ЗАДАЧИ, ВХОДЯЩИЕ В КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

ЗАДАЧА № 1

Ступенчатый брус нагружен силами P_1, P_2 и P_3, направленными вдоль его оси. Заданы длины участков a, b, c и площади их поперечных сечений F_1 и F_2. Модуль упругости материала $E = 2\cdot10^5$ МПа, предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа и запас прочности по отношению к пределу текучести $n_T = 1{,}5$.

Требуется:

1) построить эпюры продольных сил N, напряжений σ и продольных перемещений Δ;

2) проверить, выполняется ли условие прочности.

Расчетные схемы выбираются по рис.1, числовые данные берутся из табл.1.

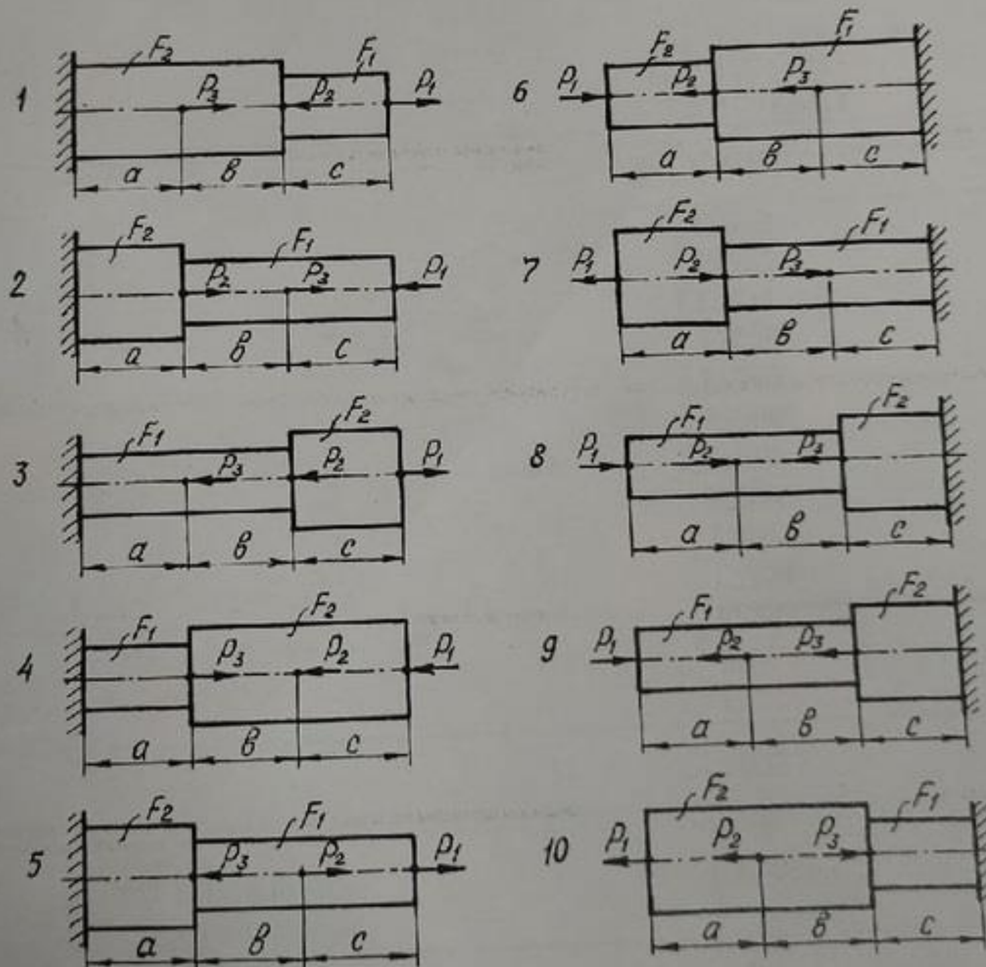


Рис. 1. Расчетные схемы к задаче № 1

Таблица 1

Числовые данные к задаче № 1

Номер строки	Номер схемы по рис1.	Сила, кН			Длина участков, м			Площадь поперечного сечения, см^2	
		P_1	P_2	P_3	a	b	c	F_1	F_2
1	1	40	90	100	0,3	0,5	0,6	5	10
2	2	45	80	120	0,3	0.5	0,5	4	12
3	3	50	85	110	0,4	0,6	0,4	6	14
4	4	35	70	115	0,4	0,6	0,6	4	10
5	5	40	75	100	0,5	0,4	0,3	5	15
6	6	50	80	95	0,5	0,4	0,4	6	18
7	7	60	70	120	0,3	0,2	0,5	4	12
8	8	45	60	115	0,4	0,3	0,6	7	10
9	9	35	65	110	0,2	0,4	0,4	8	14
0	10	30	90	95	0,5	0,5	0,3	6	16
	з	ж	а	д	е	ж	г	б	в

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШНИЮ ЗАДАЧИ №1

Основные теоретические сведения и расчетные формулы

Рассмотрим такой вид нагружения, как растяжение (сжатие), при котором в поперечных сечениях бруса возникают только продольные силы, направленные вдоль его оси, все остальные внутренние усилия равны нулю.

Продольная, или нормальная сила, N считается положительной при растяжении и отрицательной при сжатии. Ее величина может быть найдена с помощью метода сечений: она численно равна алгебраической сумме проекций на ось бруса всех внешних сил, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Действующая в поперечном сечении продольная сила N равномерно распределяется по всему сечению и, как следствие этого, нормальные напряжения σ также равномерно распределяются по всему сечению.

Их величина определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F}, \qquad (1.1)$$

где N - продольная сила в поперечном сечении;

F - его площадь.

(В некоторых учебниках и учебных пособиях площадь обозначается латинской буквой A).

В системе СИ сила выражается в ньютонах, площадь поперечного сечения - в квадратных метрах ($м^2$), нормальное напряжение - в паскалях (Па).

Сила может быть выражена в килограммах, а напряжение в килограммах, деленных на сантиметр в квадрате.

Абсолютное удлинение бруса при растяжении определяется по формуле

$$\Delta l = l_к - l, \tag{1.2}$$

где l - начальная длина бруса;

$l_к$ - длина бруса после деформации.

Относительное удлинение бруса (относительная продольная деформация)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{1.3}$$

При растяжении $\Delta l > 0$ и $\varepsilon > 0$, при сжатии эти величины отрицательны.

Абсолютное поперечное сужение

$$\Delta b = b_к - b, \tag{1.4}$$

где b - первоначальный поперечный размер бруса;

$b_к$ - величина поперечного размера бруса после нагружения.

Относительное поперечное сужение (относительная поперечная деформация)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}. \tag{1.5}$$

Абсолютная величина отношения ε'/ε, обозначаемая μ, называется коэффициентом Пуассона. Она является постоянной для каждого материала и характеризует его упругие свойства:

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right| \tag{1.6}$$

Между нормальным напряжением и относительным удлинением существует прямая пропорциональная зависимость, называемая законом Гука

$$\sigma = \varepsilon E, \tag{1.7}$$

где E - коэффициент пропорциональности (модуль упругости первого рода, или модуль Юнга).

Модуль упругости - это физическая характеристика материала, измеряемая в тех же единицах, что и нормальное напряжение.

Учитывая, что $\sigma = \frac{N}{F}$ и $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, можно записать выражение для вычисления абсолютного удлинения бруса в виде

$$\Delta l = \frac{N\,l}{E\,F}\ . \qquad (1.8)$$

Для ступенчатого стержня и (или) стержня с несколькими продольными нагрузками удлинение подсчитывается как алгебраическая сумма удлинений участков бруса, в пределах которых N, E, F постоянны:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot F_i}\ . \qquad (1.9)$$

Если же величины N и F изменяются по длине бруса, его абсолютное удлинение вычисляется по формуле

$$\Delta l = \int_l \frac{N(z)\,dz}{E\,F(z)}. \qquad (1.10)$$

Используя соотношение $\sigma_{max} \le [\sigma]$, называемое условием прочности, можно решить три основных задачи сопротивления материалов.

1. Подобрать сечение растянутого (сжатого) бруса, при котором его прочность будет обеспечена. Расчетная формула в этом случае имеет вид

$$\frac{N}{F} \le [\sigma], \qquad (1.11)$$

где N - продольная сила в опасном сечении бруса (сечении, в котором действует максимальное нормальное напряжение);

F - площадь поперечного сечения бруса;

$[\sigma]$ - допускаемое напряжение материала бруса.

Отсюда определяется необходимая площадь его сечения

$$F \ge \frac{N}{[\sigma]}\ . \qquad (1.12)$$

Зная форму сечения и его площадь, можно определить линейные размеры сечения или по сортаменту подобрать требуемый стандартный профиль: уголок, швеллер, двутавр и т. д.

Допускаемое напряжение $[\sigma]$ либо задается заранее, либо находится по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{опасн}}}{n}, \qquad (1.13)$$

где $\sigma_{\text{опасн}} = \sigma_т$ - предел текучести для пластичных материалов;
$\sigma_{\text{опасн}} = \sigma_в$ - временное сопротивление для хрупких материалов;
n - запас прочности материала .

2. Определить допускаемую нагрузку, если известны прочностные свойства материала и площадь поперечного сечения бруса.

Расчетная формула, вытекающая из условия прочности

$$N \le F[\sigma], \qquad (1.14)$$

позволяет вычислить наибольшее значение продольной силы N, действующей в опасном сечении и, следовательно, величину внешних нагрузок, приложенных к брусу.

3. Проведение поверочного расчета прочности бруса.

При поверочном расчете нагрузки, размеры и материал, из которого изготовлен брус, считаются известными. Вычисляется наибольшее нормальное напряжение в опасном поперечном сечении и сравнивается с допускаемым:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \le [\sigma] \qquad (1.15)$$

Если $\sigma_{\max} \le [\sigma]$, то прочность бруса обеспечена.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ №1

Ступенчатый брус нагружен силами P_1, P_2, P_3, (рис.2,а).

Требуется построить эпюры продольных сил N, нормальных напряжений σ, продольных перемещений Δ и проверить, выполняется ли условие прочности.

Числовые данные к задаче выбираются по табл. 1.

Например: $P_1 = 40$ кН, $P_2 = 90$ кН, $P_3 = 110$ кН, $a = 0{,}5$ м, $b = 0{,}5$ м, $c = 0{,}4$ м; $F_1 = 6$ см^2, $F_2 = 14$ см^2.

Для всех вариантов принимается: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_T = 240$ МПа $n_T = 1{,}5$.

1. Построение эпюры N.

На брус действуют три силы, следовательно, продольная сила по его длине будет изменяться. Разбиваем брус на участки, в пределах которых продольная сила будет постоянной. В данном случае границами участков являются сечения, в которых приложены силы. Обозначим сечения буквами A, B, C, D, начиная со свободного конца, в данном случае правого.

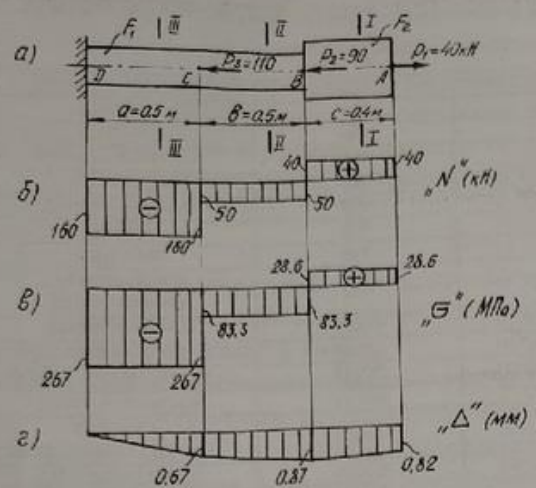


Рис. 2. Расчетная схема бруса и эпюры:

а - расчетная схема; б - эпюра продольных сил; в - эпюра напряжений;

г - эпюра продольных перемещений

Для определения продольной силы на каждом участке рассматриваем произвольное поперечное сечение, сила в котором определяется по правилу, приведенному ранее. Чтобы не определять предварительно реакцию в заделке D, начинаем расчеты со свободного конца бруса A.

Участок AB, сечение *1-1*. Справа от сечения действует растягивающая сила P_1 (рис. 2, а). В соответствии с упомянутым ранее правилом, получаем

$$N_{AB} = +P_1 = 40 \text{ кН}.$$

Участок BC, сечение 2-2. Справа от него расположены две силы, направленные в разные стороны. С учетом правила знаков, получим

$$N_{BC} = +P_1 - P_2 = 40 - 90 = -50 \text{ кН}.$$

Участок CD, сечение 3-3: аналогично получаем

$$N_{CD} = +P_1 - P_2 - P_3 = 40 - 90 - 110 = -160 \text{ кН}.$$

По найденным значениям N в выбранном масштабе строим эпюру, учитывая, что в пределах каждого участка продольная сила постоянна (рис.2.5)

Положительные значения N откладываем вверх от оси эпюры, отрицательные - вниз.

2. Построение эпюры напряжений σ.

По формуле (1.1) вычисляем напряжения в поперечном сечении для каждого участка бруса:

$$\sigma = \frac{N_{AB}}{F_{AB}} = \frac{40 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^{-4}} = 2{,}86 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 28{,}6 \text{ МПа};$$

$$\sigma = \frac{N_{BC}}{F_{BC}} = \frac{-50 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = -83{,}3 \text{ МПа};$$

$$\sigma = \frac{N_{CD}}{F_{CD}} = \frac{-160 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = -267 \text{ МПа}.$$

При вычислении нормальных напряжений значения продольных сил N берутся по эпюре с учетом их знаков. Знак плюс соответствует растяжению, минус - сжатию. Эпюра напряжений показана на рис. 2, в.

3. Построение эпюры продольных перемещений.

Для построения эпюры перемещений вычисляем абсолютные удлинения отдельных участков бруса, используя закон Гука (1.8):

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot l_{AB}}{E \cdot F_{AB}} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 14 \cdot 10^{-4}} = 0{,}57 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot l_{BC}}{E \cdot F_{BC}} = \frac{-50 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = -2{,}1 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot l_{CD}}{E \cdot F_{CD}} = \frac{-160 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = -6{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Определяем перемещения сечений, начиная с неподвижного закрепленного конца. Сечение D расположено в заделке, оно не может смещаться и его перемещение равно нулю:

$$\Delta_D = 0.$$

Сечение C переместится в результате изменения длины участка CD. Перемещение сечения C определяется по формуле

$$\Delta_C = \Delta l_{CD} = -6{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

При отрицательной (сжимающей) силе точка C сместится влево.

Перемещение сечения B является результатом изменения длин DC и CB. Складывая их удлинения, получаем

$$\Delta_B = \Delta l_{CD} + \Delta l_{BC} = -6{,}7 \cdot 10^{-4} - 2{,}1 \cdot 10^{-4} = -8{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Рассуждая аналогично, вычисляем перемещение сечения A:

$$\Delta_A = \Delta l_{CD} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{AB} = -6{,}7 \cdot 10^{-4} - 2{,}1 \cdot 10^{-4} + 0{,}57 \cdot 10^{-4} = -8{,}23 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

В выбранном масштабе откладываем от исходной оси значения вычисленных перемещений. Соединив полученные точки прямыми линиями, строим эпюру перемещений (рис. 2, г).

4. Проверка прочности бруса.

Условие прочности записывается в следующем виде:

$$\sigma_{max} \le [\sigma].$$

Максимальное напряжение σ_{max} находим по эпюре напряжений, выбирая максимальное по абсолютной величине:

$$\sigma_{max} = 267 \text{ МПа}.$$

Это напряжение действует на участке DC, все сечения которого являются опасным.

Допускаемое напряжение вычисляем по формуле (1.13):

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240}{1{,}5} = 160 \text{ МПа}.$$

Сравнивая σ_{max} и $[\sigma]$, видим, что условие прочности не выполняется, так как максимальное напряжение превышает допускаемое.

ЗАДАЧА № 2

Абсолютно жесткий брус AB опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен с помощью шарниров к двум стальным стержням.

Требуется подобрать сечения стержней по условию их прочности, приняв запас прочности по отношению к пределу текучести $n_T = 2,5$.

Соотношение площадей поперечных сечений стержней указано на расчетных схемах, модуль упругости стали для всех вариантов $E = 2 \cdot 10^5$ $МПа$.

Студенты строительных специальностей дополнительно определяют допускаемую силу, используя расчет по предельной грузоподъемности, и сравнивают ее с заданной.

Числовые данные берутся из табл.2, расчетные схемы - по рис. 3.

Таблица 2

Числовые данные к задаче № 2

Номер строки	Номер расчет. схемы по рис 2	Размер, м			Сила, кН	Марка стали	Предел текучести, МПа
		a	*b*	*c*			
1	1	1,2	1,6	1,0	3	20	250
2	2	1,2	1,5	0,8	5	30	300
3	3	1,4	1,4	1,0	4	40	340
4	4	1,4	1,6	0,9	2	20	250
5	5	1,4	1,5	0,7	6	50	380
6	6	1,3	1,4	0,8	5	30	300
7	7	1,5	1,2	1,0	3	40X	800
8	8	1,5	1,1	0,9	4	20	250
9	9	1,2	1,5	1,0	6	40	340
0	10	1.2	1.6	1,0	4	40X	800
	з	ж	а	б	в	г	г

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 2

Основные теоретические сведения и расчетные формулы

В задаче № 2 рассматривается статически неопределимая конструкция, стержневые элементы которой работают на растяжение или сжатие и число неизвестных сил, приложенных к абсолютно жесткому брусу, превышает возможное число уравнений статики. Разность между числом неизвестных усилий

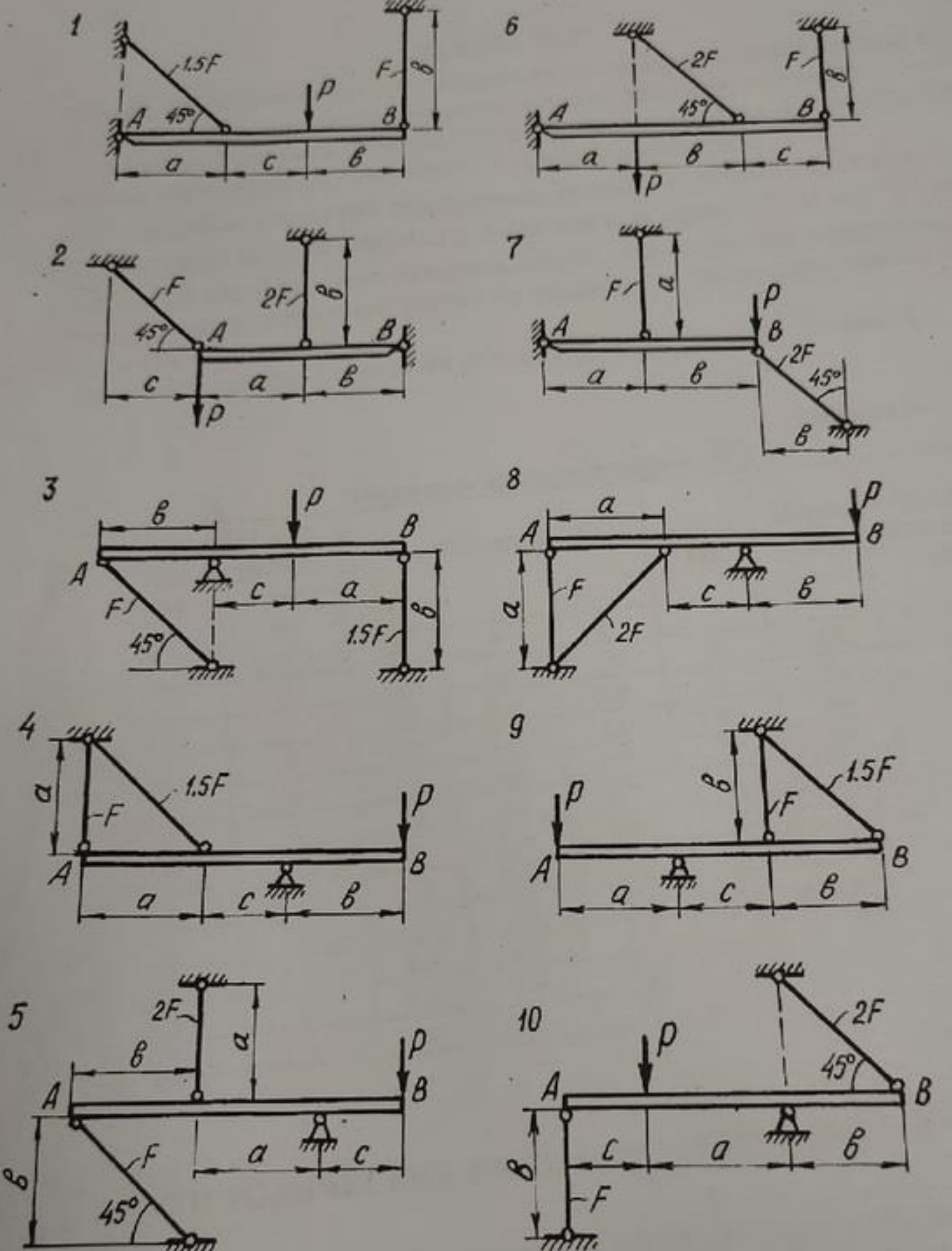


Рис. 3. Расчетные схемы к задаче № 2

и числом возможных уравнений статики определяет степень статической неопределимости системы. Уравнения, недостающие для определения усилий в стержнях, можно получить, рассматривая возможную деформацию системы. Условие, выражающее зависимость между деформациями отдельных элементов системы (конструкции), называется *условием совместности деформаций*. Оно получается из геометрических соотношений между деформациями элементов конструкции. Используемые при решении задачи расчетные формулы приведены в методических указаниях к решению задачи № 1.

Метод расчета статически неопределимой системы по предельной грузоподъемности (по разрушающим нагрузкам) достаточно подробно изложен в учебной литературе и в данном пособии рассмотрен на конкретном примере.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ №2

Жесткий брус *AB* закреплен, как показано на рис.4, и нагружен силой $P = 5$ кН.

Требуется подобрать сечения стержней из условия их прочности. Числовые данные к задаче берутся из табл.2. Для данной задачи примем $a = 1{,}2$ м; $в = 1{,}4$ м; $c = 1{,}0$ м материал - сталь 40, $\sigma_T = 340$ МПа, $n_T = 2{,}5$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Вычислим степень статической неопределимости.

Жесткий брус *AB* закреплен с помощью шарнирно-неподвижной опоры и поддерживается двумя деформируемыми стальными стержнями *AE* и *BK*. На опоре *C* (рис.4) - две составляющие реакции X_C и Y_C, реакции в стержнях направлены вдоль их осей и приложены к брусу *AB* в точках *A* и *B*. Направление этих реакций рекомендуется установить после анализа возможного деформирова

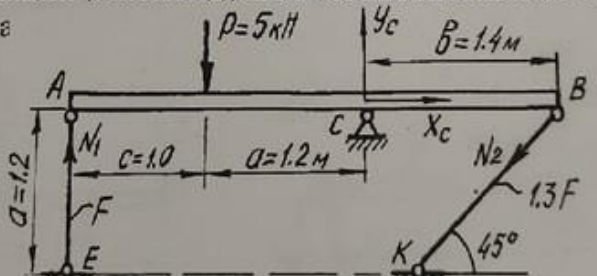


Рис. 4. Расчетная схема

Для плоской системы сил в общем случае ее приложения к конструкции можно составить только три независимых уравнения равновесия. В рассматриваемой задаче к брусу *AB* приложено четыре неизвестных усилия: две реакции в шарнире и два усилия в стержнях. Разность между числом неизвестных усилий и числом уравнений статики показывает, что для определения этих неизвестных необходимо составить еще одно уравнение статики, в которое входили бы интересующие нас величины. Такое уравнение или несколько подобных уравнений можно получить из геометрических зависимостей между деформациями элементов заданной конструкции.

Рассмотрим конструкцию после деформации ее элементов (рис.5). Под действием силы P жесткий брус может повернуться вокруг точки C, при этом стержни AE и BK будут деформированы. Точки A и B описывают при повороте бруса дуги окружностей, которые ввиду малости перемещений заменяются касательными, т.е. считается, что эти точки перемещаются по перпендикулярам к радиусам AC и BC этих дуг. Точка A смещается вниз и занимает положение A_1, точка B - вверх, занимая положение B_1. Брус, как абсолютно жесткий элемент конструкции, - положение A_1B_1. Очевидно, что стержень AE сжат и стал короче на величину $AA_1 = \Delta l_1$. Соединив точки K и B_1, находим на чертеже положение стержня BK после его деформации. Опустив перпендикуляр из точки B на прямую B_1K, находим точку B_2.

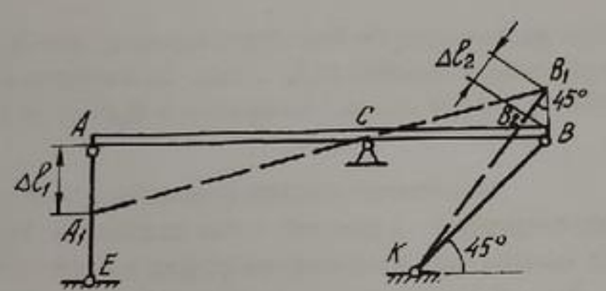


Рис. 5. Схема конструкции после деформации ее элементов

Отрезок $B_1B_2 = \Delta l_2$ - удлинение стержня BK.

Действительно, $\Delta l_2 = KB_1 - KB = KB_1 - KB_2$, так как $KB=KB_2$, и стержень KB растянут.

Выяснив направление усилий в стержнях, показываем векторы этих усилий на схеме недеформированного состояния конструкции (см. рис. 4) и составляем уравнение ее равновесия:

$$\sum M_C = 0: \qquad -N_1 \cdot (c+a) + P \cdot a - N_2 \cdot \sin 45^0 \cdot b = 0 \qquad (2.1)$$

Определения составляющих реакции шарнира X_C, Y_C для решения данной задачи не требуется, и два других уравнения статики не составляются.
Для вычисления усилий в стержнях N_1, N_2 необходимо иметь еще одно

уравнение, называемое уравнением совместности деформаций. Это уравнение получаем из геометрических соотношений между деформациями элементов заданной конструкции. При этом ввиду малости деформаций изменением угла наклона стержня BK пренебрегаем, считая что $\angle BB_1B_2 = 45^0$.

Тогда

$$BB_1 = \frac{B_1B_2}{\cos 45^0}.$$

Из подобия треугольников A_1AC и B_1BC находим соотношение между деформациями стержней - Δl_1 и Δl_2:

$$\frac{AA_1}{AC} = \frac{BB_1}{BC}; \frac{\Delta l_1}{a+c} = \frac{\Delta l_2}{\cos 45^0 \cdot b};$$

$$\Delta l_1 = \frac{a+c}{b \cdot \cos 45^0} \cdot \Delta l_2 = \frac{(1{,}2+1)}{1{,}4 \cdot 0{,}707} \Delta l_2; \quad \boxed{\Delta l_1 = 2{,}2 \cdot \Delta l_2} \qquad (2.2)$$

Полученная зависимость (2.2) называется условием *совместности деформаций.*

Абсолютные удлинения стержней можно выразить через усилия, используя формулу Гука (1.8):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{N_1 a}{EF}; \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{N_2 a}{E \cdot 1{,}3F \cos 45^0}. \qquad (2.3)$$

Подставив выражения (2.3) в условие совместности деформаций (2.2), получим

$\left(\frac{2{,}2}{1{,}3 \cdot 0{,}707} = 2{,}3936 \cong 2{,}4\right)$

$$\frac{N_1 \cancel{a}}{\cancel{E}\cancel{F}} = 2{,}2 \cdot \frac{N_2 \cdot \cancel{a}}{\cancel{E} \cdot 1{,}3\cancel{F} \cos 45^0}; \quad N_1 = 2{,}4\, N_2. \qquad (2.4)$$

Решая систему уравнений (2.1) и (2.4), определяем усилия в стержнях N_1, N_2. Для этого подставим значение N_1 из (2.4) в уравнение (2.2):

$$-2{,}4\, N_2\,(c+a) + Pa - N_2 \sin 45^0 b = 0;$$

$$-2{,}4\, N_2\,(1+1{,}2) + 5 \cdot 1{,}2 - N_2 \sin 45^0\, 1{,}4 = 0.$$

$(-5{,}28 N_2 + 6 - N_2 \cdot 0{,}9$

$N_2 = \frac{6}{5{,}28+0{,}99} = \frac{6}{6{,}2}$

Решив систему уравнений, получим

$$N_2 = 0{,}96\,\text{кН};$$

$$N_1 = 2{,}4 \cdot 0{,}96 = 2{,}3\,\text{кН}.$$

Определив усилия в стержнях, переходим к подбору площадей их поперечных сечений.

Для заданного материала по формуле (1.13) вычислим допускаемое напряжение

$$[\sigma]=\frac{\sigma_T}{n_T}=\frac{340\cdot10^6}{2,5}=136\cdot10^6\,\text{Па}=136\,\text{МПа}.$$

Определяем напряжения в стержнях и выбираем большее:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{F_1}=\frac{2,3\cdot10^3}{F}\ \text{Па};$$

$$\sigma_2=\frac{N_2}{F_2}=\frac{0,96\cdot10^3}{1,3\cdot F}=\frac{0,74\cdot10^3}{F}\ \text{Па}.$$

Площадь сечения F подбираем по условию прочности наиболее нагруженного стержня. Так как σ_1 больше σ_2, используем условие прочности первого стержня:

$$\sigma_1\le[\sigma]; \qquad \frac{2,3\cdot10^3}{F}\le136\cdot10^6\ \text{Па};$$

$$F\ge0,17\cdot10^{-4}\ \text{м}^2=0,17\ \text{см}^2.$$

Площади сечений стержней принимаем в соответствии с заданным соотношением:

$$F_1=F=0,17\ \text{см}^2;\ F_2=1,3\cdot F=1,3\cdot0,17=0,221\ \text{см}^2.$$

Определение допускаемой силы P по условию задачи производится по предельной грузоподъемности конструкции.

Предельным состоянием конструкции называется такое состояние, при котором она начинает деформироваться без увеличения нагрузки.

В данном примере это произойдет в том случае, когда напряжения во всех стержнях достигнут предела текучести

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_T.$$

Усилия в стержнях будут определяться по формулам

$$N_1=\sigma_T\cdot F_1;\qquad N_2=\sigma_T\cdot F_2. \tag{2.5}$$

Нагрузка, соответствующая предельному состоянию, называется *предельной*. Ее величину можно найти из уравнения предельного равновесия, которое получается из уравнения (2.1) после подстановки в него значений $N_1,\ N_2$:

$$-\sigma_T\cdot F_1\cdot(c+a)+P_{np}\cdot a-\sigma_T\cdot F_2\cdot\sin45^0\cdot b=0.$$

$$P_{\text{пр}}=\frac{1}{a}\left[\sigma_T\,F_1\,(c+a)+\sigma_T\,F_T\sin45^0\,b\right]=$$

$$=\frac{1}{1,2}\left[340\cdot10^6\cdot0,17\cdot10^{-4}\cdot(1+1,2)+340\cdot10^6\cdot0,221\cdot10^{-4}\cdot\sin45^0\cdot1,4\right]=16,8\cdot10^3\,\text{Н}.$$

Допускаемая нагрузка с учетом заданного коэффициента запаса

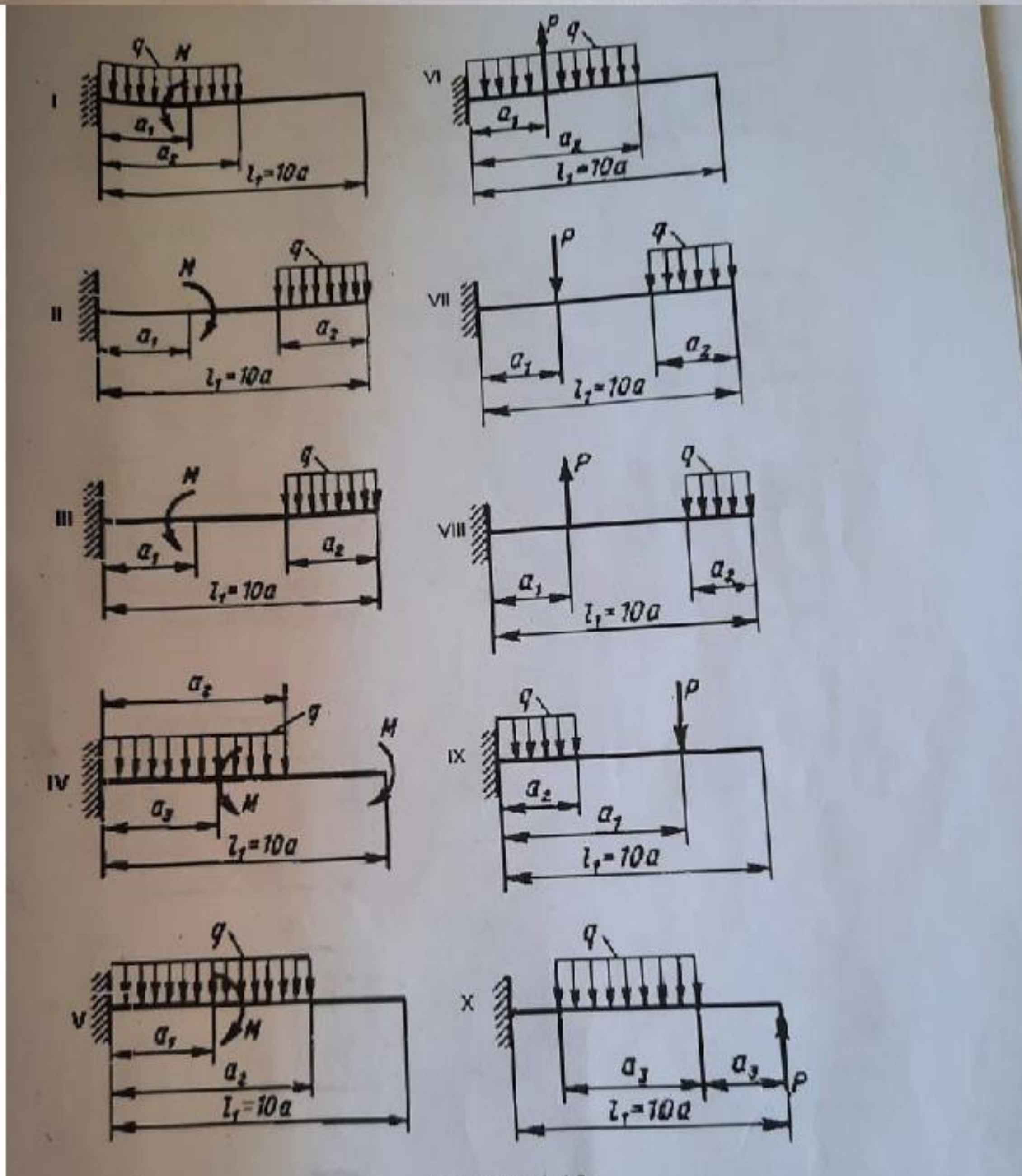
$$P_э = \frac{P_{пр}}{n_T} = \frac{16,8\cdot10^3}{2,5} = 6,72\cdot10^3 \text{ Н} = 6,72 \text{ кН}.$$

Величина допускаемой нагрузки при расчете по предельной грузоподъемности получается большей, чем при расчете по допускаемым напряжениям:

$$\frac{P_{пр}}{P_э} = \frac{6,72}{5} = 1,34.$$

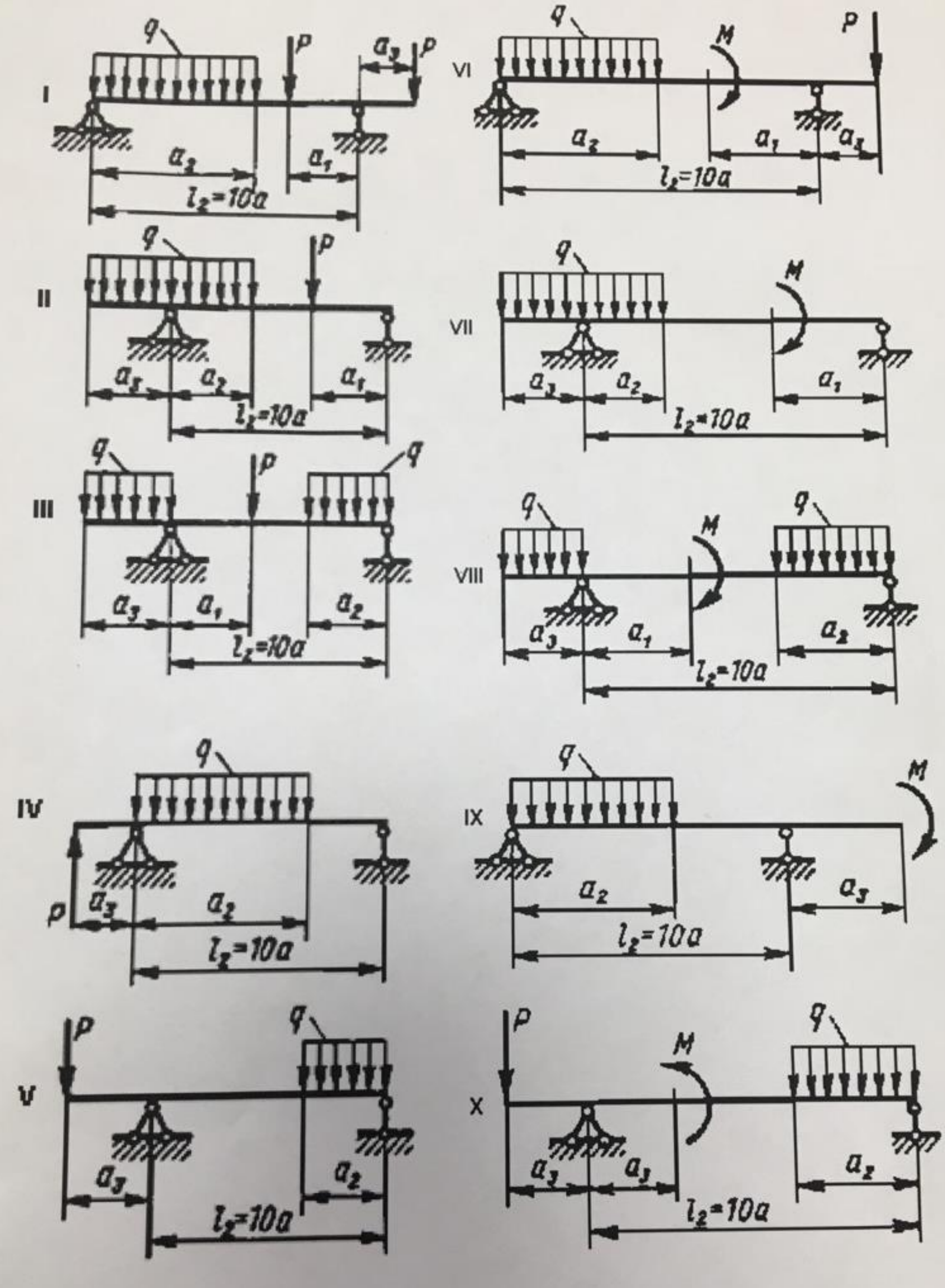
Разница составляет 34 %, что является результатом разных предположений об опасном состоянии конструкции: при расчете по допускаемым напряжениям опасным считается состояние, при котором только в одном стержне напряжение достигает предела текучести. Для статически неопределимых систем расчет по предельной грузоподъемности дает более экономичное решение при назначении размеров сечения, и им широко пользуются в строительной практике.

Задача 1.10. Определить реакции опор консольной балки, изображенной на рисунке. Данные, необходимые для расчетов, приведены в таблице 1.



К задаче 1.10

Задача 1.11. Определить реакции опор балки на опорах, изображенной на рисунке. Данные, необходимые для расчетов, приведены в таблице 1.



К задаче 1.11

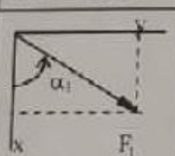
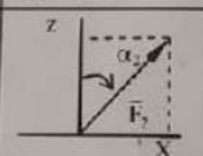
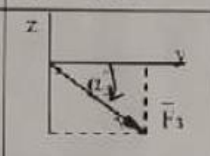
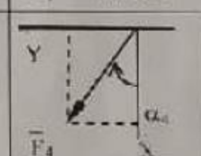
Таблица 1.

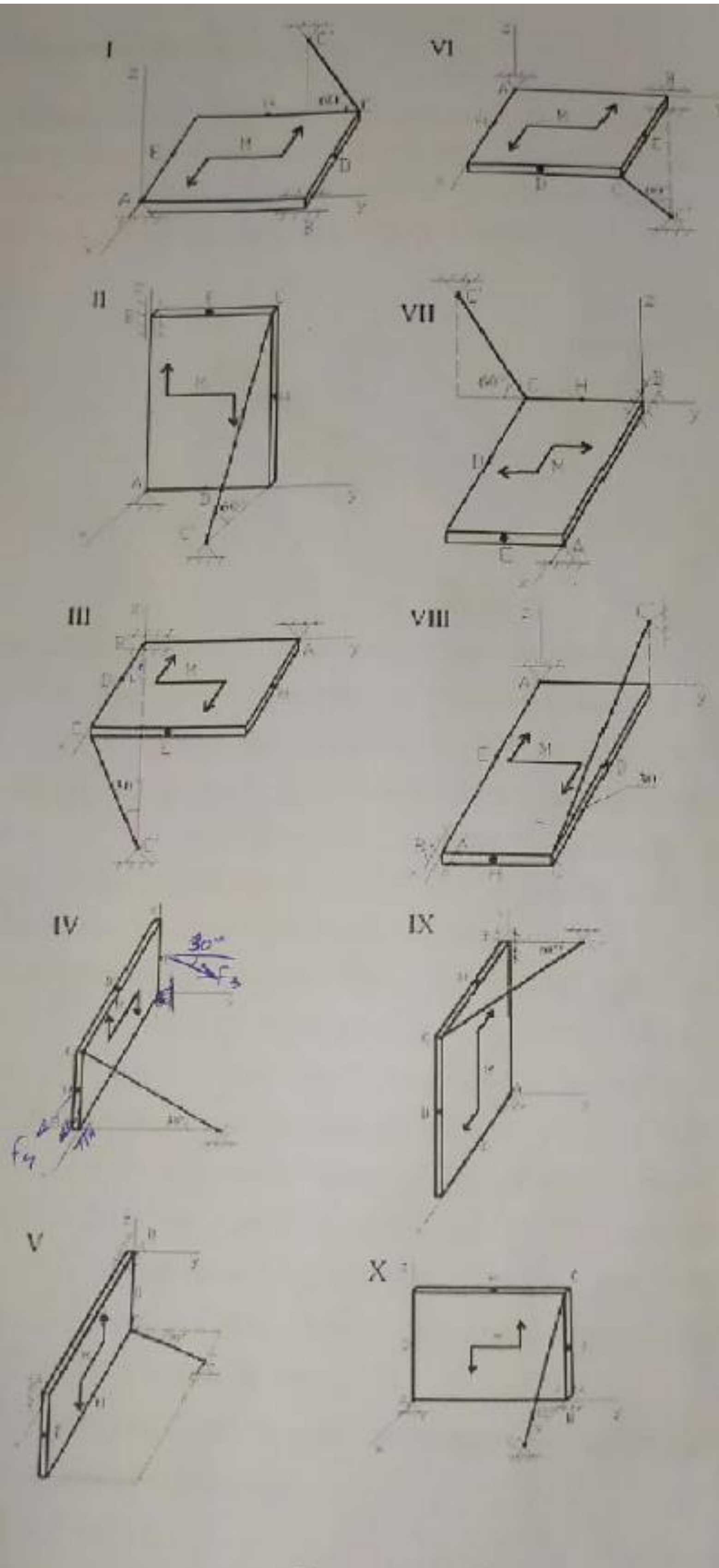
Номер варианта	Длина, м		Расстояние в долях пролета			Момент пары сил M, кН·м	Сосредоточенная сила P, кН	Интенсивность распределенной нагрузки q, кН/м
	l_1	l_2	a_1	a_2	a_3			
1	1,1	6	1a	8 a	1 a	10	10	10
2	1,2	7	2 a	7 a	2 a	20	20	20
3	1,3	3	3 a	5 a	3 a	30	30	30
4	1,4	4	4 a	4 a	4 a	40	40	40
5	1,5	5	5 a	3 a	5 a	50	50	50
6	1,6	6	6 a	6 a	1 a	60	60	60
7	1,7	7	7 a	7 a	2 a	70	70	70
8	1,8	8	8 a	8 a	3 a	80	80	80
9	1,9	9	9 a	9 a	4 a	90	90	90
10	2,0	10	10 a	1 a	5 a	10	10	10

Задача 1.33. Однородная прямоугольная плита весом $P = 3$ кН со сторонами $AB = 3l$, $BC = 2l$ закреплена в точке A сферическим шарниром, а в точке В цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC'. На плиту действуют две силы и пара сил, лежащая в плоскости плиты, с моментом $M = 5$ кН·м. Величины сил, их направления и точки приложения указаны в табл. 2, при этом силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости xy, сила $\overline{F}_2$ – в плоскости, параллельной xz, и сила $\overline{F}_3$ – в плоскости, параллельной yz. Точки приложения сил (D, E, H) находятся в серединах соответствующих сторон плиты. Определить реакции связей в точках A, B, C. При расчетах принять $l = 0{,}8$ м.

Указания. При решении задачи следует учесть, что реакция сферического шарнира имеет три составляющие, а реакции цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При вычислении моментов силы $\overline{F}$ удобно разложить ее на составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, параллельные координатным осям, тогда по теореме Вариньона $m_x(\overline{F}) = m_x(\overline{F}') + m_x(\overline{F}'')$ и т.д.

Таблица 2.

Номер варианта	Силы							
	$F_1 = 4$ кН		$F_2 = 6$ кН		$F_3 = 8$ кН		$F_4 = 10$ кН	
								
	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
1	D	60	–	–	E	0	–	–
2	H	90	D	30	–	–	–	–
3	–	–	E	60	–	–	D	90
4	–	–	–	–	E	30	H	0
5	E	0	–	–	H	60	–	–
6	–	–	D	60	H	0	–	–
7	–	–	H	30	–	–	D	90
8	E	30	H	90	–	–	–	–
9	–	–	–	–	D	0	E	60
10	–	–	E	90	D	30	–	–

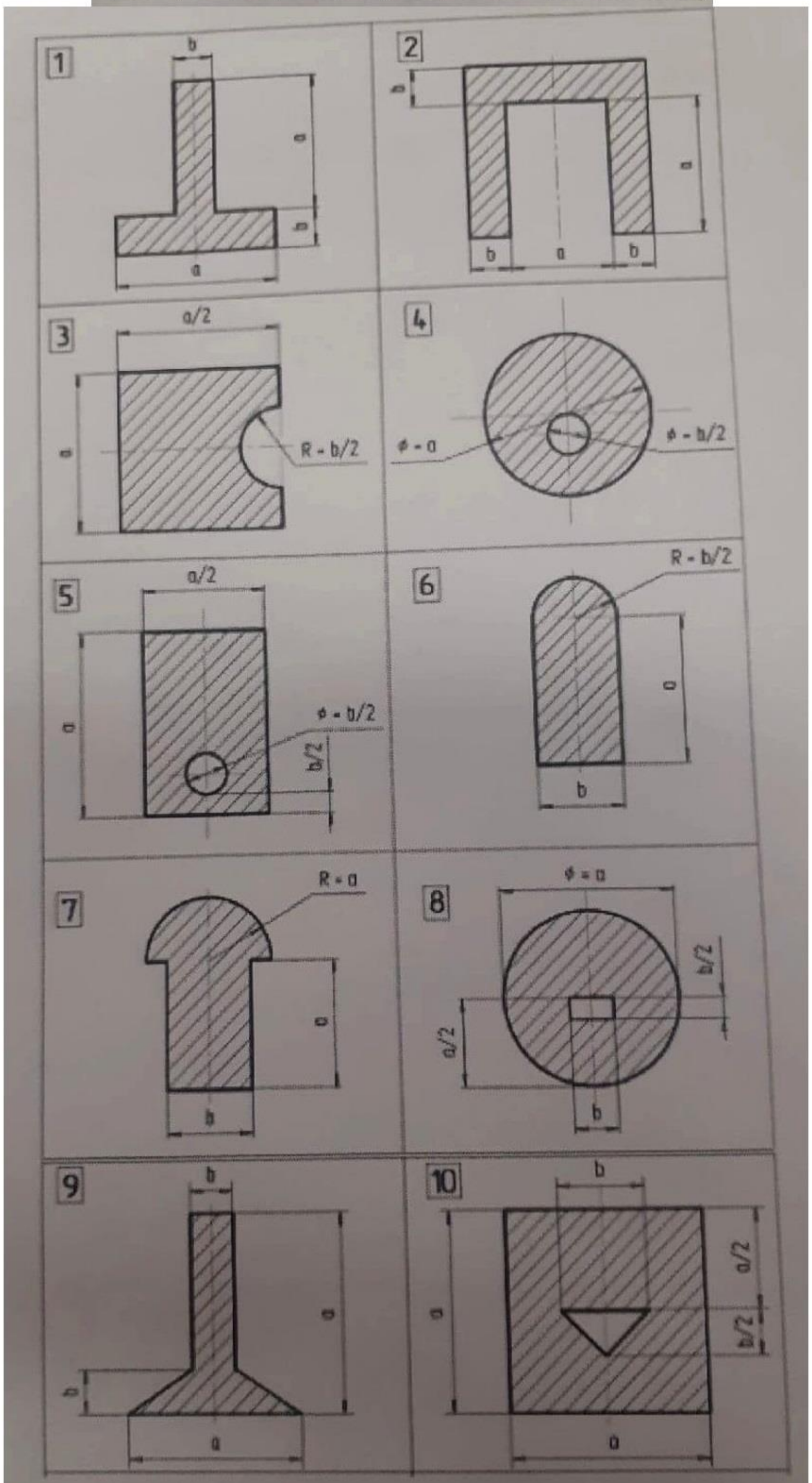


К задаче 1.33

Задача 2.6. Определить положение центра тяжести однородных пластин, приведенных на рисунке. Данные к расчетам приведены в таблице 3.

Таблица 3.

Данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a, мм	80	90	100	110	115	120	125	130	135	150
b, мм	40	50	60	40	50	60	70	80	70	50



Задача 4.19. Движение точки задано уравнениями $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$ (x, y - в метрах, t - в секундах). Найти траекторию движения точки. Данные приведены в таблице 4.

Задача 4.20. Используя данные задачи 4.19 вычислить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ с. Показать векторы скорости и ускорения в этот момент времени.

Задача 4.21. Используя данные задачи 4.19 вычислить радиус кривизны траектории в момент времени $t_1 = 1$ с.

Таблица 4.

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x = f_1(t)$	$2t+1$	t^2+3	$2t$	$-3t^2$	$2t$	$-2t^2$	$2t-3$	t^2	$2t$	$5t^2$
$y = f_2(t)$	$-4t^2$	$2t$	$4t^2+1$	$t+4$	$4t^2$	$4-2t$	$-t^2$	$5+2t$	$3t^2$	$2t-1$

Примеры решения задач

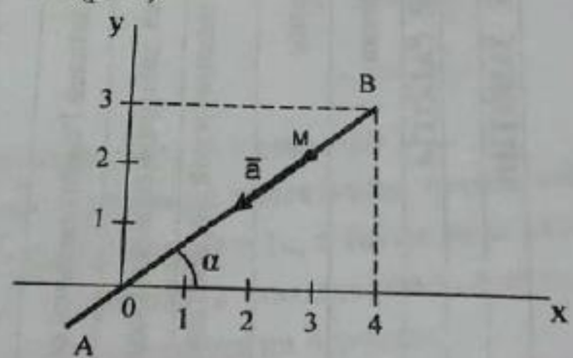
Задача 1. Движение точки задано уравнениями (x, y - в метрах, t - в секундах): $x = 8t - 4t^2$, $y = 6t - 3t^2$.

Определить траекторию, скорость и ускорение точки.

Решение. Для определения траектории исключаем из уравнений движения время t. Умножая обе части первого уравнения на 3, а обе части второго — на 4 и вычитая из первого равенства второе, получим:

$3x - 4y = 0$ или $y = 3x/4$.

Следовательно, траектория - прямая линия, наклоненная к оси Ox под углом α, где $\mathrm{tg}\alpha = 3/4$ (рис.).



К задаче 1.

Определяем скорость точки.

$$v_x = \dot{x} = 8(1 - t);$$

$$v_y = \dot{y} = 6(1 - t);$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10\,(1 - t).$$

Теперь находим ускорение точки.

$$a_x = \ddot{x} = -8;$$

$$a_y = \ddot{y} = -6;$$

$$a = 10 \text{ м/с}^2.$$

Направлены векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}$ вдоль траектории, т. е. вдоль прямой AB. Проекции ускорения на координатные оси все время отрицательны, следовательно, ускорение имеет постоянное направление от B к A. Проекции скорости при $0 < t < 1$ положительны, следовательно, в течение этого промежутка времени скорость точки направлена от O к B. При этом в момент времени $t = 0$, $v = 10$ м/с; при $t = 1$ с, $v = 0$. В последующие моменты времени ($t > 1$с) обе проекции скорости отрицательны и, следовательно, скорость направлена от B к A, т. е. так же, как и ускорение.

Итак, движение точки начинается из точки O с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с и происходит вдоль прямой AB, наклоненной к оси Ox под углом α, для которого $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$. На участке OB точка движется замедленно (модуль ее скорости убывает) и через одну секунду приходит в положение B, где скорость ее обращается в нуль. Отсюда начинается ускоренное движение в обратную сторону. В момент $t = 2$с точка вновь оказывается в начале координат и дальше продолжает свое движение вдоль OA. Ускорение точки остается постоянным и равно 10 м/с^2.

Задача 2. Даны уравнения движения точки в плоскости xy:

$$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3;$$

$$y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 1;$$

(x, y - в сантиметрах, t - в секундах).

Определить уравнение траектории точки; найти скорость и ускорение точки для момента времени $t = 1$с, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории. Показать векторы скорости и ускорения на чертеже.

Решение. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций, возводим обе части уравнений в квадрат и складываем.

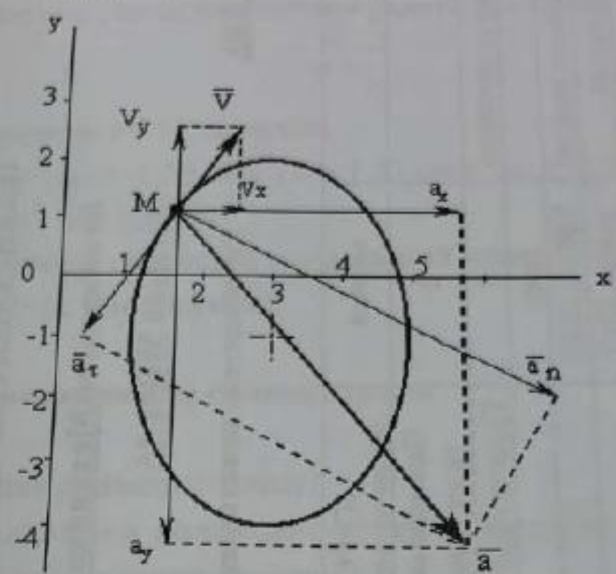
$$\cos\cdot\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3 - x}{2};\ \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{y+1}{3}.$$

Получим:

$$\frac{(3-x)^2}{2^2}+\frac{(y+1)^2}{3^2}=1.$$

Это уравнение эллипса (рис.). Найдем положение точки M для момента времени $t = 1$с, определив ее координаты:

$x_{t=1c}$ = - 1,59 см, $y_{t=1c}$ = 1,12 см.



К задаче 2.

Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{2}\sin\cdot\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{3\pi}{4}\cos\cdot\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}.$$

В заданный момент времени, т.е. при $t = 1$с

v_x = 1,11см/с, v_y = 1,67см/с, v = 2,0см/с.

Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$a_y=\frac{dv_y}{dt}=-\frac{3\pi^2}{16}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ .$$

$$a_\tau = \frac{a_x v_x + a_y v_y}{v}\ ;$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\ .$$

Зная нормальное ускорение, найдем радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}\ .$$

С учетом времени t = 1с, получим

a_x = 0,87 см/с^2; a_y = -1,30 см/с^2; a = 1,57 см/с^2; a_τ = -0,6 см/с^2;

a_n = 1,67 см/с^2; ρ = 2,38 см.

Покажем векторы скоростей и ускорений для точки М на траектори

момент времени t = 1с (см.рисунок).