исходя из её уравнения.

Пример. Исследовать функцию и построить её график:

$$y = \frac{1}{1+2e^{-x}}.$$

!∇ В экономике его используют для определения тенденции роста производства предметов потребления.

Решение.

1. Эта функция определена на всей числовой оси.

2. Вертикальных асимптот графика функции нет. Находим наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(1+2e^{-x})}=0;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+2e^{-x}}=1.$$

Следовательно, прямая у = 1 есть горизонтальная асимптота. При х$\to-\infty$ к = 0, $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+2e^{-x}}=0$, следовательно, у = 0 асимптота при х$\to-\infty$.

3. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

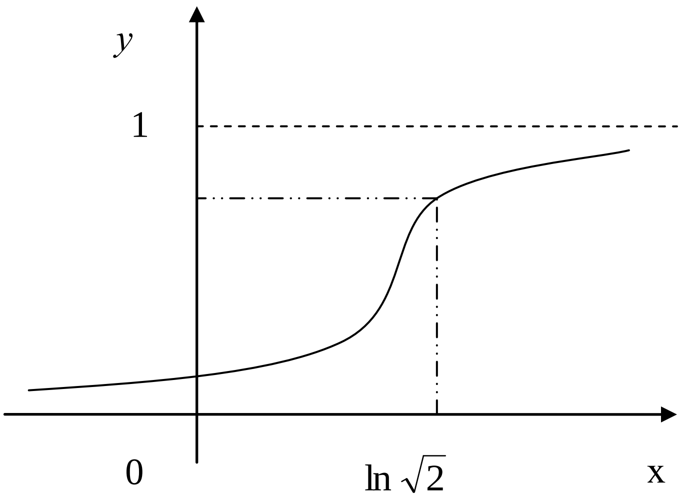
4. $y'=\frac{2e^{-x}}{\left(1+2e^{-x}\right)^2}$; производная в ноль ни при каких значениях х не обращается. Следовательно, экстремума нет. Функция всюду возрастает, так как производная положительна для всех х.

5. $y''=\frac{2e^{-x}(2e^{-x}-1)}{\left(1+2e^{-x}\right)^3}$,

y'' = 0 при х = $\ln\sqrt{2}$. Точка А ($\ln\sqrt{2}$; $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$) есть точка перегиба, так как вторая производная при переходе через эту точку меняет знак.

6. График функции не пересекает ось Ox.

7. Используя все полученные данные, строим график функции.



Наибольшее и наименьшее значение функции одного переменного на числовом отрезке. Пусть *f(x)*– функция, определенная на отрезке [*a*;*b*].

Если *f(x)* непрерывна на этом отрезке, то существуют точки $x_1\in[a;b]$ и $x_2\in[a;b]$, в которых функция достигает своего максимального и минимального значений.

Этими точками могут быть внутренние критические точки из (a;b) или граничные. Поэтому для отыскания наибольшего и наименьшего значения функции *f(x)* на числовом отрезке придерживаются следующего алгоритма:

1. Найти первую производную f ′(x);

2. Найти стационарные и критические точки и выбрать те из них, которые попадают в отрезок $[a;b]$;

3. Сравнить значения функции в найденных точках и на границах, выбрать из них наибольшее и наименьшее значения.

ТЕМА 4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

4.1. Непосредственное интегрирование

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Если функция f (x) имеет первообразную F(x), то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все первообразные содержатся в выражении

$$F(x) + C,$$

где C – постоянная.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (или от выражения $f(x)dx$) называется совокупность всех ее первообразных. Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$. Здесь $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функции.

Свойства неопределенного интеграла:

1°. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2°. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

3°. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4°. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, где a – постоянная.

5°. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.

6°. Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$

Таблица основных неопределенных интегралов:

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$.
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^u dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$.

5. $\int e^u dx = e^x + C$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 + \lambda} \right| + C$.

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$.

Пример. Найти интеграл $\int (x^3 - 5x^2 + 7x - 3)\, dx$.

Решение.

Используя свойства 4° и 5°, получаем

$$\int \left(x^3 - 5x^2 + 7x - 3\right)dx = \int x^3 dx - 5\int x^2 dx + 7\int x dx - 3\int dx.$$

К первым трем интегралам правой части применим формулу (2), а к четвертому интегралу – формулу (1) таблицы интегралов:

$$\int \left(x^3 - 5x^2 + 7x - 3\right)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cdot\frac{x^3}{3} + 7\cdot\frac{x^2}{2} - 3x + C = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$.

Решение.

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx = \int \left(x + 2\cdot\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}} + \frac{1}{x^{2/3}}\right) dx = \int \left(x + 2x^{1/6} + x^{-2/3}\right) dx =$$

$$= \int x dx + 2\int x^{1/6} dx + \int x^{-2/3} dx = \frac{x^2}{2} + 2\cdot\frac{x^{1/3}}{1/3} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + C.$$

4.2. Замена переменной в неопределенном интеграле

Пусть $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Тогда формула замены переменной в этом случае имеет вид

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt.$$

Пример. Найти интеграл $\int \sin(1 - 5x)dx$.

Решение.

$$\int \sin(1 - 5x)dx = \left| \begin{array}{l} 1 - 5x = t \\ x = \frac{1-t}{5} \\ dx = -\frac{1}{5}dt \end{array} \right| = \int \sin t\left(-\frac{dt}{5}\right) = -\frac{1}{5}\int \sin t dt = \frac{1}{5}\cos t + C =$$

$$=\frac{1}{5}cos(1-5x)+C.$$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

Решение.

$$\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt[3]{x},\ x=t^3 \\ dx=3t^2dt \end{array}\right|=\int\frac{3t^2\sin t}{t^2}dt=3\int\sin tdt=-3\cos t+C.$$

Ответ должен быть выражен через старую переменную x. Подставляя в результат интегрирования $t=\sqrt[3]{x}$, получим $\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=-3\cos\sqrt[3]{x}+C.$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx.$

Решение.

$$\int(2\ln x+3)^3\frac{dx}{x}=\left|\begin{array}{l} t=2\ln x+3 \\ dt=2\frac{dx}{x} \end{array}\right|=\int t^3\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^3dt=\frac{1}{8}t^4+C=\frac{1}{8}(2\ln x+3)^4+$$
$$+C.$$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}.$

Решение.

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}dx=\left|\begin{array}{l} \cos^2 x=t \\ -2\cos x\cdot\sin xdx=dt \end{array}\right|=-\int\frac{dt}{\sqrt{3-t^2}}=-\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$
$$=-\arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример. Найти интеграл $\int\frac{e^{2x}}{e^{4x}-16}dx.$

Решение.

$\int\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-16}=\left|\begin{array}{l} e^{2x}=t \\ 2e^{2x}dx=dt \end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-16}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right|+C$. Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-16}=\frac{1}{16}\ln\left|\frac{e^{2x}-4}{e^{2x}+4}\right|+C.$$

4.3. Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du,$$

где $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от $\boldsymbol{x}$.

При этом за **u** берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за **dv** – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, например, для интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax}dx,\quad \int P(x)\sin axdx,\quad \int P(x)\cos axdx,$$

где $P(x)$ – многочлен, за **u** следует принять $P(x)$, а за **dv** – соответственно выражение $e^{ax}dx, \sin axdx, \cos axdx;$ для интегралов вида

$$\int P(x)\ln xdx,\quad \int P(x)\arcsin xdx,\quad \int P(x)\arccos xdx$$

за **u** принимаются соответственно функции $\ln x,\ \arcsin x,\ \arccos x,$ а за **dv** – выражение $P(x)dx.$

Пример. Найти интеграл $\int arctgxdx$.

Решение.

$\int arctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx,\ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2},\ v = x \end{vmatrix}$. По формуле интегрирования по частям находим $\int arctgxdx = xarctgx - \int \dfrac{xdx}{1+x^2} = xarctgx - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$

Пример. Найти интеграл $\int x\sin xdx$.

Решение.

$\int x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x, dv = \sin xdx \\ du = dx, v = -\cos x \end{vmatrix}$. Отсюда по формуле интегрирования по частям находим: $\int x\sin xdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C.$

4.4. Интегрирование рациональных функций

Дробной – рациональной функцией называется функция, равная частному от деления двух многочленов:

$$\mathrm{R(x)} = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}.$$

Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя, в противном случае – неправильной.

Отметим, что всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)},$$

где r(x) – многочлен, степени меньше степени знаменателя Q(x). Таким образом, интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию правильной рациональной дроби. А интегрирование правильной рациональной дроби сводится к интегрированию простейших дробей типа:

1. $\dfrac{A}{x-a}$; **2.** $\dfrac{A}{(x-a)^n}$;

3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; **4.** $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$.

($x^2 + px + q$ – не имеет действительных корней.)

Интегрирование простейших рациональных дробей:

1. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$.

2. $\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$.

3. Основной способ нахождения интеграла $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ состоит в предварительном выделении полного квадратного трехчлена:

$$x^2 + px + q = \left[\left(x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}\right) - \frac{p^2}{4}\right] + C = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + C.$$

Рассмотрим этот способ на примере.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{xdx}{x^2+2x-1}$.

Решение.

Выделим полный квадрат в знаменателе и преобразуем дробь:

$$x^2 + 2x - 1 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 1 = (x+1)^2 - 2.$$

Тогда $\int \frac{xdx}{x^2+2x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1-1)dx}{x^2+2x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{d((x+1)^2-2)}{(x+1)^2-2} - \int \frac{dx}{(x+1)^2-2} =$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|(x+1)^2 - 2\right| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

4. Если введем новую переменную t, положив $t = x + \frac{p}{2}$ и

$x^2 + px + q = t^2 + a^2$, где $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, то интеграл $\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$ $= I_n$ можно вычислить с помощью реккурентной формулы

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{3-2n}{2-2n}I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}\right).$$

4.5. Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби

Случай 1. Знаменатель имеет только действительные различные корни, т.е. разлагается на неповторяющиеся множители первой степени.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx.$

Решение.

Так как каждый из двухчленов $x-1, x-2, x-4$ входит в знаменатель в первой степени, то данная правильная рациональная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$x^2+2x+3 = A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2).$$

При x = 1 6 = 3A, A = 2;

при x = 2 11 = –2B, B= $-\,{}^{11}\!/_{2}$;

при x = 4 27 = 6C, C = ${}^{9}\!/_{2}$.

Итак, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{3}{x-1} - \frac{{}^{11}\!/_{2}}{x-2} + \frac{{}^{9}\!/_{2}}{x-4}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx = 3\int\frac{dx}{x-1} - \frac{11}{2}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{9}{2}\int\frac{dx}{x-4} = 3\ln|x-1| -$$

$$-\frac{11}{2}\ln|x-2| + \frac{9}{2}\ln|x-4| + C.$$

Случай 2. Знаменатель имеет лишь действительные корни, причем некоторые из них кратные, т.е. знаменатель разлагается на множители первой степени и некоторые из них повторяются.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx.$

Решение.

Множителю $(x-1)^3$ соответствует сумма трех простейших дробей $\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$, а множителю $x+3$ – простейшая дробь $\frac{D}{x+3}$. Итак,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+3}.$$

Освободимся от знаменателя:

$$x^2+1=A(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)^2(x+3)+D(x-1)^3.$$

x = 1	$2 = 4A;\ A = \frac{1}{2}$
x = –3	$10 = -64D;\ D = -\frac{5}{32}$
x = 0	$1= \frac{3}{2}-3B + 3C +\frac{5}{2}$
x = –1	$2 = 1- 4B + 8C +\frac{5}{4}$

Откуда $B = \frac{3}{8}$, $C = \frac{5}{32}$.

Окончательное разложение данной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{8(x-1)^2}+\frac{5}{32(x-1)}-\frac{5}{32(x+3)}.$$

Таким образом, получим

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x-3)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln|x-1|-\frac{5}{32}\ln|x+3|+C.$$

Случай 3. Среди корней знаменателя имеются простые комплексные корни, т.е. разложение знаменателя содержит квадратичные неповторяющиеся множители.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)}$.

Решение.

Разлагаем дробь на простейшие дроби

$$\frac{1}{x\left(x^2+x+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$1 = A\left(x^2+x+1\right) + (Bx+C)x$. Выпишем коэффициенты при одинаковых степенях:

при x^2: $0 = A+B$

x: $0 = A+C$

x^0: $1 = A$

Откуда найдем A = 1, B = –1, C = –1.

Итак, $\frac{1}{x\left(x^2+x+1\right)} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1}$.

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{(x+1)dx}{x^2+x+1} = \ln|x| - \int \frac{(x+1)dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \ln|x| -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d((x+{}^1\!/\!_2)^2+{}^3\!/\!_4)}{(x+{}^1\!/\!_2)^2+{}^3\!/\!_4} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+{}^1\!/\!_2)^2+{}^3\!/\!_4} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left|(x+{}^1\!/\!_2)^2+{}^3\!/\!_4\right| -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Случай 4. Среди корней знаменателя имеются кратные комплексные корни, т.е. разложение знаменателя содержит повторяющиеся квадратичные множители.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^3-x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$.

Решение.

Так как x^2+1 есть двукратный множитель, то

$$\frac{x^3-x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$x^3 - x = Ax + B + (Cx+D)\left(x^2+1\right).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1 = C, \\ x^2 & 0 = D, \\ x^1 & -1 = A + C; A = -2, \\ x^0 & 0 = B + D; B = 0. \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^3 - x}{\left(x^2+1\right)^2} dx = -\int \frac{2x dx}{\left(x^2+1\right)^2} + \int \frac{x dx}{x^2+1} = -\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C.$$

4.6. Интегрирование иррациональных функций

Неопределенный интеграл вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ интегрируется путем введения новой переменной $t = \frac{1}{2}\left(ax^2+bx+c\right)'$.

Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ интегрируются путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{9-4x}{\sqrt{5+8x-4x^2}} dx$.

Решение.

$$\int \frac{9-4x}{\sqrt{5+8x-4x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{2}\left(5+8x-4x^2\right)' = \frac{1}{2}(8-8x) = 4-4x \\ x = \frac{1}{4}(4-t), dx = -\frac{1}{4}dt. \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\left(9-4\frac{1}{4}(4-t)\right)\left(-\frac{1}{4}dt\right)}{\sqrt{5+8\frac{1}{4}(4-t)-4\frac{1}{16}(4-t)^2}} = -\frac{1}{4}\int \frac{9-4+t}{\sqrt{5+8-2t-4+2t-\frac{1}{4}t^2}} dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{5+t}{\sqrt{9-\frac{1}{4}t^2}} dt = -\frac{1}{2}\int \frac{5+t}{\sqrt{36-t^2}} dt = -\frac{5}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{36-t^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{\sqrt{36-t^2}} =$$

$$=-\frac{5}{2}\arcsin\frac{t}{6}+\frac{1}{4}\int\frac{d(36-t^2)}{\sqrt{36-t^2}}=-\frac{5}{2}\arcsin\frac{t}{6}+\frac{1}{2}\sqrt{36-t^2}+C,$$ где $t=4-4x$.

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-2}}=\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-2}\right|+C.$$

Интеграл вида $\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx$, где n $\in$ Z, интегрируются путем введения новой переменной $t^n = ax + b$.

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx$.

Решение.

$$\int\frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}dx=\left|\begin{matrix}x=t^2\\ dx=2tdt\end{matrix}\right|=\int\frac{1-t}{t^2-2t}\cdot 2tdt=2\int\frac{1-t}{t-2}dt=-2\left(\int dt+\int\frac{dt}{t-2}\right)=$$

$$=-2t-2\ln|t-2|+C=-2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}-2\right|+C.$$

Интегралы вида $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, вычисляются с помощью реккурентной формулы

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени (n – 1) с неопределенными коэффициентами и λ – число. Коэффициенты многочлена и число λ находятся при помощи дифференцирования последнего тождества.

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

Решение.

Применяем реккурентную формулу:

$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4}}=(Ax+B)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$. Дифференцируем это тождество: $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}=A\sqrt{x^2+4}+\frac{(Ax+B)\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+4}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}$. Откуда

$$x^2 = A(x^2 + 4) + x(Ax+B) + \lambda.$$

Выпишем коэффициенты при одинаковых степенях:
x^2: 1 = A +A
x: 0 = Bx
x^0: 0 = 4A + λ.

Итак, A = $\frac{1}{2}$, B = 0, λ = –2. Следовательно,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+4} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+4} - 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C.$$

Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$, где *m, n, p* – рациональные числа:

1) если *p* – целое число, то делаем замену $x = t^s$, где *s* – общий знаменатель дробей m и n;

2) если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то делаем замену $a + bx^n = t^s$, где *s* – знаменатель дроби p;

3) если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число, то делаем замену $ax^{-n} + b = t^s$, где *s* – знаменатель дроби *p*.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = \int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}\, dx = \left| \begin{array}{c} m = -2/3,\ n = 1/3,\ p = 1/2 \\ так\ как\ \frac{m+1}{n} = 1,\ то \\ 1 + x^{1/3} = t^2,\ x^{-2/3}dx = 6t\, dt \end{array} \right| = \qquad =$$

$$\int t \cdot 6t dt = 6\int t^2 dt = 2t^3 + C = 2(1+\sqrt[3]{x})^{3/2} + C.$$

4.7. Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где *R* – рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью так называемой универсальной тригонометрической подстановки $tg(x/2) = t$. В результате этой подстановки имеем:

$$\sin x = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{1 - tg^2(x/2)}{1 + tg^2(x/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

$$x = 2arctgt; dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x + 3\cos x + 5}$.

Решение.

Введем новую переменную $tg\frac{x}{2} = t$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sin x + 3\cos x + 5} = \left| \begin{array}{c} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= \int \frac{2dt}{2t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 4} = \int \frac{dt}{(t + 1/2)^2 + 15/4} = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{15}} +$$

$$+C = \frac{2}{\sqrt{15}} arctg \frac{2tg\, x/2 + 1}{\sqrt{15}} + C.$$

Универсальная подстановка $tg(x/2) = t$ во многих случаях приводит к сложным вычислениям, так как при ее применении $sinx$ и $cosx$ выражаются через t в виде рациональных дробей, содержащих t^2.

В некоторых частных случаях нахождение интеграла вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ может быть упрощено:

1. Если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция относительно $\sin x$, т.е., если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\cos x = t$.

2. Если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция относительно $\cos x$, т.е., если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $\sin x = t$.

3. Если $R(\sin x, \cos x)$ – четная функция и относительно $\sin x$ и относительно $\cos x$, т.е., если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то к цели приводит подстановка $tgx = t$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x}$.

Решение.

Так как подынтегральная функция нечетна относительно синуса, то полагаем $\cos x = t$:

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x} = \begin{vmatrix} \cos x = t, & \sin^2 x = 1 - t^2 \\ \cos 2x = 2t^2 - 1, & dt = -\sin x dx \end{vmatrix} = \int \frac{(2 - t^2)(-dt)}{2t^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2t^2 - 4}{2t^2 - 2} dt = \frac{1}{2} \int dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{2t^2 - 1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t\sqrt{2} - 1}{t\sqrt{2} + 1} \right| + C = \frac{1}{2} cosx -$$

$$- \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1} \right| + C.$$

2. ***Интегралы вида*** $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

Выделим здесь два случая, имеющие особенно важное значение.

Случай 1. По крайней мере, один из показателей m или n – нечетное положительное число.

Если n – нечетное положительное число, то применяется подстановка $\sin x = t$. Если же m – нечетное положительное число, подстановка $\cos x = t$.

Пример. Найти интеграл $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

Решение.

Полагая $\cos x = t, \cos x dx = dt,$ получим

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int t^4 (1 - t^2)^2 dt = \int t^4 dt -$$

$$- \int t^6 dt + \int t^8 dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.$$

Случай 2. Оба показателя степени m и n – четные положительные числа. Здесь следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью следующих формул:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x;$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Пример. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Решение.

$\sin^2 x\cos^2 x = (\sin x\cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x$, получаем $\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)$.

Итак,

$$\int\sin^2 x\cos^2 x dx = \frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int\cos 4x dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

3. ***Интегралы вида*** $\int\sin mx\cos nx dx$, $\int\cos mx\cos nx dx$, $\int\sin mx\sin nx dx$.

Тригонометрические формулы

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

дают возможность произведение тригонометрических функций представить в виде суммы.

ТЕМА 5. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

5.1. Основные свойства и методы вычисления

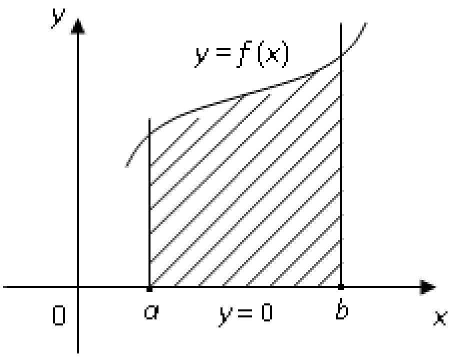
Пусть функция *f(x)* задана в некотором отрезке $[a;b]$. Разобьем отрезок на *n* частей точками $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n <$ b. Обозначим через $\lambda = \max\limits_{i=1,\overline{n}}\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Выберем в каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ произвольную точку ξ_i и составим сумму вида:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

которая называется интегральной суммой или *суммой Римана*, соответствующей данному разбиению отрезка $[a;b]$и выбору точек ξ_i.

Если существует конечный предел интегральной суммы $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a;b]$ и выбора точек ξ_i, то его называют определенным интегралом функции *f(x)* на промежутке от *a* до *b* и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, функцию *f(x)* *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a;b]$.

Число *a* называется нижним пределом, число *b* – верхним пределом интеграла, функция – подынтегральной функцией, выражение $f(x)dx$– подынтегральным выражением, а задача о нахождении $\int\limits_a^b f(x)dx$ – интегрированием функции на отрезке $[a;b]$.



Если $f(x) > 0$ на $[a;b]$, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x),\ x = a,\ x = b,\ y = 0.$

Основные свойства определенного интеграла:

1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx\ .$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю: $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

3. Отрезок интегрирования можно разбить на части:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx\ .$$

4. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых:

$$\int\limits_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_b^a f(x)dx,$$

где C – константа.

6. Если функция *f(x)* интегрируемая на отрезке $[a;b]$, и $f(x) > 0$ для всех x $\in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$.

7. Если функции *f(x), g(x)* интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и $f(x) \le g(x)$ для всех x $\in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

8. Если функция *f(x)* интегрируемая на отрезке $[a;b]$, и $m \le f(x) \le M$ на отрезке $[a;b]$, где *M, m* – некоторые числа, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

9. Теорема о среднем значении. Если *f(x)* непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует такая точка $\xi \in [a;b]$, такая что справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \text{ или } f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Для вычисления определенного интеграла, когда можно найти соответствующий неопределённый интеграл, служит формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Если функция *f(x)* - нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, если *f(x)* - четная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Пример. Вычислить интеграл $\int_2^3 3x^2dx$.

Решение.

Применяя формулу Ньютона – Лейбница и свойства определенного интеграла, получим

$$\int_2^3 3x^2dx = 3\frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19.$$

Правило интегрирования по частям в определенном интеграле:
Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a;b]$ функции, то имеет место формула интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi}(x-1)\cos x$.

Решение.

$\int_0^{\pi}(x-1)\cos x = \left|\begin{matrix} u = x-1 & dv=\cos x dx \\ du = dx & v=\sin x\end{matrix}\right| = (x-1)\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x dx = (\pi-1)\cos\pi + 1 + \cos x\Big|_0^{\pi} = 1-\pi+1-1-1 = -\pi.$

Правило замены переменной в определенном интеграле:

Если на интервале $[a;b]$ функции $x = \varphi(t)$, $\varphi'(t)$ и $f(\varphi(t))$ - непрерывны и $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(в) = \beta$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Решение.

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \left|\begin{matrix} t=\sqrt{1+3x} \\ x=\frac{t^2-1}{3}, dx=\frac{2}{3}tdt \\ t_н = 1, t_в = 4\end{matrix}\right| = \frac{2}{9}\int_1^4 \left(t^2-1\right)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{64-1}{3}-4+1\right) = 4.$$

5.2. Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур. Если непрерывная кривая задана в прямоугольных координатах уравнением $y = f(x)$, $f(x) > 0$ для всех x $\in [a;b]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Если криволинейная трапеция ограничена сверху и снизу кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$, сбоку прямыми $x = a$ и $x = b$, то имеем

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Если фигура задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Если плоская кривая отнесена к полярной системе координат и задана уравнением $\rho = f(\varphi)$, то

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

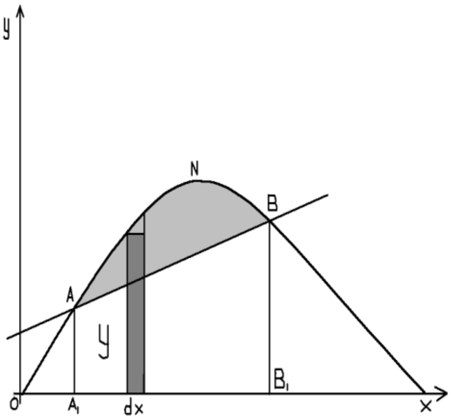
Пример. Вычислить площадь, ограниченную следующими линиями:

1) параболой $4y = 8x - x^2$ и прямой $4y = x - 6$;
2) эллипсом x = a cos t, y = a sin t;
3) кардиоидой ρ = a(1+ cos φ).

Решение.

1. Совместно решая данные уравнения, определим две точки пересечения линий, ограничивающих искомую площадь,

A $\left(1;\frac{7}{4}\right)$, B(6; 3).



Видим, что искомая площадь ANB равна разности площадей $A_1A\text{N}BB_1$ и A_1ABB_1. Площадь S_1 криволинейной трапеции $A_1A\text{N}BB_1$, прилежащей к оси Ox, выражается интегралом

$$S_1=\int_1^6 ydx=\frac{1}{4}\int_1^6\left(8x-x^2\right)\text{dx}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(4x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^6=\frac{205}{12}.$$

Площадь S_2 трапеции A_1ABB_1 равна произведению полусуммы её оснований на высоту:

$$S_2=\frac{\text{AA}_1+\text{BB}_1}{2}\cdot\text{A}_1\text{B}_1=\frac{95}{8}.$$

Следовательно, искомая площадь

$$S=S_1-S_2=\frac{205}{12}-\frac{95}{8}=5\frac{5}{24}.$$

2. Оси координат совпадают с осями симметрии данного эллипса и поэтому они делят его на четыре одинаковые части. Четвертую часть искомой площади S, расположенную в первом квадранте, найдем как площадь криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox: $\frac{1}{4}\text{S}=\int_0^a ydx$.

Пользуясь данными параметрическими уравнениями эллипса, преобразуем интеграл к переменной t, y = b sint, dx = –a sin t dt, если x = 0, то $t = \frac{\pi}{2}$; если x = a, то t = 0;

$$S = 4\int_0^a y dx = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\, dt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt = 2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$= \pi ab.$

3. Кардиоида симметрична относительно полярной оси. Поэтому искомая площадь равна удвоенной площади криволинейного сектора OAB. Дуга ABO описывается концом полярного радиуса r при изменении полярного угла φ от 0 до π:

$$S = 2\cdot 1/2\int_0^{\pi} r^2 d\varphi = a^2\cdot\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi = a^2\cdot$$

$$\cdot\left[\int_0^{\pi} d\varphi + 2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\varphi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi\right] = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$= \frac{3}{2}\pi a^2.$

Длина дуги плоской кривой. Если плоская кривая отнесена к прямоугольной системе координат и задана уравнениями y = f(x), x = F(x) или параметрическими уравнениями x = φ(t), y = ψ(t), то дифференциал dl длины её дуги, выражается формулой

$$dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+(x')^2}dy = \sqrt{x'^2+y'^2}dt,$$

а длина дуги AB определяется формулой

$$L_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} dl = \int_a^{в} \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_{y_A}^{y_E}\sqrt{1+(x')^2}dy = \int_{t_A}^{t_B}\sqrt{x'^2+y'^2}dt.$$

Если плоская кривая отнесена к полярной системе координат и задана уравнением ρ=f(φ), то $dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi$,

$$L_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} dl = \int_{\varphi_A}^{\varphi B}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi .$$

Пример:

1) Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = (x-1)^3$ между точками A(2;–1) и B(5;–8).

2) Одной арки циклоиды x = (t – sint), y = a(1 – cost).

3) $\rho = \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$ от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение.

1. Разрешаем данное уравнение относительно ***у*** и находим у':

у = $\pm(x-1)^{3/2}$; y'=$\pm\dfrac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}$ (знаки ± в выражении ***у*** указывает, что кривая симметрична оси Ox; точки A и B, имеющие отрицательные ординаты, лежат на той ветви кривой, которая расположена ниже оси Ox). Итак,

$$L_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_2^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}dx = \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{9x-5}dx =$$

$$= \frac{1}{18}\int_2^5 (9x-5)^{\frac{1}{2}} d(9x-5) = \frac{1}{27}(9x-5)^{3/2} \Big|_2^5 \approx 7{,}63.$$

2. Дифференцируем по t параметрические уравнения циклоиды

$x = \dfrac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$, $\quad y = \dfrac{dy}{dt} = a\sin t$ $\quad$ и находим дифференциал ее дуги

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = a\sqrt{2(1-\cos t)}dt =$$

$$= a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

Одна арка циклоиды получается при изменении параметра t от 0 до 2π, поэтому

$$L = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 4a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}d\frac{t}{2} = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

3. Имеем $\rho' = 3\sin^2\dfrac{\varphi}{3}\cdot\cos\dfrac{\varphi}{3}\cdot\dfrac{1}{3}$. Следовательно,

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3} + (\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3})^2}d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos\frac{2\varphi}{3})d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3})\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{8}.$$

5.3. Несобственный интеграл

Несобственным интегралом называется: 1) интеграл с бесконечными пределами; 2) интеграл от неограниченной функции:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся; если же предел не существует или равен бесконечности – расходящийся.

Аналогично, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$;

Если функция имеет бесконечный разрыв в точке с отрезка $[a;b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$, то по определению полагаем $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{d\to c-0}\int\limits_{a}^{d} f(x)dx + \lim\limits_{d\to c+0}\int\limits_{d}^{b} f(x)dx.$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x\to b} arctg\,x\Big|_0^b = 2\lim_{x\to b}(arctgb - arctg\,0) =$$
$$= 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x}$.

Решение.

$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_{\alpha}^{1}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{\alpha\to+0}\ln x\Big|_{\alpha}^{1} = \lim\limits_{\alpha\to+0}(\ln 1 - \ln\alpha) = +\infty.$ Следовательно, несобственный интеграл расходится.

Контрольная работа №1

Вариант 1.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^2(3x-2)^2}{x^5+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{tgx^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$.

Задание 2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y=\dfrac{x^3-8x}{x^2-4}$; б) $y=3^{\cos 2x}+\sin^2 3x$; в) $y=arctg(\sqrt{x}(1-x))$;

г) $2y\cdot\ln y=x$; д) $y=x^{\arcsin x}$; е) $x=\cos 2t,\ y=2\cos t.$

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int \sin^4 2x dx$; 2. $\int \dfrac{x^5-x+1}{x^3+2x}dx$; 3. $\int (x^2-5x)e^x dx$;

4. $\int \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-1}dx$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_1^{16}\dfrac{(\sqrt{x}+1)dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x^3}}$;

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{dx}{(x+5)^3}$; 2. $\int\limits_0^{2}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: y = sinx, y = cosx и осью Оу.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $r=\sin\varphi+\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 2.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$; в) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

Задание 2. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; б) $y=e^{arctg(1-x)}$; в) $y=\ln(x\cdot\sin(x))$;

г) $\cos(x\cdot y)=x$; д) $y=x^{\sqrt{x}}$; е) $x=\sin t,\ y=\cos 2t$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int\cos 5x\sin 7x dx$; 2. $\int\dfrac{xdx}{\cos^2 2x}$; 3. $\int\dfrac{x^2+2}{x^4+x^2}dx$;

4. $\int\dfrac{(\sqrt{x}+2)dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}}$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_8^{64}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$;

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int\limits_0^1\dfrac{\ln 4x}{x}dx$; 2. $\int\limits_{-\infty}^0\dfrac{dx}{x^2+14}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $x^2-9y=0$, $x-3y+6=0$.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=2\sin^2 t\end{cases}$.

Вариант 3.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln^2(1+\sin 2x)}{tg^2\sqrt{3x}\cdot\cos^2 x}$.

Задание 2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{(1-x)^2}$; б) $y = 2^{tgx} + \cos^2 4x$; в) $y = \arcsin\left((1+\sqrt{x})\cdot e^x\right)$;

г) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; д) $y = (x+1)^{\sin x}$; е) $x = cost, y = sint$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int(\sqrt{x} - x)\ln 2x dx$; 2. $\int \frac{x^2 - 2x - 1}{x^4 - 2x^2 + 1} dx$; 3. $\int \cos^3 3x \sin^2 3x dx$;

4. $\int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 7}}$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int_6^{13} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3} - 2} dx$;

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int_0^{\infty} e^{-2x-4} dx$; 2. $\int_0^2 \frac{dx}{\pi\sqrt{4-x^2}}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды y = sin2x и осью Ox.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: r = 4(1+cosφ).

Вариант 4.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x}{1-3\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x}$.

Задание 2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y = \frac{1+x^2}{(1+x)^2}$; б) $y = \ln\cos x + tg^2 2x$; в) $y = \arccos\left(\frac{2x-1}{\sqrt{x}}\right)$;

г) $x - y = a\sin(y)$; д) $y = (\ln x)^x$; е) $x = sin\,2t,\ y = cos\,2t$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y = x^2 \cdot e^{-x}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int (2x+5)e^x dx$; 2. $\int \frac{dx}{2\cos x - \sin x}$; 3. $\int \arcsin 2x dx$;

4. $\int \frac{xdx}{5-4x-x^2}$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int_1^{\infty} xe^{-2x^2} dx$; 2. $\int_0^{1/e^3} \frac{dx}{x\sqrt[3]{(\ln x - 5)^4}}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: 2x+y = 4, y = 2x^2.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

Вариант 5.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx - \sin x}{x^3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\arcsin 2x \cdot arctgx}$.

Задание 2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y=\frac{x^3-1}{x+2}$; б) $y=tg(\sin 2x)+\ln^2 3x$; в) $y=\ln\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$;

г) $y=\cos(x+y)$; д) $y=\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$; е) $x=1-t^2, y=t-t^3$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y=\frac{x^3}{x^2+1}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int(\sqrt{x}-x)\ln 2x dx$; 2. $\int\frac{x^2-2x-1}{x^4-2x^2+1}dx$; 3. $\int\cos^3 3x\sin^2 3x dx$;

4. $\int\frac{(1-x)dx}{\sqrt{x^2+8x+7}}$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_0^1 arctg(x-1)dx$.

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int\limits_0^\infty\frac{dx}{x^2-x+10}$; 2. $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos 2x}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4x-x^2$, $y = 0$.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $\begin{cases}x=2\cos^2 t,\\ y=2\sin^2 t\end{cases}$.

Вариант 6.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5^x-4^x}{x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 3x + tg^2 2x}{arctg\,2x^2}$.

Задание 2. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y=\dfrac{2x+3}{(x+4)^2}$; б) $y=2^{\sin 3x}+tg^2 4x$; в) $y=\cos(\sqrt{x}(1-x))$;

г) $x\sin y-\cos(x-y)=0$; д) $y=x^{\ln x}$; е) $x=t-sin\,t,\ y=1-cos\,t$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y=(1+x^2)\cdot e^{-x^2}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int \sin 5x\cos\dfrac{x}{3}dx$; 2. $\int\dfrac{(x-1)dx}{x^3-4x^2+3x}$; 3. $\int ctg^2 x dx$;

4. $\int x\ln 3x dx$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_1^{81}\dfrac{(x+1)dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}+4}$.

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int\limits_0^{\infty}\sin 3x dx$; 2. $\int\limits_1^9\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: y = lnx, y = 0, x = e.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $\begin{cases} x=t^2-1, \\ y=t^3-t \end{cases}$.

Вариант 7.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\arcsin^2 4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

Задание 2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y=\frac{4-x^2}{(x+1)^2}$; б) $y=\cos^2 3x+\ln(\sin 3x)$; в) $y=\ln(\cos x\cdot\sqrt{x})$;

г) $y=x+arctg(y)$; д) $y=x^{\cos 2x}$; е) $x=lnt, y=t^2-1$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y=\frac{1}{x^2-1}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}$; 2. $\int\cos^5 4xdx$; 3. $\int(x-2)arctgxdx$; 4. $\int\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}dx$;

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int_0^2\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{2x}+1}dx$.

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int_0^\infty\frac{xdx}{x^2+1}$; 2. $\int_8^{81}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = 3–2x$.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $r=2(\sin\varphi+\cos\varphi), 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Вариант 8.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x\,tg 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$.

Задание 2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y=\frac{(x-1)^2}{2x+3}$; б) $y=4^{\ln 3x}+arctg^2(4x)$; в) $y=\arccos\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$;

г) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$; д) $y=(\sin x)^2$; е) $x=cos^3 t, y=sin^3 t$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y=x-\frac{8}{x^4}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int\frac{(x^3-8)dx}{x^2+3x-1}$; 2. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3. $\int\cos^4 xdx$; 4. $\int\arcsin 2xdx$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int_2^7\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}-5}dx$.

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int_0^{\pi/4} ctg 2xdx$; 3. $\int_1^{\infty}\frac{3xdx}{x^2-4}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=\sqrt{x}$, $y = x^3$.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $r = 1+ \cos 2\varphi$.

Вариант 9.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\frac{ctgx}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin^2 x}}{2xtg\,2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$.

Задание 2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y=\dfrac{(1-x)^3}{x}$; б) $y=\cos^2 2x+3^{arctgx}$; в) $y=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\right)$;

г) $y=tg(x+y)$; д) $y=(x+2)^{\cos x}$; е) $x=cos^2 t, y=sin^2 t$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y=2x+arctg\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int\dfrac{(x^4-2x)dx}{x^3-3x^2+x-3}$; 2. $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$; 3. $\int(3-2x)\cos xdx$;

4. $\int\dfrac{\sin^4 2x}{\cos^2 2x}dx$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int_1^{16}\dfrac{1-\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}{2x+\sqrt{x}}dx$.

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int_0^8\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$; 2. $\int_1^{\infty}\dfrac{2-\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$;

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $4y = x^2$, $x^2+2y = 0$.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $r = 3e^{\varphi}$, $(0\le\varphi\le 2\ln 3)$.

Вариант 10.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8^x-7^x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x^2+1}$

Задание 2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y=\frac{(1+x)^2}{1-2x}$; б) $y=2^{\cos 3x}+ctg^2 3x$; в) $y=\ln\frac{x+3}{\sqrt{x}}$;

г) $y=1+x\cdot e^y$; д) $y=(3-x)^{\ln(3-x)}$; е) $x=\arcsin t,\ y=\ln(1-t^2)$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y=e^{2x-x^2}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}+6}$; 2. $\int\cos^3\frac{x}{2}dx$; 3. $\int\frac{(2-3x)dx}{x^3+4x^2}$; 4. $\int\frac{(x+3)dx}{3x^2-6x+5}$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x+2}{\sin^2 x}dx$.

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int\limits_0^{\infty}xe^{-x^2}dx$; 2. $\int\limits_1^2\frac{dx}{\sqrt[5]{x^2-4x+4}}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 2x$, $y = x^3$ (в сторону положительных ординат).

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $y = x^2$ между прямыми $x = -1$ и $x = 2$.

Вариант 11.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(x+1)}{6(\sqrt{9-x^2}-3)}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(x+1)-\ln x)$.

Задание 2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y = \dfrac{(2+3x)^3}{x-1}$; б) $y = e^{tgx} + ctg^2 3x$; в) $y = \ln \dfrac{\sqrt{x}}{3x+2}$;

г) $y = \cos(x^2 + y)$; д) $y = (1+x)^x$; е) $x = \ln^2 t,\ y = t^4 - 5$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y = \dfrac{x^3+5}{x^2-1}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int (2-x)2^x dx$; 2. $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{x(x+4)}$; 3. $\int \cos 5x \sin 2x dx$; 4. $\int \dfrac{2x^4 - x + 4}{x^3 + 2x} dx$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_1^{32} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt[4]{x^3}}$.

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int\limits_0^1 \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; 2. $\int\limits_{-2}^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^4}}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 2x^2$, отсеченной прямой $x = 2$.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $r = 1 + \sin 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Вариант 12.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x-2}\right)^x$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x-3) - \ln x]$.

Задание 2. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y = \dfrac{2+x^2}{(x+1)^4}$; б) $y = tg^2 8x + \ln 3x$; в) $y = \ln(tgx \cdot \sqrt{x})$;

г) $y^2 = \cos(x+y)$; д) $y = (1+x)^{2x}$; е) $x = \sin t,\ y = \ln(t - t^2)$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y = \dfrac{(x-1)^2}{x}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int (x^2 - x)\sin x dx$; 2. $\int \dfrac{xdx}{x^2 + 8x + 7}$; 3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[4]{x^3}}$; 4. $\int \dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_0^{\pi/4} \dfrac{dx}{\sin x + \cos x}$.

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 6}}$; 2. $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: r= 4 cos3φ .

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $r = \sin\dfrac{\varphi}{3}$.

Вариант 13.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - 1}{tg 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}$.

Задание 2. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y = \dfrac{x^2 - 8x}{x^4 - 4}$; б) $y = 2^{\sin 2x} + \sin^2 3x$; в) $y = tg(\sqrt{x}(1-x))$;

г) $2y \cdot \ln x = y$; д) $y = \cos x^{\sin x}$; е) $x = \cos t,\ y = 2\sin t$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y = \dfrac{x+1}{(2x+1)^2}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}}$; 2. $\int \dfrac{x^5 - x^2}{x^3 + 8}$; 3. $\int xarctg3xdx$; 4. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{3 + x^2}}$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_1^e 2x\ln^2 xdx$;

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int\limits_1^\infty \sqrt{e^{2-x}}dx$; 2. $\int\limits_{-\pi/6}^0 \dfrac{\cos xdx}{\sqrt{\sin x + 0{,}5}}$..

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$r = 2(\sin\varphi + \cos\varphi), 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$.

Вариант 14.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos7x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$.

Задание 2. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y = \left(\dfrac{x^2+1}{x^3-1}\right)^2$; б) $y = e^{arctgx^2}$; в) $y = \ln(x^3 \cdot \sin x)$;

г) $tg(x \cdot y) = x$; д) $y = \sqrt{x^x}$; е) $x = e^t,\ y = tg2t.$

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y = x \cdot e^{-x}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$; 2. $\int \frac{x-2}{x^4-1} dx$; 3. $\int (x - x^2) e^{-2x} dx$; 4. $\int \cos^7 \frac{3x}{2} dx$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int_e^{2e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int_0^8 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+x} dx$; 2. $\int_2^4 \frac{dx}{x^2 - x - 2}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией r = 3cos2φ.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t) \\ y = 3(\sin t - t \cos t) \end{cases}$, $(0 \le t \le 2\pi)$.

Вариант 15.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 + 3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{7x-1}{7x}\right)^{-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\lg(1+10x)}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x}$.

Задание 2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y = \frac{x^2}{(1-x)^3}$; б) $y = e^{tgx} + \cos^3 2x$; в) $y = \arcsin \frac{1-x}{e^x}$;

г) $x^2 + y - 3xy = 0$; д) $y = x^{\sin x}$; е) $x = arc\sin 2t,\ y = \sin t$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y = \frac{3x^3}{x^2+1}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int \frac{\cos^4 2x}{\sin^2 2x}dx$;   2. $\int \frac{x^3+x-1}{x^3+1}dx$;   3. $\int (x-1)\ln^2 x dx$;   4. $\int \frac{x-4}{x^2-5x+1}dx$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{(20-x^2)^3}}$.

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int\limits_1^{\infty} e^{-3x-1}dx$;   2. $\int\limits_{-\pi/3}^{0} \frac{\cos x}{\sin x+1}dx$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r^2 = 3\cos 2\varphi$.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Вариант 16.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to a}\frac{tgx-tga}{x-a}$;   б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$;   в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{9+x}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Задание 2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y=\frac{2x^3-1}{4x^2+2}$;   б) $y=tg(\sin 2x)+\ln^2 3x$;   в) $y=arctg\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$;

г) $y=x^2+y^3$;   д) $y=\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2x}$;   е) $x=t^2,\ y=t-t^3$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y=(1+x^2)\cdot e^{-x^2}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int \sin^2 x(2-\cos^3 x)dx$; 2. $\int \frac{x-5}{\cos^2 2x}dx$;   3. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$; 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{(5+x^2)^3}}$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_9^{25} \frac{\sqrt{x}+4}{1+\sqrt{x}}dx$;

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{2^x dx}{1+2^{2x}}$; 2. $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln x}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
r = 2sin2φ .

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $\begin{cases} x = 2\cos^3 \frac{t}{2} \\ y = 2\sin^3 \frac{t}{2} \end{cases}$, (взять четверть астроиды).

Вариант 17.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sqrt{x+1}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1/2} \frac{5x-2x^2-2}{2x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi/6} \frac{\sin(x-\pi/6)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$.

Задание 2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y=\frac{4-x^3}{3x+1}$; б) $y=\cos^5 3x+\ln(\sin 3x)$; в) $y=\cos(\sqrt{x}\cdot\sin 3x)$;

г) $y^2 = x^3 + arctgy$; д) $y = 2x^{\cos x}$; е) $x=t,\ y=t^5-t+2$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y=\frac{x}{x^2-1}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int \ln(3x+2)dx$; 2. $\int \dfrac{(x^5-x)dx}{x^3-4x^2+x-4}$; 3. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2-4x-x^2}}$; 4. $\int (x^2-1)\sin x dx$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_{-\pi}^{0} x\,arctg x dx$.

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+4x-1}}$; 2. $\int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{dx}{x^2+x+9}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $x^2+y^2-4x=0$, $y=x$, $y\ge 0$.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$, $\left(0\le t\le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Вариант 18.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-3^x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos^2 x}{1-\cos x}$.

Задание 2. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y=\dfrac{(x-1)^5}{2x+3}$; б) $y=4^{tg 3x}+arctg^3 x$; в) $y=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{x^3}}{1+x}\right)$;

г) $\sqrt{x}+\sqrt{y^3}=1$; д) $y=(\sin 2x)^3$; е) $x=\cos t,\ y=\sin^3 t$

.Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y=x-\dfrac{1}{x^2}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int \sin^3 x\cos^2 x dx$; 2. $\int \dfrac{(6x-1)dx}{\sqrt{x^2-8x+6}}$; 3. $\int (x^2-3x)\sin x dx$; 4. $\int \dfrac{x^3+4x+2}{(x+2)x^2}dx$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_{4}^{25} \dfrac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$;

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int\limits_0^3 \frac{3dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 2. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией
r = 3 (1+sinφ), $(0\le\varphi\le 2\pi)$.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $\begin{cases} x = 3\cos t - 2\cos\frac{3t}{2} \\ y = 3\sin t - 2\sin\frac{3t}{2} \end{cases}$, $(0\le t\le 2\pi)$.

Вариант 19.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+7}{11+2x}\right)^{x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{3}}{x^3+8}$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{4x-1-4x^2}$.

Задание 2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y=\frac{(1-x)^5}{x^2}$; б) $y=\cos^4 2x+2^{arctgx}$; в) $y=\cos\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)$;

г) $y^3 = tg(x^2+y)$; д) $y=(x+2)^x$; е) $x=\cos^3 t,\ y=\sin^4 t$.

Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y=2x+arctg3x$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int x(e^{-2x}+\cos 2x)dx$; 2. $\int\frac{x^5+2x^2-1}{x^4-16}dx$; 3. $\int\frac{tg^2 xdx}{\cos^2 x+2\sin^2 x}$;

4. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{10-\sqrt[3]{x}}$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_{-\pi/12}^{0} x\arcsin 2xdx$;

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}+5}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}}dx$; 2. $\int\limits_0^\infty xe^{1-x}dx$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиуй $r^2 = 2\sin 2\varphi$.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$, $(0 \le t \le \pi)$.

Вариант 20.

Задание 1. Вычислить предел:

а) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+4}\right)^{3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(e^{x-3}-1)\cos\pi x}{arctg(x^2-9)}$

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{2+5x-7x^2}$.

Задание 2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

а) $y = \frac{(1+x)^4}{1-2x^3}$; б) $y = e^{\cos 3x} + ctg^3 3x$; в) $y = \ln\frac{x^2+3}{\sqrt{x}}$;

г) $y^2 = 1 + x\cdot e^y$; д) $y = \ln(3-x)^{\ln(3-x)}$; е) $x = \arcsin^2 t,\ y = \ln t$

.Задание 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить график: $y = \frac{2x+1}{x^3}$.

Задание 4. Используя различные методы интегрирования, найти неопределённые интегралы:

1. $\int xtg^2 2xdx$; 2. $\int\frac{(x^2-2x)dx}{(x+1)(x+3)^2}$; 3. $\int(2\sin^2 x - \cos^2 x)\sin xdx$;

4. $\int\frac{\sqrt{x+4}-2}{(3+x)\sqrt{x+4}}dx$.

Задание 5. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_1^{e^2}\ln\sqrt{x}\frac{dx}{2x}$;

Задание 6. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. $\int\limits_{-\pi/12}^{0} x\arccos 2xdx$; 2. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x^2-10x}}$.

Задание 7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией r = 5+cosφ.

Задание 8. Найти длину дуги кривой: $\begin{cases} x = 4\left(\dfrac{t}{2} - \sin\dfrac{t}{2}\right) \\ y = 4\left(1 - \cos\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}$, $(0 \le t \le 2\pi)$.