

*Утверждено
Учебно-методическим управлением
по высшему образованию*

ФИЗИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ
ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
(ВКЛЮЧАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫЕ ВУЗЫ)

Под редакцией А. Г. Чертова

Издание пятое, переработанное



Москва «Высшая школа» 1987

ББК 22.5
Ф 50
УДК 530.1

Авторы:

А. А. Воробьев, В. П. Иванов, В. Г. Кондакова, А. Г. Чертов

Ф50 **Физика:** Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей вузов (включая сельскохозяйственные вузы) / А. А. Воробьев, В. П. Иванов, В. Г. Кондакова, А. Г. Чертов — М.: Высш. шк., 1987. — 208 с.: ил.

Ф $\frac{1704000000(4309000000)-280}{001(01)-87}$ 138—87.

ББК 22.5
53

Учебное издание

ФИЗИКА

Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей высших учебных заведений (включая сельскохозяйственные вузы)

Зав. редакцией Е. С. Гридасова. Редактор Л. С. Куликова. Младший редактор Г. В. Вятюха. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор А. К. Нестерова. Корректор Г. И. Кострикова.

Н/К

Изд. № ФМ—915/УМД. Сдано в набор 11.02.87. Подп. в печать 20.04.87. Формат 84×108¹/₃₂. Бум. кн.-журн. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 10,92 усл. печ. л. 11,02 усл. кр.-отт. 10,06 уч.-изд. л. Тираж 200 000 экз. Зак. № 105. Цена 35 коп. Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

© Министерство высшего и среднего специального образования СССР, 1987

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящего учебно-методического пособия — оказать помощь студентам-заочникам инженерно-технических специальностей высших учебных заведений в изучении курса физики.

Основной учебный материал программы курса в пособии распределен на шесть разделов. В каждом из них даны основные формулы, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения (с ответами) и контрольные задания. Кроме того, в пособии даны общие методические указания, сведения о приближенных вычислениях и некоторые справочные таблицы.

В пособии учтены особенности учебных планов разных специальностей — различие в числе контрольных работ и во времени, отводимом для изучения курса физики. Для этого даны две таблицы вариантов контрольных работ: одна — для студентов, выполняющих шесть контрольных работ, и вторая — для студентов, выполняющих четыре контрольные работы. Таблицы вариантов контрольных работ студентам специальностей, по которым предусмотрено выполнение только двух контрольных работ, рассылаются кафедрами физики учебных заведений.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА ФИЗИКИ ДЛЯ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ЗАОЧНЫХ ОТДЕЛЕНИЙ И ВУЗОВ*

Введение

Предмет физики. Методы физического исследования: опыт, гипотеза, эксперимент, теория. Роль физики в развитии техники и влияние техники на развитие физики. Связь физики с марксистско-ленинской философией и другими науками.

Физические основы классической механики

Механическое движение как простейшая форма движения материи. Представления о свойствах пространства и времени, лежащие в основе классической (ньютоновской) механики. Элементы кинематики материальной точки. Скорость и ускорение точки как производные радиуса-вектора по времени. Нормальное и тангенциальное ускорения. Радиус кривизны траектории. Поступательное движение твердого тела.

Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела. Закон инерции и инерциальные системы отсчета. Законы динамики материальной точки и системы материальных точек. Внешние и внутренние силы. Центр масс (центр инерции) механической системы и закон его движения. Закон сохранения импульса.

Энергия как универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. Работа переменной силы. Кинетическая энергия механической системы и ее связь с работой внешних и внутренних сил, приложенных к системе.

Поле как форма материи, осуществляющая силовое взаимодействие между частями вещества. Потенциальная энергия материальной точки во внешнем силовом поле и ее связь с силой, действующей на материальную точку. Понятие о градиенте скалярной функции координат. Поле центральных сил. Потенциальная энергия системы. Закон сохранения механической энергии. Диссипация энергии. Закон сохранения и превращения энергии как проявление неуничтожимости материи и ее движения. Применение законов сохранения к столкновению упругих и неупругих тел.

* Рабочая программа составлена на основе «Программы курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений» (индекс УМУ-9/1). Утверждена Учебно-методическим управлением по высшему образованию Минвуза СССР 26 июня 1981 г.

Элементы кинематики вращательного движения. Угловая скорость и угловое ускорение, их связь с линейными скоростями и ускорениями точек вращающегося тела. Момент силы и момент импульса механической системы. Момент силы относительно оси. Момент импульса тела относительно неподвижной оси вращения. Момент инерции тела относительно оси. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Кинетическая энергия вращающегося тела. Закон сохранения момента импульса и его связь с изотропностью пространства.

Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции.

Элементы специальной (частной) теории относительности

Преобразования Галилея. Механический принцип относительности. Постулаты специальной теории относительности. Преобразования Лоренца. Понятие одновременности. Относительность длин и промежутков времени. Интервал между событиями и его инвариантность по отношению к выбору инерциальной системы отсчета как проявление взаимосвязи пространства и времени. Релятивистский закон сложения скоростей. Релятивистский импульс. Основной закон релятивистской динамики материальной точки. Релятивистское выражение для кинетической энергии. Взаимосвязь массы и энергии. Энергия связи системы. Соотношение между полной энергией и импульсом частицы. Границы применимости классической (ньютоновской) механики.

Механические колебания и волны в упругих средах

Гармонические механические колебания. Кинематические характеристики гармонических колебаний. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Пружинный, физический и математический маятники. Энергия гармонических колебаний. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Аperiodический процесс. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Амплитуда смещения и фаза вынужденных колебаний. Понятие о резонансе.

Волновые процессы. Механизм образования механических волн в упругой среде. Продольные и поперечные волны. Синусоидальные (гармонические) волны. Уравнение бегущей волны. Длина волны и волновое число. Волновое уравнение. Фазовая скорость и дисперсия волн. Энергия волны. Принцип суперпозиции волн и границы его применимости. Волновой пакет. Групповая скорость. Когерентность.

Интерференция волн. Образование стоячих волн. Уравнение стоячей волны и его анализ.

Основы молекулярной физики и термодинамики

Статистический метод исследования и его связь с учением диалектического материализма о соотношении случайности и необходимости. Термодинамический метод исследования. Термодинамические параметры. Равновесные состояния и процессы, их изображение на термодинамических диаграммах. Вывод уравнения молекулярно-кинетической теории идеальных газов для давления и его сравнение с

уравнением Клапейрона — Менделеева. Средняя кинетическая энергия молекул. Молекулярно-кинетическое толкование термодинамической температуры. Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул. Внутренняя энергия идеального газа. Работа газа при изменении его объема. Количество теплоты. Теплоемкость. Первое начало термодинамики. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам и адиабатному процессу идеального газа. Зависимость теплоемкости идеального газа от вида процесса. Классическая молекулярно-кинетическая теория теплоемкостей идеальных газов и ее ограниченность.

Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения. Барометрическая формула. Закон Больцмана для распределения частиц во внешнем потенциальном поле. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул. Время релаксации. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах. Опытные законы диффузии, теплопроводности и внутреннего трения. Молекулярно-кинетическая теория этих явлений.

Обратимые и необратимые процессы. Круговой процесс (цикл). Тепловые двигатели и холодильные машины. Цикл Карно и его КПД для идеального газа. Второе начало термодинамики. Независимость КПД цикла Карно от природы рабочего тела. Энтропия. Энтропия идеального газа. Статистическое толкование второго начала термодинамики. Критика идеалистического толкования второго начала термодинамики.

Отступления от законов идеальных газов. Реальные газы. Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия. Эффективный диаметр молекул. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Сравнение изотерм Ван-дер-Ваальса с экспериментальными. Фазовые переходы I и II рода. Критическое состояние. Внутренняя энергия реального газа. Особенности жидкого и твердого состояний вещества.

Электростатика

Закон сохранения электрического заряда. Электрическое поле. Основные характеристики электростатического поля — напряженность и потенциал. Напряженность как градиент потенциала. Расчет электростатических полей методом суперпозиции. Поток вектора напряженности. Теорема Остроградского — Гаусса для электростатического поля в вакууме. Применение теоремы Остроградского — Гаусса к расчету поля. Электрическое поле в веществе. Свободные и связанные заряды в диэлектриках. Типы диэлектриков. Электронная и ориентационная поляризация. Поляризованность. Диэлектрическая восприимчивость вещества. Электрическое смещение. Диэлектрическая проницаемость среды. Вычисление напряженности поля в диэлектрике. Сегнетоэлектрики.

Проводники в электрическом поле. Поле внутри проводника и у его поверхности. Распределение зарядов в проводнике. Электроемкость уединенного проводника. Взаимная емкость двух проводников. Конденсаторы. Энергия заряженных проводника, конденсатора и системы проводников. Энергия электростатического поля. Объемная плотность энергии.

Постоянный электрический ток

Постоянный электрический ток, его характеристики и условия существования. Классическая электронная теория электропроводности

металлов и ее опытные обоснования. Вывод закона Ома в дифференциальной форме из электронных представлений. Закон Видемана — Франца. Закон Ома в интегральной форме. Разность потенциалов, электродвижущая сила, напряжение. Затруднения классической теории электропроводности металлов. Границы применимости закона Ома. Ток в газах. Плазма. Работа выхода электронов из металла. Термоэлектронная эмиссия.

Электромагнетизм

Магнитное поле. Магнитная индукция. Закон Ампера. Магнитное поле тока. Закон Био — Савара — Лапласа и его применение к расчету магнитного поля. Магнитное поле прямолинейного проводника с током. Магнитное поле кругового тока. Магнитный момент витка с током. Вихревой характер магнитного поля. Закон полного тока (циркуляция вектора магнитной индукции) для магнитного поля в вакууме и его применение к расчету магнитного поля тороида и длинного соленоида. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле. Принцип действия циклических ускорителей заряженных частиц. Эффект Холла. МГД-генератор. Контур с током в магнитном поле. Магнитный поток. Теорема Остроградского — Гаусса. Работа перемещения проводника и контура с током в магнитном поле.

Явление электромагнитной индукции (опыты Фарадея). Правило Ленца. Закон электромагнитной индукции и его вывод из закона сохранения энергии. Явление самоиндукции. Индуктивность. Токи при замыкании и размыкании цепи. Явление взаимной индукции. Взаимная индуктивность. Энергия системы проводников с током. Объемная плотность энергии магнитного поля.

Магнитное поле в веществе. Магнитные моменты атомов. Типы магнетиков. Намагниченность. Микро- и макротокки. Элементарная теория диа- и парамагнетизма. Магнитная восприимчивость вещества и ее зависимость от температуры. Закон полного тока для магнитного поля в веществе. Напряженность магнитного поля. Магнитная проницаемость среды. Ферромагнетики. Опыт Столетова. Кривая намагничивания. Магнитный гистерезис. Точка Кюри. Домены. Спиновая природа ферромагнетизма.

Основы теории Максвелла для электромагнитного поля. Ток смещения. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в интегральной форме.

Электромагнитные колебания и волны

Гармонические электромагнитные колебания и их характеристики. Дифференциальное уравнение электромагнитных колебаний. Электрический колебательный контур. Энергия электромагнитных колебаний. Дифференциальное уравнение электромагнитных колебаний и его решение. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Случай резонанса. Электромагнитные волны. Дифференциальное уравнение электромагнитной волны. Основные свойства электромагнитных волн. Монохроматическая волна. Энергия электромагнитных волн. Поток энергии. Вектор Умова — Пойнтинга. Излучение диполя.

Волновая оптика

Интерференция света. Когерентность и монохроматичность световых волн. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников. Оптическая длина пути. Интерференция света в тонких пленках. Интерферометры. Дифракция света. Принцип Гюйгенса — Френеля. Метод зон Френеля. Прямолинейное распространение света. Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске. Дифракция Фраунгофера на одной щели и дифракционной решетке. Разрешающая способность оптических приборов. Дифракция на пространственной решетке. Формула Вульфа — Брэгга. Принцип голографии. Исследование структуры кристаллов. Оптически неоднородная среда. Дисперсия света. Области нормальной и аномальной дисперсии. Электронная теория дисперсии света. Эффект Доплера. Излучение Вавилова — Черенкова. Поляризация света. Естественный и поляризованный свет. Поляризация света при отражении. Закон Брюстера. Двойное лучепреломление. Одноосные кристаллы. Поляроиды и поляризационные призмы. Закон Малюса.

Квантовая природа излучения

Тепловое излучение. Черное тело. Закон Кирхгофа. Закон Стефана — Больцмана. Распределение энергии в спектре абсолютно черного тела. Закон смещения Вина. Квантовая гипотеза и формула Планка. Оптическая пирамида. Внешний фотоэффект и его законы. Фотоны. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Масса и импульс фотона. Давление света. Опыт Лебедева. Квантовое и волновое объяснения давления света. Эффект Комптона и его теория. Диалектическое единство корпускулярных и волновых свойств электромагнитного излучения.

Элементы атомной физики и квантовой механики

Опытное обоснование корпускулярно-волнового дуализма свойств вещества. Формула де Бройля. Соотношение неопределенностей как проявление корпускулярно-волнового дуализма свойств материи. Волновая функция и ее статистический смысл. Ограниченность механического детерминизма. Принцип причинности в квантовой механике. Стационарные состояния. Уравнение Шредингера для стационарных состояний. Свободная частица. Туннельный эффект. Частица в одномерной прямоугольной «потенциальной яме». Квантование энергии и импульса частицы. Понятие о линейном гармоническом осцилляторе. Атом водорода. Главное, орбитальное и магнитное квантовые числа.

Опыт Штерна и Герлаха. Спин электрона. Спиновое квантовое число. Фермионы и бозоны. Принцип Паули. Распределение электронов в атоме по состояниям. Понятие об энергетических уровнях молекул. Спектры атомов и молекул. Поглощение, спонтанное и вынужденное излучение. Понятие о лазере.

Элементы квантовой статистики и физики твердого тела

Фазовое пространство. Элементарная ячейка. Плотность состояний. Понятие о квантовой статистике Бозе — Эйнштейна. Фотонный и фононный

ный газы. Распределение фононов по энергиям. Теплоемкость кристаллической решетки. Сверхтекучесть. Понятие о квантовой статистике Ферми — Дирака. Распределение электронов проводимости в металле по энергиям при абсолютном нуле температуры. Энергия Ферми. Влияние температуры на распределение электронов. Уровень Ферми. Внутренняя энергия и теплоемкость электронного газа в металле. Электропроводность металлов. Сверхпроводимость. Магнитные свойства сверхпроводника.

Энергетические зоны в кристаллах. Распределение электронов по энергетическим зонам. Валентная зона и зона проводимости. Металлы, диэлектрики и полупроводники. Собственная проводимость полупроводников. Квазичастицы — электроны проводимости и дырки. Эффективная масса электрона в кристалле. Примесная проводимость полупроводников. Электронный и дырочный полупроводники. Контактные явления. Контакт электронного и дырочного полупроводника ($p-n$ -переход) и его вольт-амперная характеристика. Фотоэлектрические явления в полупроводниках. Люминесценция твердых тел.

Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц

Заряд, размер и масса атомного ядра. Массовое и зарядовое числа. Момент импульса ядра и его магнитный момент. Состав ядра. Работы Иваненко и Гейзенберга. Нуклоны. Взаимодействие нуклонов и понятие о свойствах и природе ядерных сил. Дефект массы и энергия связи ядра. Закономерности и происхождение альфа-, бета- и гамма-излучений атомных ядер. Ядерные реакции и законы сохранения. Реакция деления ядер. Цепная реакция деления. Понятие о ядерной энергетике. Реакция синтеза атомных ядер. Проблема управляемых термоядерных реакций. Элементарные частицы. Их классификация и взаимная превращаемость. Четыре типа фундаментальных взаимодействий: сильные, электромагнитные, слабые и гравитационные. Понятие об основных проблемах современной физики и астрофизики.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

- Ленин В. И. Материализм и эмпириокритицизм. Полн. собр. соч. Т. 18.
- Трофимова Т. И. Курс физики. — М.: Высшая школа, 1985.
- Детлаф А. А., Яворский Б. М., Милковская Л. Б. Курс физики. — М.: Высшая школа, 1973—1979. — Т. 1, 2, 3.
- Зисман Г. А., Годес О. М. Курс общей физики. — М.: Наука, 1972—1974. — Т. 1, 2, 3.
- Савельев И. В. Курс общей физики. — М.: Наука, 1977—1979. — Т. 1, 2, 3.
- Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики. — М.: Наука, 1979.
- Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике. — М.: Высшая школа, 1981.

Дополнительная

- Стрелков С. П.* Механика. — М.: Наука, 1975.
- Кикоин И. К., Кикоин А. К.* Молекулярная физика. — М.: Наука, 1976.
- Калашников С. Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977.
- Сивухин Д. В.* Общий курс физики. — М.: Наука, 1977—1980. — Т. 1, 2, 3, 4.
- Матвеев А. Н.* Механика и теория относительности. — М.: Высшая школа, 1976, 1986.
- Матвеев А. Н.* Молекулярная физика. — М.: Высшая школа, 1981.
- Матвеев А. Н.* Электродинамика. — М.: Высшая школа, 1980.
- Епифанов Г. И., Мома Ю. А.* Твердотельная электроника. — М.: Высшая школа, 1986.
- Сена Л. А.* Единицы физических величин и их размерности. — М.: Наука, 1977.
- Чертов А. Г.* Единицы физических величин. — М.: Высшая школа, 1977.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. За время изучения курса общей физики студент-заочник должен представить в учебное заведение в зависимости от специальности от двух до шести контрольных работ.

2. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются по таблицам вариантов (см., например, с. 35).

3. Контрольные работы нужно выполнять чернилами в школьной тетради, на обложке которой привести сведения по следующему образцу:

Студент строительного факультета ВЗПИ
Киселев А. В.
Шифр 257320
Адрес: г. Каргополь Архангельской обл.,
ул. Сергеева, 2, кв. 5
Контрольная работа 1 по физике

4. Условия задач в контрольной работе надо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради оставлять поля.

5. В конце контрольной работы указать, каким учебником или учебным пособием студент пользовался при изучении физики (название учебника, автор, год издания). Это делается для того, чтобы рецензент в случае необходимости мог указать, что следует студенту изучить для завершения контрольной работы.

6. Высылать на рецензию следует одновременно не более одной работы. Во избежание одних и тех же ошибок очередную работу следует высылать только после получения рецензии на предыдущую.

7. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, решения которых

оказались неверными. Повторную работу необходимо представить вместе с незачтенной.

8. Зачтенные контрольные работы предъявляются экзаменатору. Студент должен быть готов во время экзамена дать пояснения по существу решения задач, входящих в контрольные работы.

9. Решения задач следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями; в тех случаях, когда это возможно, дать чертеж, выполненный с помощью чертежных принадлежностей.

10. Решать задачу надо в общем виде, т. е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.

11. После получения расчетной формулы для проверки правильности ее следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин обозначения единиц этих величин, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно (см. пример 4 на с. 53 и пример 3 на с. 78).

12. Числовые значения величин при подстановке их в расчетную формулу следует выражать только в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени (см. пример 7 на с. 23).

13. При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3,52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 записать $1,29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.

14. Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений (см. в «Задачнике по физике» А. Г. Чертова, А. А. Воробьева Приложение о приближенных вычислениях). Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.

УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО РАЗДЕЛАМ КУРСА ФИЗИКИ

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Основные формулы

Кинематическое уравнение движения материальной точки (центра масс твердого тела) вдоль оси x

$$x = f(t),$$

где $f(t)$ — некоторая функция времени.

Проекция средней скорости на ось x

$$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Средняя путевая скорость

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs — путь, пройденный точкой за интервал времени Δt . Путь Δs в отличие от разности координат $\Delta x = x_2 - x_1$ не может убывать и принимать отрицательные значения, т. е. $\Delta s \geq 0$.

Проекция мгновенной скорости на ось x

$$v_x = \frac{dx}{dt}.$$

Проекция среднего ускорения на ось x

$$\langle a_x \rangle = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

Проекция мгновенного ускорения на ось x

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

Кинематическое уравнение движения материальной точки по окружности

$$\varphi = f(t), \quad r = R = \text{const.}$$

Модуль угловой скорости

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Модуль углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Связь между модулями линейных и угловых величин, характеризующих движение точки по окружности:

$$v = \omega R, \quad a_t = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R,$$

где v — модуль линейной скорости; a_t и a_n — модули тангенциального и нормального ускорений; ω — модуль угловой скорости; ε — модуль углового ускорения; R — радиус окружности.

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}, \quad \text{или} \quad a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Угол между полным a и нормальным a_n ускорениями

$$\alpha = \arccos(a_n/a).$$

Кинематическое уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где x — смещение; A — амплитуда колебаний; ω — угловая или циклическая частота; φ — начальная фаза.

Скорость и ускорение материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi); \quad a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты:

а) амплитуда результирующего колебания

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

б) начальная фаза результирующего колебания

$$\varphi = \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Траектория точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях,

$$x = A_1 \cos \omega t; \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi):$$

а) $y = \frac{A_2}{A_1} x$, если разность фаз $\varphi = 0$;

б) $y = -\frac{A_2}{A_1} x$, если разность фаз $\varphi = \pm \pi$;

в) $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$, если разность фаз $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

Уравнение плоской бегущей волны

$$y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right),$$

где y — смещение любой из точек среды с координатой x в момент t ; v — скорость распространения колебаний в среде.

Связь разности фаз $\Delta\varphi$ колебаний с расстоянием Δx между точками среды, отсчитанным в направлении распространения колебаний;

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x,$$

где λ — длина волны.

Импульс материальной точки массой m , движущейся со скоростью v ,

$$P = mv.$$

Второй закон Ньютона

$$dP = F dt,$$

где F — результирующая сила, действующая на материальную точку.

Силы, рассматриваемые в механике:

а) сила упругости

$$F = -kx,$$

где k — коэффициент упругости (в случае пружины — жесткость); x — абсолютная деформация;

б) сила тяжести

$$P = mg;$$

в) сила гравитационного взаимодействия

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G — гравитационная постоянная; m_1 и m_2 — массы взаимодействующих тел; r — расстояние между телами (тела рассматриваются как материальные точки). В случае гравитационного взаимодействия силу можно выразить также через напряженность G гравитационного поля:

$$F = mG;$$

г) сила трения (скольжения)

$$F = fN,$$

где f — коэффициент трения; N — сила нормального давления.

Закон сохранения импульса

$$\sum_{i=1}^N p_i = \text{const.}$$

или для двух тел ($i=2$)

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

где v_1 и v_2 — скорости тел в момент времени, принятый за начальный; u_1 и u_2 — скорости тех же тел в момент времени, принятый за конечный.

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно,

$$T = mv^2/2, \quad \text{или} \quad T = p^2/(2m).$$

Потенциальная энергия:

а) упругодеформированной пружины

$$\Pi = 1/2 kx^2,$$

где k — жесткость пружины; x — абсолютная деформация;

б) гравитационного взаимодействия

$$\Pi = -Gm_1 m_2 / r,$$

где G — гравитационная постоянная; m_1 и m_2 — массы взаимодействующих тел; r — расстояние между ними (тела рассматриваются как материальные точки);

в) тела, находящегося в однородном поле силы тяжести,

$$\Pi = mgh,$$

где g — ускорение свободного падения; h — высота тела над уровнем, принятым за нулевой (формула справедлива при условии $h \ll R$, где R — радиус Земли).

Закон сохранения механической энергии

$$E = T + \Pi = \text{const.}$$

Работа A , совершаемая результирующей силой, определяется как мера изменения кинетической энергии материальной точки:

$$A = \Delta T = T_2 - T_1.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси z

$$M_z = J_z \varepsilon,$$

где M_z — результирующий момент внешних сил относительно оси z , действующих на тело; ε — угловое ускорение; J_z — момент инерции относительно оси вращения.

Моменты инерции некоторых тел массой m относительно оси z , проходящей через центр масс:

а) стержня длиной l относительно оси, перпендикулярной стержню,

$$J_z = 1/12 ml^2;$$

б) обруча (тонкостенного цилиндра) относительно оси, перпендикулярной плоскости обруча (совпадающей с осью цилиндра),

$$J_z = mR^2,$$

где R — радиус обруча (цилиндра);

в) диска радиусом R относительно оси, перпендикулярной плоскости диска,

$$J_z = 1/2 mR^2.$$

Проекция на ось z момента импульса тела, вращающегося относительно неподвижной оси z ,

$$L_z = J_z \omega,$$

где ω — угловая скорость тела.

Закон сохранения момента импульса систем тел, вращающихся вокруг неподвижной оси z ,

$$J_z \omega = \text{const},$$

где J_z — момент инерции системы тел относительно оси z ; ω — угловая скорость вращения тел системы вокруг оси z .

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z ,

$$T = 1/2 J_z \omega^2, \quad \text{или} \quad T = L_z^2 / (2J_z).$$

Примеры решения задач

Пример 1. Уравнение движения материальной точки вдоль оси имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 2$ м, $B = 1$ м/с, $C = -0,5$ м/с³. Найти координату x , скорость v_x и ускорение a_x точки в момент времени $t = 2$ с.

Решение. Координату x найдем, подставив в уравнение движения числовые значения коэффициентов A , B и C и времени t :

$$x = (2 + 1 \cdot 2 - 0,5 \cdot 2^3) \text{ м} = 0.$$

Мгновенная скорость относительно оси x есть первая производная от координаты по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2.$$

Ускорение точки найдем, взяв первую производную от скорости по времени:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6Ct.$$

В момент времени $t = 2$ с

$$v_x = (1 - 3 \cdot 0,5 \cdot 2^2) \text{ м/с} = -5 \text{ м/с};$$

$$a_x = 6(-0,5) \cdot 2 \text{ м/с}^2 = -6 \text{ м/с}^2.$$

Пример 2. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ рад, $B = 20$ рад/с, $C = -2$ рад/с². Найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $r = 0,1$ м от оси вращения, для момента времени $t = 4$ с.

Решение. Полное ускорение a точки, движущейся по кривой линии, может быть найдено как геометрическая сумма тангенциального ускорения a_t , направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения a_n , направленного к центру кривизны траектории (рис. 1):

$$a = a_t + a_n.$$

Так как векторы a_t и a_n взаимно перпендикулярны, то модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (1)$$

Модули тангенциального и нормального ускорения точки вращающегося тела выражаются формулами

$$a_t = \epsilon r, \quad a_n = \omega^2 r,$$

где ω — модуль угловой скорости тела; ϵ — модуль его углового ускорения.

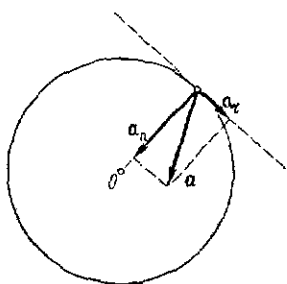


Рис. 1

Подставляя выражения a_r и a_n в формулу (1), находим

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2)$$

Угловую скорость ω найдем, взяв первую производную угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct.$$

В момент времени $t=4c$ модуль угловой скорости

$$\omega = [20 + 2(-2)4] \text{ рад/с} = 4 \text{ рад/с}.$$

Угловое ускорение найдем, взяв первую производную от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = d\omega/dt = 2C = -4 \text{ рад/с}^2.$$

Подставляя значения ω , ε и r в формулу (2), получаем

$$a = 0,1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} \text{ м/с}^2 = 1,65 \text{ м/с}^2.$$

Пример 3. Ящик массой $m_1=20$ кг соскальзывает по идеально гладкому лотку длиной $l=2$ м на неподвижную тележку с песком и застревает в нем. Тележка с песком массой $m_2=80$ кг может свободно (без трения) перемещаться по рельсам в горизонтальном направлении. Определить скорость u тележки с ящиком, если лоток наклонен под углом $\alpha=30^\circ$ к рельсам.

Решение. Тележку и ящик можно рассматривать как систему двух неупруго взаимодействующих тел. Но эта система не замкнута, так как на нее действуют внешние силы: силы тяжести m_1g и m_2g и сила реакции N_2 (рис. 2). Поэтому применить закон сохранения импульса к системе ящик — тележка нельзя. Но так как проекции указанных сил на направление оси x , совпадающей с направлением рельсов, равны нулю, то проекцию импульса системы на это направление можно считать постоянной, т. е.

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x}, \quad (1)$$

где p_{1x} и p_{2x} — проекции импульса ящика и тележки с песком в момент падения ящика на тележку; p'_{1x} и p'_{2x} — те же величины после падения ящика.

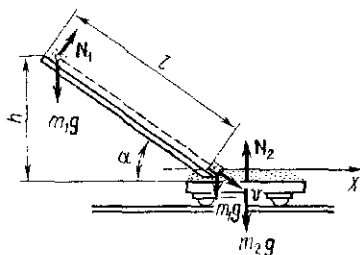


Рис. 2

Рассматривая тела системы как материальные точки, выразим в равенстве (1) импульсы тел через их массы и скорости, учитывая, что $p_{2x}=0$ (тележка до взаимодействия с ящиком покоилась), а также что после взаимодействия оба тела системы движутся с одной и той же скоростью u :

$$m_1 v_{1x} = (m_1 + m_2) u,$$

или

$$m_1 v_1 \cos \alpha = (m_1 + m_2) u,$$

где v_1 — модуль скорости ящика перед падением на тележку; $v_{1x} = v_1 \cos \alpha$ — проекция этой скорости на ось x .

Отсюда $u = m_1 v_1 \cos \alpha / (m_1 + m_2)$. (2)

Модуль скорости v_1 определим из закона сохранения энергии:

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2,$$

где $h = l \sin \alpha$, откуда

$$v_1 = \sqrt{2gl \sin \alpha}.$$

Подставив выражение v_1 в формулу (2), получим

$$u = \frac{m_1 \sqrt{2gl \sin \alpha} \cos \alpha}{m_1 + m_2}.$$

После вычислений найдем

$$\begin{aligned} u &= \frac{20 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2 \sin 30^\circ}}{20 + 80} \cos 30^\circ \text{ м/с} = \\ &= 0,2 \sqrt{19,6 \cdot 0,867} \text{ м/с} = 0,767 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Пример 4. На спокойной воде пруда перпендикулярно берегу и носом к нему стоит лодка массой M и длиной L . На корме стоит человек массой m . На какое расстояние s удалится лодка от берега, если человек перейдет с кормы на нос лодки? Силами трения и сопротивления пренебречь.

Решение. Систему человек — лодка относительно горизонтального направления можно рассматривать как замкнутую. Согласно следствию из закона сохранения импульса, внутренние силы замкнутой системы тел не могут изменить положение центра масс системы. Применяя это следствие к системе человек — лодка, можно считать, что при перемещении человека по лодке центр масс системы не изменит своего положения, т. е. останется на прежнем расстоянии от берега.

Пусть центр масс системы человек—лодка находится на вертикали, проходящей в начальный момент через точку C_1 лодки (рис. 3), а после перемещения лодки — через другую ее точку C_2 . Так как эта вертикаль неподвижна относительно берега, то искомое перемещение s лодки относительно берега равно перемещению лодки относительно вертикали.

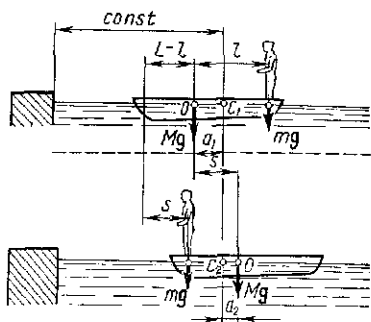


Рис. 3

А это последнее легко определить по перемещению центра масс O лодки. Как видно из рис. 3, в начальный момент точка O находится на расстоянии a_1 слева от вертикали, а после перехода человека — на расстоянии a_2 справа от вертикали. Следовательно, искомое перемещение лодки

$$s = a_1 + a_2.$$

Для определения a_1 и a_2 воспользуемся тем, что результирующий момент сил, действующих на систему относительно горизонтальной оси, перпендикулярной продольной оси лодки, равен нулю. Поэтому для начального положения системы $Mga_1 = mg(l - a_1)$, откуда

$$a_1 = ml/(M + m).$$

После перемещения лодки $Mgd_2 = mg(L - d_2 - l)$, откуда

$$a_2 = m(L - l)/(M + m).$$

Подставив полученные выражения a_1 и a_2 в (1), найдем

$$s = \frac{m}{M + m} l + \frac{m}{M + m} (L - l), \quad \text{или} \quad s = \frac{m}{M + m} L.$$

Пример 5. При выстреле из пружинного пистолета вертикально вверх пуля массой $m=20$ г поднялась на высоту $h=5$ м. Определить жесткость k пружины пистолета, если она была сжата на $x=10$ см. Массой пружины и силами трения пренебречь.

Решение. Рассмотрим систему пружина — пуля. Так как на тела системы действуют только консерватив-

ные силы, то для решения задачи можно применить закон сохранения энергии в механике. Согласно ему полная механическая энергия E_1 системы в начальном состоянии (в данном случае перед выстрелом) равна полной энергии E_2 в конечном состоянии (когда пуля поднялась на высоту h), т. е.

$$E_1 = E_2, \text{ или } T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2, \quad (1)$$

где T_1 , T_2 , Π_1 и Π_2 — кинетические и потенциальные энергии системы в начальном и конечном состояниях.

Так как кинетические энергии пули в начальном и конечном состояниях равны нулю, то равенство (1) примет вид

$$\Pi_1 = \Pi_2. \quad (2)$$

Примем потенциальную энергию пули в поле сил тяготения Земли, когда пуля покоится на сжатой пружине, равной нулю, а высоту подъема пули будем отсчитывать от торца сжатой пружины. Тогда энергия системы в начальном состоянии будет равна потенциальной энергии сжатой пружины, т. е. $\Pi_1 = \frac{1}{2}kx^2$, а в конечном состоянии — потенциальной энергии пули на высоте h , т. е. $\Pi_2 = mgh$.

Подставив выражения Π_1 и Π_2 в формулу (2), найдем $\frac{1}{2}kx^2 = mgh$, откуда

$$k = 2mgh/x^2. \quad (3)$$

Проверим, дает ли полученная формула единицу жесткости k . Для этого в правую часть формулы (3) вместо величин подставим их единицы*:

$$\frac{[m][g][h]}{[x]^2} = \frac{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{1 \text{ м}} = 1 \text{ Н/м}.$$

Убедившись, что полученная единица является единицей жесткости (1 Н/м), подставим в формулу (3) значения величин и произведем вычисления:

$$k = \frac{2 \cdot 0,02 \cdot 9,81 \cdot 5}{(0,1)^2} \text{ Н/м} = 196 \text{ Н/м}.$$

Пример 6. Шар массой m_1 , движущийся горизонтально с некоторой скоростью v_1 , столкнулся с неподвижным шаром массой m_2 . Шары абсолютно упругие, удар

* Единицу какой-либо величины принято обозначать символом этой величины, заключенным в квадратные скобки.

прямой, центральный. Какую долю ϵ своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Решение. Доля энергии, переданной первым шаром второму, выразится соотношением

$$\epsilon = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{u_2}{v_1} \right)^2, \quad (1)$$

где T_1 — кинетическая энергия первого шара до удара; u_2 и T_2 — скорость и кинетическая энергия второго шара после удара.

Как видно из формулы (1), для определения ϵ надо найти u_2 . Согласно условию задачи, импульс системы двух шаров относительно горизонтального направления не изменяется и механическая энергия шаров в другие виды не переходит. Пользуясь этим, найдем:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2; \quad (2)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (3)$$

Решим совместно уравнения (2) и (3):

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставив это выражение u_2 в формулу (1) и сократив на v_1 и m_1 , получим

$$\epsilon = \frac{m_2}{m_1} \left[\frac{2m_1 v_1}{v_1(m_1 + m_2)} \right]^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Из найденного соотношения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров.

Пример 7. Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу $m=80$ г (рис. 4), перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы с массами $m_1=100$ г и $m_2=200$ г. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе. Трением и массой нити пренебречь.

Решение. Рассмотрим силы, действующие на каждый груз и на блок в отдельности. На каждый груз действуют две силы: сила тяжести и сила упругости (сила натяжения нити). Направим ось x вертикально вниз и напишем для

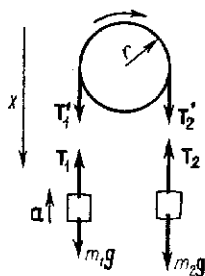


Рис. 4

каждого груза уравнение движения (второй закон Ньютона) в проекциях на эту ось. Для первого груза

$$m_1 g - T_1 = m_1 a; \quad (1)$$

для второго груза

$$m_2 g - T_2 = m_2 a. \quad (2)$$

Под действием моментов сил T'_1 и T'_2 относительно оси z , перпендикулярной плоскости чертежа и направленной за чертеж, блок приобретает угловое ускорение ε . Согласно основному уравнению динамики вращательного движения,

$$T'_2 r - T'_1 r = J_z \varepsilon, \quad (3)$$

где $\varepsilon = a/r$; $J_z = 1/2 m r^2$ — момент инерции блока (сплошного диска) относительно оси z .

Согласно третьему закону Ньютона, с учетом невесомости нити $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$. Воспользовавшись этим, подставим в уравнение (3) вместо T'_1 и T'_2 выражения T_1 и T_2 , получив их предварительно из уравнений (1) и (2):

$$(m_2 g - m_2 a) r - (m_1 g + m_1 a) r = m r^2 a / (2r).$$

После сокращения на r и перегруппировки членов найдем

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + m/2} g. \quad (4)$$

Формула (4) позволяет массы m_1 , m_2 и m выразить в граммах, как они даны в условии задачи, а ускорение — в единицах СИ. После подстановки числовых значений в формулу (4) получим

$$a = \frac{(200 - 100) \text{ г}}{(200 + 100 + 80/2) \text{ г}} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 = 2,88 \text{ м/с}^2.$$

Пример 8. Маховик в виде сплошного диска радиусом $R=0,2$ м и массой $m=50$ кг раскручен до частоты вращения $n_1 = 480$ мин⁻¹ и предоставлен сам себе. Под действием сил трения маховик остановился через $t=50$ с. Найти момент M сил трения.

Решение. Для решения задачи воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения в виде

$$dL_z = M_z dt, \quad (1)$$

где dL_z — изменение проекции на ось z момента импульса маховика, вращающегося относительно оси z , совпадаю-

шей с геометрической осью маховика, за интервал времени dt ; M_z — момент внешних сил (в данном случае момент сил трения), действующих на маховик относительно оси z .

Момент сил трения можно считать не изменяющимся с течением времени ($M_z = \text{const}$), поэтому интегрирование уравнения (1) приводит к выражению

$$\Delta L_z = M_z \Delta t. \quad (2)$$

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси изменение проекции момента импульса

$$\Delta L_z = J_z \Delta \omega, \quad (3)$$

где J_z — момент инерции маховика относительно оси z ; $\Delta \omega$ — изменение угловой скорости маховика.

Приравняв правые части равенств (2) и (3), получим $M_z \Delta t = J_z \Delta \omega$, откуда

$$M_z = J_z \frac{\Delta \omega}{\Delta t}. \quad (4)$$

Момент инерции маховика в виде сплошного диска определяется по формуле

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2.$$

Изменение угловой скорости $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$ выразим через конечную n_2 и начальную n_1 частоты вращения, пользуясь соотношением $\omega = 2\pi n$:

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1).$$

Подставив в формулу (4) выражения J_z и $\Delta \omega$, получим

$$M_z = \pi m R^2 (n_2 - n_1) / \Delta t. \quad (5)$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу момента силы (Н·м). Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы:

$$\frac{[m][R^2][n]}{[t]} = \frac{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м}^2 \cdot 1 \text{ с}^{-1}}{1 \text{ с}} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Подставим в (5) числовые значения величин и произведем вычисления, учитывая, что $n_1 = 480 \text{ мин}^{-1} = 480/60 \text{ с}^{-1} = 8 \text{ с}^{-1}$:

$$M_z = \frac{3,14 \cdot 50 \cdot (0,2)^2 \cdot (0-8)}{50} \text{ Н} \cdot \text{м} = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Знак минус показывает, что момент сил трения оказывает на маховик тормозящее действие.

Пример 9. Платформа в виде сплошного диска радиусом $R=1,5$ м и массой $m_1=180$ кг вращается около вертикальной оси с частотой $n=10$ мин⁻¹. В центре платформы стоит человек массой $m_2=60$ кг. Какую линейную скорость v относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Решение. Согласно условию задачи, момент внешних сил относительно оси вращения z , совпадающей с геометрической осью платформы, можно считать равным нулю. При этом условии проекция L_z момента импульса системы платформа — человек остается постоянной:

$$L_z = J_z \omega = \text{const}, \quad (1)$$

где J_z — момент инерции платформы с человеком относительно оси z ; ω — угловая скорость платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому в начальном состоянии $J_z = J_1 + J_2$, а в конечном состоянии $J'_z = J'_1 + J'_2$.

С учетом этого равенство (1) примет вид

$$(J_1 + J_2)\omega = (J'_1 + J'_2)\omega', \quad (2)$$

где значения моментов инерции J_1 и J_2 платформы и человека соответственно относятся к начальному состоянию системы; J'_1 и J'_2 — к конечному.

Момент инерции платформы относительно оси z при переходе человека не изменяется: $J_1 = J'_1 = \frac{1}{2}m_1R^2$. Момент инерции человека относительно той же оси будет изменяться. Если рассматривать человека как материальную точку, то его момент инерции J_2 в начальном состоянии (в центре платформы) можно считать равным нулю. В конечном состоянии (на краю платформы) момент инерции человека $J'_2 = m_2R^2$.

Подставим в формулу (2) выражения моментов инерции, начальной угловой скорости вращения платформы с человеком ($\omega = 2\pi n$) и конечной угловой скорости ($\omega' = v/R$, где v — скорость человека относительно пола):

$$(\frac{1}{2}m_1R^2 + 0)2\pi n = (\frac{1}{2}m_1R^2 + m_2R^2)v/R.$$

После сокращения на R^2 и простых преобразований находим скорость:

$$v = 2\pi n R m_1 / (m_1 + 2m_2).$$

Произведем вычисления:

$$v = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1,5 \cdot 180}{180 + 2 \cdot 60} \text{ м/с} = 1 \text{ м/с.}$$

Пример 10. Ракета установлена на поверхности Земли для запуска в вертикальном направлении. При какой минимальной скорости v_1 , сообщенной ракете при запуске, она удалится от поверхности на расстояние, равное радиусу Земли ($R = 6,37 \cdot 10^6$ м)? Всеми силами, кроме силы гравитационного взаимодействия ракеты и Земли, пренебречь.

Решение. Со стороны Земли на ракету действует сила тяжести, являющаяся потенциальной силой. При неработающем двигателе под действием потенциальной силы механическая энергия ракеты изменяться не будет. Следовательно,

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2, \quad (1)$$

где T_1 , Π_1 и T_2 , Π_2 — кинетическая и потенциальная энергии ракеты после выключения двигателя в начальном (у поверхности Земли) и конечном (на расстоянии, равном радиусу Земли) состояниях.

Согласно определению кинетической энергии,

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2.$$

Потенциальная энергия ракеты в начальном состоянии*

$$\Pi_1 = -GmM/R.$$

По мере удаления ракеты от поверхности Земли ее потенциальная энергия возрастает, а кинетическая — убывает. В конечном состоянии кинетическая энергия T_2 станет равной нулю, а потенциальная — достигнет максимального значения:

$$\Pi_2 = -GmM/(2R).$$

Подставляя выражения T_1 , Π_1 , T_2 и Π_2 в (1), получаем

$$m v_1^2 / 2 - GmM/R = -GmM/(2R),$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{GM/R}.$$

* Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия тел бесконечно удаленных друг от друга, принимается равной нулю.

Заметив, что $GM/R^2 = g$ (g — ускорение свободного падения у поверхности Земли), перепишем эту формулу в виде

$$v_1 = \sqrt{gR},$$

что совпадает с выражением для первой космической скорости.

Произведем вычисления:

$$v_1 = \sqrt{9,8 \cdot 6,37 \cdot 10^6} \text{ м/с} = 7,9 \text{ км/с.}$$

Пример 11. Точка совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 10$ Гц. В момент, принятый за начальный, точка имела максимальное смещение: $x_{\max} = 1$ мм. Написать уравнение колебаний точки и начертить их график.

Решение. Уравнение колебаний точки можно записать в виде

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (1)$$

где A — амплитуда колебаний; ω — циклическая частота; t — время; φ_1 — начальная фаза.

По определению, амплитуда колебаний

$$A = x_{\max}. \quad (2)$$

Циклическая частота ω связана с частотой ν соотношением

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (3)$$

Для момента времени $t = 0$ формула (1) примет вид

$$x_{\max} = A \sin \varphi_1,$$

откуда начальная фаза

$$\varphi_1 = \arcsin(x_{\max}/A) = \arcsin 1,$$

или

$$\varphi_1 = (2k + 1)\pi/2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Изменение фазы на 2π не изменяет состояния колеблющейся точки, поэтому можно принять

$$\varphi_1 = \pi/2. \quad (4)$$

С учетом равенств (2) — (4) уравнение колебаний примет вид

$$x = A \sin(2\pi\nu t + \varphi), \text{ или } x = A \cos 2\pi\nu t,$$

где $A = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$, $\nu = 10 \text{ Гц}$, $\varphi = \pi/2$.

График соответствующего гармонического колебания приведен на рис. 5.

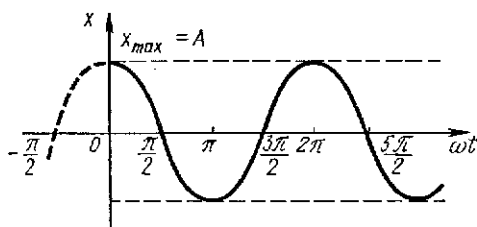


Рис. 5

Пример 12. Частица массой $m = 0,01$ кг совершает гармонические колебания с периодом $T = 2$ с. Полная энергия колеблющейся частицы $E = 0,1$ мДж. Определить амплитуду A колебаний и наибольшее значение силы F_{\max} , действующей на частицу.

Решение. Для определения амплитуды колебаний воспользуемся выражением полной энергии частицы:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2,$$

где $\omega = 2\pi/T$. Отсюда амплитуда

$$A = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{2E}{m}}. \quad (1)$$

Так как частица совершает гармонические колебания, то сила, действующая на нее, является квазиупругой и, следовательно, может быть выражена соотношением $F = -kx$, где k — коэффициент квазиупругой силы; x — смещение колеблющейся точки. Максимальной сила будет при максимальном смещении x_{\max} , равном амплитуде:

$$F_{\max} = kA. \quad (2)$$

Коэффициент k выразим через период колебаний:

$$k = m\omega^2 = m \cdot 4\pi^2/T^2. \quad (3)$$

Подставив выражения (1) и (3) в (2) и произведя упрощения, получим

$$F_{\max} = 2\pi\sqrt{2mE}/T.$$

Произведем вычисления:

$$A = \frac{2}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}}} \text{ м} = 0,045 \text{ м} = 45 \text{ мм};$$

$$F_{\max} = \frac{2 \cdot 3,14}{2} \sqrt{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-4}} \text{ Н} = 4,44 \cdot 10^{-3} \text{ Н} = 4,44 \text{ мН.}$$

Пример 13. Складываются два колебания одинакового направления, выраженные уравнениями

$$x_1 = A_1 \cos \frac{2\pi}{T}(t + \tau_1); \quad x_2 = A_2 \cos \frac{2\pi}{T}(t + \tau_2),$$

где $A_1 = 3$ см, $A_2 = 2$ см, $\tau_1 = 1/6$ с, $\tau_2 = 1/3$ с, $T = 2$ с. Построить векторную диаграмму сложения этих колебаний и написать уравнение результирующего колебания.

Решение. Для построения векторной диаграммы сложения двух колебаний одного направления надо фиксировать какой-либо момент времени. Обычно векторную диаграмму строят для момента времени $t = 0$. Преобразовав оба уравнения к канонической форме $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, получим

$$x_1 = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T}\tau_1\right); \quad x_2 = A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{T}\tau_2\right).$$

Отсюда видно, что оба складываемых гармонических колебания имеют одинаковую циклическую частоту

$$\omega = 2\pi/T.$$

Начальные фазы первого и второго колебаний соответственно равны

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T}\tau_1; \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{T}\tau_2.$$

Произведем вычисления:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} \text{ с}^{-1} = 3,14 \text{ с}^{-1};$$

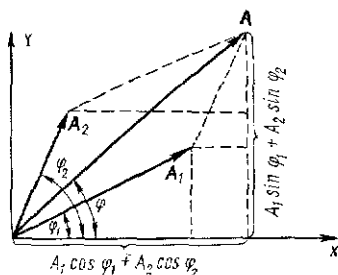
$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{1}{6} \text{ рад} = 30^\circ; \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} \text{ рад} = 60^\circ.$$

Изобразим векторы A_1 и A_2 . Для этого отложим отрезки длиной $A_1 = 3$ см и $A_2 = 2$ см под углами $\varphi_1 = 30^\circ$ и $\varphi_2 = 60^\circ$ к оси Ox . Результирующее колебание будет происходить с той же частотой ω и амплитудой A , равной геометрической сумме амплитуд A_1 и A_2 : $A = A_1 + A_2$. Согласно теореме косинусов,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Начальную фазу результирующего колебания можно также определить непосредственно из векторной диаграммы (рис. 6):

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$



Произведем вычисления:

Рис. 6

$$A = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cos(60^\circ - 30^\circ)} \text{ см} = 4,84 \text{ см};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{3 \sin 30^\circ + 2 \sin 60^\circ}{3 \cos 30^\circ + 2 \cos 60^\circ} = \operatorname{arctg} 0,898 = 42^\circ,$$

или $\varphi = 0,735$ рад.

Так как результирующее колебание является гармоническим, имеет ту же частоту, что и слагаемые колебания, то его можно записать в виде

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где $A = 4,84$ см, $\omega = 3,14 \text{ с}^{-1}$, $\varphi = 0,735$ рад.

Пример 14. Плоская волна распространяется вдоль прямой со скоростью $v = 20$ м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях $x_1 = 12$ м и $x_2 = 15$ м от источника волн, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 0,75\pi$. Найти длину волны λ , написать уравнение волны и найти смещение указанных точек в момент $t = 1,2$ с, если амплитуда колебаний $A = 0,1$ м.

Решение. Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны λ , колеблются с разностью фаз, равной 2π ; точки, находящиеся друг от друга на любом расстоянии Δx , колеблются с разностью фаз, равной

$$\Delta\varphi = \Delta x \cdot 2\pi/\lambda = (x_2 - x_1) \cdot 2\pi/\lambda.$$

Решая это равенство относительно λ , получаем

$$\lambda = 2\pi(x_2 - x_1)/\Delta\varphi. \quad (1)$$

Подставив числовые значения величин, входящих в выражение (1), и выполнив арифметические действия, получим

$$\lambda = \frac{2\pi(15 - 12)}{0,75\pi} \text{ м} = 8 \text{ м}.$$

Для того чтобы написать уравнение плоской волны, надо еще найти циклическую частоту ω . Так как $\omega = 2\pi/T$ ($T = \lambda/v$ — период колебаний), то

$$\omega = 2\pi v/\lambda.$$

Произведем вычисления:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 20}{8} \text{ с}^{-1} = 5\pi \text{ с}^{-1}.$$

Зная амплитуду A колебаний, циклическую частоту ω и скорость v распространения волны, можно написать уравнение плоской волны для данного случая:

$$y = A \cos \omega(t - x/v), \quad (2)$$

где $A = 0,1$ м, $\omega = 5\pi \text{ с}^{-1}$, $v = 20$ м/с.

Чтобы найти смещение y указанных точек, достаточно в уравнение (2) подставить значения t и x :

$$y_1 = 0,1 \cos 5\pi(1,2 - 12/20) \text{ м} = 0,1 \cos 3\pi \text{ м} = -0,1 \text{ м};$$

$$y_2 = 0,1 \cos 5\pi(1,2 - 15/20) \text{ м} = 0,1 \cos 2,25\pi \text{ м} = \\ = 0,1 \cos 0,25\pi \text{ м} = 0,071 \text{ м} = 7,1 \text{ см}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Точка движется по окружности радиусом $R = 4$ м. Закон ее движения выражается уравнением $s = A + Bt^2$, где $A = 8$ м, $B = -2$ м/с². Определить момент времени t , когда нормальное ускорение a_n точки равно 9 м/с². Найти скорость v , тангенциальное a_t и полное a ускорения точки в тот же момент времени t . [1,5 с; -6 м/с; -4 м/с²; 9,84 м/с²]

2. Две материальные точки движутся согласно уравнениям $x_1 = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3$ и $x_2 = A_2t + B_2t^2 + C_2t^3$, где $A_1 = 4$ м/с, $B_1 = 8$ м/с², $C_1 = -16$ м/с³, $A_2 = 2$ м/с, $B_2 = -4$ м/с², $C_2 = 1$ м/с³. В какой момент времени t ускорения этих точек будут одинаковы? Найти скорости v_1 и v_2 точек в этот момент. [0,235 с; 5,1 м/с; 0,286 м/с]

3. Шар массой $m_1 = 10$ кг сталкивается с шаром массой $m_2 = 4$ кг. Скорость первого шара $v_1 = 4$ м/с, второго — $v_2 = 12$ м/с. Найти общую скорость u шаров после удара в двух случаях: 1) малый шар нагоняет большой шар, движущийся в том же направлении; 2) шары движутся навстречу друг другу. Удар считать прямым, центральным, неупругим. [6,28 м/с; $-0,572$ м/с]

4. В лодке массой $M = 240$ кг стоит человек массой

$m = 60$ кг. Лодка плывет со скоростью $v = 2$ м/с. Человек прыгает с лодки в горизонтальном направлении со скоростью $u = 4$ м/с (относительно лодки). Найти скорость лодки после прыжка человека: 1) вперед по движению лодки; 2) в сторону, противоположную движению лодки. [1 м/с; 3 м/с]

5. Человек, стоящий в лодке, сделал шесть шагов вдоль нее и остановился. На сколько шагов передвинулась лодка, если масса лодки в два раза больше (меньше) массы человека? [2 шага; 4 шага]

6. Из пружинного пистолета выстрелили пулькой, масса которой $m = 5$ г. Жесткость пружины $k = 1,25$ кН/м. Пружина была сжата на $\Delta l = 8$ см. Определить скорость пульки при вылете ее из пистолета. [40 м/с]

7. Шар массой $m_1 = 200$ г, движущийся со скоростью $v_1 = 10$ м/с, сталкивается с неподвижным шаром массой $m_2 = 800$ г. Удар прямой, центральный, абсолютно упругий. Определить скорости шаров после столкновения. [—6 м/с; 4 м/с]

8. Шар, двигавшийся горизонтально, столкнулся с неподвижным шаром и передал ему 64% своей кинетической энергии. Шары абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Во сколько раз масса второго шара больше массы первого? [В 4 раза]

9. Цилиндр, расположенный горизонтально, может вращаться вокруг оси, совпадающей с осью цилиндра. Масса цилиндра $m_1 = 12$ кг. На цилиндр намотали шнур, к которому привязали гирию массой $m_2 = 1$ кг. С каким ускорением будет опускаться гирия? Какова сила натяжения шнура во время движения гири? [1,4 м/с²; 8,4 Н]

10. Через блок, выполненный в виде колеса, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 300$ г. Массу колеса $M = 200$ г считать равномерно распределенной по ободу, массой спиц пренебречь. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, и силы натяжения нити по обе стороны блока. [3,27 м/с²; 1,31 Н; 1,96 Н]

11. Двум одинаковым маховикам, находящимся в покое, сообщили одинаковую угловую скорость $\omega = 63$ рад/с и предоставили их самим себе. Под действием сил трения маховик остановился через одну минуту, а второй сделал до полной остановки $N = 360$ оборотов. У какого маховика тормозящий момент был больше и во сколько раз? [У первого больше в 1,2 раза]

12. Шар скатывается с наклонной плоскости высотой $h=90$ см. Какую линейную скорость будет иметь центр шара в тот момент, когда шар скатится с наклонной плоскости? [3,55 м/с]

13. На верхней поверхности горизонтального диска, который может вращаться вокруг вертикальной оси, расположены по окружности радиусом $r=50$ см рельсы игрушечной железной дороги. Масса диска $M=10$ кг, его радиус $R=60$ см. На рельсы неподвижного диска был поставлен заводной паровозик массой $m=1$ кг и выпущен из рук. Он начал двигаться относительно рельсов со скоростью $v=0,8$ м/с. С какой угловой скоростью будет вращаться диск? [0,195 рад/с]

14. Платформа в виде диска вращается по инерции около вертикальной оси с частотой $n_1=14$ мин⁻¹. На краю платформы стоит человек. Когда человек перешел в центр платформы, частота возросла до $n_2=25$ мин⁻¹. Масса человека $m=70$ кг. Определить массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки. [210 кг]

15. Искусственный спутник обращается вокруг Земли по круговой орбите на высоте $H=3200$ км над поверхностью Земли. Определить линейную скорость спутника. [6,45 км/с]

16. Точка совершает гармонические колебания. В некоторый момент времени смещение точки $x=5$ см, скорость ее $v=20$ см/с и ускорение $a=-80$ см/с². Найти циклическую частоту и период колебаний, фазу колебаний в рассматриваемый момент времени и амплитуду колебаний. [4 с⁻¹; 1,57 с; $\pi/4$; 7,07 см]

17. Точка совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид $x=A \sin \omega t$, где $A=5$ см, $\omega=2$ с⁻¹. Найти момент времени (ближайший к началу отсчета), в который потенциальная энергия точки $\Pi=10^{-4}$ Дж, а возвращающая сила $F=+5 \cdot 10^{-3}$ Н. Определить также фазу колебаний в этот момент времени. [2,04 с; 4,07 рад]

18. Два гармонических колебания, направленных по одной прямой, имеющих одинаковые амплитуды и периоды, складываются в одно колебание той же амплитуды. Найти разность фаз складываемых колебаний. [120° или 240°]

19. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями $x=A_1 \cos \omega_1 t$

и $y = A_2 \cos \omega_2(t + \tau)$, где $A_1 = 4$ см, $\omega_1 = \pi \text{ с}^{-1}$, $A_2 = 8$ см, $\omega_2 = \pi \text{ с}^{-1}$, $\tau = 1$ с. Найти уравнение траектории и начертить ее с соблюдением масштаба. [$2x + y = 0$]

20. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $v = 15$ м/с. Период колебаний точек шнура $T = 1,2$ с. Определить разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях $x_1 = 20$ м и $x_2 = 30$ м. [200°]

Контрольная работа 1

Таблица вариантов для специальностей, учебными планами которых предусмотрено по курсу физики четыре и шесть контрольных работ

Вариант	Номера задач							
0	110	120	130	140	150	160	170	180
1	101	111	121	131	141	151	161	171
2	102	112	122	132	142	152	162	172
3	103	113	123	133	143	153	163	173
4	104	114	124	134	144	154	164	174
5	105	115	125	135	145	155	165	175
6	106	116	126	136	146	156	166	176
7	107	117	127	137	147	157	167	177
8	108	118	128	138	148	158	168	178
9	109	119	129	139	149	159	169	179

101. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 4$ м/с. Когда оно достигло верхней точки полета из того же начального пункта, с той же начальной скоростью v_0 вертикально вверх брошено второе тело. На каком расстоянии h от начального пункта встретятся тела? Сопротивление воздуха не учитывать.

102. Материальная точка движется прямолинейно с ускорением $a = 5$ м/с². Определить, на сколько путь, пройденный точкой в n -ю секунду, будет больше пути, пройденного в предыдущую секунду. Принять $v_0 = 0$.

103. Две автомашины движутся по дорогам, угол между которыми $\alpha = 60^\circ$. Скорость автомашин $v_1 = 54$ км/ч и $v_2 = 72$ км/ч. С какой скоростью v удаляются машины одна от другой?

104. Материальная точка движется прямолинейно с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с и постоянным ускорением $a = -5$ м/с². Определить, во сколько раз путь Δs , пройденный материальной точкой, будет превышать мо-

дуль ее перемещения Δr спустя $t=4$ с после начала отсчета времени.

105. Велосипедист ехал из одного пункта в другой. Первую треть пути он проехал со скоростью $v_1=18$ км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $v_2=22$ км/ч, после чего до конечного пункта он шел пешком со скоростью $v_3=5$ км/ч. Определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ велосипедиста.

106. Тело брошено под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту со скоростью $v_0=30$ м/с. Каковы будут нормальное a_n и тангенциальное a_t ускорения тела через время $t=1$ с после начала движения?

107. Материальная точка движется по окружности с постоянной угловой скоростью $\omega=\pi/6$ рад/с. Во сколько раз путь Δs , пройденный точкой за время $t=4$ с, будет больше модуля ее перемещения Δr ? Принять, что в момент начала отсчета времени радиус-вектор r , задающий положение точки на окружности, относительно исходного положения был повернут на угол $\varphi_0=\pi/3$ рад.

108. Материальная точка движется в плоскости xy согласно уравнениям $x=A_1+B_1t+C_1t^2$ и $y=A_2+B_2t+C_2t^2$, где $B_1=7$ м/с, $C_1=-2$ м/с², $B_2=-1$ м/с, $C_2=0,2$ м/с². Найти модули скорости и ускорения точки в момент времени $t=5$ с.

109. По краю равномерно вращающейся с угловой скоростью $\omega=1$ рад/с платформы идет человек и обходит платформу за время $t=9,9$ с. Каково наибольшее ускорение a движения человека относительно Земли? Принять радиус платформы $R=2$ м.

110. Точка движется по окружности радиусом $R=30$ см с постоянным угловым ускорением ϵ . Определить тангенциальное ускорение a_t точки, если известно, что за время $t=4$ с она совершила три оборота и в конце третьего оборота ее нормальное ускорение $a_n=2,7$ м/с².

111. При горизонтальном полете со скоростью $v=250$ м/с снаряд массой $m=8$ кг разорвался на две части. Большая часть массой $m_1=6$ кг получила скорость $u_1=400$ м/с в направлении полета снаряда. Определить модуль и направление скорости u_2 меньшей части снаряда.

112. С тележки, свободно движущейся по горизонтальному пути со скоростью $v_1=3$ м/с, в сторону, противоположную движению тележки, прыгает человек, после чего скорость тележки изменилась и стала равной $u_1=4$ м/с. Определить горизонтальную составляющую

скорости u_{2x} человека при прыжке относительно тележки. Масса тележки $m_1=210$ кг, масса человека $m_2=70$ кг.

113. Орудие, жестко закрепленное на железнодорожной платформе, производит выстрел вдоль полотна железной дороги под углом $\alpha=30^\circ$ к линии горизонта. Определить скорость u_2 отката платформы, если снаряд вылетает со скоростью $u_1=480$ м/с. Масса платформы с орудием и снарядами $m_2=18$ т, масса снаряда $m_1=60$ кг.

114. Человек массой $m_1=70$ кг, бегущий со скоростью $v_1=9$ км/ч, догоняет тележку массой $m_2=190$ кг, движущуюся со скоростью $v_2=3,6$ км/ч, и вскакивает на нее. С какой скоростью станет двигаться тележка с человеком? С какой скоростью будет двигаться тележка с человеком, если человек до прыжка бежал навстречу тележке?

115. Конькобежец, стоя на коньках на льду, бросает камень массой $m_1=2,5$ кг под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту со скоростью $v=10$ м/с. Какова будет начальная скорость v_0 движения конькобежца, если масса его $m_2=60$ кг? Перемещением конькобежца во время броска пренебречь.

116. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной легкими колесами. На одном конце доски стоит человек. Масса его $m_1=60$ кг, масса доски $m_2=20$ кг. С какой скоростью (относительно пола) будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль нее со скоростью (относительно доски) $v=1$ м/с? Массой колес и трением пренебречь.

117. Снаряд, летевший со скоростью $v=400$ м/с, в верхней точке траектории разорвался на два осколка. Меньший осколок, масса которого составляет 40% от массы снаряда, полетел в противоположном направлении со скоростью $u_1=150$ м/с. Определить скорость u_2 большего осколка.

118. Две одинаковые лодки массами $m=200$ кг каждая (вместе с человеком и грузами, находящимися в лодках) движутся параллельными курсами навстречу друг другу с одинаковыми скоростями $v=1$ м/с. Когда лодки поравнялись, то с первой лодки на вторую и со второй на первую одновременно перебрасывают грузы массами $m_1=200$ кг. Определить скорости u_1 и u_2 лодок после перебрасывания грузов.

119. На сколько переместится относительно берега лодка длиной $l=3,5$ м и массой $m_1=200$ кг, если стоя-

щик на корме человек массой $m_2 = 80$ кг переместится на нос лодки? Считать лодку расположенной перпендикулярно берегу.

120. Лодка длиной $l = 3$ м и массой $m = 120$ кг стоит на спокойной воде. На носу и корме находятся два рыбака массами $m_1 = 60$ кг и $m_2 = 90$ кг. На сколько сдвинется лодка относительно воды, если рыбаки поменяются местами?

121. В деревянный шар массой $m_1 = 8$ кг, подвешенный на нити длиной $l = 1,8$ м, попадает горизонтально летящая пуля массой $m_2 = 4$ г. С какой скоростью летела пуля, если нить с шаром и застрявшей в нем пулей отклонилась от вертикали на угол $\alpha = 3^\circ$? Размером шара пренебречь. Удар пули считать прямым, центральным.

122. По небольшому куску мягкого железа, лежащему на наковальне массой $m_1 = 300$ кг, ударяет молот массой $m_2 = 8$ кг. Определить КПД η удара, если удар неупругий. Полезной считать энергию, затраченную на деформацию куска железа.

123. Шар массой $m_1 = 1$ кг движется со скоростью $v_1 = 4$ м/с и сталкивается с шаром массой $m_2 = 2$ кг, движущимся навстречу ему со скоростью $v_2 = 3$ м/с. Каковы скорости u_1 и u_2 шаров после удара? Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

124. Шар массой $m_1 = 3$ кг движется со скоростью $v_1 = 2$ м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой $m_2 = 5$ кг. Какая работа будет совершена при деформации шаров? Удар считать абсолютно неупругим, прямым, центральным.

125. Определить КПД η неупругого удара бойка массой $m_1 = 0,5$ т, падающего на сваю массой $m_2 = 120$ кг. Полезной считать энергию, затраченную на вбивание сваи.

126. Шар массой $m_1 = 4$ кг движется со скоростью $v_1 = 5$ м/с и сталкивается с шаром массой $m_2 = 6$ кг, который движется ему навстречу со скоростью $v_2 = 2$ м/с. Определить скорости u_1 и u_2 шаров после удара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

127. Из ствола автоматического пистолета вылетела пуля массой $m_1 = 10$ г со скоростью $v = 300$ м/с. Затвор пистолета массой $m_2 = 200$ г прижимается к стволу пружиной, жесткость которой $k = 25$ кН/м. На какое рас-

стояние отойдет затвор после выстрела? Считать, что пистолет жестко закреплен.

128. Шар массой $m_1 = 5$ кг движется со скоростью $v_1 = 1$ м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой $m_2 = 2$ кг. Определить скорости u_1 и u_2 шаров после удара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

129. Из орудия, не имеющего противооткатного устройства, производилась стрельба в горизонтальном направлении. Когда орудие было неподвижно закреплено, снаряд вылетел со скоростью $v_1 = 600$ м/с, а когда орудю дали возможность свободно откатываться назад, снаряд вылетел со скоростью $v_2 = 580$ м/с. С какой скоростью откатилось при этом орудие?

130. Шар массой $m_1 = 2$ кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы и при этом теряет 40% кинетической энергии. Определить массу m_2 большего шара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

131. Определить работу растяжения двух соединенных последовательно пружин жесткостями $k_1 = 400$ Н/м и $k_2 = 250$ Н/м, если первая пружина при этом растянулась на $\Delta l = 2$ см.

132. Из шахты глубиной $h = 600$ м поднимают клеть массой $m_1 = 3,0$ т на канате, каждый метр которого имеет массу $m = 1,5$ кг. Какая работа A совершается при поднятии клетки на поверхность Земли? Каков коэффициент полезного действия η подъемного устройства?

133. Пружина жесткостью $k = 500$ Н/м сжата силой $F = 100$ Н. Определить работу A внешней силы, дополнительно сжимающей пружину еще на $\Delta l = 2$ см.

134. Две пружины жесткостью $k_1 = 0,5$ кН/м и $k_2 = 1$ кН/м скреплены параллельно. Определить потенциальную энергию Π данной системы при абсолютной деформации $\Delta l = 4$ см.

135. Какую нужно совершить работу A , чтобы пружину жесткостью $k = 800$ Н/м, сжатую на $x = 6$ см, дополнительно сжать на $\Delta x = 8$ см?

136. Если на верхний конец вертикально расположенной спиральной пружины положить груз, то пружина сожмется на $\Delta l = 3$ мм. На сколько сожмет пружину тот же груз, упавший на конец пружины с высоты $h = 8$ см?

137. Из пружинного пистолета с пружиной жесткостью $k = 150$ Н/м был произведен выстрел пулей массой $m = 8$ г. Определить скорость v пули при вылете ее из

пистолета, если пружина была сжата на $\Delta x = 4$ см.

138. Налетев на пружинный буфер, вагон массой $m = 16$ т, двигавшийся со скоростью $v = 0,6$ м/с, остановился, сжав пружину на $\Delta l = 8$ см. Найти общую жесткость k пружин буфера.

139. Цепь длиной $l = 2$ м лежит на столе, одним концом свисая со стола. Если длина свешивающейся части превышает $1/3 l$, то цепь соскальзывает со стола. Определить скорость v цепи в момент ее отрыва от стола.

140. Какая работа A должна быть совершена при поднятии с земли материалов для постройки цилиндрической дымоходной трубы высотой $h = 40$ м, наружным диаметром $D = 3,0$ м и внутренним диаметром $d = 2,0$ м? Плотность материала ρ принять равной $2,8 \cdot 10^3$ кг/м³.

141. Шарик массой $m = 60$ г, привязанный к концу нити длиной $l_1 = 1,2$ м, вращается с частотой $n_1 = 2\text{с}^{-1}$, опираясь на горизонтальную плоскость. Нить укорачивается, приближая шарик к оси до расстояния $l_2 = 0,6$ м. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться шарик? Какую работу A совершает внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

142. По касательной к шкиву маховика в виде диска диаметром $D = 75$ см и массой $m = 40$ кг приложена сила $F = 1$ кН. Определить угловое ускорение ε и частоту вращения n маховика через время $t = 10$ с после начала действия силы, если радиус r шкива равен 12 см. Силой трения пренебречь.

143. На обод маховика диаметром $D = 60$ см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 2$ кг. Определить момент инерции J маховика, если он, вращаясь равноускоренно под действием силы тяжести груза, за время $t = 3$ с приобрел угловую скорость $\omega = 9$ рад/с.

144. Нить с привязанными к ее концам грузами массами $m_1 = 50$ г и $m_2 = 60$ г перекинута через блок диаметром $D = 4$ см. Определить момент инерции J блока, если под действием силы тяжести грузов он получил угловое ускорение $\varepsilon = 1,5$ рад/с². Трением и проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

145. Стержень вращается вокруг оси, проходящей через его середину, согласно уравнению $\varphi = At + Bt^3$, где $A = 2$ рад/с, $B = 0,2$ рад/с³. Определить вращающий момент M , действующий на стержень через время $t = 2$ с после начала вращения, если момент инерции стержня $J = 0,048$ кг·м².

146. По горизонтальной плоскости катится диск со скоростью $v = 8$ м/с. Определить коэффициент сопротивления, если диск, будучи предоставленным самому себе, остановился, пройдя путь $s = 18$ м.

147. Определить момент силы M , который необходимо приложить к блоку, вращающемуся с частотой $n = 12$ с⁻¹, чтобы он остановился в течение времени $\Delta t = 8$ с. Диаметр блока $D = 30$ см. Массу блока $m = 6$ кг считать равномерно распределенной по ободу.

148. Блок, имеющий форму диска массой $m = 0,4$ кг, вращается под действием силы натяжения нити, к концам которой подвешены грузы массами $m_1 = 0,3$ кг и $m_2 = 0,7$ кг. Определить силы натяжения T_1 и T_2 нити по обе стороны блока.

149. К краю стола прикреплен блок. Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы. Один груз движется по поверхности стола, а другой — вдоль вертикали вниз. Определить коэффициент f трения между поверхностями груза и стола, если массы каждого груза и масса блока одинаковы и грузы движутся с ускорением $a = 5,6$ м/с². Проскальзыванием нити по блоку и силой трения, действующей на блок, пренебречь.

150. К концам легкой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок, подвешены грузы массами $m_1 = 0,2$ кг и $m_2 = 0,3$ кг. Во сколько раз отличаются силы, действующие на нить по обе стороны от блока, если масса блока $m = 0,4$ кг, а его ось движется вертикально вверх с ускорением $a = 2$ м/с²? Силами трения и проскальзывания нити по блоку пренебречь.

151. На скамье Жуковского сидит человек и держит на вытянутых руках гири массой $m = 5$ кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси скамьи $l = 70$ см. Скамья вращается с частотой $n_1 = 1$ с⁻¹. Как изменится частота вращения скамьи и какую работу A произведет человек, если он сожмет руки так, что расстояние от каждой гири до оси уменьшится до $l_2 = 20$ см? Момент инерции человека и скамьи (вместе) относительно оси $J = 2,5$ кг·м².

152. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руках стержень вертикально по оси скамьи. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 4$ рад/с. С какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться скамья с человеком, если повернуть стержень так, чтобы он занял горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи $J = 5$ кг·м². Длина стержня

$l=1,8$ м, масса $m=6$ кг. Считать, что центр масс стержня с человеком находится на оси платформы.

153. Платформа в виде диска диаметром $D=3$ м и массой $m_1=180$ кг может вращаться вокруг вертикальной оси. С какой угловой скоростью ω_1 будет вращаться эта платформа, если по ее краю пойдет человек массой $m_2=70$ кг со скоростью $v=1,8$ м/с относительно платформы?

154. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек. На какой угол φ повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в исходную (на платформе) точку? Масса платформы $m_1=280$ кг, масса человека $m_2=80$ кг.

155. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руке за ось велосипедное колесо, вращающееся вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_1=25$ рад/с. Ось колеса расположена вертикально и совпадает с осью скамьи Жуковского. С какой скоростью ω_2 станет вращаться скамья, если повернуть колесо вокруг горизонтальной оси на угол $\alpha=90^\circ$? Момент инерции человека и скамьи I равен $2,5$ кг·м², момент инерции колеса $J_0=0,5$ кг·м².

156. Однородный стержень длиной $l=1,0$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В другой конец абсолютно неупруго ударяет пуля массой $m=7$ г, летящая перпендикулярно стержню и его оси. Определить массу M стержня, если в результате попадания пули он отклонится на угол $\alpha=60^\circ$. Принять скорость пули $v=360$ м/с.

157. На краю платформы в виде диска, вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси с частотой $n_1=8$ мин⁻¹, стоит человек массой $m_1=70$ кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться с частотой $n_2=10$ мин⁻¹. Определить массу m_2 платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

158. На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром $D=0,8$ м и массой $m_1=6$ кг стоит человек массой $m_2=60$ кг. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий на него мяч массой $m=0,5$ кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии $r=0,4$ м от оси скамьи. Скорость мяча $v=5$ м/с.

159. Горизонтальная платформа массой $m_1=150$ кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через

центр платформы, с частотой $n=8 \text{ мин}^{-1}$. Человек массой $m_2=70 \text{ кг}$ стоит при этом на краю платформы. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу круглым, однородным диском, а человека — материальной точкой.

160. Однородный стержень длиной $l=1,0 \text{ м}$ и массой $M=0,7 \text{ кг}$ подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. В точку, отстоящую от оси на $\frac{2}{3}l$, абсолютно упруго ударяет пуля массой $m=5 \text{ кг}$, летящая перпендикулярно стержню и его оси. После удара стержень отклонился на угол $\alpha=60^\circ$. Определить скорость пули.

161. Определить напряженность G гравитационного поля на высоте $h=1000 \text{ км}$ над поверхностью Земли. Считать известными ускорение g свободного падения у поверхности Земли и ее радиус R .

162. Какая работа A будет совершена силами гравитационного поля при падении на Землю тела массой $m=2 \text{ кг}$: 1) с высоты $h=1000 \text{ км}$; 2) из бесконечности?

163. Из бесконечности на поверхность Земли падает метеорит массой $m=30 \text{ кг}$. Определить работу A , которая при этом будет совершена силами гравитационного поля Земли. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R считать известными.

164. С поверхности Земли вертикально вверх пущена ракета со скоростью $v=5 \text{ км/с}$. На какую высоту она поднимется?

165. По круговой орбите вокруг Земли обращается спутник с периодом $T=90 \text{ мин}$. Определить высоту спутника. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R считать известными.

166. На каком расстоянии от центра Земли находится точка, в которой напряженность суммарного гравитационного поля Земли и Луны равна нулю? Принять, что масса Земли в 81 раз больше массы Луны и что расстояние от центра Земли до центра Луны равно 60 радиусам Земли.

167. Спутник обращается вокруг Земли по круговой орбите на высоте $h=520 \text{ км}$. Определить период обращения спутника. Ускорение свободного падения g у поверхности Земли и ее радиус R считать известными.

168. Определить линейную и угловую скорости спутника Земли, обращающегося по круговой орбите на высоте $h=1000 \text{ км}$. Ускорение свободного падения g у по-

верхности Земли и ее радиус R считать известными.

169. Какова масса Земли, если известно, что Луна в течение года совершает 13 обращений вокруг Земли и расстояние от Земли до Луны равно $3,84 \cdot 10^8$ м?

170. Во сколько раз средняя плотность земного вещества отличается от средней плотности лунного? Принять, что радиус R_3 Земли в 390 раз больше радиуса R_L Луны и вес тела на Луне в 6 раз меньше веса тела на Земле.

171. На стержне длиной $l=30$ см укреплены два одинаковых грузика: один — в середине стержня, другой — на одном из его концов. Стержень с грузами колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определить приведенную длину L и период T простых гармонических колебаний данного физического маятника. Массой стержня пренебречь.

172. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, уравнения которых $x=A_1 \sin \omega_1 t$ и $y=A_2 \cos \omega_2 t$, где $A_1=8$ см, $A_2=4$ см, $\omega_1=\omega_2=2$ с⁻¹. Написать уравнение траектории и построить ее. Показать направление движения точки.

173. Точка совершает простые гармонические колебания, уравнение которых $x=A \sin \omega t$, где $A=5$ см, $\omega=2$ с⁻¹. В момент времени, когда точка обладала потенциальной энергией $\Pi=0,1$ мДж, на нее действовала возвращающая сила $F=5$ мН. Найти этот момент времени t .

174. Определить частоту ν простых гармонических колебаний диска радиусом $R=20$ см около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса диска перпендикулярно его плоскости.

175. Определить период T простых гармонических колебаний диска радиусом $R=40$ см около горизонтальной оси, проходящей через образующую диска.

✓ 176. Определить период T колебаний математического маятника, если его модуль максимального перемещения $\Delta r=18$ см и максимальная скорость $v_{\max}=16$ см/с.

✓ 177. Материальная точка совершает простые гармонические колебания так, что в начальный момент времени смещение $x_0=4$ см, а скорость $v_0=10$ см/с. Определить амплитуду A и начальную фазу φ_0 колебаний, если их период $T=2$ с.

178. Складываются два колебания одинакового направления и одинакового периода: $x_1=A_1 \sin \omega_1 t$ и $x_2=A_2 \sin \omega_2(t+\tau)$, где $A_1=A_2=3$ см, $\omega_1=\omega_2=\pi$ с⁻¹, $\tau=0,5$ с. Определить амплитуду A и начальную фазу φ_0

результатирующего колебания. Написать его уравнение. Построить векторную диаграмму для момента времени $t=0$.

179. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой $M=200$ г, прикрепленный к горизонтально расположенной легкой пружине с жесткостью $k=500$ Н/м. В шар попадает пуля массой $m=10$ г, летящая со скоростью $v=300$ м/с, и застревает в нем. Пренебрегая перемещением шара во время удара и сопротивлением воздуха, определить амплитуду A и период T колебаний шара.

180. Шарик массой $m=60$ г колеблется с периодом $T=2$ с. В начальный момент времени смещение шарика $x_0=4,0$ см и он обладает энергией $E=0,02$ Дж. Записать уравнение простого гармонического колебания шарика и закон изменения возвращающей силы с течением времени.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Основные формулы

Количество вещества* тела (системы)

$$\nu = N/N_A,$$

где N — число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т. п.), составляющих тело (систему); N_A — постоянная Авогадро ($N_A=6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$).

Молярная масса вещества

$$M = m/\nu,$$

где m — масса однородного тела (системы); ν — количество вещества этого тела.

Относительная молекулярная масса вещества

$$M_r = \sum n_i A_{r,i},$$

где n_i — число атомов i -го химического элемента, входящих в состав молекулы данного вещества; $A_{r,i}$ — относительная атомная масса этого элемента. Относительные

* Количество вещества — число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т. п.), содержащихся в теле или системе. Количество вещества выражается в молях. Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг.

результатирующего колебания. Написать его уравнение. Построить векторную диаграмму для момента времени $t=0$.

179. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой $M=200$ г, прикрепленный к горизонтально расположенной легкой пружине с жесткостью $k=500$ Н/м. В шар попадает пуля массой $m=10$ г, летящая со скоростью $v=300$ м/с, и застревает в нем. Пренебрегая перемещением шара во время удара и сопротивлением воздуха, определить амплитуду A и период T колебаний шара.

180. Шарик массой $m=60$ г колеблется с периодом $T=2$ с. В начальный момент времени смещение шарика $x_0=4,0$ см и он обладает энергией $E=0,02$ Дж. Записать уравнение простого гармонического колебания шарика и закон изменения возвращающей силы с течением времени.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕРМОДИНАМИКА

Основные формулы

Количество вещества* тела (системы)

$$\nu = N/N_A,$$

где N — число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т. п.), составляющих тело (систему); N_A — постоянная Авогадро ($N_A=6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹).

Молярная масса вещества

$$M = m/\nu,$$

где m — масса однородного тела (системы); ν — количество вещества этого тела.

Относительная молекулярная масса вещества

$$M_r = \sum n_i A_{r,i},$$

где n_i — число атомов i -го химического элемента, входящих в состав молекулы данного вещества; $A_{r,i}$ — относительная атомная масса этого элемента. Относительные

* Количество вещества — число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т. п.), содержащихся в теле или системе. Количество вещества выражается в молях. Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг.

атомные массы приводятся в таблице Д. И. Менделеева. См. также табл. 14 Приложения.

Связь молярной массы M с относительной молекулярной массой вещества

$$M = M_r k,$$

где $k = 10^{-3}$ кг/моль.

Количество вещества смеси газов

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n = N_1/N_A + N_2/N_A + \dots + N_n/N_A,$$

или

$$\nu = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \dots + \frac{m_n}{M_n},$$

где ν_i , N_i , m_i , M_i — соответственно количество вещества, число молекул, масса, молярная масса i -го компонента смеси.

Уравнение Менделеева — Клапейрона (уравнение состояния идеального газа)

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT,$$

где m — масса газа, M — молярная масса газа, R — молярная газовая постоянная, ν — количество вещества, T — термодинамическая температура.

Опытные газовые законы, являющиеся частными случаями уравнения Менделеева — Клапейрона для изопроцессов:

а) закон Бойля — Мариотта (изотермический процесс: $T = \text{const}$, $m = \text{const}$)

$$pV = \text{const},$$

или для двух состояний газа

$$p_1 V_1 = p_2 V_2;$$

б) закон Гей-Люссака (изобарный процесс: $p = \text{const}$, $m = \text{const}$)

$$\frac{V}{T} = \text{const},$$

или для двух состояний

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2};$$

в) закон Шарля (изохорный процесс: $V = \text{const}$, $m = \text{const}$)

$$\frac{p}{T} = \text{const},$$

или для двух состояний

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2};$$

г) объединенный газовый закон ($m = \text{const}$)

$$\frac{pV}{T} = \text{const}, \quad \text{или} \quad \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

где p_1, V_1, T_1 — давление, объем и температура газа в начальном состоянии; p_2, V_2, T_2 — те же величины в конечном состоянии.

Закон Дальтона, определяющий давление смеси газов,

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n,$$

где p_i — парциальные давления компонентов смеси; n — число компонентов смеси.

Парциальным давлением называется давление газа, которое производил бы этот газ, если бы только он один находился в сосуде, занятом смесью.

Молярная масса смеси газов

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n},$$

где m_i — масса i -го компонента смеси; $\nu_i = \frac{m_i}{M_i}$ — количество вещества i -го компонента смеси; n — число компонентов смеси.

Массовая доля i -го компонента смеси газа (в долях единицы или процентах)

$$\omega_i = \frac{m_i}{m},$$

где m — масса смеси.

Концентрация молекул

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_{\text{мр}}}{M},$$

где N — число молекул, содержащихся в данной системе; ρ — плотность вещества; V — объем системы. Формула справедлива не только для газов, но и для любого агрегатного состояния вещества.

Основное уравнение кинетической теории газов

$$p = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_n \rangle,$$

где $\langle \epsilon_n \rangle$ — средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы

$$\langle \epsilon_n \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

где k — постоянная Больцмана.

Средняя полная кинетическая энергия молекулы

$$\langle \epsilon_i \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i — число степеней свободы молекулы.

Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры

$$p = nkT.$$

Скорости молекул:

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_1}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \text{ — средняя квадратичная;}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \text{ — средняя арифметическая;}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_1}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \text{ — наиболее вероятная,}$$

где m_1 — масса одной молекулы.

Относительная скорость молекулы

$$u = v/v_B,$$

где v — скорость данной молекулы.

Удельные теплоемкости газа при постоянном объеме (c_V) и постоянном давлении (c_P)

$$c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{M}, \quad c_P = \frac{i+2}{2} \frac{R}{M}.$$

Связь между удельной c и молярной C теплоемкостями

$$c = C/M, \quad C = cM.$$

Уравнение Майера

$$C_P - C_V = R.$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \frac{m}{M} C_V T.$$

Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q — теплота, сообщенная системе (газу); ΔU — изменение внутренней энергии системы; A — работа, совершенная системой против внешних сил.

Работа расширения газа:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV \text{ в общем случае;}$$

$$A = p(V_2 - V_1) \text{ при изобарном процессе;}$$

$$A = \frac{m}{M_1} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \text{ при изотермическом процессе;}$$

$$A = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_V \Delta T, \text{ или } A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]$$

при адиабатном процессе, где $\gamma = c_p / c_v$ — показатель адиабаты.

Уравнения Пуассона, связывающие параметры идеального газа при адиабатном процессе:

$$\begin{aligned} pV^\gamma &= \text{const}, & \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1}, \\ \frac{p_2}{p_1} &= \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma, & \frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma - 1)/\gamma} \end{aligned}$$

Термический КПД цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 — теплота, полученная рабочим телом от теплоотдатчика; Q_2 — теплота, переданная рабочим телом теплоприемнику.

Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 и T_2 — термодинамические температуры теплоотдатчика и теплоприемника.

Коэффициент поверхностного натяжения

$$\alpha = \frac{F}{l}, \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{\Delta E}{\Delta S},$$

где F — сила поверхностного натяжения, действующая на контур l , ограничивающий поверхность жидкости; ΔE — изменение свободной энергии поверхностной пленки жидкости, связанное с изменением площади ΔS поверхности этой пленки.

Формула Лапласа, выражающая давление p , создаваемое сферической поверхностью жидкости:

$$p = \frac{2\alpha}{R},$$

где R — радиус сферической поверхности.

Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\alpha \cos\theta}{\rho g R},$$

где θ — краевой угол ($\theta = 0$ при полном смачивании стенок трубки жидкостью; $\theta = \pi$ при полном несмачивании); R — радиус канала трубки; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения.

Высота подъема жидкости между двумя близкими и параллельными друг другу плоскостями

$$h = \frac{2\alpha \cos\theta}{\rho g d},$$

где d — расстояние между плоскостями.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить для серной кислоты: 1) относительную молекулярную массу M_r ; 2) молярную массу M .

Решение. 1. Относительная молекулярная масса вещества равна сумме относительных атомных масс всех элементов, атомы которых входят в состав молекулы данного вещества, и определяется по формуле

$$M_r = \sum n_i A_{r,i}, \quad (1)$$

где n_i — число атомов i -го элемента, входящих в молекулу; $A_{r,i}$ — относительная атомная масса i -го элемента.

Химическая формула серной кислоты имеет вид H_2SO_4 . Так как в состав молекулы серной кислоты входят атомы трех элементов, то стоящая в правой части равен-

ства (1) сумма будет состоять из трех слагаемых и эта формула примет вид

$$M_r = n_1 A_{r,1} + n_2 A_{r,2} + n_3 A_{r,3}. \quad (2)$$

Из формулы серной кислоты далее следует, что $n_1=2$ (два атома водорода), $n_2=1$ (один атом серы) и $n_3=4$ (четыре атома кислорода).

Значения относительных атомных масс водорода, серы и кислорода найдем в таблице Д. И. Менделеева или в табл. 14 Приложения:

$$A_{r,1} = 1, \quad A_{r,2} = 32, \quad A_{r,3} = 16.$$

Подставив значения n_i и $A_{r,i}$ в формулу (2), найдем относительную молекулярную массу серной кислоты:

$$M_r = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 32 + 4 \cdot 16 = 98.$$

2. Зная относительную молекулярную массу M_r , найдем молярную массу серной кислоты по формуле

$$M = M_r k, \quad (3)$$

где $k=10^{-3}$ кг/моль.

Подставив в (3) значения величин, получим

$$M = 98 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Пример 2. Определить молярную массу M смеси кислорода массой $m_1=25$ г и азота массой $m_2=75$ г.

Решение. Молярная масса смеси M есть отношение массы смеси m к количеству вещества смеси ν :

$$M = m/\nu. \quad (1)$$

Масса смеси равна сумме масс компонентов смеси:

$$m = m_1 + m_2.$$

Количество вещества смеси равно сумме количеств вещества компонентов:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}.$$

Подставив в формулу (1) выражения m и ν , получим

$$M = \frac{m_1 + m_2}{m_1/M_1 + m_2/M_2}. \quad (2)$$

Применив метод, использованный в примере 1, найдем молярные массы кислорода M_1 и азота M_2 :

$$M_1 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}; \quad M_2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Подставим значения величин в (2) и произведем вычисления:

$$M = \frac{25 \cdot 10^{-3} + 75 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-3} / (32 \cdot 10^{-3}) + 75 \cdot 10^{-3} / (28 \cdot 10^{-3})} \text{ кг/моль} = \\ = 28,9 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Пример 3. Определить число N молекул, содержащихся в объеме $V=1$ мм³ воды, и массу m_1 молекулы воды. Считая условно, что молекулы воды имеют вид шариков, соприкасающихся друг с другом, найти диаметр d молекул.

Решение. Число N молекул, содержащихся в некоторой системе массой m , равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества ν :

$$N = \nu N_A.$$

Так как $\nu = m/M$, где M — молярная масса, то $N = \frac{m N_A}{M}$. Выразив в этой формуле массу как произведение плотности на объем V , получим

$$N = \rho V N_A / M.$$

Произведем вычисления, учитывая, что $M = 18 \times 10^{-3}$ кг/моль (см. табл. 14 Приложения):

$$N = \frac{10^3 \cdot 10^{-9}}{18 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ молекул} = 3,34 \cdot 10^{19} \text{ молекул.}$$

Массу m_1 одной молекулы можно найти по формуле

$$m_1 = M / N_A. \quad (1)$$

Подставив в (1) значения M и N_A , найдем массу молекулы воды:

$$m_1 = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} \text{ кг} = 2,99 \cdot 10^{-26} \text{ кг.}$$

Если молекулы воды плотно прилегают друг к другу, то можно считать, что на каждую молекулу приходится объем (кубическая ячейка) $V_1 = d^3$, где d — диаметр молекулы. Отсюда

$$d = \sqrt[3]{V_1}. \quad (2)$$

Объем V_1 найдем, разделив молярный объем V_m на число молекул в моле, т. е. на N_A :

$$V_1 = V_m / N_A. \quad (3)$$

Подставим выражение (3) в (2):

$$d = \sqrt[3]{V_m / N_A},$$

где $V_m = M / \rho$. Тогда

$$d = \sqrt[3]{M / (\rho N_A)}. \quad (4)$$

Проверим, дает ли правая часть выражения (4) единицу длины:

$$\left\{ \frac{[M]}{[\rho][N_A]} \right\}^{1/3} = \left\{ \frac{1 \text{ кг/моль}}{1 \text{ кг/м}^3 \cdot 1 \text{ моль}^{-1}} \right\}^{1/3} = 1 \text{ м}.$$

Произведем вычисления:

$$d = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 10^{-3}}{10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}} \text{ м} = 3,11 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 311 \text{ пм}.$$

Пример 4. В баллоне объемом 10 л находится гелий под давлением $p_1 = 1$ МПа и при температуре $T_1 = 300$ К. После того как из баллона было взято $m = 10$ г гелия, температура в баллоне понизилась до $T_2 = 290$ К. Определить давление p_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева—Клапейрона, применив его к конечному состоянию газа:

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2, \quad (1)$$

где m_2 — масса гелия в баллоне в конечном состоянии; M — молярная масса гелия; R — молярная газовая постоянная.

Из уравнения (1) выразим искомое давление:

$$p_2 = m_2 R T_2 / (M V). \quad (2)$$

Массу m_2 гелия выразим через массу m_1 , соответствующую начальному состоянию, и массу m гелия, взятого из баллона:

$$m_2 = m_1 - m. \quad (3)$$

Массу m_1 гелия найдем также из уравнения Менделеева—Клапейрона, применив его к начальному состоянию:

$$m_1 = M p_1 V / (R T_1). \quad (4)$$

Подставив выражение массы m_1 в (3), а затем выражение m_2 в (2), найдем

$$p_2 = \left(\frac{M p_1 V}{R T_1} - m \right) \frac{R T_2}{M V},$$

или

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{m}{M} \frac{RT_2}{V}. \quad (5)$$

Проверим, дает ли формула (5) единицу давления. Для этого в ее правую часть вместо символов величин подставим их единицы. В правой части формулы два слагаемых. Очевидно, что первое из них дает единицу давления, так как состоит из двух множителей, первый из которых (T_2/T_1) — безразмерный, а второй — давление. Проверим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{[m][R][T]}{[M][V]} &= \frac{1 \text{ кг}}{1 \text{ кг/моль}} \frac{1 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot 1 \text{ К}}{1 \text{ м}^3} = \frac{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ моль}}{1 \text{ кг}} \times \\ &\times \frac{1 \text{ Дж} \cdot 1 \text{ К}}{1 \text{ м}^3 \cdot 1 \text{ моль} \cdot 1 \text{ К}} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ м}^3} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{м}}{1 \text{ м}^3} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ м}^2} = 1 \text{ Па}. \end{aligned}$$

Паскаль является единицей давления. Произведем вычисления по формуле (5), учитывая, что $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль (см. табл. 14 Приложения):

$$\begin{aligned} p_2 &= \left(\frac{290}{300} \cdot 10^6 - \frac{10^{-2}}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{8,31}{10^{-2}} \cdot 290 \right) \text{ Па} = 3,64 \cdot 10^5 \text{ Па} = \\ &= 0,364 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Пример 5. Баллон содержит $m_1 = 80$ г кислорода и $m_2 = 320$ г аргона. Давление смеси $p = 1$ МПа, температура $T = 300$ К. Принимая данные газы за идеальные, определить объем V баллона.

Решение. По закону Дальтона, давление смеси равно сумме парциальных давлений газов, входящих в состав смеси. По уравнению Менделеева — Клапейрона, парциальные давления p_1 кислорода и p_2 аргона выражаются формулами

$$p_1 = m_1 RT / (M_1 V), \quad p_2 = m_2 RT / (M_2 V).$$

Следовательно, по закону Дальтона, давление смеси газов

$$p = p_1 + p_2, \text{ или } p = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \frac{RT}{V},$$

откуда объем баллона

$$V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \frac{RT}{p}. \quad (1)$$

Произведем вычисления, учитывая, что $M_1 = 32 \times 10^{-3}$ кг/моль, $M_2 = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль (см. табл. 14 Приложения):

$$V = \left(\frac{0,08}{32 \cdot 10^{-3}} + \frac{0,32}{40 \cdot 10^{-3}} \right) \frac{8,31 \cdot 300}{10^6} \text{ м}^3 = 0,0262 \text{ м}^3 = 26,2 \text{ л.}$$

Пример 6. Найти среднюю кинетическую энергию $\langle \epsilon_{\text{вр}} \rangle$ вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре $T = 350$ К, а также кинетическую энергию E_k вращательного движения всех молекул кислорода массой $m = 4$ г.

Решение. На каждую степень свободы молекулы газа приходится одинаковая средняя энергия $\langle \epsilon_i \rangle = \frac{1}{2} kT$, где k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура газа. Так как вращательному движению двухатомной молекулы (молекула кислорода — двухатомная) соответствуют две степени свободы, то средняя энергия вращательного движения молекулы кислорода

$$\langle \epsilon_{\text{вр}} \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} kT. \quad (1)$$

Кинетическая энергия вращательного движения всех молекул газа

$$E_k = \langle \epsilon_{\text{вр}} \rangle N. \quad (2)$$

Число всех молекул газа

$$N = N_A \nu, \quad (3)$$

где N_A — постоянная Авогадро; ν — количество вещества.

Если учесть, что количество вещества $\nu = m/M$, где m — масса газа; M — молярная масса газа, то формула (3) примет вид

$$N = N_A \frac{m}{M}.$$

Подставив выражение N в формулу (2), получаем

$$E_k = N_A m \langle \epsilon_{\text{вр}} \rangle / M. \quad (4)$$

Произведем вычисления, учитывая, что для кислорода $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль (см. табл. 14 Приложения):

$$\langle \epsilon_{\text{вр}} \rangle = kT = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 350 \text{ Дж} = 4,83 \cdot 10^{-21} \text{ Дж};$$

$$E_k = 6,02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 4,83 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 364 \text{ Дж.}$$

Пример 7. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме c_v и при постоянном давлении c_p неона и водорода, принимая эти газы за идеальные.

Решение. Удельные теплоемкости идеальных газов выражаются формулами

$$c_v = \frac{i}{2} \frac{R}{M}, \quad (1)$$

$$c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{M}, \quad (2)$$

где i — число степеней свободы молекулы газа; M — молярная масса. Для неона (одноатомный газ) $i=3$ и $M=20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль (см. табл. 14 Приложения).

Произведем вычисления:

$$c_v = \frac{3}{2} \frac{8,31}{20 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 6,24 \cdot 10^2 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)};$$

$$c_p = \frac{3+2}{2} \frac{8,31}{20 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 1,04 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Для водорода (двухатомный газ) $i=5$ и $M=2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Тогда

$$c_v = \frac{5}{2} \frac{8,31}{2 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 1,04 \cdot 10^4 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)};$$

$$c_p = \frac{5+2}{2} \frac{8,31}{2 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 1,46 \cdot 10^4 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Пример 8. Вычислить удельные теплоемкости c_v и c_p смеси неона и водорода, если массовые доли неона и водорода составляют $w_1=80\%$ и $w_2=20\%$. Значения удельных теплоемкостей газов взять из предыдущего примера.

Решение. Удельную теплоемкость c_v смеси при постоянном объеме найдем следующим образом. Теплоту, необходимую для нагревания смеси на ΔT , выразим двумя способами:

$$Q = c_v(m_1 + m_2)\Delta T, \quad (1)$$

$$Q = (c_{v,1}m_1 + c_{v,2}m_2)\Delta T, \quad (2)$$

где $c_{v,1}$ — удельная теплоемкость неона; $c_{v,2}$ — удельная теплоемкость водорода.

Приравняв правые части (1) и (2) и разделив обе

части полученного равенства на ΔT , получим $c_V(m_1 + m_2) = c_{V,1}m_1 + c_{V,2}m_2$. Отсюда

$$c_V = c_{V,1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{V,2} \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

или

$$c_V = c_{V,1}\omega_1 + c_{V,2}\omega_2,$$

где $\omega_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ и $\omega_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$.

Рассуждая так же, получим формулу для вычисления удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении:

$$c_p = c_{p,1}\omega_1 + c_{p,2}\omega_2.$$

Произведем вычисления:

$$c_V = (6,24 \cdot 10^2 \cdot 0,8 + 1,04 \cdot 10^4 \cdot 0,2) \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = \\ = 2,58 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 2,58 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)};$$

$$c_p = (1,04 \cdot 10^3 \cdot 0,8 + 1,46 \cdot 10^4 \cdot 0,2) \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = \\ = 3,75 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 3,75 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Пример 9. Кислород массой $m = 2$ кг занимает объем $V_1 = 1 \text{ м}^3$ и находится под давлением $p_1 = 0,2$ МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3 \text{ м}^3$, а затем при постоянном объеме до давления $p_3 = 0,5$ МПа. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную им работу A и теплоту Q , переданную газу. Построить график процесса.

Решение. Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = c_V m \Delta T = \frac{i}{2} \frac{R}{M} m \Delta T; \quad (1)$$

где i — число степеней свободы молекул газа (для двухатомных молекул кислорода $i = 5$); $\Delta T = T_3 - T_1$ — разность температур газа в конечном (третьем) и начальном состояниях.

Начальную и конечную температуру газа найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$, откуда

$$T = pVM/(mR).$$

Работа расширения газа при постоянном давлении выражается формулой

$$A_1 = \frac{m_1}{MR\Delta T}.$$

Работа газа, нагреваемого при постоянном объеме, равна нулю:

$$A_2 = 0.$$

Следовательно, полная работа, совершаемая газом,
 $A = A_1 + A_2 = A_1.$

Согласно первому началу термодинамики, теплота Q , переданная газу, равна сумме изменения внутренней энергии ΔU и работы A :

$$Q = \Delta U + A.$$

Произведем вычисления, учтя, что для кислорода $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль (см. табл. 14 Приложения):

$$T_1 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} \text{ К} = 385 \text{ К};$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} \text{ К} = 1155 \text{ К};$$

$$T_3 = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31} \text{ К} = 2887 \text{ К};$$

$$A_1 = \frac{8,31 \cdot 2 \cdot (1155 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж} = 0,400 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 0,4 \text{ МДж};$$

$$A = A_1 = 0,4 \text{ МДж};$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} \frac{8,31 \cdot 2 \cdot (2887 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} \text{ Дж} = 3,24 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 3,24 \text{ МДж};$$

$$Q = (3,24 + 0,4) \text{ МДж} = 3,64 \text{ МДж}.$$

График процесса приведен на рис. 7.

Пример 10. В цилиндре под поршнем находится водород массой $m = 0,02$ кг при температуре $T_1 = 300$ К.

Водород сначала расширился адиабатно, увеличив свой объем в $n_1 = 5$ раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в $n_2 = 5$ раз. Найти температуру в конце адиабатного расширения и работу, совершаемую газом при этих процессах. Изобразить процесс графически.

Решение. Температуры и объемы газа, совершающего адиабатный процесс, связаны между собой

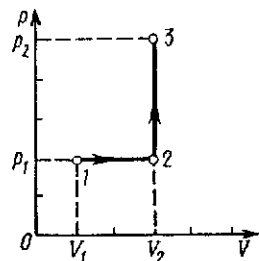


Рис. 7

соотношением

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}, \text{ или } \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n_1^{\gamma-1}},$$

где γ — отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме; $n_1 = V_2/V_1$.

Отсюда получаем следующее выражение для конечной температуры:

$$T_2 = T_1/n_1^{\gamma-1}.$$

Работа A_1 газа при адиабатном расширении может быть определена по формуле

$$A_1 = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R (T_1 - T_2),$$

где C_V — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. Работа A_2 газа при изотермическом процессе может быть выражена в виде

$$A_2 = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2}, \text{ или } A_2 = \frac{m}{M} R T_2 \ln \frac{1}{n_2},$$

где $n_2 = V_2/V_3$.

Произведем вычисления, учитывая, что для водорода как двухатомного газа $\gamma = 1,4$, $i = 5$ и $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$T_2 = \frac{300}{5^{1,4-1}} \text{ К} = \frac{300}{5^{0,4}} \text{ К}.$$

Так как $5^{0,4} = 1,91$ (находится логарифмированием), то

$$T_2 = \frac{300}{1,91} \text{ К} = 157 \text{ К};$$

$$A_1 = \frac{0,02 \cdot 5 \cdot 8,31}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2} (300 - 157) \text{ Дж} = 29,8 \text{ кДж};$$

$$A_2 = \frac{0,02}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 157 \ln \frac{1}{5} \text{ Дж} = -21 \text{ кДж}.$$

Знак минус показывает, что при сжатии работа газа совершается над газом внешними силами.

График процесса приведен на рис. 8.

Пример 11. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура теплодатчика $T_1 = 500$ К. Определить тер-

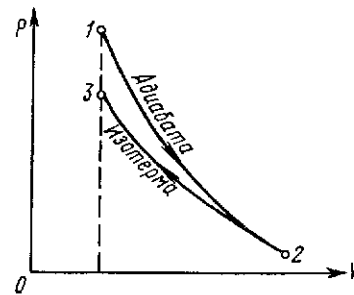


Рис. 8

мический КПД η цикла и температуру T_2 теплоприемника тепловой машины, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от теплоотдатчика, машина совершает работу $A = 350$ Дж.

Решение. Термический КПД тепловой машины показывает, какая доля теплоты, полученной от теплоотдатчика, превращается в механическую работу. Термический КПД выражается формулой

$$\eta = A/Q_1,$$

где Q_1 — теплота, полученная от теплоотдатчика; A — работа, совершенная рабочим телом тепловой машины.

Зная КПД цикла, можно по формуле $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$ определить температуру охладителя T_2 :

$$T_2 = T_1(1 - \eta).$$

Произведем вычисления:

$$\eta = 350/1000 = 0,35; \quad T_2 = 500(1 - 0,35) \text{ К} = 325 \text{ К}.$$

Пример 12. Найти добавочное давление внутри мыльного пузыря диаметром $d = 10$ см. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь?

Решение. Пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности: внешнюю и внутреннюю. Обе поверхности оказывают давление на воздух, заключенный внутри пузыря. Так как толщина пленки чрезвычайно мала, то диаметры обеих поверхностей практически одинаковы. Поэтому добавочное давление

$$p = 2 \frac{2\alpha}{r},$$

где r — радиус пузыря. Так как $r = d/2$, то

$$p = 8\alpha/d.$$

Работа, которую нужно совершить, чтобы, растягивая пленку, увеличить ее поверхность на ΔS , выражается формулой

$$A = \alpha \Delta S, \text{ или } A = \alpha(S - S_0).$$

В данном случае S — общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря; S_0 — общая площадь двух поверхностей плоской пленки, затягивавшей отверстие трубки до выдувания пузыря. Пренебрегая S_0 , получаем

$$A = \alpha S = 2\pi d^2 \alpha.$$

Произведем вычисления:

$$p = \frac{8 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{0,1} \text{ Па} = 3,2 \text{ Па};$$

$$A = 2 \cdot 3,14 \cdot (0,1)^2 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 2,5 \text{ мДж}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить массу m атома азота. [$2,33 \cdot 10^{-26}$ кг]
2. Плотность газа ρ при давлении $p = 96$ кПа и температуре $t = 0^\circ\text{C}$ равна $1,35$ г/л. Найти молярную массу M газа. [$32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль]
3. Определить давления p_1 и p_2 газа, содержащего $N = 10^9$ молекул и имеющего объем $V = 1$ см³, при температурах $T_1 = 3$ К и $T_2 = 1000$ К. [$41,4$ нПа; $13,8$ мкПа]
4. При температуре $t = 35^\circ\text{C}$ и давлении $p = 708$ кПа плотность некоторого газа $\rho = 12,2$ кг/м³. Определить относительную молекулярную массу M_r газа. [$44,1$]
5. Какой объем V занимает смесь азота массой $m_1 = 1$ кг и гелия массой $m_2 = 1$ кг при нормальных условиях? [$6,4$ м³]
6. В баллоне вместимостью $V = 15$ л находится смесь, содержащая $m_1 = 10$ г водорода, $m_2 = 54$ г водяного пара и $m_3 = 60$ г оксида углерода. Температура смеси $t = 27^\circ\text{C}$. Определить давление. [$1,69$ МПа]
7. Найти полную кинетическую энергию, а также кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы аммиака NH_3 при температуре $t = 27^\circ\text{C}$. [$1,24 \cdot 10^{-20}$ Дж; $6,2 \cdot 10^{-21}$ Дж]
8. Определить удельные теплоемкости c_v и c_p газобразного оксида углерода CO . [743 Дж/(кг·К); $1,04$ кДж/(кг·К)]
9. Смесь газа состоит из кислорода O_2 с массовой долей $w_1 = 85\%$ и озона O_3 с массовой долей $w_2 = 15\%$. Определить удельные теплоемкости c_v и c_p этой газовой смеси. [629 Дж/(кг·К); 877 Дж/(кг·К)]
10. Газовая смесь состоит из азота массой $m_1 = 3$ кг и водяного пара массой $m_2 = 1$ кг. Принимая эти газы за идеальные, определить удельные теплоемкости c_v и c_p газовой смеси. [902 Дж/(кг·К); $1,24$ кДж/(кг·К)]
11. Молекула газа состоит из двух атомов; разность удельных теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме равна 260 Дж/(кг·К). Найти молярную массу газа и его удельные теплоемкости c_v и c_p . [$32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; 650 Дж/(кг·К); 910 Дж/(кг·К)]

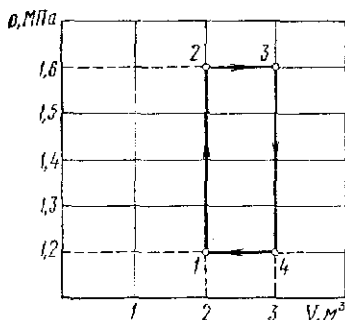


Рис. 9

12. Найти среднюю длину $\langle l \rangle$ свободного пробега молекулы водорода при $p = 133$ мПа и $t = -173^\circ\text{C}$. [4,4 см].

13. Один киломоль двухатомного идеального газа совершает замкнутый цикл, график которого изображен на рис. 9. Определить: 1) теплоту Q_1 , полученную от теплоотдатчика; 2) теплоту Q_2 , переданную теплоприемнику; 3) работу A , совершаемую газом за один цикл; 4) термический КПД η цикла. [7,61 МДж; 7,19 МДж; 0,4 МДж; 5,3%]

14. Водород занимает объем $V = 10$ м³ при давлении $p_1 = 0,1$ МПа. Его нагрели при постоянном объеме до давления $p_2 = 0,3$ МПа. Определить изменение ΔU внутренней энергии газа, работу A , совершенную им, и теплоту Q , сообщенную газу. [5 МДж; 0; 5 МДж]

15. Кислород при неизменном давлении $p = 80$ кПа нагревается. Его объем увеличивается от $V_1 = 1$ м³ до $V_2 = 3$ м³. Определить изменение ΔU внутренней энергии кислорода, работу A , совершенную им при расширении, а также теплоту Q , сообщенную газу. [400 кДж; 160 кДж; 560 кДж]

16. В цилиндре под поршнем находится азот, имеющий массу $m = 0,6$ кг и занимающий объем $V_1 = 1,2$ м³, при температуре $T_1 = 560$ К. В результате нагревания газ расширился и занял объем $V_2 = 4,2$ м³, причем температура осталась неизменной. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную им работу A и теплоту Q , сообщенную газу. [0; 126 кДж; 126 кДж]

17. В бензиновом автомобильном двигателе степень сжатия горючей смеси равна 6,2. Смесь засасывается в цилиндр при температуре $t_1 = 15^\circ\text{C}$. Найти температуру t_2 горючей смеси в конце такта сжатия. Горючую смесь рассматривать как двухатомный идеальный газ; процесс считать адиабатным. [324°C]

18. Газ совершает цикл Карно. Температура теплоотдатчика в три раза выше температуры теплоприемника. Теплоотдатчик передал газу $Q_1 = 41,9$ кДж теплоты. Какую работу совершил газ? [28,1 кДж]

19. Какую энергию надо затратить, чтобы выдуть

мыльный пузырь диаметром $d=12$ см? Каково будет добавочное давление внутри этого пузыря? [3,62 мДж; 2,66 Па]

20. На нижнем конце трубки диаметром $d=0,2$ см повисла шарообразная капля воды. Найти диаметр этой капли. [4,42 мм]

21. В сосуд с ртутью частично погружены две вертикально расположенные и параллельные друг другу стеклянные пластинки. Расстояние между пластинками $d=1$ мм. Определить разность Δh уровней ртути в сосуде и между пластинками, краевой угол принять равным 138° . [—5,57 мм]

Контрольная работа 2

Таблица вариантов для специальностей, учебными планами которых предусмотрено по курсу физики четыре и шесть контрольных работ

Вариант	Номера контрольных работ							
0	210	220	230	240	250	260	270	280
1	201	211	221	231	241	251	261	271
2	202	212	222	232	242	252	262	272
3	203	213	223	233	243	253	263	273
4	204	214	224	234	244	254	264	274
5	205	215	225	235	245	255	265	275
6	206	216	226	236	246	256	266	276
7	207	217	227	237	247	257	267	277
8	208	218	228	238	248	258	268	278
9	209	219	229	239	249	259	269	279

201. Определить количество вещества ν и число N молекул кислорода массой $m=0,5$ кг.

202. Сколько атомов содержится в ртути: 1) количеством вещества $\nu=0,2$ моль; 2) массой $m=1$ г?

203. Вода при температуре $t=4^\circ\text{C}$ занимает объем $V=1$ см³. Определить количество вещества ν и число N молекул воды.

204. Найти молярную массу M и массу m_m одной молекулы поваренной соли.

205. Определить массу m_m одной молекулы углекислого газа.

206. Определить концентрацию n молекул кислорода, находящегося в сосуде вместимостью $V=2$ л. Количество вещества ν кислорода равно 0,2 моль.

207. Определить количество вещества ν водорода,

заполняющего сосуд объемом $V=3$ л, если концентрация молекул газа в сосуде $n=2 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$.

208. В баллоне вместимостью $V=3$ л содержится кислород массой $m=10$ г. Определить концентрацию n молекул газа.

209. Определить относительную молекулярную массу M_r : 1) воды; 2) углекислого газа; 3) поваренной соли.

210. Определить количество вещества ν и число N молекул азота массой $m=0,2$ кг.

211. В цилиндр длиной $l=1,6$ м, заполненный воздухом при нормальном атмосферном давлении p_0 , начали медленно вдвигать поршень площадью основания $S=200 \text{ см}^2$. Определить силу F , действующую на поршень, если его остановить на расстоянии $l_1=10$ см от дна цилиндра.

212. В баллоне находится газ при температуре $T_1=400$ К. До какой температуры T_2 надо нагреть газ, чтобы его давление увеличилось в 1,5 раза?

213. Баллон вместимостью $V=20$ л заполнен азотом при температуре $T=400$ К. Когда часть газа израсходовали, давление в баллоне понизилось на $\Delta p=200$ кПа. Определить массу m израсходованного газа. Процесс считать изотермическим.

214. В баллоне вместимостью $V=15$ л находится аргон под давлением $p_1=600$ кПа и при температуре $T_1=300$ К. Когда из баллона было взято некоторое количество газа, давление в баллоне понизилось до $p_2=400$ кПа, а температура установилась $T_2=260$ К. Определить массу m аргона, взятого из баллона.

215. Два сосуда одинакового объема содержат кислород. В одном сосуде давление $p_1=2$ МПа и температура $T_1=800$ К, в другом $p_2=2,5$ МПа, $T_2=200$ К. Сосуды соединили трубкой и охладил до находящийся в них кислород до температуры $T=200$ К. Определить установившееся в сосудах давление p .

216. Вычислить плотность ρ азота, находящегося в баллоне под давлением $p=2$ МПа и имеющего температуру $T=400$ К.

217. Определить относительную молекулярную массу M_r газа, если при температуре $T=154$ К и давлении $p=2,8$ МПа он имеет плотность $\rho=6,1$ кг/м³.

218. Найти плотность ρ азота при температуре $T=400$ К и давлении $p=2$ МПа.

219. В сосуде вместимостью $V=40$ л находится кислород при температуре $T=300$ К. Когда часть газа из-

расходовали, давление в баллоне понизилось на $\Delta p = 100$ кПа. Определить массу m израсходованного кислорода. Процесс считать изотермическим.

220. Определить плотность ρ водяного пара, находящегося под давлением $p = 2,5$ кПа и имеющего температуру $T = 250$ К.

221. Определить внутреннюю энергию U водорода, а также среднюю кинетическую энергию $\langle \epsilon \rangle$ молекулы этого газа при температуре $T = 300$ К, если количество вещества ν этого газа равно $0,5$ моль.

222. Определить суммарную кинетическую энергию E_k поступательного движения всех молекул газа, находящегося в сосуде вместимостью $V = 3$ л под давлением $p = 540$ кПа.

223. Количество вещества гелия $\nu = 1,5$ моль, температура $T = 120$ К. Определить суммарную кинетическую энергию E_k поступательного движения всех молекул этого газа.

224. Молярная внутренняя энергия U_m некоторого двухатомного газа равна $6,02$ кДж/моль. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle \epsilon_{вр} \rangle$ вращательного движения одной молекулы этого газа. Газ считать идеальным.

225. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle \epsilon \rangle$ одной молекулы водяного пара при температуре $T = 500$ К.

226. Определить среднюю квадратичную скорость $\langle v_{кв} \rangle$ молекулы газа, заключенного в сосуд вместимостью $V = 2$ л под давлением $p = 200$ кПа. Масса газа $m = 0,3$ г.

227. Водород находится при температуре $T = 300$ К. Найти среднюю кинетическую энергию $\langle \epsilon_{вр} \rangle$ вращательного движения одной молекулы, а также суммарную кинетическую энергию E_k всех молекул этого газа; количество водорода $\nu = 0,5$ моль.

228. При какой температуре средняя кинетическая энергия $\langle \epsilon_n \rangle$ поступательного движения молекулы газа равна $4,14 \cdot 10^{-21}$ Дж?

229. В азоте взвешены мельчайшие пылинки, которые движутся так, как если бы они были очень крупными молекулами. Масса каждой пылинки равна $6 \cdot 10^{-10}$ г. Газ находится при температуре $T = 400$ К. Определить средние квадратичные скорости $\langle v_{кв} \rangle$, а также средние кинетические энергии $\langle \epsilon_n \rangle$ поступательного движения молекулы азота и пылинки.

230. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle \epsilon_n \rangle$

поступательного движения и $\langle \epsilon_{вр} \rangle$ вращательного движения молекулы азота при температуре $T=1$ кВ. Определить также полную кинетическую энергию E_k молекулы при тех же условиях.

231. Определить молярную массу M двухатомного газа и его удельные теплоемкости, если известно, что разность $c_p - c_v$ удельных теплоемкостей этого газа равна 260 Дж/(кг·К).

232. Найти удельные c_p и c_v , а также молярные C_p и C_v теплоемкости углекислого газа.

233. Определить показатель адиабаты γ идеального газа, который при температуре $T=350$ К и давлении $p=0,4$ МПа занимает объем $V=300$ л и имеет теплоемкость $C_v=857$ Дж/К.

234. В сосуде вместимостью $V=6$ л находится при нормальных условиях двухатомный газ. Определить теплоемкость C_v этого газа при постоянном объеме.

235. Определить относительную молекулярную массу M_r и молярную массу M газа, если разность его удельных теплоемкостей $c_p - c_v = 2,08$ кДж/(кг·К).

236. Определить молярные теплоемкости газа, если его удельные теплоемкости $c_v = 10,4$ кДж/(кг·К) и $c_p = 14,6$ кДж/(кг·К).

237. Найти удельные c_v и c_p и молярные C_v и C_p теплоемкости азота и гелия.

238. Вычислить удельные теплоемкости газа, зная, что его молярная масса $M=4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль и отношение теплоемкостей $C_p/C_v=1,67$.

239. Трехатомный газ под давлением $p=240$ кПа и температуре $t=20^\circ\text{C}$ занимает объем $V=10$ л. Определить теплоемкость C_p этого газа при постоянном давлении.

240. Одноатомный газ при нормальных условиях занимает объем $V=5$ л. Вычислить теплоемкость C_v этого газа при постоянном объеме.

241. Найти среднее число $\langle z \rangle$ столкновений за время $t=1$ с и длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекулы гелия, если газ находится под давлением $p=2$ кПа при температуре $T=200$ К.

242. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекулы азота в сосуде вместимостью $V=5$ л. Масса газа $m=0,5$ г.

243. Водород находится под давлением $p=20$ мкПа и имеет температуру $T=300$ К. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекулы такого газа.

244. При нормальных условиях длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекулы водорода равна 0,160 мкм. Определить диаметр d молекулы водорода.

245. Какова средняя арифметическая скорость $\langle v \rangle$ молекул кислорода при нормальных условиях, если известно, что средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекулы кислорода при этих условиях равна 100 нм?

246. Кислород находится под давлением $p = 133$ нПа при температуре $T = 200$ К. Вычислить среднее число $\langle z \rangle$ столкновений молекулы кислорода при этих условиях за время $\tau = 1$ с.

247. При каком давлении p средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул азота равна 1 м, если температура газа $t = 10^\circ\text{C}$?

248. В сосуде вместимостью $V = 5$ л находится водород массой $m = 0,5$ г. Определить среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекулы водорода в этом сосуде.

249. Средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекулы водорода при некоторых условиях равна 2 мм. Найти плотность ρ водорода при этих условиях.

250. В сферической колбе вместимостью $V = 3$ л, содержащей азот, создан вакуум с давлением $p = 80$ мкПа. Температура газа $T = 250$ К. Можно ли считать вакуум в колбе высоким?

Примечание. Вакуум считается высоким, если длина свободного пробега молекул в нем много больше линейных размеров сосуда.

251. Определить количество теплоты Q , которое надо сообщить кислороду объемом $V = 50$ л при его изохорном нагревании, чтобы давление газа повысилось на $\Delta p = 0,5$ МПа.

252. При изотермическом расширении азота при температуре $T = 280$ К объем его увеличился в два раза. Определить: 1) совершенную при расширении газа работу A ; 2) изменение ΔU внутренней энергии; 3) количество теплоты Q , полученное газом. Масса азота $m = 0,2$ кг.

253. При адиабатном сжатии давление воздуха было увеличено от $p_1 = 50$ кПа до $p_2 = 0,5$ МПа. Затем при неизменном объеме температура воздуха была понижена до первоначальной. Определить давление p_3 газа в конце процесса.

254. Кислород массой $m = 200$ г занимает объем $V_1 = 100$ л и находится под давлением $p_1 = 200$ кПа. При нагревании газ расширился при постоянном давлении до объема $V_2 = 300$ л, а затем его давление возросло до

$p_3 = 500$ кПа при неизменном объеме. Найти изменение внутренней энергии ΔU газа, совершенную газом работу A и теплоту Q , переданную газу. Построить график процесса.

255. Объем водорода при изотермическом расширении при температуре $T = 300$ К увеличился в $n = 3$ раза. Определить работу A , совершенную газом, и теплоту Q , полученную при этом. Масса m водорода равна 200 г.

256. Азот массой $m = 0,1$ кг был изобарно нагрет от температуры $T_1 = 200$ К до температуры $T_2 = 400$ К. Определить работу A , совершенную газом, полученную им теплоту Q и изменение ΔU внутренней энергии азота.

257. Во сколько раз увеличится объем водорода, содержащий количество вещества $\nu = 0,4$ моль при изотермическом расширении, если при этом газ получит количество теплоты $Q = 800$ Дж? Температура водорода $T = 300$ К.

258. Какая работа A совершается при изотермическом расширении водорода массой $m = 5$ г, взятого при температуре $T = 290$ К, если объем газа увеличивается в три раза?

259. Какая доля ω_1 количества теплоты Q , подводимого к идеальному двухатомному газу при изобарном процессе, расходуется на увеличение ΔU внутренней энергии газа и какая доля ω_2 — на работу A расширения? Рассмотреть три случая, если газ: 1) одноатомный; 2) двухатомный; 3) трехатомный.

260. Определить работу A , которую совершит азот, если ему при постоянном давлении сообщить количество теплоты $Q = 21$ кДж. Найти также изменение ΔU внутренней энергии газа.

261. Идеальный газ совершает цикл Карно при температурах теплоприемника $T_2 = 290$ К и теплоотдатчика $T_1 = 400$ К. Во сколько раз увеличится коэффициент полезного действия η цикла, если температура теплоотдатчика возрастет до $T'_1 = 600$ К?

262. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 теплоотдатчика в четыре раза ($n = 4$) больше температуры теплоприемника. Какую долю ω количества теплоты, полученного за один цикл от теплоотдатчика, газ отдаст теплоприемнику?

263. Определить работу A_2 изотермического сжатия газа, совершающего цикл Карно, КПД которого $\eta = 0,4$, если работа изотермического расширения равна $A_1 = 8$ Дж.

264. Газ, совершающий цикл Карно, отдал теплоприемнику теплоту $Q_2 = 14$ кДж. Определить температуру T_1 теплоотдатчика, если при температуре теплоприемника $T_2 = 280$ К работа цикла $A = 6$ кДж.

265. Газ, являясь рабочим веществом в цикле Карно, получил от теплоотдатчика теплоту $Q_1 = 4,38$ кДж и совершил работу $A = 2,4$ кДж. Определить температуру теплоотдатчика, если температура теплоприемника $T_2 = 273$ К.

266. Газ, совершающий цикл Карно, отдал теплоприемнику 67% теплоты, полученной от теплоотдатчика. Определить температуру T_2 теплоприемника, если температура теплоотдатчика $T_1 = 430$ К.

267. Во сколько раз увеличится коэффициент полезного действия η цикла Карно при повышении температуры теплоотдатчика от $T_1 = 380$ К до $T_1' = 560$ К? Температура теплоприемника $T_2 = 280$ К.

268. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Температура теплоотдатчика $T_1 = 500$ К, температура теплоприемника $T_2 = 250$ К. Определить термически КПД η цикла, а также работу A_1 рабочего вещества при изотермическом расширении, если при изотермическом сжатии совершена работа $A_2 = 70$ Дж.

269. Газ, совершающий цикл Карно, получает теплоту $Q_1 = 84$ кДж. Определить работу A газа, если температура T_1 теплоотдатчика в три раза выше температуры T_2 теплоприемника.

270. В цикле Карно газ получил от теплоотдатчика теплоту $Q_1 = 500$ Дж и совершил работу $A = 100$ Дж. Температура теплоотдатчика $T_1 = 400$ К. Определить температуру T_2 теплоприемника.

271. Найти массу m воды, вошедшей в стеклянную трубку с диаметром канала $d = 0,8$ мм, опущенную в воду на малую глубину. Считать смачивание полным.

272. Какую работу A надо совершить при выдувании мыльного пузыря, чтобы увеличить его объем от $V_1 = 8$ см³ до $V_2 = 16$ см³? Считать процесс изотермическим.

273. Какая энергия E выделится при слиянии двух капель ртути диаметром $d_1 = 0,8$ мм и $d_2 = 1,2$ мм в одну каплю?

274. Определить давление p внутри воздушного пузырька диаметром $d = 4$ мм, находящегося в воде у самой ее поверхности. Считать атмосферное давление нормальным.

275. Пространство между двумя стеклянными парал-

лельными пластинками с площадью поверхности $S = 100 \text{ см}^2$ каждая, расположенными на расстоянии $l = 20 \text{ мм}$ друг от друга, заполнено водой. Определить силу F , прижимающую пластинки друг к другу. Считать мениск вогнутым с диаметром d , равным расстоянию между пластинками.

276. Глицерин поднялся в капиллярной трубке диаметром канала $d = 1 \text{ мм}$ на высоту $h = 20 \text{ мм}$. Определить поверхностное натяжение α глицерина. Считать смачивание полным.

277. В воду опущена на очень малую глубину стеклянная трубка с диаметром канала $d = 1 \text{ мм}$. Определить массу m воды, вошедшей в трубку.

278. На сколько давление p воздуха внутри мыльного пузыря больше нормального атмосферного давления p_0 , если диаметр пузыря $d = 5 \text{ мм}$?

279. Воздушный пузырек диаметром $d = 2,2 \text{ мм}$ находится в воде у самой ее поверхности. Определить плотность ρ воздуха в пузырьке, если воздух над поверхностью воды находится при нормальных условиях.

280. Две капли ртути радиусом $r = 1,2 \text{ мм}$ каждая слились в одну большую каплю. Определить энергию E , которая выделится при этом слиянии. Считать процесс изотермическим.

3. ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК.

Основные формулы

Закон Кулона

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2},$$

где F — сила взаимодействия точечных зарядов Q_1 и Q_2 ; r — расстояние между зарядами; ϵ — диэлектрическая проницаемость; ϵ_0 — электрическая постоянная.

Напряженность электрического поля и потенциал

$$E = F/Q, \quad \varphi = \Pi/Q,$$

где Π — потенциальная энергия точечного положительного заряда Q , находящегося в данной точке поля (при условии, что потенциальная энергия заряда, удаленного в бесконечность, равна нулю).

Сила, действующая на точечный заряд, находящийся в электрическом поле, и потенциальная энергия этого заряда

$$F = QE, \quad \Pi = Q\varphi.$$

Напряженность и потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов (принцип суперпозиции электрических полей),

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i,$$

где E_i, φ_i — напряженность и потенциал в данной точке поля, создаваемого i -м зарядом.

Напряженность и потенциал поля, создаваемого точечным зарядом,

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r},$$

где r — расстояние от заряда Q до точки, в которой определяются напряженность и потенциал.

Напряженность и потенциал поля, создаваемого проводящей заряженной сферой радиусом R на расстоянии r от центра сферы:

$$a) \quad E = 0; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} \quad (\text{при } r < R);$$

$$б) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2}; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} \quad (\text{при } r = R);$$

$$в) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} \quad (\text{при } r > R),$$

где Q — заряд сферы.

Линейная плотность заряда

$$\tau = Q/l.$$

Поверхностная плотность заряда

$$\sigma = Q/S.$$

Напряженность и потенциал поля, создаваемого распределенными зарядами. Если заряд равномерно распределен вдоль линии с линейной плотностью τ , то на линии выделяется малый участок длиной dl с зарядом $dQ =$

$=\tau dl$. Такой заряд можно рассматривать как точечный и применять формулы

$$dE = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \frac{r}{r}; \quad d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon r},$$

где r — радиус-вектор, направленный от выделенного элемента dl к точке, в которой вычисляется напряженность.

Используя принцип суперпозиции электрических полей, находим интегрированием напряженность E и потенциал φ поля, создаваемого распределенным зарядом:

$$E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_l \frac{dl}{r^2} \frac{r}{r}; \quad \varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_l \frac{dl}{r}.$$

Интегрирование ведется вдоль всей длины l заряженной линии (см. примеры 5 и 8).

Напряженность поля, создаваемого бесконечной прямой равномерно заряженной линией или бесконечно длинным цилиндром,

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon r},$$

где r — расстояние от нити или оси цилиндра до точки, напряженность поля в которой определяется.

Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon}.$$

Связь потенциала с напряженностью:

а) $E = -\text{grad } \varphi$, или $E = -\left(i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$ в общем случае;

б) $E = (\varphi_1 - \varphi_2)/d$ в случае однородного поля;

в) $E = -\frac{d\varphi}{dr}$ в случае поля, обладающего центральной или осевой симметрией.

Электрический момент диполя

$$p = |Ql|,$$

где Q — заряд; l — плечо диполя (векторная величина, направленная от отрицательного заряда к положительному и численно равная расстоянию между зарядами).

Работа сил поля по перемещению заряда Q из точки поля с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2

$$A_{12} = Q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Електроємкост

$$C = Q/\varphi, \text{ или } C = Q/U,$$

где φ — потенциал проводника (при условии, что в бесконечности потенциал проводника принимается равным нулю); U — разность потенциалов пластин конденсатора.

Електроємкост плоского конденсатора

$$C = \epsilon_0 \epsilon S/d,$$

где S — площадь пластины (одной) конденсатора; d — расстояние между пластинами.

Електроємкост батареи конденсаторов:

а) $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$ при последовательном соединении;

б) $C = \sum_{i=1}^N C_i$ при параллельном соединении,

где N — число конденсаторов в батарее.

Энергия заряженного конденсатора:

$$W = QU/2, \quad W = CU^2/2, \quad W = Q^2/(2C).$$

Сила постоянного тока

$$I = Q/t,$$

где Q — заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за время t .

Плотность тока

$$j = I/S,$$

где S — площадь поперечного сечения проводника.

Связь плотности тока со средней скоростью $\langle v \rangle$ направленного движения заряженных частиц

$$j = Qn \langle v \rangle,$$

где Q — заряд частицы; n — концентрация заряженных частиц.

Закон Ома:

а) $I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}$ для участка цепи, не содержащего ЭДС, где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ — разность потенциалов (напряжение) на концах участка цепи; R — сопротивление участка;

б) $I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \mathcal{E}}{R}$ для участка цепи, содержащего

ЭДС, где \mathcal{E} — ЭДС источника тока; R — полное сопротивление участка (сумма внешних и внутренних сопротивлений);

в) $I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i}$ для замкнутой (полной) цепи, где R — внешнее сопротивление цепи; R_i — внутреннее сопротивление цепи.

Законы Кирхгофа:

а) $\sum I_i = 0$ — первый закон;

б) $\sum I_i R_i = \sum \mathcal{E}_i$ — второй закон,

где $\sum I_i$ — алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле; $\sum I_i R_i$ — алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления участков; $\sum \mathcal{E}_i$ — алгебраическая сумма ЭДС.

Сопротивление R и проводимость G проводника

$$R = \rho l / S, \quad G = \gamma S / l,$$

где ρ — удельное сопротивление; γ — удельная проводимость; l — длина проводника; S — площадь поперечного сечения проводника.

Сопротивление системы проводников:

а) $R = \sum R_i$ при последовательном соединении;

б) $\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$ при параллельном соединении, где R_i — сопротивление i -го проводника.

Работа тока:

$$A = IUt, \quad A = I^2 Rt, \quad A = U^2 t / R.$$

Первая формула справедлива для любого участка цепи, на концах которого поддерживается напряжение U , последние две — для участка, не содержащего ЭДС.

Мощность тока:

$$P = IU, \quad P = I^2 R, \quad P = U^2 / R.$$

Закон Джоуля—Ленца

$$Q = I^2 Rt.$$

Закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E},$$

где γ — удельная проводимость; \mathbf{E} — напряженность электрического поля; \mathbf{j} — плотность тока.

Связь удельной проводимости γ с подвижностью b заряженных частиц (ионов)

$$\gamma = Qn(b_+ + b_-),$$

где Q — заряд иона; n — концентрация ионов; b_+ и b_- — подвижности положительных и отрицательных ионов.

Примеры решения задач

Пример 1. Два точечных заряда $9Q$ и $-Q$ закреплены на расстоянии $l = 50$ см друг от друга. Третий заряд Q_1 может перемещаться только вдоль прямой, проходящей через заряды. Определить положение заряда Q_1 , при котором он будет находиться в равновесии. При каком знаке заряда Q_1 равновесие будет устойчивым?

Решение. Заряд Q_1 находится в равновесии в том случае, если геометрическая сумма сил, действующих на него, равна нулю. Это значит, что на заряд Q_1 должны действовать две силы, равные по модулю и противоположные по направлению. Рассмотрим, на каком из трех участков *I*, *II*, *III* (рис. 10) может быть выполнено это условие. Для определенности будем считать, что заряд Q_1 — положительный.

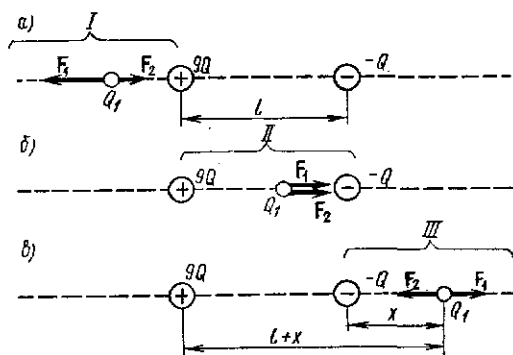


Рис. 10

На участке *I* (рис. 10, а) на заряд Q_1 будут действовать две противоположно направленные силы: F_1 и F_2 . Сила F_1 , действующая со стороны заряда $9Q$, в любой точке этого участка больше силы F_2 , действующей со стороны заряда $-Q$, так как больший заряд $9Q$ находится всегда ближе к заряду Q_1 , чем меньший

(по модулю) заряд — Q . Поэтому равновесие на этом участке невозможно.

На участке II (рис. 10, б) обе силы F_1 и F_2 направлены в одну сторону — к заряду — Q . Следовательно, и на втором участке равновесие невозможно.

На участке III (рис. 10, в) силы F_1 и F_2 направлены в противоположные стороны, так же как и на участке I, но в отличие от него меньший заряд — Q всегда находится ближе к заряду Q_1 , чем больший заряд $9Q$. Это значит, что можно найти такую точку на прямой, где силы F_1 и F_2 будут одинаковы по модулю, т. е.

$$F_1 = F_2. \quad (1)$$

Пусть x и $l+x$ — расстояние от меньшего и большего зарядов до заряда Q_1 . Выражая в равенстве (1) F_1 и F_2 в соответствии с законом Кулона, получим $9Q Q_1/(l+x)^2 = Q Q_1/x^2$, или $l+x = \pm 3x$, откуда

$$x_1 = +l/2, \quad x_2 = -l/4.$$

Корень x_2 не удовлетворяет физическому условию задачи (в этой точке силы F_1 и F_2 хотя и равны по модулю, но сонаправлены).

Определим знак заряда Q_1 , при котором равновесие будет устойчивым. Равновесие называется устойчивым, если при смещении заряда от положения равновесия возникают силы, возвращающие его в положение равновесия. Рассмотрим смещение заряда Q_1 в двух случаях: когда заряд положителен и отрицателен.

Если заряд Q_1 положителен, то при смещении его влево обе силы F_1 и F_2 возрастают. Так как сила F_1 возрастает медленнее, то результирующая сила, действующая на заряд Q_1 , будет направлена в ту же сторону, в которую смещен этот заряд, т. е. влево. Под действием этой силы заряд Q_1 будет удаляться от положения равновесия. То же происходит и при смещении заряда Q_1 вправо. Сила F_2 убывает быстрее, чем F_1 . Геометрическая сумма сил в этом случае направлена вправо. Заряд под действием этой силы также будет перемещаться вправо, т. е. удаляться от положения равновесия. Таким образом, в случае положительного заряда равновесие является неустойчивым.

Если заряд Q_1 отрицателен, то его смещение влево вызовет увеличение сил F_1 и F_2 , но сила F_1 возрастает медленнее, чем F_2 , т. е. $|F_2| > |F_1|$. Результирующая сила будет направлена вправо. Под ее действием заряд Q_1

возвращается к положению равновесия. При смещении Q_1 вправо сила F_2 убывает быстрее, чем F_1 , т. е. $|F_1| > |F_2|$, результирующая сила направлена влево и заряд Q_1 опять будет возвращаться к положению равновесия. При отрицательном заряде равновесие является устойчивым. Величина самого заряда Q_1 несущественна.

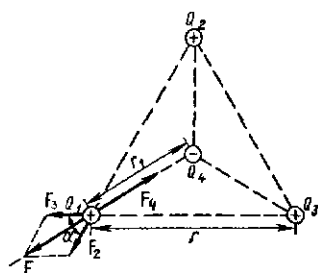


Рис. 11

Пример 2. Три точечных заряда $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$ нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд Q_4 нужно поместить в центре треугольника, чтобы указанная система зарядов находилась в равновесии?

Решение. Все три заряда, расположенные по вершинам треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы какой-нибудь один из трех зарядов, например Q_1 , находился в равновесии. Заряд Q_1 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил равна нулю (рис. 11):

$$F_2 + F_3 + F_4 = F + F_4 = 0, \quad (1)$$

где F_2, F_3, F_4 — силы, с которыми соответственно действуют на заряд Q_1 заряды Q_2, Q_3, Q_4 ; F — равнодействующая сил F_2 и F_3 .

Так как силы F и F_4 направлены по одной прямой в противоположные стороны, то векторное равенство (1) можно заменить скалярным: $F - F_4 = 0$, откуда $F_4 = F$. Выразив в последнем равенстве F через F_2 и F_3 и учитывая, что $F_3 = F_2$, получим

$$F_4 = F_2 \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}.$$

Применив закон Кулона и имея в виду, что $Q_2 = Q_3 = Q_1$, найдем

$$\frac{Q_1 Q_4}{4\pi \epsilon_0 r_1^2} = \frac{Q_1^2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)},$$

откуда

$$Q_4 = \frac{Q_1 r_1^2}{r^2} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}. \quad (2)$$

Из геометрических построений в равностороннем треугольнике следует, что

$$r_1 = \frac{r/2}{\cos(\alpha/2)} = \frac{r}{2\cos 30^\circ} = \frac{r}{\sqrt{3}}, \quad \cos \alpha = \cos 60^\circ = 1/2.$$

С учетом этого формула (2) примет вид

$$Q_4 = Q_1/\sqrt{3}.$$

Произведем вычисления:

$$Q_4 = 10^{-9}/\sqrt{3} \text{ Кл} = 5,77 \cdot 10^{-10} \text{ Кл} = 577 \text{ пКл}.$$

Следует отметить, что равновесие системы зарядов будет неустойчивым.

Пример 3. На тонком стержне длиной $l = 20$ см находится равномерно распределенный электрический заряд. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 10$ см от ближайшего конца находится точечный заряд $Q_1 = 40$ нКл, который взаимодействует со стержнем с силой $F = 6$ мкН. Определить линейную плотность τ заряда на стержне.

Решение. Сила взаимодействия F заряженного стержня с точечным зарядом Q_1 зависит от линейной плотности τ заряда на стержне. Зная эту зависимость, можно определить τ . При вычислении силы F следует иметь в виду, что заряд на стержне не является точечным, поэтому закон Кулона непосредственно применить нельзя. В этом случае можно поступить следующим образом. Выделим из стержня (рис. 12) малый участок dr с зарядом $dQ = \tau dr$. Этот заряд можно рассматривать как точечный. Тогда, согласно закону Кулона,

$$dF = \frac{Q_1 \tau dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Интегрируя это выражение в пределах от a до $a + l$, получаем

$$F = \frac{Q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{a+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1 \tau}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right) = \frac{Q_1 \tau l}{4\pi\epsilon_0 a(a+l)},$$

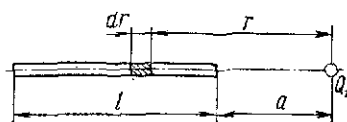


Рис. 12

откуда

$$\tau = \frac{4\pi\epsilon_0 a(a+l)F}{Q_1 l}.$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу ли-

нейной плотности электрического заряда. Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы:

$$\frac{[\epsilon_0][a][\alpha + l][F]}{[Q][l]} = \frac{1 \text{ Ф/м} \cdot 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ Н}}{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ м}} = \frac{1 \text{ Ф} \cdot 1 \text{ Н}}{1 \text{ Кл}} =$$

$$= \frac{1 \text{ Кл/В} \cdot 1 \text{ Н}}{1 \text{ Кл}} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ В}} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ Дж/Кл}} = \frac{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ Кл}}{1 \text{ Н} \cdot \text{м}} = 1 \text{ Кл/м}.$$

Найденная единица является единицей линейной плотности заряда.

Произведем вычисления:

$$\tau = \frac{0,1(0,1 + 0,2) \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 0,2} \text{ Кл/м} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м} = 2,5 \text{ нКл/м}.$$

Пример 4. Два точечных электрических заряда $Q_1 = 1 \text{ нКл}$ и $Q_2 = -2 \text{ нКл}$ находятся в воздухе на расстоянии $d = 10 \text{ см}$ друг от друга. Определить напряженность E и потенциал ϕ поля, создаваемого этими зарядами в точке A , удаленной от заряда Q_1 на расстояние $r_1 = 9 \text{ см}$ и от заряда Q_2 на $r_2 = 7 \text{ см}$.

Решение. Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность E электрического поля в искомой точке может быть найдена как геометрическая сумма напряженностей E_1 и E_2 полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $E = E_1 + E_2$. Напряженности электрического поля, создаваемого в воздухе ($\epsilon = 1$) зарядами Q_1 и Q_2 ,

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}, \quad (1)$$

$$E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}, \quad (2)$$

Вектор E_1 (рис. 13) направлен по силовой линии от заряда Q_1 , так как этот заряд положителен; вектор E_2 направлен также по силовой линии, но к заряду Q_2 , так как этот заряд отрицателен.

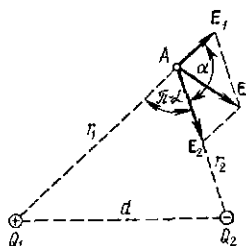


Рис. 13

Модуль вектора E найдем по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}, \quad (3)$$

где α — угол между векторами E_1 и E_2 , который может быть найден из треугольника со сторонами r_1 , r_2 и d : $\cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$. В данном случае во избежание громоздких записей удобно значение $\cos\alpha$ вычислить отдельно:

$$\cos\alpha = \frac{(0,1)^2 - (0,09)^2 - (0,07)^2}{2 \cdot 0,09 \cdot 0,07} = -0,238.$$

Подставляя выражение E_1 из (1) и E_2 из (2) в (3) и вынося общий множитель $1/(4\pi\epsilon_0)$ за знак корня, получаем

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} + 2 \frac{|Q_1| |Q_2|}{r_1^2 r_2^2} \cos\alpha}. \quad (4)$$

В соответствии с принципом суперпозиции электрических полей потенциал φ результирующего поля, создаваемого двумя зарядами Q_1 и Q_2 , равен алгебраической сумме потенциалов;

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (5)$$

Потенциал электрического поля, создаваемого в вакууме точечным зарядом Q на расстоянии r от него, выражается формулой

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (6)$$

В нашем случае согласно формулам (5) и (6) получим

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2},$$

или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right).$$

Произведем вычисления:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)} = \\ &= \sqrt{\frac{(10^{-9})^2}{(0,09)^4} + \frac{(2 \cdot 10^{-9})^2}{(0,07)^4} + 2 \frac{10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{(0,09)^2 \cdot (0,07)^2} (-0,238)} \text{ В/м} = \\ &= 3,58 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 3,58 \text{ кВ/м}; \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)} \left(\frac{10^{-9}}{0,09} + \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{0,07} \right) \text{ В} = -157 \text{ В}. \end{aligned}$$

Пример 5. По тонкому кольцу равномерно распределен заряд $Q = 40$ нКл с линейной плотностью $\tau = 50$ нКл/м. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого этим зарядом в точке A , лежащей на оси кольца и удаленной от его центра на расстояние, равное половине радиуса.

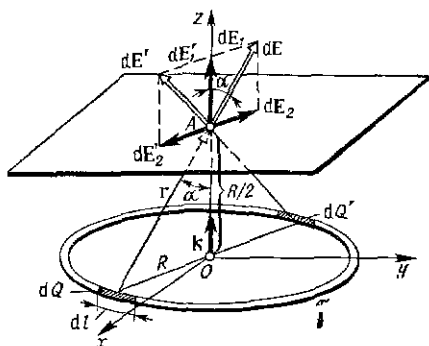


Рис. 14

Решение. Совместим координатную плоскость xOy с плоскостью кольца, а ось Oz — с осью кольца (рис. 14). На кольце выделим малый участок длиной dl . Так как заряд $dQ = \tau dl$, находящийся на этом участке, можно считать точечным, то напряженность dE электрического поля, создаваемого этим зарядом, может быть записана в виде

$$dE = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{r}{r'}$$

где r — радиус-вектор, направленный от элемента dl к точке A .

Разложим вектор dE на две составляющие: dE_1 , перпендикулярно плоскости кольца (сонаправленную с осью Oz), и dE_2 , параллельную плоскости кольца (плоскости xOy), т. е.

$$dE = dE_1 + dE_2.$$

Напряженность E электрического поля в точке A найдем интегрированием:

$$E = \int_L E_1 + \int_L E_2,$$

где интегрирование ведется по всем элементам заряженного кольца. Заметим, что для каждой пары зарядов dQ и dQ' ($dQ = dQ'$), расположенных симметрично относительно центра кольца, векторы dE_2 и dE_2' в точке A равны по модулю и противоположны по направлению: $dE_2 = -dE_2'$.

Поэтому векторная сумма (интеграл) $\int_L dE_2 = 0$. Составляющие dE_1 для всех элементов кольца сонаправлены

с осью Oz (единичным вектором \mathbf{k}), т. е. $dE_1 = k dE_1$.
Тогда

$$\mathbf{E} = k \int_L dE_1.$$

Так как $dE = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, $r = \sqrt{R^2 + (R/2)^2} = \sqrt{5}R/2$ и $\cos\alpha = (R/2)/r = 1/\sqrt{5}$, то

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\tau}{5R^2\sqrt{5}} dl = \frac{\tau dl}{5\sqrt{5}\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E} = k \int_0^{2\pi R} \frac{\tau dl}{5\sqrt{5}\pi\epsilon_0 R^2} = k \frac{2\tau}{5\sqrt{5}\epsilon_0 R}.$$

Из соотношения $Q = 2\pi R\tau$ определим радиус кольца:
 $R = Q/(2\pi\tau)$. Тогда

$$\mathbf{E} = k \frac{2\tau 2\pi\tau}{5\sqrt{5}\epsilon_0 Q} = k \frac{4\pi^2}{5\sqrt{5}\epsilon_0 Q}.$$

Модуль напряженности

$$|\mathbf{E}| = \frac{4\pi^2}{5\sqrt{5}\epsilon_0 Q}. \quad (1)$$

Проверим, дает ли правая часть полученного равенства единицу напряженности (В/м):

$$\frac{[\tau^2]}{[\epsilon_0][Q]} = \frac{(1 \text{ Кл/м})^2}{1 \text{ Ф/м} \cdot 1 \text{ Кл}} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ Ф} \cdot 1 \text{ м}} = 1 \text{ В/м}.$$

Выразим физические величины, входящие в формулу (1), в единицах СИ ($\tau = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл/м, $Q = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м) и произведем вычисления:

$$E = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-8})^2}{5\sqrt{5} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-8}} \text{ В/м} = 7,92 \text{ кВ/м}.$$

Пример 6. Две концентрические проводящие сферы радиусами $R_1 = 6$ см и $R_2 = 10$ см несут соответственно заряды $Q_1 = 1$ нКл и $Q_2 = -0,5$ нКл. Найти напряженность E поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см, $r_3 = 15$ см. Построить график $E(r)$.

Решение. Заметим, что точки, в которых требуется найти напряженности электрического поля, лежат в трех

областях (рис. 15): области I ($r_1 < R_1$), области II ($R_1 < r_2 < R_2$), области III ($r_3 > R_2$).

1. Для определения напряженности E_1 в области I проведем гауссову поверхность S_1 радиусом r_1 и воспользуемся теоремой Остроградского—Гаусса:

$$\oint_{S_1} E_n dS = 0$$

(так как суммарный заряд, находящийся внутри гауссовой поверхности, равен нулю). Из соображений симметрии $E_n = E_1 = \text{const}$. Следовательно, $E_1 \oint_{S_1} dS = 0$ и E_1 (напряженность поля в области I) во всех точках, удовлетворяющих условию $r_1 < R_1$, будет равна нулю.

2. В области II гауссову поверхность проведем радиусом r_2 . В этом случае*

$$\int_{S_2} E_n dS = Q_1 / \epsilon_0,$$

(так как внутри гауссовой поверхности находится только заряд Q_1).

Так как $E_n = E = \text{const}$, то E можно вынести за знак интеграла:

$$E \int_{S_2} dS = Q_1 / \epsilon_0, \text{ или } ES_2 = Q_1 / \epsilon_0.$$

Обозначив напряженность E для области II через E_2 , получим

$$E_2 = Q_1 / (\epsilon_0 S_2),$$

где $S_2 = 4\pi r_2^2$ — площадь гауссовой поверхности. Тогда

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}. \quad (1)$$

3. В области III гауссова поверхность проводится радиусом r_3 . Обозначим напряженность E области III через

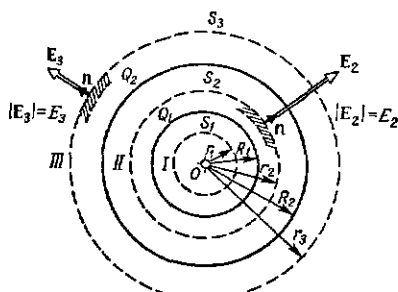


Рис. 15

* Диэлектрическую проницаемость в среды будем считать равной единице (вакуум).

E_3 и учтем, что в этом случае гауссова поверхность охватывает обе сферы и, следовательно, суммарный заряд будет равен $Q_1 + Q_2$. Тогда

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Заметив, что $Q_2 < 0$, это выражение можно переписать в виде

$$E_3 = \frac{Q_1 - |Q_2|}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2)$$

Убедимся в том, что правая часть равенств (1) и (2) дает единицу напряженности:

$$\frac{[Q]}{[\epsilon_0][r^2]} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ Ф/м} \cdot 1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ Ф} \cdot 1 \text{ м}} = 1 \text{ В/м}.$$

Выразим все величины в единицах СИ ($Q_1 = 10^{-9}$ Кл, $Q_2 = -0,5 \cdot 10^{-9}$ Кл, $r_1 = 0,09$ м, $r_2 = 0,15$ м, $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф) и произведем вычисления:

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{10^9}{(0,09)^2} \text{ В/м} = 1,11 \text{ кВ/м};$$

$$E_3 = 9 \cdot 10^9 \frac{(1 - 0,5)10^{-9}}{(0,15)^2} \text{ В/м} = 200 \text{ В/м}.$$

Построим график $E(r)$. В области I ($r < R_1$) $E = 0$. В области II ($R_1 \leq r < R_2$) $E_2(r)$ изменяется по закону $1/r^2$. В точке $r = R_1$ напряженность $E_2(R_1) = Q_1 / (4\pi\epsilon_0 R_1^2) = 2,5$ кВ/м. В точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 слева) $E_2(R_2) = Q_1 / (4\pi\epsilon_0 R_2^2) = 0,9$ кВ/м. В области III ($r > R_2$) $E_3(r)$ изменяется по закону $1/r^2$, причем в точке $r = R_2$ (r стремится к R_2 справа) $E_3(R_2) = (Q_1 - |Q_2|) / (4\pi\epsilon_0 R_2^2) = 0,45$ кВ/м. Таким образом, функция $E(r)$ в точках $r = R_1$ и $r = R_2$ терпит разрыв.

График зависимости E , представлен на рис. 16.

Пример 7. Точечный заряд $Q = 25$ нКл находится в поле, созданном прямым бесконечным цилиндром радиусом $R = 1$ см, равномерно заряженным с поверхностной плотностью $\sigma = 0,2$ нКл/см².

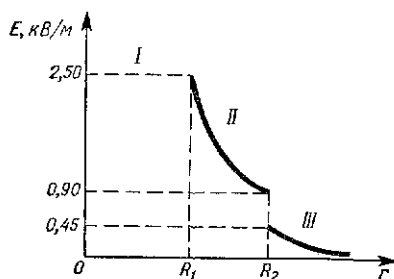


Рис. 16

Определить силу F , действующую на заряд, если его расстояние от оси цилиндра $r = 10$ см.

Решение. Значение силы F , действующей на точечный заряд Q , находящийся в поле, определяется по формуле

$$F = QE, \quad (1)$$

где E — напряженность поля.

Как известно, напряженность поля бесконечно длинного равномерно заряженного цилиндра

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (2)$$

где τ — линейная плотность заряда.

Выразим линейную плотность τ через поверхностную плотность σ . Для этого выделим элемент цилиндра длиной l и выразим находящийся на нем заряд Q двумя способами: $Q = \sigma S = \sigma 2\pi R l$, $Q = \tau l$. Приравняв правые части этих формул и сократив полученное равенство на l , найдем $\tau = 2\pi R \sigma$. С учетом этого формула (2) примет вид $E = R\sigma / (\epsilon_0 r)$. Подставив выражение E в (1), получим

$$F = \frac{Q\sigma R}{\epsilon_0 r}.$$

Произведем вычисления:

$$F = \frac{2,5 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10} \text{ Н} = 5,65 \cdot 10^{-4} \text{ Н} = 565 \text{ мкН}.$$

Сила F сонаправлена с напряженностью E , которая в силу симметрии (цилиндр бесконечно длинный) перпендикулярна поверхности цилиндра.

Пример 8. По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности, равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Определить напряженность E и потенциал ϕ электрического поля, создаваемого таким распределенным зарядом в точке, совпадающей с центром кривизны дуги. Длина l нити составляет $1/3$ длины окружности и равна 15 см.

Решение. Выберем оси координат так, чтобы начало координат совпадало с центром кривизны дуги, а ось Oy была бы симметрично расположена относительно концов дуги (рис. 17). На нити выделим элемент длины dl . Заряд $dQ = \tau dl$, находящийся на выделенном участке, можно считать точечным.

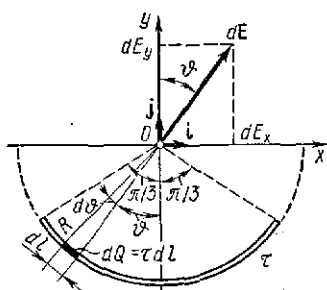


Рис. 17

Выразим вектор $d\mathbf{E}$ через проекции dE_x и dE_y на оси координат:

$$d\mathbf{E} = i dE_x + j dE_y,$$

где i и j — единичные векторы направлений (орты).

Напряженность \mathbf{E} найдем интегрированием:

$$\mathbf{E} = \int_l d\mathbf{E} = i \int_l dE_x + j \int_l dE_y.$$

Интегрирование ведется вдоль дуги длиной l . В силу симметрии $\int_l dE_x = 0$. Тогда

$$\mathbf{E} = j \int_l dE_y, \quad (1)$$

где $dE_y = dE \cos \psi = \tau dl \cos \psi / (4\pi\epsilon_0 r^2)$. Так как $r = R = \text{const}$, $dl = R d\theta$, то

$$dE_y = \frac{\tau R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \theta d\theta.$$

Подставим выражение dE_y в (1) и, приняв во внимание симметричное расположение дуги относительно оси Oy , пределы интегрирования возьмем от 0 до $\pi/3$, а результат удвоим:

$$\mathbf{E} = j \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^{\pi/3} \cos \theta d\theta = j \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R} \sqrt{3}/2.$$

Выразив радиус R через длину l нити ($3l = 2\pi R$), получим

$$\mathbf{E} = j \frac{\tau}{6\epsilon_0 l} \sqrt{3}. \quad (2)$$

Из этой формулы видно, что напряженность поля по направлению совпадает с осью Oy .

Найдем потенциал электрического поля в точке O . Сначала найдем потенциал $d\varphi$, создаваемый точечным зарядом dQ в точке O :

$$d\varphi = \tau dl / (4\pi\epsilon_0 r).$$

Заменим r на R и проведем интегрирование:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^l dl = \frac{\tau l}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Так как $l = 2\pi R/3$, то

$$\varphi = \tau / (6\epsilon_0). \quad (3)$$

Произведем вычисления по формулам (2) и (3):

$$E = \frac{10^{-8} \cdot 1,73}{6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,15} \text{ В/м} = 2,18 \text{ кВ/м},$$

$$\varphi = \frac{10^{-8}}{6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \text{ В} = 188 \text{ В}.$$

Пример 9. На тонком стержне длиной l равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Найти потенциал φ , созданный распределенным зарядом в точке A , расположенной на оси стержня и удаленной от его ближайшего конца на расстояние l .

Решение. В задаче рассматривается поле, создаваемое распределенным зарядом. В этом случае поступают следующим образом. На стержне выделяют малый участок длиной dx . Тогда на этом участке будет сосредоточен заряд $dQ = \tau dx$, который можно считать точечным. Потенциал $d\varphi$, создаваемый этим точечным зарядом в точке A (рис. 18), можно определить по формуле

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 x}.$$

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, потенциал электрического поля, создаваемого заряженным стержнем в точке A , найдем интегрирование этого выражения:

$$\varphi = \int_l^{2l} \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_l^{2l} \frac{dx}{x}.$$

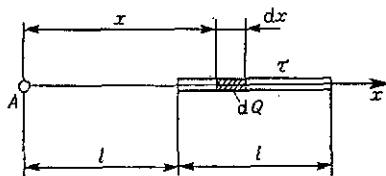


Рис. 18

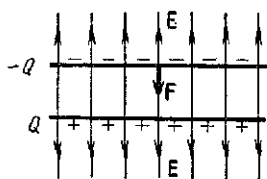


Рис. 19

Выполним интегрирование:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln x \Big|_1^2 = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln 2.$$

Подставим числовые значения физических величин в СИ ($\tau = 10 \cdot 10^{-9}$ Кл/м, $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф), и произведем вычисления:

$$\varphi = 9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 0,693 \text{ В} = 62,4 \text{ В}.$$

Пример 10. На пластинах плоского конденсатора находится заряд $Q = 10$ нКл. Площадь S каждой пластины конденсатора равна 100 см^2 , диэлектрик — воздух. Определить силу F , с которой притягиваются пластины. Поле между пластинами считать однородным.

Решение. Заряд Q одной пластины находится в поле напряженностью E , созданном зарядом другой пластины конденсатора. Следовательно, на первый заряд действует сила (рис. 19)

$$F = QE. \quad (1)$$

Так как

$$E = \sigma / (2\epsilon_0) = Q / (2\epsilon_0 S),$$

где σ — поверхностная плотность заряда пластины, то формула (1) примет вид

$$F = Q^2 / (2\epsilon_0 S).$$

Произведем вычисления:

$$F = \frac{10^{-16}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} \text{ Н} = 5,65 \cdot 10^{-4} \text{ Н} = 565 \text{ мкН}.$$

Пример 11. Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом $R = 1$ см, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau \approx 20$ нКл/м. Определить разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстоянии $a_1 = 0,5$ см и $a_2 = 2$ см от поверхности цилиндра, в средней его части.

Решение. Для определения разности потенциалов воспользуемся соотношением между напряженностью поля и изменением потенциала: $E = -\text{grad } \varphi$. Для поля с осевой симметрией, каким является поле цилиндра, это соотношение можно записать в виде

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}, \text{ или } d\varphi = -E dr.$$

Интегрируя это выражение, найдем разность потенциалов двух точек, отстоящих на расстояниях r_1 и r_2 от оси цилиндра:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{r_1}^{r_2} E dr. \quad (1)$$

Так как цилиндр длинный и точки взяты вблизи его средней части, то для выражения напряженности поля можно воспользоваться формулой напряженности поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром:

$$E = \tau / (2\pi\epsilon_0 r).$$

Подставив выражение E в (1), получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (2)$$

Произведем вычисления, учитывая, что величины r_1 и r_2 , входящие в формулу (2) в виде отношения, можно выразить в сантиметрах ($r_1 = R + a_1 = 1,5$ см, $r_2 = R + a_2 = 3$ см):

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= 2 \cdot 10^{-8} \cdot 1,8 \cdot 10^{10} \ln(3/1,5) = \\ &= 3,6 \cdot 10^2 \cdot 2,3 \ln 2 \text{ В} = 250 \text{ В}. \end{aligned}$$

Пример 12. Электрическое поле создается двумя зарядами $Q_1 = 4$ мкКл и $Q_2 = -2$ мкКл, находящимися на расстоянии $a = 0,1$ м друг от друга. Определить работу $A_{1,2}$ сил поля по перемещению заряда $q = 50$ нКл из точки 1 в точку 2 (рис. 20).

Решение. Для определения работы $A_{1,2}$ сил поля воспользуемся соотношением

$$A_{1,2} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Применяя принцип суперпозиции электрических полей, определим потенциалы φ_1 и φ_2 точек 1 и 2 поля:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a/2} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a/2} = \\ &= \frac{2(Q_1 + Q_2)}{4\pi\epsilon_0 a}; \end{aligned}$$

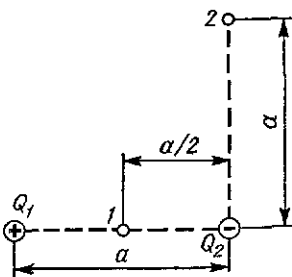


Рис. 20

$$\varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q_1/\sqrt{2} + Q_2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Тогда

$$A_{1,2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} [2(Q_1 + Q_2) - (Q_1/\sqrt{2} + Q_2)],$$

или

$$A_{1,2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[Q_i \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + Q_2 \right].$$

Проверим, дает ли правая часть равенства единицу работы (Дж):

$$\frac{[Q][Q_1]}{[\epsilon_0][a]} = \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Кл}}{1 \text{ Ф/м} \cdot 1 \text{ м}} = 1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1 \text{ Дж}.$$

Подставим числовые значения физических величин в СИ ($Q = 50 \cdot 10^{-9}$ Кл, $Q_1 = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл, $Q_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл, $a = 0,1$ м, $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф) и произведем вычисления:

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \frac{50 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9}{0,1} [4(2 - 1/\sqrt{2}) - 2] \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = \\ &= 14,3 \text{ мДж}. \end{aligned}$$

Пример 13. Определить ускоряющую разность потенциалов U , которую должен пройти в электрическом поле электрон, обладающий скоростью $v_1 = 10^6$ м/с, чтобы скорость его возросла в $n = 2$ раза.

Решение. Ускоряющую разность потенциалов можно найти, вычислив работу A сил электростатического поля. Эта работа определяется произведением элементарного заряда e на разность потенциалов U :

$$A = eU. \quad (1)$$

Работа сил электростатического поля в данном случае равна изменению кинетической энергии электрона:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (2)$$

где T_1 и T_2 — кинетическая энергия электрона до и после прохождения ускоряющего поля; m — масса электрона; v_1 и v_2 — начальная и конечная скорости его.

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим

$$eU = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mn^2v_1^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

где $n = v_2/v_1$.

Отсюда искомая разность потенциалов

$$U = \frac{mv_1^2(n^2 - 1)}{2e}.$$

Произведем вычисления:

$$U = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^6)^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} (2^2 - 1) \text{ В} = 8,53 \text{ В}.$$

Пример 14. С поверхности бесконечного равномерно заряженного ($\tau = 50 \text{ нКл/м}$) прямого цилиндра вылетает α -частица ($v_0 = 0$). Определить кинетическую энергию T_2 α -частицы (кэВ) в точке 2 на расстоянии $8R$ от поверхности цилиндра (рис. 21).

Решение. Так как силы электростатического поля являются консервативными, то для определения кинетической энергии α -частицы в точке 2 воспользуемся законом сохранения энергии, записанном в виде $E_1 = E_2$, где E_1 и E_2 — полные энергии α -частицы в точках 1 и 2.

Так как $E_1 = T_1 + U_1$ и $E_2 = T_2 + U_2$ (T_1 и T_2 — кинетические энергии α -частицы; U_1 и U_2 — потенциальные), то, учитывая, что $T_1 = 0$ ($v_0 = 0$), можно записать $U_1 = T_2 + U_2$, откуда $T_2 = U_1 - U_2 = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$ (Q — заряд α -частицы; φ_1 и φ_2 — потенциалы точек 1 и 2).

Используя решение примера 10, запишем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln 9.$$

Тогда

$$T_2 = \frac{Q\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln 9.$$

Проверка единиц аналогична проведенной в примере 11.

Выразим все величины в единицах СИ ($Q = 2 \cdot 1,60 \times 10^{-19} \text{ Кл}$, $\tau = 50 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}$, $1/(2\pi\epsilon_0) = 18 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$) и произведем вычисления

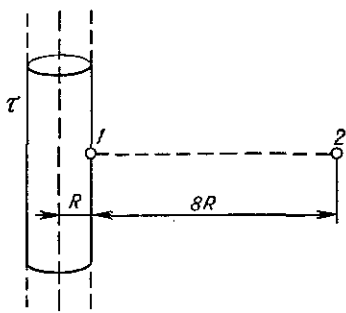


Рис. 21

($1/(1,60 \cdot 10^{-19})$ — коэффициент перевода из Дж в эВ):

$$T_2 = 18 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 50 \cdot 10^{-9}}{1,60 \cdot 10^{-19}} 2,20 \text{ эВ} = 3,96 \text{ кэВ}.$$

Пример 15. Конденсатор емкостью $C_1 = 3 \text{ мкФ}$ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 40 \text{ В}$. После отключения от источника тока конденсатор соединили параллельно с другим незаряженным конденсатором емкостью $C_2 = 5 \text{ мкФ}$. Какая энергия W' израсходуется на образование искры в момент присоединения второго конденсатора?

Решение. Энергия, израсходованная на образование искры,

$$W' = W_1 - W_2, \quad (1)$$

где W_1 — энергия, которой обладал первый конденсатор до присоединения к нему второго конденсатора; W_2 — энергия, которую имеет батарея, составленная из двух конденсаторов.

Энергия заряженного конденсатора определяется по формуле

$$W = \frac{1}{2} C U^2, \quad (2)$$

где C — емкость конденсатора или батареи конденсаторов.

Выразив в формуле (1) энергии W_1 и W_2 по формуле (2) и приняв во внимание, что общая емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей отдельных конденсаторов, получим

$$W' = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 - \frac{1}{2} (C_1 + C_2) U_2^2, \quad (3)$$

где U_2 — разность потенциалов на зажимах батареи конденсаторов.

Учитывая, что заряд после присоединения второго конденсатора остался прежним, выразим разность потенциалов U_2 следующим образом:

$$U_2 = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 U_1}{C_1 + C_2}. \quad (4)$$

Подставив выражение U_2 в (3), найдем

$$W' = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) C_1^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)^2},$$

или

$$W' = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_1^2.$$

Произведем вычисления:

$$W'' = \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}} \cdot 1600 \text{ Дж} = 1,5 \text{ мДж.}$$

Пример 16. Потенциометр сопротивлением $R = 100$ Ом подключен к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 150$ В и внутренним сопротивлением $R_i = 50$ Ом.

Определить: 1) показание вольтметра сопротивлением $R_V = 500$ Ом, соединенного с одной из клемм потенциометра и подвижным контактом, установленным посередине потенциометра; 2) разность потенциалов между теми же точками потенциометра при отключении вольтметра.

Решение. 1. Показание вольтметра, подключенного к точкам A и B (рис. 22), определим по формуле

$$U_1 = I_1 R_1,$$

где R_1 — сопротивление параллельно соединенных вольтметра и половины потенциометра; I_1 — суммарная сила тока в ветвях этого соединения (она равна силе тока в неразветвленной части цепи).

Силу тока I_1 найдем по закону Ома для полной цепи:

$$I_1 = \mathcal{E} / (R_e + R_i), \quad (1)$$

где R_e — сопротивление внешней цепи. Это сопротивление есть сумма двух сопротивлений:

$$R_e = R/2 + R_1. \quad (2)$$

Сопротивление R_1 найдем по формуле параллельного соединения проводников $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R/2}$, откуда

$$R_1 = \frac{RR_V}{R + 2R_V}.$$

Подставив в (1) выражение R_e по (2), найдем

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R/2 + R_1 + R_i}.$$

В данном случае решение задачи в общем виде было бы громоздким. Поэтому удобно вычисление величин провести раздельно:

$$R_1 = \frac{100 \cdot 500}{100 + 2 \cdot 500} \text{ Ом} = 45,5 \text{ Ом};$$

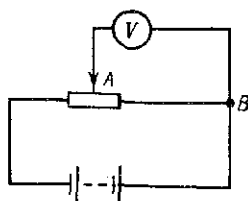


Рис. 22

$$I_1 = \frac{150}{50 + 45,5 + 50} \text{ A} = 1,03 \text{ A};$$

$$U_1 = 1,03 \cdot 45,5 \text{ В} = 46,9 \text{ В}.$$

2. Разность потенциалов между точками *A* и *B* при отключенном вольтметре равна произведению силы тока I_2 на половину сопротивления потенциометра:

$$U_2 = I_2 \cdot R/2, \quad (3)$$

где I_2 — сила тока в цепи при отключенном вольтметре. Ее определим по формуле

$$I_2 = \mathcal{E}/(R + R_i).$$

Подставив выражение I_2 в (3), найдем

$$U_2 = \mathcal{E}/(R + R_i) \cdot R/2.$$

Произведем вычисления:

$$U_2 = \frac{150}{100 + 50} \cdot \frac{100}{2} \text{ В} = 50 \text{ В}.$$

Пример 17. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 20$ Ом нарастает в течение времени $\Delta t = 2$ с по линейному закону от $I_0 = 0$ до $I = 6$ А (рис. 23). Определить теплоту Q_1 , выделившуюся в этом проводнике за первую секунду, и Q_2 — за вторую, а также найти отношение Q_2/Q_1 .

Решение. Закон Джоуля—Ленца в виде $Q = I^2 R t$ справедлив для постоянного тока ($I = \text{const}$). Если же сила тока в проводнике изменяется, то указанный закон справедлив для бесконечно малого интервала времени и записывается в виде

$$dQ = I^2 R dt. \quad (1)$$

Здесь сила тока I является некоторой функцией времени. В данном случае

$$I = kt, \quad (2)$$



Рис. 23

где k — коэффициент пропорциональности, характеризующий скорость изменения силы тока:

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{6}{2} \text{ А/с} = 3 \text{ А/с}.$$

С учетом (2) формула (1) примет вид

$$dQ = k^2 R t^2 dt. \quad (3)$$

Для определения теплоты, выделившейся за конечный интервал времени Δt , выражение (3) надо проинтегрировать в пределах от t_1 до t_2 :

$$Q = k^2 R \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R (t_2^3 - t_1^3).$$

Произведем вычисления:

$$Q_1 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 20(1 - 0) \text{ Дж} = 60 \text{ Дж};$$

$$Q_2 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 20(8 - 1) \text{ Дж} = 420 \text{ Дж}.$$

Следовательно,

$$Q_2/Q_1 = 420/60 = 7,$$

т. е. за вторую секунду выделится теплоты в семь раз больше, чем за первую.

Задачи для самостоятельного решения

1. Два шарика массой $m = 1$ г каждый подвешены на нитях, верхние концы которых соединены вместе. Длина каждой нити $l = 10$ см. Какие одинаковые заряды надо сообщить шарикам, чтобы нити разошлись на угол $\alpha = 60^\circ$? [79 нКл]

2. Расстояние между зарядами $Q_1 = 100$ нКл и $Q_2 = -50$ нКл равно $d = 10$ см. Определить силу F , действующую на заряд $Q_3 = 1$ мкКл, отстоящую на $r_1 = 12$ см от заряда Q_1 и на $r_2 = 10$ см от заряда Q_2 . [51 мН]

3. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью $\tau = 1,5$ нКл/см. На продолжении оси стержня на расстоянии $d = 12$ см от его конца находится точечный заряд $Q = 0,2$ мкКл. Определить силу взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда. [2,25 мН]

4. Длинная прямая тонкая проволока несет равномерно распределенный заряд. Вычислить линейную плотность τ заряда, если напряженность поля на расстоянии $r = 0,5$ м от проволоки против ее середины $E = 2$ В/см. [5,55 нКл/м]

5. С какой силой, приходящейся на единицу площади, отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно протяженные плоскости с одинаковой поверхностной плотностью заряда $\sigma = 2 \text{ мкКл/м}^2$? [0,23 Н/м²]

6. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы получить скорость $v = 8 \text{ Мм/с}$? [182 В]

7. Заряд равномерно распределен по бесконечной плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = 10 \text{ нКл/м}^2$. Определить разность потенциалов двух точек поля, одна из которых находится на плоскости, а другая удалена от нее на расстояние $a = 10 \text{ см}$. [56,6 В]

8. Электрон с начальной скоростью $v = 3 \text{ Мм/с}$ влетел в однородное электрическое поле напряженностью $E = 150 \text{ В/м}$. Вектор начальной скорости перпендикулярен линиям напряженности электрического поля. Определить: 1) силу, действующую на электрон; 2) ускорение, приобретаемое электроном; 3) скорость электрона через $t = 0,1 \text{ мкс}$. [24 аН; 26,4 Гм/с²; 4 Мм/с]

9. К батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 300 \text{ В}$ включены два плоских конденсатора емкостями $C_1 = 2 \text{ пФ}$ и $C_2 = 3 \text{ пФ}$. Определить заряд Q и напряжение U на пластинках конденсаторов при последовательном и параллельном соединениях. [1) 0,36 нКл; 180 В; 120 В; 2) 0,6 нКл; 0,9 кКл; 300 В]

10. Конденсатор емкостью $C_1 = 600 \text{ пФ}$ зарядили до разности потенциалов $U_1 = 1,5 \text{ кВ}$ и отключили от источника напряжения. Затем к нему параллельно присоединили незаряженный конденсатор емкостью $C_2 = 400 \text{ пФ}$. Определить энергию, израсходованную на образование искры, проскочившей при соединении конденсаторов. [0,27 мДж]

11. На концах медного провода длиной $l = 5 \text{ м}$ поддерживается напряжение $U = 1 \text{ В}$. Определить плотность тока j в проводе. [$1,18 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2$]

12. Резистор сопротивлением $R_1 = 5 \text{ Ом}$, вольтметр и источник тока соединены параллельно. Вольтметр показывает напряжение $U_1 = 10 \text{ В}$. Если заменить резистор другим с сопротивлением $R_2 = 12 \text{ Ом}$, то вольтметр покажет напряжение $U_2 = 12 \text{ В}$. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока. Током через вольтметр пренебречь. [14 В; 2 Ом]

13. Определить электрический заряд, прошедший через поперечное сечение провода сопротивлением $R = 3 \text{ Ом}$ при равномерном нарастании напряжения на концах про-

вода от $U_1=2$ В до $U_2=4$ В в течение $t=20$ с. [20 Кл]

14. Определить силу тока в цепи, состоящей из двух элементов с ЭДС $\mathcal{E}_1=1,6$ В и $\mathcal{E}_2=1,2$ В и внутренними сопротивлениями $R_1=0,6$ Ом и $R_2=0,4$ Ом, соединенных одноименными полюсами. [0,4 А]

15. Гальванический элемент дает на внешнее сопротивление $R_1=0,5$ Ом силу тока $I_1=0,2$ А. Если внешнее сопротивление заменить на $R_2=0,8$ Ом, то элемент дает силу тока $I_2=0,15$ А. Определить силу тока короткого замыкания. [0,45 А]

16. К источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}=12$ В присоединена нагрузка. Напряжение U на клеммах источника стало при этом равным 8 В. Определить КПД источника тока. [68%]

17. Внешняя цепь источника тока потребляет мощность $P=0,75$ Вт. Определить силу тока в цепи, если ЭДС источника тока $\mathcal{E}=2$ В и внутреннее сопротивление $R=1$ Ом. [0,5 и 1,5 А]

18. Какая наибольшая полезная мощность P_{\max} может быть получена от источника тока с ЭДС $\mathcal{E}=12$ В и внутренним сопротивлением $R=1$ Ом? [36 Вт]

19. При выключении источника тока сила тока в цепи убывает по закону $I=I_0e^{-\alpha t}$ ($I_0=10$ А, $\alpha=5 \cdot 10^2$ с⁻¹). Определить количество теплоты, которое выделится в резисторе сопротивлением $R=5$ Ом после выключения источника тока. [0,5 Дж]

Контрольная работа 3

Таблица вариантов для специальностей, учебными планами которых предусмотрено по курсу физики шесть контрольных работ

Вариант	Номера задач							
0	310	320	330	340	350	360	370	380
1	301	311	321	331	341	351	361	371
2	302	312	322	332	342	352	362	372
3	303	313	323	333	343	353	363	373
4	304	314	324	334	344	354	364	374
5	305	315	325	335	345	355	365	375
6	306	316	326	336	346	356	366	376
7	307	317	327	337	347	357	367	377
8	308	318	328	338	348	358	368	378
9	309	319	329	339	349	359	369	379

Таблица вариантов для специальностей, учебными планами которых предусмотрено по курсу физики четыре контрольных работы

Вариант	Номера задач							
0	310	340	350	370	420	440	460	470
1	301	331	341	361	411	431	451	461
2	302	332	342	362	412	432	452	462
3	303	333	343	363	413	433	453	463
4	304	334	344	364	414	434	454	464
5	305	335	345	365	415	435	455	465
6	306	336	346	366	416	436	456	466
7	307	337	347	367	417	437	457	467
8	308	338	348	368	418	438	458	468
9	309	339	349	369	419	439	459	369

301. Точечные заряды $Q_1 = 20$ мкКл, $Q_2 = -10$ мкКл находятся на расстоянии $d = 5$ см друг от друга. Определить напряженность поля в точке, удаленной на $r_1 = 3$ см от первого и на $r_2 = 4$ см от второго заряда. Определить также силу F , действующую в этой точке на точечный заряд $Q = 1$ мкКл.

302. Три одинаковых точечных заряда $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 2$ нКл находятся в вершинах равностороннего треугольника со сторонами $a = 10$ см. Определить модуль и направление силы F , действующей на один из зарядов со стороны двух других.

303. Два положительных точечных заряда Q и $9Q$ закреплены на расстоянии $d = 100$ см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд так, чтобы он находился в равновесии. Указать, какой знак должен иметь этот заряд для того, чтобы равновесие было устойчивым, если перемещения зарядов возможны только вдоль прямой, проходящей через закрепленные заряды.

304. Два одинаково заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол α . Шарик погружают в масло. Какова плотность ρ масла, если угол расхождения нитей при погружении в масло остается неизменным? Плотность материала шариков $\rho_0 = 1,5 \cdot 10^3$ кг/м³, диэлектрическая проницаемость масла $\epsilon = 2,2$.

305. Четыре одинаковых заряда $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 40$ нКл закреплены в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см. Найти силу F , действующую на один из этих зарядов со стороны трех остальных.

306. Точечные заряды $Q_1 = 30$ мкКл и $Q_2 = -20$ мкКл находятся на расстоянии $d = 20$ см друг от друга. Определить напряженность электрического поля E в точке, удаленной от первого заряда на расстояние $r_1 = 30$ см, а от второго — на $r_2 = 15$ см.

307. В вершинах правильного треугольника со стороной $a = 10$ см находятся заряды $Q_1 = 10$ мкКл, $Q_2 = 20$ мкКл и $Q_3 = 30$ мкКл. Определить силу F , действующую на заряд Q_1 со стороны двух других зарядов.

308. В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 8 \cdot 10^{-10}$ Кл. Какой отрицательный заряд Q нужно поместить в центре квадрата, чтобы сила взаимного отталкивания положительных зарядов была уравновешена силой притяжения отрицательного заряда?

309. На расстоянии $d = 20$ см находятся два точечных заряда: $Q_1 = -50$ нКл и $Q_2 = 100$ нКл. Определить силу F , действующую на заряд $Q_3 = -10$ нКл, удаленный от обоих зарядов на одинаковое расстояние, равное d .

310. Расстояние d между двумя точечными зарядами $Q_1 = 2$ нКл и $Q_2 = 4$ нКл равно 60 см. Определить точку, в которую нужно поместить третий заряд Q_3 так, чтобы система зарядов находилась в равновесии. Определить заряд Q_3 и его знак. Устойчивое или неустойчивое будет равновесие?

311. Тонкий стержень длиной $l = 20$ см несет равномерно распределенный заряд $\tau = 0,1$ мкКл. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке A , лежащей на оси стержня на расстоянии $a = 20$ см от его конца.

312. По тонкому полукольцу радиуса $R = 10$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке O , совпадающей с центром кольца.

313. Тонкое кольцо несет распределенный заряд $Q = 0,2$ мкКл. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке A , равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 20$ см. Радиус кольца $R = 10$ см.

314. Третий тонкого кольца радиуса $R = 10$ см несет распределенный заряд $Q = 50$ нКл. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке O , совпадающей с центром кольца.

315. Бесконечный тонкий стержень, ограниченный с одной стороны, несет равномерно распределенный заряд с линейной плотностью $\tau \approx 0,5$ мкКл/м. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке A , лежащей на оси стержня на расстоянии $a = 20$ см от его начала.

316. По тонкому кольцу радиусом $R = 20$ см равномерно распределен с линейной плотностью $\tau = 0,2$ мкКл/м заряд. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке A , находящейся на оси кольца на расстоянии $h = 2R$ от его центра.

317. По тонкому полукольцу равномерно распределен заряд $Q = 20$ мкКл с линейной плотностью $\tau = 0,1$ мкКл/м. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке O , совпадающей с центром кольца.

318. Четверть тонкого кольца радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд $Q = 0,05$ мкКл. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке O , совпадающей с центром кольца.

319. По тонкому кольцу равномерно распределен заряд $Q = 10$ нКл с линейной плотностью $\tau = 0,01$ мкКл/м. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке A , лежащей на оси кольца и удаленной от его центра на расстоянии, равное радиусу кольца.

320. Две трети тонкого кольца радиусом $R = 10$ см несут равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 0,2$ мкКл/м заряд. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке O , совпадающей с центром кольца.

321. На двух концентрических сферах радиусом R и $2R$ равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2 (рис. 24). Требуется: 1) используя теорему Остроградского—Гаусса, найти зависимость $E(r)$ напряженности электрического поля от расстояния для трех областей: I, II и III. Принять $\sigma_1 = 4\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$; 2) вычислить напряженность E в точке, удаленной от центра на расстояние r , и указать направление вектора E . Принять $\sigma = 30$ нКл/м², $r \approx 1,5R$; 3) построить график $E(r)$.

322. См. условие задачи 321. В п. 1 принять $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$. В п. 2 принять $\sigma = 0,1$ мкКл/м², $r = 3$.

323. См. условие задачи 321. В п. 1 принять $\sigma_1 = -4\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$. В п. 2 принять $\sigma = 50 \text{ нКл/м}^2$, $r = 1,5R$.

324. См. условие задачи 321. В п. 1 принять $\sigma_1 = -2\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$. В п. 2 принять $\sigma = 0,1 \text{ мкКл/м}^2$, $r = 3R$.

325. На двух бесконечных параллельных плоскостях равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2 (рис. 25). Требуется: 1) используя теорему Остроградского—Гаусса и принцип суперпозиции электрических полей, найти выражение $E(x)$ напряженности электрического поля в трех областях: I, II и III. Принять $\sigma_1 = 2\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$; 2) вычислить напряженность E поля в точке, расположенной слева от плоскостей, и указать направление вектора \mathbf{E} ; 3) построить график $E(x)$.

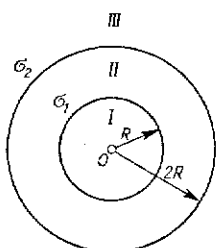


Рис. 24

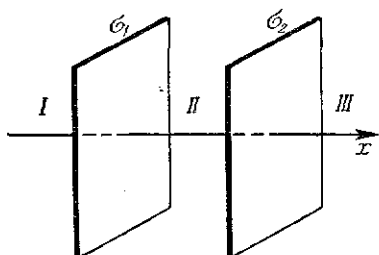


Рис. 25

326. См. условие задачи 325. В п. 1 принять $\sigma_1 = -4\sigma$, $\sigma_2 = 2\sigma$. В п. 2 принять $\sigma = 40 \text{ нКл/м}^2$ и точку расположить между плоскостями.

327. См. условие задачи 325. В п. 1 принять $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -2\sigma$. В п. 2 принять $\sigma = 20 \text{ нКл/м}^2$ и точку расположить справа от плоскостей.

328. На двух коаксиальных бесконечных цилиндрах радиусами R и $2R$ равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2 (рис. 26). Требуется: 1) используя теорему Остроградского—Гаусса: найти зависимость $E(r)$ напряженности электрического поля от расстояния для трех областей:

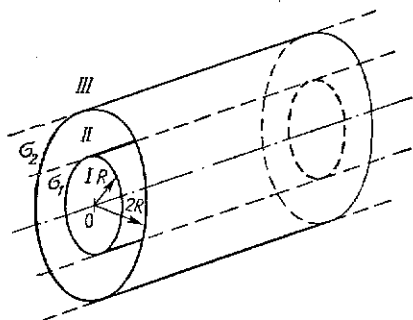


Рис. 26

I, II и III. Принять $\sigma_1 = -2\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$; 2) вычислить напряженность E в точке, удаленной от оси цилиндра на расстояние r , и указать направление вектора E . Принять $\sigma = 50 \text{ нКл/м}^2$, $r = 1,5R$; 3) построить график $E(r)$.

329. См. условие задачи 328. В п. 1 принять $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$. В п. 2 принять $\sigma = 60 \text{ нКл/м}^2$, $r = 3R$.

330. См. условие задачи 328. В п. 1 принять $\sigma_1 = -\sigma$, $\sigma_2 = 4\sigma$. В п. 2 принять $\sigma = 30 \text{ нКл/м}^2$, $r = 4R$.

331. Два точечных заряда $Q_1 = 6 \text{ нКл}$ и $Q_2 = 3 \text{ нКл}$ находятся на расстоянии $d = 60 \text{ см}$ друг от друга. Какую работу необходимо совершить внешним силам, чтобы уменьшить расстояние между зарядами вдвое?

332. Электрическое поле создано заряженным проводящим шаром, потенциал φ которого 300 В . Определить работу сил поля по перемещению заряда $Q = 0,2 \text{ мкКл}$ из точки 1 в точку 2 (рис. 27).

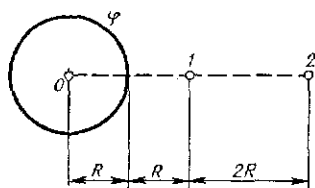


Рис. 27

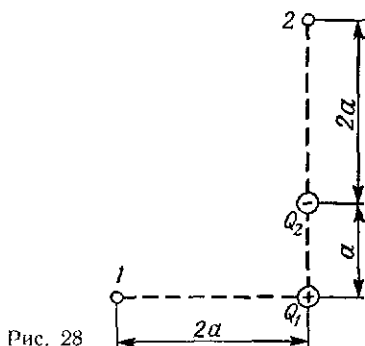


Рис. 28

333. Электрическое поле создано зарядами $Q_1 = 2 \text{ мкКл}$ и $Q_2 = -2 \text{ мкКл}$, находящимися на расстоянии $a = 10 \text{ см}$ друг от друга. Определить работу сил поля, совершаемую при перемещении заряда $Q = 0,5 \text{ мкКл}$ из точки 1 в точку 2 (рис. 28).

334. Две параллельные заряженные плоскости, поверхностные плотности заряда которых $\sigma_1 = 2 \text{ мкКл/м}^2$ и $\sigma_2 = -0,8 \text{ мкКл/м}^2$, находятся на расстоянии $d = 0,6 \text{ см}$ друг от друга. Определить разность потенциалов U между плоскостями.

335. Диполь с электрическим моментом $p = 100 \text{ пКл} \cdot \text{м}$ свободно установился в свободном электрическом поле напряженностью $E = 200 \text{ кВ/м}$. Определить работу внешних сил, которую необходимо совершить для поворота диполя на угол $\alpha = 180^\circ$.

336. Четыре одинаковых капли ртути, заряженных до потенциала $\varphi = 10$ В, сливаются в одну. Каков потенциал φ_1 образовавшейся капли?

337. Тонкий стержень согнут в кольцо радиусом $R = 10$ см. Он равномерно заряжен с линейной плотностью заряда $\tau = 800$ нКл/м. Определить потенциал φ в точке, расположенной на оси кольца на расстоянии $h = 10$ см от его центра.

338. Поле образовано точечным диполем с электрическим моментом $p = 200$ пКл·м. Определить разность потенциалов U двух точек поля, расположенных симметрично относительно диполя на его оси на расстоянии $r = 40$ см от центра диполя.

339. Электрическое поле образовано бесконечно длинной заряженной нитью, линейная плотность заряда которой $\tau = 20$ пКл/м. Определить разность потенциалов U двух точек поля, отстоящих от нити на расстоянии $r_1 = 8$ см и $r_2 = 12$ см.

340. Тонкая квадратная рамка равномерно заряжена с линейной плотностью заряда $\tau = 200$ пКл/м. Определить потенциал φ поля в точке пересечения диагоналей.

341. Пылинка массой $m = 200$ мкг, несущая на себе заряд $Q = 40$ нКл, влетела в электрическое поле в направлении силовых линий. После прохождения разности потенциалов $U = 200$ В пылинка имела скорость $v = 10$ м/с. Определить скорость v_0 пылинки до того, как она влетела в поле.

342. Электрон, обладавший кинетической энергией $T = 10$ эВ, влетел в однородное электрическое поле в направлении силовых линий поля. Какой скоростью будет обладать электрон, пройдя в этом поле разность потенциалов $U = 8$ В?

343. Найти отношение скоростей ионов Cu^{++} и K^+ , прошедших одинаковую разность потенциалов.

344. Электрон с энергией $T = 400$ эВ (в бесконечности) движется вдоль силовой линии по направлению к поверхности металлической заряженной сферы радиусом $R = 10$ см. Определить минимальное расстояние a , на которое приблизится электрон к поверхности сферы, если заряд ее $Q = -10$ нКл.

345. Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобрел скорость $v = 10^5$ м/с. Расстояние между пластинами $d = 8$ мм. Найти: 1) разность потенциалов U между пластинами; 2) поверхностную плотность заряда σ на пластинах.

346. Пылинка массой $m = 5$ нг, несущая на себе $N = 10$ электронов, прошла в вакууме ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ МВ. Какова кинетическая энергия T пылинки? Какую скорость v приобрела пылинка?

347. Какой минимальной скоростью v_{\min} должен обладать протон, чтобы он мог достигнуть поверхности заряженного до потенциала $\varphi = 400$ В металлического шара (рис. 29)?

348. В однородное электрическое поле напряженностью $E = 200$ В/м влетает (вдоль силовой линии) электрон со скоростью $v_0 = 2$ Мм/с. Определить расстояние l , которое пройдет электрон до точки, в которой его скорость будет равна половине начальной.

349. Электрическое поле создано бесконечной заряженной прямой линией с равномерно распределенным зарядом ($\tau = 10$ нКл/м). Определить кинетическую энергию T_2 электрона в точке 2, если в точке 1 его кинетическая энергия $T_1 = 200$ эВ (рис. 30).

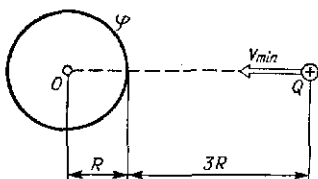


Рис. 29

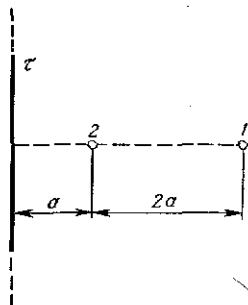


Рис. 30

350. Электрон движется вдоль силовой линии однородного электрического поля. В некоторой точке поля с потенциалом $\varphi_1 = 100$ В электрон имел скорость $V_1 = 6$ Мм/с. Определить потенциал φ_2 точки поля, дойдя до которой электрон потеряет половину своей скорости.

351. Конденсаторы емкостью $C_1 = 5$ мкФ и $C_2 = 10$ мкФ заряжены до напряжений $U_1 = 60$ В и $U_2 = 100$ В соответственно. Определить напряжение на обкладках конденсаторов после их соединения обкладками, имеющими одноименные заряды.

352. Конденсатор емкостью $C_1 = 10$ мкФ заряжен до напряжения $U = 10$ В. Определить заряд на обкладках этого конденсатора после того, как параллельно ему был

подключен другой, незаряженный, конденсатор емкостью $C_2 = 20$ мкФ.

353. Конденсаторы емкостями $C_1 = 2$ мкФ, $C_2 = 5$ мкФ и $C_3 = 10$ мкФ соединены последовательно и находятся под напряжением $U = 850$ В. Определить напряжение и заряд на каждом из конденсаторов.

354. Два конденсатора емкостями $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 5$ мкФ заряжены до напряжений $U_1 = 100$ В и $U_2 = 150$ В соответственно. Определить напряжение на обкладках конденсаторов после их соединения обкладками, имеющими разноименные заряды.

355. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора емкостью $C = 100$ пФ каждый соединены в батарею последовательно. Определить, на сколько изменится емкость C батареи, если пространство между пластинами одного из конденсаторов заполнить парафином.

356. Два конденсатора емкостями $C_1 = 5$ мкФ и $C_2 = 8$ мкФ соединены последовательно и присоединены к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 80$ В. Определить заряды Q_1 и Q_2 конденсаторов и разности потенциалов U_1 и U_2 между их обкладками.

357. Плоский конденсатор состоит из двух круглых пластин радиусом $R = 10$ см каждая. Расстояние между пластинами $d = 2$ мм. Конденсатор присоединен к источнику напряжения $U = 80$ В. Определить заряд Q и напряженность E поля конденсатора в двух случаях: а) диэлектрик — воздух; б) диэлектрик — стекло.

358. Два металлических шарика радиусами $R_1 = 5$ см и $R_2 = 10$ см имеют заряды $Q_1 = 40$ нКл и $Q_2 = -20$ нКл соответственно. Найти энергию W , которая выделится при разряде, если шары соединить проводником.

359. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектрика: стекла толщиной $d_1 = 0,2$ см и слоем парафина толщиной $d_2 = 0,3$ см. Разность потенциалов между обкладками $U = 300$ В. Определить напряженность E поля и падение потенциала в каждом из слоев.

360. Плоский конденсатор с площадью пластин $S = 200$ см² каждая заряжен до разности потенциалов $U = 2$ кВ. Расстояние между пластинами $d = 2$ см. Диэлектрик — стекло. Определить энергию W поля конденсатора и плотность энергии w поля.

361. Катушка и амперметр соединены последовательно и подключены к источнику тока. К клеммам катушки

присоединен вольтметр с сопротивлением $r = 4$ кОм. Амперметр показывает силу тока $I = 0,3$ А, вольтметр — напряжение $U = 120$ В. Определить сопротивление R катушки. Определить относительную погрешность ε , которая будет допущена при измерении сопротивления, если пренебречь силой тока, текущего через вольтметр.

362. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 80$ В, внутреннее сопротивление $R_i = 5$ Ом. Внешняя цепь потребляет мощность $P = 100$ Вт. Определить силу тока I в цепи, напряжение U , под которым находится внешняя цепь, и ее сопротивление R .

363. От батареи, ЭДС которой $\mathcal{E} = 600$ В, требуется передать энергию на расстояние $l = 1$ км. Потребляемая мощность $P = 5$ кВт. Найти минимальные потери мощности в сети, если диаметр медных подводных проводов $d = 0,5$ см.

364. При внешнем сопротивлении $R_1 = 8$ Ом сила тока в цепи $I_1 = 0,8$ А, при сопротивлении $R_2 = 15$ Ом сила тока $I_2 = 0,5$ А. Определить силу тока $I_{к.з}$ короткого замыкания источника ЭДС.

365. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 24$ В. Наибольшая сила тока, которую может дать батарея, $I_{\max} = 10$ А. Определить максимальную мощность P_{\max} , которая может выделяться во внешней цепи.

366. Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В заряжается от сети постоянного тока с напряжением $U = 15$ В. Определить напряжение на клеммах аккумулятора, если его внутреннее сопротивление $R_i = 10$ Ом.

367. От источника с напряжением $U = 800$ В необходимо передать потребителю мощность $P = 10$ кВт на некоторое расстояние. Какое наибольшее сопротивление может иметь линия передачи, чтобы потери энергии в ней не превышали 10% от передаваемой мощности?

368. При включении электромотора в сеть с напряжением $U = 220$ В он потребляет ток $I = 5$ А. Определить мощность, потребляемую мотором, и его КПД, если сопротивление R обмотки мотора равно 6 Ом.

369. В сеть с напряжением $U = 100$ В подключили катушку с сопротивлением $R_1 = 2$ кОм и вольтметр, соединенные последовательно. Показание вольтметра $U_1 = 80$ В. Когда катушку заменили другой, вольтметр показал $U_2 = 60$ В. Определить сопротивление R_2 другой катушки.

370. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 12$ В. При силе тока $I = 4$ А

КПД батареи $\eta = 0,6$. Определить внутреннее сопротивление R_i батареи.

371. За время $t = 20$ с при равномерно возрастающей силе тока от нуля до некоторого максимума в проводнике сопротивлением $R = 5$ Ом выделилось количество теплоты $Q = 4$ кДж. Определить скорость нарастания силы тока, если сопротивление проводника $R = 5$ Ом.

372. Сила тока в проводнике изменяется со временем по закону $I = I_0 e^{-\alpha t}$, где $I_0 = 20$ А, $\alpha = 10^2 \text{с}^{-1}$. Определить количество теплоты, выделившееся в проводнике за время $t = 10^{-2}$ с.

373. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 10$ Ом за время $t = 50$ с равномерно нарастает от $I_1 = 5$ А до $I_2 = 10$ А. Определить количество теплоты Q , выделившееся за это время в проводнике.

374. В проводнике за время $t = 10$ с при равномерном возрастании силы тока от $I_1 = 1$ А до $I_2 = 2$ А выделилось количество теплоты $Q = 5$ кДж. Найти сопротивление R проводника.

375. Сила тока в проводнике изменяется со временем по закону $I = I_0 \sin \omega t$. Найти заряд Q , проходящий через поперечное сечение проводника за время t , равное половине периода T , если начальная сила тока $I_0 = 10$ А, циклическая частота $\omega = 50 \text{лс}^{-1}$.

376. За время $t = 10$ с при равномерно возрастающей силе тока от нуля до некоторого максимума в проводнике выделилось количество теплоты $Q = 40$ кДж. Определить среднюю силу тока $\langle I \rangle$ в проводнике, если его сопротивление $R = 25$ Ом.

377. За время $t = 8$ с при равномерно возрастающей силе тока в проводнике сопротивлением $R = 8$ Ом выделилось количество теплоты $Q = 500$ Дж. Определить заряд q , проходящий в проводнике, если сила тока в начальный момент времени равна нулю.

378. Определить количество теплоты Q , выделившееся за время $t = 10$ с в проводнике сопротивлением $R = 10$ Ом, если сила тока в нем, равномерно уменьшаясь, изменилась от $I_1 = 10$ А до $I_2 = 0$.

379. Сила тока в цепи изменяется по закону $I = I_0 \sin \omega t$. Определить количество теплоты, которое выделится в проводнике сопротивлением $R = 10$ Ом за время, равное четверти периода (от $t_1 = 0$ до $t_2 = T/4$, где $T = 10$ с).

380. Сила тока в цепи изменяется со временем по закону $I = I_0 e^{-\alpha t}$. Определить количество теплоты, кото-

рое выделится в проводнике сопротивлением $R = 20$ Ом за время, в течение которого ток уменьшится в e раз. Коэффициент α принять равным $2 \cdot 10^{-2} \text{с}^{-1}$.

4. ЭЛЕКТРОМАГНИТИЗМ

Основные формулы

Связь магнитной индукции \mathbf{B} с напряженностью \mathbf{H} магнитного поля

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H},$$

где μ — магнитная проницаемость изотропной среды; μ_0 — магнитная постоянная. В вакууме $\mu = 1$, и тогда магнитная индукция в вакууме

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

Закон Био—Савара—Лапласа

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} [d\mathbf{l}r] \frac{I}{r^3} \text{ или } d\mathbf{B} = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} d\mathbf{l},$$

где $d\mathbf{B}$ — магнитная индукция поля, создаваемого элементом провода длиной $d\mathbf{l}$ с током I ; \mathbf{r} — радиус-вектор, направленный от элемента проводника к точке, в которой определяется магнитная индукция; α — угол между радиусом-вектором и направлением тока в элементе провода.

Магнитная индукция в центре кругового тока

$$B = \frac{\mu \mu_0 I}{2R},$$

где R — радиус кругового витка.

Магнитная индукция на оси кругового тока

$$B = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + h^2)^{3/2}},$$

где h — расстояние от центра витка до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция поля прямого тока

$$B = \mu \mu_0 I / (2\pi r_0),$$

где r_0 — расстояние от оси провода до точки, в которой определяется магнитная индукция.

Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком провода с током (см. рис. 31, a и пример 1),

$$B = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Обозначения ясны из рисунка. Направление вектора магнитной индукции \mathbf{B} обозначено точкой — это значит, что \mathbf{B} направлен перпендикулярно плоскости чертежа к нам.

При симметричном расположении концов провода относительно точки, в которой определяется магнитная индукция (рис. 31, б), $-\cos\alpha_2 = \cos\alpha_1 = \cos\alpha$, тогда

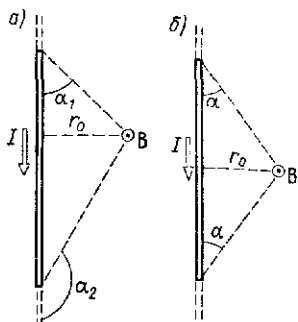


Рис. 31

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \cos\alpha.$$

Магнитная индукция поля соленоида

$$B = \mu_0 n I,$$

где n — отношение числа витков соленоида к его длине.

Сила, действующая на провод с током в магнитном поле (закон Ампера),

$$\mathbf{F} = I[\mathbf{lB}], \text{ или } F = IBl\sin\alpha,$$

где l — длина провода; α — угол между направлением тока в проводе и вектором магнитной индукции \mathbf{B} . Это выражение справедливо для однородного магнитного поля и прямого отрезка провода. Если поле неоднородно и провод не является прямым, то закон Ампера можно применять к каждому элементу провода в отдельности:

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{lB}].$$

Магнитный момент плоского контура с током

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{n}IS,$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали (положительной) к плоскости контура; I — сила тока, протекающего по контуру; S — площадь контура.

Механический (вращательный) момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m\mathbf{B}], \text{ или } M = p_m B \sin\alpha,$$

где α — угол между векторами \mathbf{p}_m и \mathbf{B} .

Потенциальная энергия (механическая)* контура с током в магнитном поле

$$\Pi_{\text{мех}} = - p_m \mathbf{B}, \text{ или } \Pi_{\text{мех}} = - p_m B \cos \alpha.$$

Отношение магнитного момента p_m к механическому L (моменту импульса) заряженной частицы, движущейся по круглой орбите,

$$\frac{p_m}{L} = \frac{1}{2} \frac{Q}{m},$$

где Q — заряд частицы; m — масса частицы.

Сила Лоренца**

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{v}\mathbf{B}], \text{ или } F = QvB \sin \alpha,$$

где \mathbf{v} — скорость заряженной частицы; α — угол между векторами \mathbf{v} и \mathbf{B} .

Магнитный поток:

а) в случае однородного магнитного поля и плоской поверхности

$$\Phi = B S \cos \alpha \text{ или } \Phi = B_n S,$$

где S — площадь контура; α — угол между нормалью к плоскости контура и вектором магнитной индукции:

б) в случае неоднородного поля и произвольной поверхности

$$\Phi = \int_S B_n dS$$

(интегрирование ведется по всей поверхности).

Потокоцепление (полный поток)

$$\Psi = N\Phi.$$

Эта формула верна для соленоида и тороида с равномерной намоткой плотно прилегающих друг к другу N витков.

Работа по перемещению замкнутого контура в магнитном поле

$$A = I\Delta\Phi.$$

* Часть полной потенциальной энергии, которая обусловлена существованием механического (вращательного) момента (см.: Савельев И. В. Курс общей физики. М., 1978. Т. 2. С. 129).

** Если частица находится одновременно в электрическом и магнитном полях, то под силой Лоренца понимают выражение

$$\mathbf{F} = QE + Q[\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt}.$$

Разность потенциалов на концах провода, движущегося со скоростью v в магнитном поле,

$$U = Blv \sin \alpha,$$

где l — длина провода; α — угол между векторами v и B .

Заряд, протекающий по замкнутому контуру при изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур,

$$Q = \Delta\Phi/R, \text{ или } Q = N\Delta\Phi/R = \Delta\Psi/R,$$

где R — сопротивление контура.

Индуктивность контура

$$L = \Phi/I.$$

ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = - L \frac{dI}{dt}.$$

Индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

где n — отношение числа витков соленоида к его длине; V — объем соленоида.

Мгновенное значение силы тока в цепи, обладающей сопротивлением R и индуктивностью L :

а) $I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L})$ (при замыкании цепи), где \mathcal{E} — ЭДС источника тока; t — время, прошедшее после замыкания цепи;

б) $I = I_0 e^{-Rt/L}$ (при размыкании цепи), где I_0 — сила тока в цепи при $t=0$; t — время, прошедшее с момента размыкания цепи.

Энергия магнитного поля

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля (отношение энергии магнитного поля соленоида к его объему)

$$w = BH/2, \text{ или } w = B^2/(2\mu\mu_0), \text{ или } w = \mu\mu_0 H^2/2,$$

где B — магнитная индукция; H — напряженность магнитного поля.

Примеры решения задач

Пример 1. По отрезку прямого провода длиной $l = 80$ см течет ток $I = 50$ А. Определить магнитную индукцию \mathbf{B} поля, создаваемого этим током, в точке A , равноудаленной от концов отрезка провода и находящейся на расстоянии $r_0 = 30$ см от его середины.

Решение. Для решения задач воспользуемся законом Био—Савара—Лапласа и принципом суперпозиции магнитных полей. Закон Био—Савара—Лапласа позволяет определить магнитную индукцию $d\mathbf{B}$, создаваемую элементом тока $I dl$. Заметим, что вектор $d\mathbf{B}$ в точке A направлен за плоскость чертежа. Принцип суперпозиции позволяет для определения \mathbf{B} воспользоваться геометрическим суммированием (интегрированием):

$$\mathbf{B} = \int_l d\mathbf{B}, \quad (1)$$

где символ l означает, что интегрирование распространяется на всю длину провода.

Запишем закон Био—Савара—Лапласа в векторной форме:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} [dl \mathbf{r}],$$

где $d\mathbf{B}$ — магнитная индукция, создаваемая элементом провода длиной dl с током I в точке, определяемой

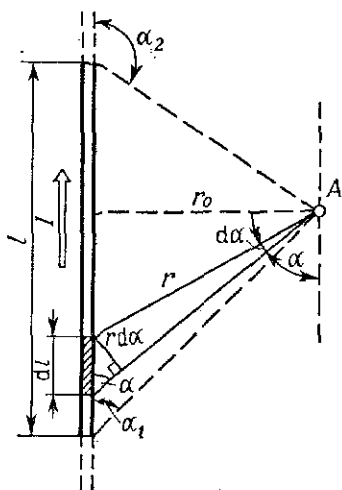


Рис. 32

радиусом-вектором \mathbf{r} ; μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость среды, в которой находится провод (в нашем случае $\mu = 1^*$). Заметим, что векторы $d\mathbf{B}$ от различных элементов тока сонаправлены (рис. 32), поэтому выражение (1) можно переписать в скалярной форме:

$$B = \int_l dB,$$

* Во всех задачах, где это специально не оговорено, следует считать, что средой является воздух, для которого магнитная проницаемость принимается равной единице.

где

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{r^2} dl.$$

В скалярном выражении закона Био—Савара—Лапласа угол α есть угол между элементом тока $I dl$ и радиусом-вектором r . Таким образом,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{\sin \alpha}{r^2} dl. \quad (2)$$

Преобразуем подинтегральное выражение так, чтобы была одна переменная — угол α . Для этого выразим длину элемента провода dl через угол $d\alpha$: $dl = r d\alpha / \sin \alpha$ (рис. 32).

Тогда подинтегральное выражение $\frac{\sin \alpha}{r^2} dl$ запишем в виде $\frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{d\alpha}{r}$. Заметим, что переменная r также зависит от α , ($r = r_0 / \sin \alpha$); следовательно,

$$\frac{d\alpha}{r} = \frac{\sin \alpha}{r_0} d\alpha.$$

Таким образом, выражение (2) можно переписать в виде

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha,$$

где α_1 и α_2 — пределы интегрирования.

Выполним интегрирование:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (3)$$

Заметим, что при симметричном расположении точки A относительно отрезка провода $\cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1$. С учетом этого формула (3) примет вид

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \cos \alpha_1. \quad (4)$$

Из рис. 32 следует

$$\cos \alpha_1 = \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + r_0^2}} = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}.$$

Подставив выражение $\cos \alpha_1$ в формулу (4), получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}. \quad (5)$$

Произведя вычисления по формуле (5), найдем

$$B = 26,7 \text{ мкТл.}$$

Направление вектора магнитной индукции \mathbf{B} поля, создаваемого прямым током, можно определить по правилу буравчика (правилу правого винта). Для этого проводим магнитную силовую линию (штриховая линия на рис. 33) и по касательной к ней в интересующей нас точке проводим вектор \mathbf{B} . Вектор магнитной индукции \mathbf{B} в точке A (рис. 32) направлен перпендикулярно плоскости чертежа от нас.

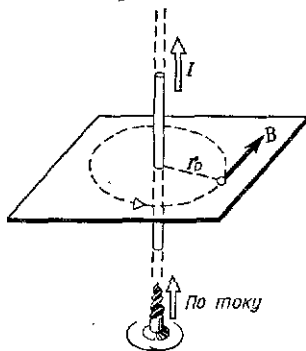


Рис. 33

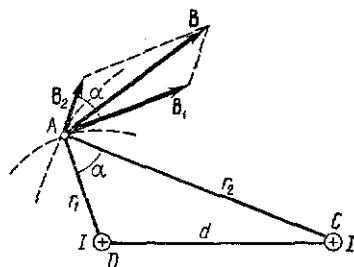


Рис. 34

Пример 2. Два параллельных бесконечно длинных провода D и C , по которым текут в одном направлении электрические токи силой $I = 60 \text{ А}$, расположены на расстоянии $d = 10 \text{ см}$ друг от друга. Определить магнитную индукцию \mathbf{B} поля, создаваемого проводниками с током в точке A (рис. 34), отстоящей от оси одного проводника на расстоянии $r_1 = 5 \text{ см}$, от другого — $r_2 = 12 \text{ см}$.

Решение. Для нахождения магнитной индукции \mathbf{B} в точке A воспользуемся принципом суперпозиции магнитных полей. Для этого определим направления магнитных индукций \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 полей, создаваемых каждым проводником с током в отдельности, и сложим их геометрически:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2.$$

Модуль вектора \mathbf{B} может быть найден по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos \alpha}, \quad (1)$$

где α — угол между векторами \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 .

Магнитные индукции B_1 и B_2 выражаются соответственно через силу тока I и расстояния r_1 и r_2 от проводов до точки A :

$$B_1 = \mu_0 I / (2\pi r_1); \quad B_2 = \mu_0 I / (2\pi r_2).$$

Подставляя выражения B_1 и B_2 в формулу (1) и вынося $\mu_0 I / (2\pi)$ за знак корня, получаем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos \alpha}. \quad (2)$$

Вычислим $\cos \alpha$. Заметив, что $\alpha = \angle DAC$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами), по теореме косинусов запишем

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha,$$

где d — расстояние между проводами. Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}; \quad \cos \alpha = \frac{5^2 + 12^2 - 10^2}{2 \cdot 5 \cdot 12} = \frac{23}{40}.$$

Подставим в формулу (2) числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$B = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 60}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{1}{(0,05)^2} + \frac{1}{(0,12)^2} + \frac{2}{0,05 \cdot 0,12} \cdot \frac{23}{40}} \text{ Тл} = \\ = 3,08 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 308 \text{ мкТл}.$$

Пример 3. По тонкому проводящему кольцу радиусом $R = 10$ см течет ток $I = 80$ А. Найти магнитную индукцию B в точке A , равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 20$ см.

Решение. Для решения задачи воспользуемся законом Био—Савара—Лапласа:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\mathbf{l}r]}{r^2},$$

где $d\mathbf{B}$ — магнитная индукция поля, создаваемого элементом тока $I d\mathbf{l}$ в точке, определяемой радиусом-вектором \mathbf{r} .

Выделим на кольце элемент $d\mathbf{l}$ и от него в точку A проведем радиус-вектор \mathbf{r} (рис. 35). Вектор $d\mathbf{B}$ направим в соответствии с правилом буравчика.

Согласно принципу суперпозиции магнитных полей,

магнитная индукция \mathbf{B} в точке A определяется интегрированием:

$$\mathbf{B} = \int_l d\mathbf{B},$$

где интегрирование ведется по всем элементам dl кольца.

Разложим вектор $d\mathbf{B}$ на две составляющие: $d\mathbf{B}_\perp$, перпендикулярную плоскости кольца, и $d\mathbf{B}_\parallel$, параллельную плоскости кольца, т. е.

$$d\mathbf{B} = d\mathbf{B}_\perp + d\mathbf{B}_\parallel.$$

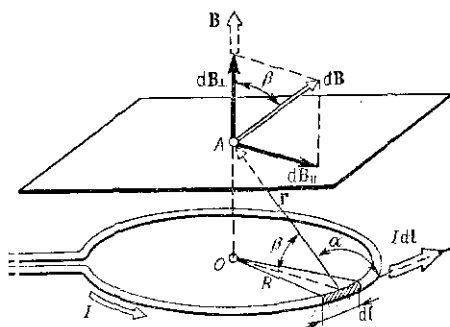


Рис. 35

Тогда

$$\mathbf{B} = \int_l d\mathbf{B}_\perp + \int_l d\mathbf{B}_\parallel.$$

Заметив, что $\int_l d\mathbf{B}_\parallel = 0$ из соображений симметрии и что векторы $d\mathbf{B}_\perp$ от различных элементов dl сонаправлены, заменим векторное суммирование (интегрирование) скалярным:

$$B = \int_l dB_\perp,$$

где $dB_\perp = dB \cos \beta$ и $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$ (поскольку dl перпендикулярен r и, следовательно, $\sin \alpha = 1$). Таким образом,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \cos \beta \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I \cos \beta \cdot 2\pi R}{4\pi r^2}.$$

После сокращения на 2π и замены $\cos \beta$ на R/r (рис. 35) получим

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}.$$

Проверим, дает ли правая часть равенства единицу магнитной индукции (Тл):

$$\begin{aligned} \frac{[\mu_0][I][R^2]}{[r^3]} &= \frac{1 \text{ Гн} \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2}{\text{м} \cdot 1 \text{ м}^3} = \frac{1 \text{ Гн} \cdot 1 \text{ А}^2}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2} = \\ &= \frac{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2} = 1 \text{ Тл}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались определяющей формулой для магнитной индукции:

$$B = \frac{M_{\text{max}}}{\rho}.$$

Тогда

$$1 \text{ Тл} = \frac{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м}^2}.$$

Выразим все величины в единицах СИ и произведем вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 80 \cdot (0,1)^2}{2 \cdot (0,2)^3} \text{ Тл} = 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ Тл},$$

или $B = 62,8 \text{ мкТл}$.

Вектор \mathbf{B} направлен по оси кольца (пунктирная стрелка на рис. 35) в соответствии с правилом буравчика.

Пример 4. Длинный провод с током $I = 50 \text{ А}$ изогнут под углом $\alpha = 2\pi/3$. Определить магнитную индукцию \mathbf{B} в точке A (рис. 36). Расстояние $d = 5 \text{ см}$.

Решение. Изогнутый провод можно рассматривать как два длинных провода, концы которых соединены в точке O (рис. 37). В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей магнитная индукция \mathbf{B} в точке A будет равна геометрической сумме магнитных индукций \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 полей, создаваемых отрезками длинных проводов 1 и 2, т. е. $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$. Магнитная индукция \mathbf{B}_2 равна нулю. Это следует из закона Био—Савара—Лапласа, согласно которому в точках, лежащих на оси провода, $d\mathbf{B} = 0$ ($[d\mathbf{l}r] = 0$).

Магнитную индукцию B_1 найдем, воспользовавшись соотношением (3), найденным в примере 1:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где r_0 — кратчайшее расстояние от провода I до точки A (рис. 37).

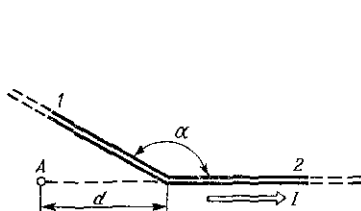


Рис. 36

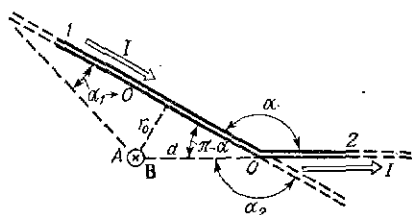


Рис. 37

В нашем случае $\alpha_1 \rightarrow 0$ (провод длинный), $\alpha_2 = \alpha = 2\pi/3$ ($\cos \alpha_2 = \cos(2\pi/3) = -1/2$). Расстояние $r_0 = d \sin(\pi - \alpha) = d \sin(\pi/3) = d\sqrt{3}/2$. Тогда магнитная индукция

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi d\sqrt{3}/2} (1 + 1/2).$$

Так как $B = B_1$ ($B_2 = 0$), то

$$B = \frac{\sqrt{3} \mu_0 I}{4\pi d}.$$

Вектор \mathbf{B} сонаправлен с вектором \mathbf{B}_1 и определяется правилом правого винта. На рис. 37 это направление отмечено крестиком в кружочке (перпендикулярно плоскости чертежа, от нас).

Проверка единиц аналогична выполненной в примере 3. Произведем вычисления:

$$B = \frac{\sqrt{3} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50}{4\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \text{ Тл} = 3,46 \cdot 10^{-5} \text{ Тл} = 34,6 \text{ мкТл}.$$

Пример 5. Два бесконечно длинных провода скрещены под прямым углом (рис. 38). По проводам текут токи $I_1 = 80$ А и $I_2 = 60$ А. Расстояние d между проводами равно 10 см. Определить магнитную индукцию \mathbf{B} в точке A , одинаково удаленной от обоих проводов.

Решение. В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей магнитная индукция \mathbf{B} поля,

создаваемого токами I_1 и I_2 , определяется выражением $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, где \mathbf{B}_1 — магнитная индукция поля, созданного в точке A током I_1 ; \mathbf{B}_2 — магнитная индукция поля, созданного в точке A током I_2 .

Заметим, что векторы \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 взаимно перпендикулярны (их направления находятся по правилу буравчика и изображены в двух проекциях на рис. 39). Тогда модуль вектора \mathbf{B} можно определить по теореме Пифагора:

$$B = |\mathbf{B}| = \sqrt{B_1^2 + B_2^2},$$

где B_1 и B_2 определяются по формулам расчета магнитной индукции для бесконечно длинного прямолинейного провода с током:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_0} \quad \text{и} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_0}.$$

В нашем случае $r_0 = d/2$. Тогда

$$B = \frac{\mu_0}{\pi d} \sqrt{I_1^2 + I_2^2}.$$

Проверка единиц величин аналогична выполненной в примере 3.

Произведем вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi \cdot 10^{-1}} \sqrt{80^2 + 60^2} \text{ Тл} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 400 \text{ мкТл}.$$

Пример 6. Бесконечно длинный провод изогнут так, как это изображено на рис. 40. Радиус R дуги окружности равен 10 см. Определить магнитную индукцию \mathbf{B} поля, создаваемого в точке O током $I = 80$ А, текущим по этому проводу.

Решение. Магнитную индукцию \mathbf{B} в точке O найдем, используя принцип суперпозиции магнитных

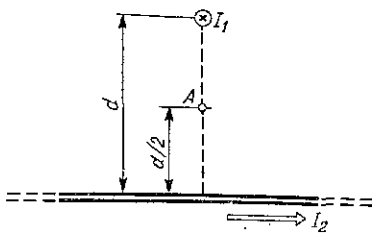


Рис. 38

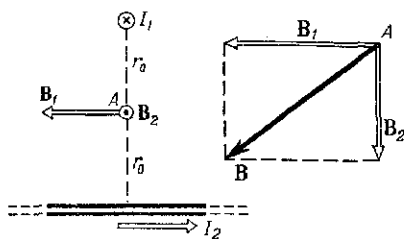


Рис. 39

полей: $\mathbf{V} = \sum \mathbf{V}_i$. В нашем случае провод можно разбить на три части (рис. 41): два прямолинейных провода (1 и 3), одним концом уходящие в бесконечность, и дугу полуокружности (2) радиуса R . Тогда

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3,$$

где \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 и \mathbf{V}_3 — магнитные индукции в точке O , создаваемые током, текущим соответственно на первом, втором и третьем участках провода.

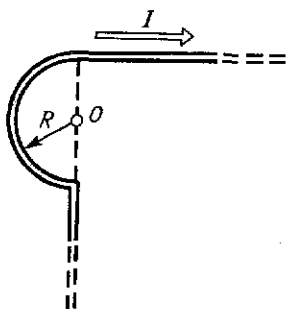


Рис. 40

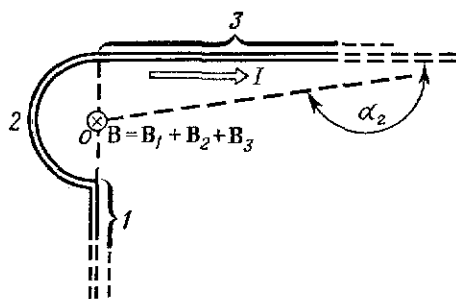


Рис. 41

Так как точка O лежит на оси провода 1, то $\mathbf{V}_1 = 0$ и тогда

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3.$$

Учитывая, что векторы \mathbf{V}_2 и \mathbf{V}_3 направлены в соответствии с правилом буравчика перпендикулярно плоскости чертежа от нас, то геометрическое суммирование можно заменить алгебраическим:

$$V = V_2 + V_3.$$

Магнитную индукцию V_2 найдем, воспользовавшись выражением для магнитной индукции в центре кругового тока:

$$V = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

В нашем случае магнитное поле в точке O создается лишь половиной такого кругового тока, поэтому

$$V_2 = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Магнитную индукцию B_3 найдем, воспользовавшись соотношением (3), выведенным в примере 1:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

В нашем случае $r_0 = R$, $\alpha_1 = \pi/2$ ($\cos \alpha_1 = 0$), $\alpha_2 \rightarrow \pi$ ($\cos \alpha_2 = -1$). Тогда

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

Используя найденные выражения для B_2 и B_3 , получим

$$B = B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R},$$

или

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\pi + 1).$$

Проверка единиц величин аналогична выполненной в примере 3.

Произведем вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 80}{4\pi \cdot 0,1} (\pi + 1) \text{ Тл} = 3,31 \cdot 10^{-4} \text{ Тл},$$

или

$$B = 331 \text{ мкТл}.$$

Пример 7. По двум параллельным прямым проводам длиной $l = 2,5$ м каждый, находящимся на расстоянии $d = 20$ см друг от друга, текут одинаковые токи $I = 1$ кА. Вычислить силу взаимодействия токов.

Решение. Взаимодействие двух проводов, по которым текут токи, осуществляется через магнитное поле. Каждый ток создает магнитное поле, которое действует на другой провод.

Предположим, что оба тока (обозначим их для удобства I_1 и I_2) текут в одном направлении. Ток I_1 создает в месте расположения второго провода (с током I_2) магнитное поле.

Проведем линию магнитной индукции (пунктир на рис. 42) через второй провод и по касательной к ней — вектор магнитной индукции B_1 . Модуль магнитной индукции B_1 определяется соотношением

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}. \quad (1)$$

Согласно закону Ампера, на каждый элемент второго провода с током I_2 длиной dl действует в магнитном поле сила

$$dF = I_2 B_1 dl \sin(\widehat{dl \mathbf{B}}).$$

Так как вектор dl перпендикулярен вектору B_1 , то $\sin(\widehat{dl \mathbf{B}}) = 1$ и тогда

$$dF = I_2 B_1 dl.$$

Подставив в это выражение B_1 согласно (1), получим

$$dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl.$$

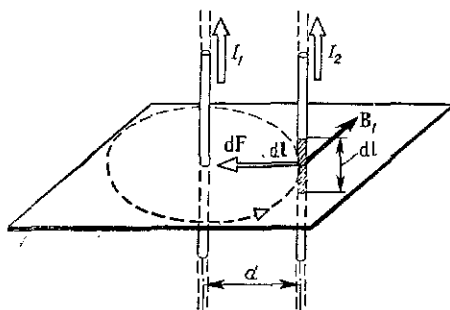


Рис. 42

Силу F взаимодействия проводов с током найдем интегрированием:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int_0^l dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l.$$

Заметив, что $I_1 = I_2 = I$, получим

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d}.$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу силы (Н):

$$\frac{[\mu_0] [I^2] [l]}{[d]} = \frac{1 \text{ Гн/м} \cdot (1 \text{ А})^2 \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ м}} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ м}} = 1 \text{ Н}.$$

Произведем вычисления:

$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (10^3)^2 \cdot 2,5}{2\pi \cdot 0,2} \text{ Н} = 2,5 \text{ Н}.$$

Сила F сонаправлена с силой dF (рис. 42) и определяется (в данном случае проще) правилом левой руки.

Пример 8. Протон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 600$ В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,3$ Тл и начал двигаться по окружности. Вычислить радиус R окружности.

Решение. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле будет происходить по окружности только в том случае, когда частица влетит в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$.

Так как сила Лоренца перпендикулярна вектору \mathbf{v} , то она сообщит частице (протону) нормальное ускорение a_n .

Согласно второму закону Ньютона,

$$\mathbf{F}_L = m\mathbf{a}_n, \quad (1)$$

где m — масса протона.

На рис. 43 совмещена траектория протона с плоскостью чертежа и дано (произвольно) направление вектора \mathbf{v} . Силу Лоренца направим перпендикулярно вектору \mathbf{v} к центру окружности (векторы \mathbf{a}_n и \mathbf{F}_L сонаправлены). Используя правило левой руки, определим направление магнитных силовых линий (направление вектора \mathbf{B}).

Перепишем выражение (1) в скалярной форме (в проекции на радиус):

$$F_L = ma_n. \quad (2)$$

В скалярной форме $F_L = QvB \sin \alpha$. В нашем случае $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ и $\sin \alpha = 1$, тогда $F_L = QvB$. Так как нормальное ускорение $a_n = v^2/R$, то выражение (2) перепишем следующим образом:

$$QvB = mv^2/R.$$

Отсюда находим радиус окружности:

$$R = mv/(QB).$$

Заметив, что mv есть импульс протона (p), это выражение можно записать в виде

$$R = p/(QB). \quad (3)$$

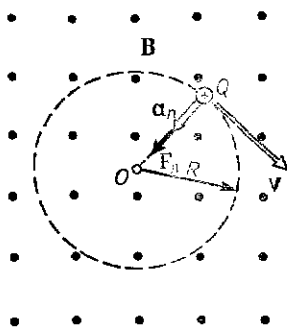


Рис. 43

Импульс протона найдем, воспользовавшись связью между работой сил электрического поля и изменением кинетической энергии протона, т. е. $A = \Delta T$, или

$$Q(\varphi_1 - \varphi_2) = T_2 - T_1,$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ — ускоряющая разность потенциалов (или ускоряющее напряжение U); T_1 и T_2 — начальная и конечная кинетические энергии протона.

Пренебрегая начальной кинетической энергией протона ($T_1 \approx 0$) и выразив кинетическую энергию T_2 через импульс p , получим

$$QU = p^2 / (2m).$$

Найдем из этого выражения импульс $p = \sqrt{2mQU}$ и подставим его в формулу (3):

$$R = \frac{\sqrt{2mQU}}{QB},$$

или

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{2mU/Q}. \quad (4)$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу длины (м):

$$\begin{aligned} \frac{[m^{1/2}][U^{1/2}]}{[B][Q^{1/2}]} &= \frac{1}{1 \text{ Тл}} \left(\frac{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ В}}{1 \text{ Кл}} \right)^{1/2} = \\ &= \frac{(1 \text{ кг})^{1/2} \cdot 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2 (1 \text{ Дж})^{1/2}}{1 \text{ Дж} \cdot 1 \text{ Кл}} = \frac{(1 \text{ кг})^{1/2} \cdot \text{м}^2}{(1 \text{ Дж})^{1/2} \cdot 1 \text{ с}} = \\ &= \frac{(1 \text{ кг})^{1/2} \cdot \text{м}^2}{(1 \text{ кг})^{1/2} \cdot \text{м} / \text{с} \cdot \text{с}} = 1 \text{ м}. \end{aligned}$$

Подставим в формулу (4) числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$R = \frac{1}{0,3} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 600}{1,6 \cdot 10^{-19}}} \text{ м} = 0,0118 \text{ м} = 11,8 \text{ мм}.$$

Пример 9. Электрон, влетев в однородное магнитное поле ($B = 0,2$ Тл), стал двигаться по окружности радиуса $R = 5$ см. Определить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

Решение. Электрон начинает двигаться по окружности, если он влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. На рис. 44 линии магнитной индукции перпендикулярны плоскости чертежа и направлены «от нас» (обозначены крестиками).

Движение электрона по окружности эквивалентно круговому току, который в данном случае определяется выражением

$$I_{\text{экв}} = \frac{|e|}{T},$$

где e — заряд электрона; T — период его обращения.

Период обращения можно выразить через скорость электрона v и путь, проходимый электроном за период $T = v/(2\pi R)$. Тогда

$$I_{\text{экв}} = |e|v/(2\pi R). \quad (1)$$

Зная $I_{\text{экв}}$, найдем магнитный момент эквивалентного кругового тока. По определению, магнитный момент контура с током выражается соотношением

$$p_m = I_{\text{экв}} S, \quad (2)$$

где S — площадь, ограниченная окружностью, описываемой электроном ($S = \pi R^2$).

Подставив $I_{\text{экв}}$ из (1) в выражение (2), получим

$$p_m = \frac{|e|v}{2\pi R} \pi R^2.$$

Сократим на πR и перепишем это выражение в виде:

$$p_m = \frac{1}{2} |e|vR. \quad (3)$$

В полученном выражении известной является скорость электрона, которая связана с радиусом R окружности, по которой он движется, соотношением $R = mv/(QB)$ (см. пример 8). Заменив Q на $|e|$, найдем интересующую нас скорость $v = |e|BR/m$ и подставим ее в формулу (3):

$$p_m = \frac{|e|^2 BR^2}{2m}.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу магнитного момента ($\text{А} \cdot \text{м}^2$):

$$\begin{aligned} \frac{[e^2][B][R^2]}{[m]} &= \frac{(1 \text{ Кл})^2 \cdot 1 \text{ Тл} \cdot (1 \text{ м})^2}{1 \text{ кг}} = \frac{(1 \text{ Кл})^2 \cdot 1 \text{ Н}}{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ А} \cdot \text{м}} = \\ &= \frac{(1 \text{ А})^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2}{1 \text{ А} \cdot \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^2} = 1 \text{ А} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

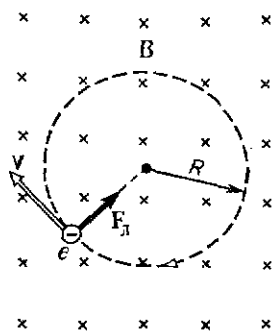


Рис. 44

Произведем вычисления:

$$\rho_m = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 0,2 \cdot (0,05)^2}{2,9,1 \cdot 10^{-31}} \text{ А} \cdot \text{м}^2 = 7,03 \cdot 10^{-12} \text{ А} \cdot \text{м}^2 = \\ = 7,03 \text{ пА} \cdot \text{м}^2.$$

Пример 10. Электрон движется в однородном магнитном поле ($B=10$ мТл) по винтовой линии, радиус R которой равен 1 см и шаг $h=6$ см. Определить период T обращения электрона и его скорость v .

Решение. Электрон будет двигаться по винтовой линии, если он влетает в однородное магнитное поле под некоторым углом ($\alpha \neq \pi/2$) к линиям магнитной индукции. Разложим, как это показано на рис. 45, скорость v электрона на две составляющие: параллельную вектору \mathbf{B} (v_{\parallel}) и перпендикулярную ему (v_{\perp}). Скорость v_{\parallel} в магнитном поле не изменяется и обеспечивает перемещение электрона вдоль силовой линии. Скорость v_{\perp} в результате действия силы Лоренца будет изменяться только по направлению ($\mathbf{F}_L \perp \mathbf{v}_{\perp}$) (в отсутствие параллельной составляющей ($v_{\parallel}=0$) движение электрона происходило бы по окружности в плоскости, перпендикулярной магнитным силовым линиям). Таким образом, электрон будет участвовать одновременно в двух движениях: равномерном перемещении со скоростью v_{\parallel} и равномерном движении по окружности со скоростью v_{\perp} .

Период обращения электрона связан с перпендикулярной составляющей скорости соотношением

$$T = 2\pi R / v_{\perp}. \quad (1)$$

Найдем отношение R/v_{\perp} . Для этого воспользуемся тем, что сила Лоренца сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = v_{\perp}^2/R$. Согласно второму закону Ньютона можно написать

$$F_L = ma_n,$$

или

$$|e|v_{\perp}B = mv_{\perp}^2/R, \quad (2)$$

где $v_{\perp} = v \sin \alpha$.

Сократив (2) на v_{\perp} , выразим соотношение R/v_{\perp} ($R/v_{\perp} = m/|e|B$) и подставим его в формулу (1):

$$T = 2\pi \frac{m}{|e|B}.$$

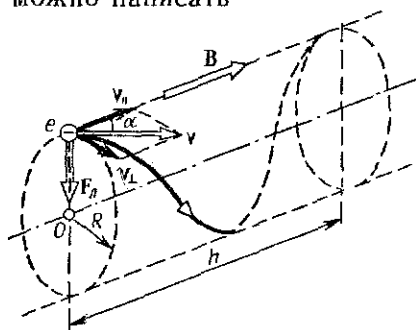


Рис. 45

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу времени (с):

$$\frac{[m]}{[e][B]} = \frac{1 \text{ кг}}{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Тл}} = \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2}{1 \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^2}{1 \text{ с} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2} = 1 \text{ с}.$$

Произведем вычисления:

$$T = \frac{2\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} \text{ с} = 3,57 \cdot 10^{-9} \text{ с} = 3,57 \text{ нс}.$$

Модуль скорости v , как это видно из рис. 45, можно выразить через v_{\perp} и v_{\parallel} :

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}.$$

Из формулы (2) выразим перпендикулярную составляющую скорости:

$$v_{\perp} = \frac{|e|BR}{m}.$$

Параллельную составляющую скорости v_{\parallel} найдем из следующих соображений. За время, равное периоду обращения T , электрон пройдет вдоль силовой линии расстояния, равное шагу винтовой линии, т. е. $h = Tv_{\parallel}$, откуда

$$v_{\parallel} = h/T.$$

Подставив вместо T правую часть выражения (2), получим

$$v_{\parallel} = \frac{|e|Bh}{2\pi m}.$$

Таким образом, модуль скорости электрона

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \frac{|e|B}{m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу скорости (м/с). Для этого заметим, что R и h имеют одинаковую единицу — метр (м). Поэтому в квадратных скобках мы поставим только одну из величин (например, R):

$$\begin{aligned} \frac{[e][B]}{[m]} [R^2]^{1/2} &= \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Тл}}{1 \text{ кг}} (\text{м}^2)^{1/2} = \frac{1 \text{ А} \cdot \text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{с}}{1 \text{ кг}} = \\ &= \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{1 \text{ кг} \cdot \text{с}^2} = 1 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Произведем вычисления:

$$v = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \left[(0,01)^2 + \left(\frac{0,06}{2\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \text{ м/с} =$$

$$= 2,46 \cdot 10^7 \text{ м/с},$$

или 24,6 Мм/с.

Пример 11. Альфа-частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 104 \text{ В}$ и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое ($E = 10 \text{ кВ/м}$) и магнитное ($B = 0,1 \text{ Тл}$) поля. Найти отношение заряда альфа-частицы к ее массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

Решение. Для того чтобы найти отношение заряда Q альфа-частицы к ее массе m , воспользуемся связью между работой сил электрического поля и изменением кинетической энергии частицы:

$$QU = mv^2/2,$$

откуда

$$Q/m = v^2/(2U). \quad (1)$$

Скорость v альфа-частицы найдем из следующих соображений. В скрещенных электрическом и магнитном полях на движущуюся заряженную частицу действуют две силы:

а) сила Лоренца $F_L = Q[\mathbf{vB}]$, направленная перпендикулярно скорости \mathbf{v} и вектору магнитной индукции \mathbf{B} ;

б) кулоновская сила $F_K = QE$, сонаправленная с вектором напряженности \mathbf{E} электростатического поля ($Q > 0$).

На рис. 46 направим вектор магнитной индукции \mathbf{B} вдоль оси Oz , скорость \mathbf{v} — в положительном направлении оси Ox , тогда F_L и F_K будут направлены так, как показано на рисунке.

Альфа-частица не будет испытывать отклонения, если геометрическая сумма сил $F_L = F_K$ будет равна нулю. В проекции на ось Oy получим следующее равенство (при этом учтено, что $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ и $\sin \alpha = 1$):

$$QE - QvB = 0,$$

откуда

$$v = E/B.$$

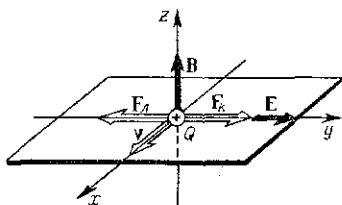


Рис. 46

Подставив это выражение скорости в формулу (1), получим

$$Q/m = E^2(2UB^2).$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу удельного заряда (Кл/кг):

$$\begin{aligned} \frac{[E^2]}{[U][B^2]} &= \frac{(1В/м)^2}{1В \cdot (1Тл)^2} = \frac{(1В \cdot А)^2}{1В \cdot (1Н)^2} = \frac{1Дж \cdot Кл}{(1Н \cdot с)^2} = \frac{1Кл \cdot м}{1Н \cdot с^2} = \\ &= 1 \text{ Кл/кг}. \end{aligned}$$

Произведем вычисления:

$$\frac{Q}{m} = \frac{(10^4)^2}{2 \cdot 104(0,1)^2} \text{ Кл/кг} = 4,81 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг} = 48,1 \text{ МКл/кг}.$$

Пример 12. Короткая катушка, содержащая $N = 10^3$ витков, равномерно вращается с частотой $n = 10 \text{ с}^{-1}$ относительно оси AB , лежащей в плоскости катушки и перпендикулярной линиям однородного магнитного поля ($B = 0,04 \text{ Тл}$). Определить мгновенное значение ЭДС индукции для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с линиями поля. Площадь S катушки равна 100 см^2 .

Решение. Мгновенное значение ЭДС индукции \mathcal{E}_i определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея — Максвелла:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt}. \quad (1)$$

Погокосцепление $\Psi = N\Phi$, где N — число витков катушки, пронизываемых магнитным потоком Φ . Подставив выражение Ψ в формулу (1), получим

$$\mathcal{E}_i = - N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2)$$

При вращении катушки магнитный поток Φ , пронизывающий катушку в момент времени t , изменяется по закону $\Phi = BS \cos \omega t$, где B — магнитная индукция; S — площадь катушки; ω — угловая скорость катушки. Подставив в формулу (2) выражение магнитного потока Φ и проинтегрировав по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_i = NBS\omega \sin \omega t.$$

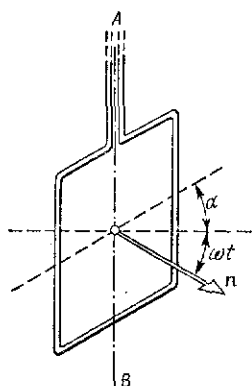


Рис. 47

Заметив, что угловая скорость ω связана с частотой вращения n катушки соотношением $\omega = 2\pi n$ и что угол $\omega t = \pi/2 - \alpha$ (рис. 47), получим (учтено, что $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$)

$$\varepsilon_i = 2\pi n N B S \cos \alpha.$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу ЭДС (В):

$$[n][B][S] =$$

$$= \frac{1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2}{1 \text{ с}} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{м}^2}{1 \text{ А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}} = 1 \text{ В}.$$

Произведем вычисления:

$$\varepsilon_i = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0,04 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \text{ В} = 25,1 \text{ В}.$$

Пример 13. Квадратная проволочная рамка со стороной $a = 5$ см и сопротивлением $R = 10$ мОм находится в однородном магнитном поле ($B = 40$ мТл). Нормаль к плоскости рамки составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с линиями магнитной индукции. Определить заряд Q , который пройдет по рамке, если магнитное поле выключить.

Решение. При выключении магнитного поля произойдет изменение магнитного потока. Вследствие этого в рамке возникнет ЭДС индукции, определяемая основным законом электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Возникшая ЭДС индукции вызовет в рамке индукционный ток, мгновенное значение которого можно определить воспользовавшись законом Ома для полной цепи $I_i = \varepsilon_i/R$, где R — сопротивление рамки. Тогда

$$I_i R = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Так как мгновенное значение силы индукционного тока $I_i = \frac{dQ}{dt}$, то это выражение можно переписать в виде

$$\frac{dQ}{dt} R = - \frac{d\Phi}{dt}, \text{ откуда } dQ = - \frac{d\Phi}{R}. \quad (1)$$

Проинтегрировав выражение (1), найдем

$$\int_0^Q dQ = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi, \text{ или } Q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

Заметив, что при выключенном поле (конечное состояние) $\Phi_2 = 0$, последнее равенство переписывается в виде

$$Q = \Phi_1 / R. \quad (2)$$

Найдем магнитный поток Φ_1 . По определению магнитного потока имеем

$$\Phi_1 = BS \cos \alpha,$$

где S — площадь рамки.

В нашем случае (рамка квадратная) $S = a^2$. Тогда

$$\Phi_1 = Ba^2 \cos \alpha. \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим

$$Q = \frac{Ba^2}{R} \cos \alpha.$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу заряда (Кл):

$$\frac{[B][a^2]}{[R]} = \frac{1\text{Тл} \cdot (1\text{м}^2)}{1\text{Ом}} = \frac{1\text{Н} \cdot \text{м}^2}{1\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{Ом}} = \frac{1\text{Дж}}{1\text{В}} = 1\text{Кл}.$$

Произведем вычисления:

$$Q = \frac{0,04 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{3/2}}{0,01} \text{Кл} = 8,67 \cdot 10^{-3} \text{Кл} = 8,67 \text{ мКл}.$$

Пример 14. Плоский квадратный контур со стороной $a = 10$ см, по которому течет ток $I = 100$ А, свободно установился в однородном магнитном поле ($B = 1$ Тл). Определить работу A , совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон, на угол: 1) $\varphi_1 = 90^\circ$; 2) $\varphi_2 = 3^\circ$. При повороте контура сила тока в нем поддерживается неизменной.

Решение. Как известно, на контур с током в магнитном поле действует момент силы (рис. 48)

$$M = p_m B \sin \varphi, \quad (1)$$

где $p_m = IS = Ia^2$ — магнитный момент контура; B — магнитная индукция; φ — угол между векторами p_m (направлен по нормали к контуру) и B .

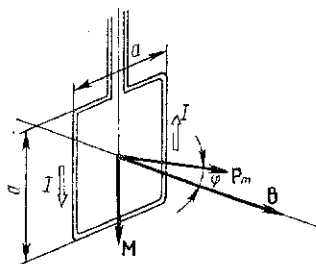


Рис. 48

По условию задачи в начальном положении контур свободно установился в магнитное поле. При этом момент силы равен нулю ($M = 0$), а значит, $\varphi = 0$, т. е. векторы \mathbf{p}_m и \mathbf{B} сонаправлены. Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то возникший момент сил [см. (1)] будет стремиться возвратить контур в исходное положение. Против это-

го момента и будет совершаться работа внешними силами. Так как момент сил переменной (зависит от угла поворота φ), то для подсчета работы применим формулу работы в дифференциальной форме $dA = M d\varphi$. Учитывая формулу (1), получаем

$$dA = I B a^2 \sin \varphi d\varphi.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу при повороте на конечный угол:

$$A = I B a^2 \int_0^{\varphi} \sin \varphi d\varphi. \quad (2)$$

Работа при повороте на угол $\varphi_1 = 90^\circ$

$$A_1 = I B a^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = I B a^2 [(-\cos \varphi)]_0^{\pi/2} = I B a^2. \quad (3)$$

Выразим числовые значения величин в единицах СИ ($I = 100 \text{ А}$, $B = 1 \text{ Тл}$, $a = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$) и подставим в (3):

$$A_1 = 100 \cdot 1 \cdot (0,1)^2 \text{ Дж} = 1 \text{ Дж}.$$

Работа при повороте на угол $\varphi_2 = 3^\circ$. В этом случае, учитывая, что угол φ_2 мал, заменим в выражении (2) $\sin \varphi \approx \varphi$:

$$A_2 = I B a^2 \int_0^{\varphi_2} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} I B a^2 \varphi_2^2. \quad (4)$$

Выразим угол φ_2 в радианах. После подстановки числовых значений величин в (4) найдем

$$A_2 = \frac{1}{2} 100 \cdot 1 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,0523)^2 \text{ Дж} = 1,37 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 1,37 \text{ мДж}.$$

Задачу можно решить и другими способами:

1. Работа внешних сил по перемещению контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, пронизывающего контур:

$$A = -I\Delta\Phi = I(\Phi_1 - \Phi_2),$$

где Φ_1 — магнитный поток, пронизывающий контур до перемещения; Φ_2 — то же, после перемещения.

Если $\varphi_1 = 90^\circ$, то $\Phi_1 = BS$, $\Phi_2 = 0$. Следовательно,

$$A = IBS = IBa^2,$$

что совпадает с (3).

2. Воспользуемся выражением для механической потенциальной энергии контура с током в магнитном поле

$$\Pi(\varphi) = -p_m B \cos \varphi.$$

Тогда работа внешних сил

$$A = \Delta\Pi = \Pi_2 - \Pi_1,$$

или

$$A = p_m B (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

Так как $p_m = Ia^2$, $\cos \varphi_1 = 1$ и $\cos \varphi_2 = 0$, то

$$A = IBa^2,$$

что также совпадает с (3).

Пример 15. Соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит $N = 1200$ витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока $I = 4$ А магнитный поток $\Phi = 6$ мкВб. Определить индуктивность L соленоида и энергию W магнитного поля соленоида.

Решение. Индуктивность L связана с потокоцеплением Ψ и силой тока I соотношением

$$\Psi = LI. \quad (1)$$

Потокоцепление, в свою очередь, может быть определено через поток Φ и число витков N (при условии, что витки плотно прилегают друг к другу):

$$\Psi = N\Phi. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) находим индуктивность соленоида:

$$L = N\Phi/I. \quad (3)$$

Энергия магнитного поля соленоида

$$W = \frac{1}{2}LI^2.$$

Выразив L согласно (3), получим

$$W = \frac{1}{2}N\Phi I. \quad (4)$$

Подставим в формулы (3) и (4) значения физических величин и произведем вычисления:

$$L = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{4} \text{ Гн} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 1,8 \text{ мГн};$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \text{ Дж} = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ Дж} = \\ = 14,4 \text{ мДж}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Напряженность магнитного поля $H=100 \text{ А/м}$. Вычислить магнитную индукцию B этого поля в вакууме. [126 мкТл]

2. По двум длинным параллельным проводам текут в одинаковом направлении токи $I_1=10 \text{ А}$ и $I_2=15 \text{ А}$. Расстояние между проводами $A=10 \text{ см}$. Определить напряженность H магнитного поля в точке, удаленной от первого провода на $r_1=8 \text{ см}$ и от второго на $r_2=6 \text{ см}$. [44,5 А/м]

3. Решить задачу 2 при условии, что токи текут в противоположных направлениях, точка удалена от первого провода на $r_1=15 \text{ см}$ и от второго на $r_2=10 \text{ см}$. [17,4 А/м]

4. По тонкому проводнику, изогнутому в виде правильного шестиугольника со стороной $a=10 \text{ см}$, идет ток $I=20 \text{ А}$. Определить магнитную индукцию B в центре шестиугольника. [138 мкТл]

5. Обмотка соленоида содержит два слоя плотно прилегающих друг к другу витков провода диаметром $d=0,2 \text{ мм}$. Определить магнитную индукцию B на оси соленоида, если по проводу идет ток $I=0,5 \text{ А}$. [6,28 мТл]

6. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0,01 \text{ Тл}$ помещен прямой проводник длиной $l=20 \text{ см}$ (подводящие провода находятся вне поля). Определить силу F , действующую на проводник, если по нему течет ток $I=50 \text{ А}$, а угол φ между направлением тока и вектором магнитной индукции равен 30° . [50 мН]

7. Рамка с током $I=5 \text{ А}$ содержит $N=20$ витков тонкого провода. Определить магнитный момент p_m рамки с током, если ее площадь $S=10 \text{ см}^2$. [0,1 А·м²]

8. По витку радиусом $R=10$ см течет ток $I=50$ А. Виток помещен в однородное магнитное поле ($B=0,2$ Тл). Определить момент силы M , действующей на виток, если плоскость витка составляет угол $\varphi=60^\circ$ с линиями индукции. [0,157 Н·м]

9. Протон влетел в магнитное поле перпендикулярно линиям индукции и описал дугу радиусом $R=10$ см. Определить скорость v протона, если магнитная индукция $B=1$ Тл. [9,57 Мм/с]

10. Определить частоту n обращения электрона по круговой орбите в магнитном поле ($B=1$ Тл). [$2,8 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$]

11. Электрон в однородном магнитном поле движется по винтовой линии радиусом $R=5$ см и шагом $h=20$ см. Определить скорость v электрона, если магнитная индукция $B=0,1$ мТл. [$1,04 \cdot 10^6$ м/с]

12. Кольцо радиусом $R=10$ см находится в однородном магнитном поле ($B=0,318$ Тл). Плоскость кольца составляет с линиями индукции угол $\varphi=30^\circ$. Вычислить магнитный поток Φ , пронизывающий кольцо. [5 мВб]

13. По проводнику, согнутому в виде квадрата со стороной $a=10$ см, течет ток $I=20$ А. Плоскость квадрата перпендикулярна магнитным силовым линиям поля. Определить работу A , которую необходимо совершить для того, чтобы удалить проводник за пределы поля. Магнитная индукция $B=0,1$ Тл. Поле считать однородным. [0,02 Дж]

14. Проводник длиной $l=1$ м движется со скоростью $v=5$ м/с перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определить магнитную индукцию B , если на концах проводника возникает разность потенциалов $U=0,02$ В. [4 мТл]

15. Рамка площадью $S=50 \text{ см}^2$, содержащая $N=100$ витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле ($B=40$ мТл). Определить максимальную ЭДС индукции \mathcal{E}_{max} , если ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции, а рамка вращается с частотой $n=960$ об/мин. [2,01 В]

16. Кольцо из проволоки сопротивлением $R=1$ Ом находится в однородном магнитном поле ($B=0,4$ Тл). Плоскость кольца составляет с линиями индукции угол $\varphi=90^\circ$. Определить заряд Q , который протечет по кольцу, если его выдернуть из поля. Площадь кольца $S=10 \text{ см}^2$. [0,4 Кл]

17. Соленоид содержит $N=4000$ витков провода, по

которому течет ток $I=20$ А. Определить магнитный поток Φ и потокосцепление Ψ , если индуктивность $L=0,4$ Гн. [2 мВб; 8 Вб]

18. На картонный каркас длиной $l=50$ см и площадью сечения $S=4$ см² намотан в один слой провод диаметром $d=0,2$ мм так, что витки плотно прилегают друг к другу (толщиной изоляции пренебречь). Определить индуктивность L получившегося соленоида. [6,28 мГн]

19. Определить силу тока в цепи через $t=0,01$ с после ее размыкания. Сопротивление цепи $R=20$ Ом и индуктивность $L=0,1$ Гн. Сила тока до размыкания цепи $I_0=50$ А. [6,75 А]

20. По обмотке соленоида индуктивностью $L=0,2$ Гн течет ток $I=10$ А. Определить энергию W магнитного поля соленоида. [10 Дж]

Контрольная работа 4

Таблица вариантов для специальностей, учебными планами которых предусмотрено по курсу физики шесть контрольных работ

Вариант	Номера задач							
0	410	420	430	440	450	460	470	480
1	401	411	421	431	441	451	461	471
2	402	412	422	432	442	452	462	472
3	403	413	423	433	443	453	463	473
4	404	414	424	434	444	454	464	474
5	405	415	425	435	445	455	465	475
6	406	416	426	436	446	456	466	476
7	407	417	427	437	447	457	467	477
8	408	418	428	438	448	458	468	478
9	409	419	429	439	449	459	469	479

401. Бесконечно длинный провод с током $I=100$ А изогнут так, как это показано на рис. 49. Определить магнитную индукцию \mathbf{B} в точке O . Радиус дуги $R=10$ см.

402. Магнитный момент p_m тонкого проводящего кольца $p_m=5$ А·м². Определить магнитную индукцию \mathbf{B} в точке A , находящейся на оси кольца и удаленной от точек кольца на расстояние $r=20$ см (рис. 50).

403. По двум скрещенным под прямым углом бесконечно длинным проводам текут токи I и $2I$ ($I=100$ А). Определить магнитную индукцию \mathbf{B} в точке A (рис. 51). Расстояние $d=10$ см.

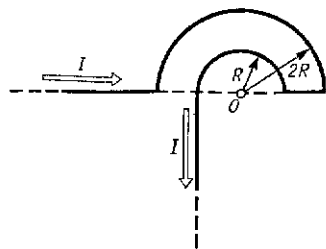


Рис. 49

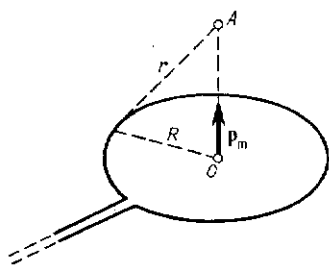


Рис. 50

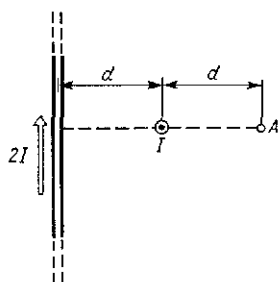


Рис. 51

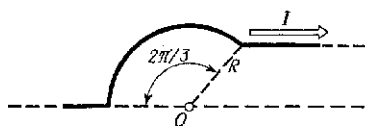


Рис. 52

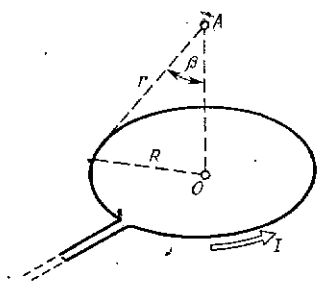


Рис. 53

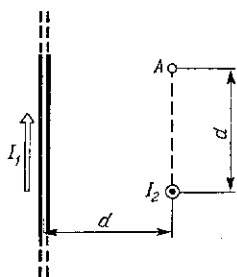


Рис. 54

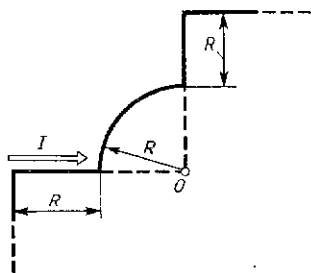


Рис. 55

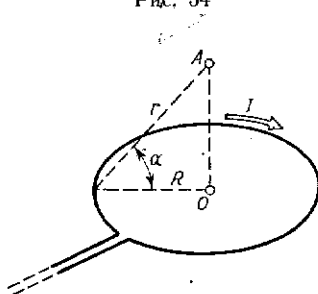


Рис. 56

404. По бесконечно длинному проводу, изогнутому так, как это показано на рис. 52, течет ток $I=200$ А. Определить магнитную индукцию \mathbf{B} в точке O . Радиус дуги $R=10$ см.

405. По тонкому кольцу радиусом $R=20$ см течет ток $I=100$ А. Определить магнитную индукцию \mathbf{B} на оси кольца в точке A (рис. 53). Угол $\beta=\pi/3$.

406. По двум бесконечно длинным проводам, скрещенным под прямым углом, текут токи I_1 и $I_2=2I_1$ ($I_1=100$ А). Определить магнитную индукцию \mathbf{B} в точке A , равноудаленной от проводов на расстояние $d=10$ см (рис. 54).

407. По бесконечно длинному проводу, изогнутому так, как это показано на рис. 55, течет ток $I=200$ А. Определить магнитную индукцию \mathbf{B} в точке O . Радиус дуги $R=10$ см.

408. По тонкому кольцу течет ток $I=80$ А. Определить магнитную индукцию \mathbf{B} в точке A , равноудаленной от точек кольца на расстояние $r=10$ см (рис. 56). Угол $\alpha=\pi/6$.

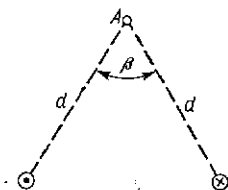


Рис. 57

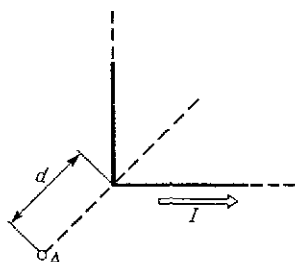


Рис. 58

409. По двум бесконечно длинным, прямым параллельным проводам текут одинаковые токи $I=60$ А. Определить магнитную индукцию \mathbf{B} в точке A (рис. 57), равноудаленной от проводов на расстояние $d=10$ см. Угол $\beta=\pi/3$.

410. Бесконечно длинный провод с током $I=50$ А изогнут так, как это показано на рис. 58. Определить магнитную индукцию \mathbf{B} в точке A , лежащей на биссектрисе прямого угла на расстоянии $d=10$ см от его вершины.

411. По двум параллельным проводам длиной $l=3$ м каждый текут одинаковые токи $I=500$ А. Расстояние d между проводами равно 10 см. Определить силу \mathbf{F} взаимодействия проводов.

412. По трем параллельным прямым проводам, находящимся на одинаковом расстоянии $d = 20$ см друг от друга, текут одинаковые токи $I = 400$ А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить для каждого из проводов отношение силы, действующей на него, к его длине.

413. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи $I = 200$ А. Определить силу F , действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится от него на расстоянии, равном ее длине.

414. Короткая катушка площадью поперечного сечения $S = 250$ см², содержащая $N = 500$ витков провода, по которому течет ток $I = 5$ А, помещена в однородное магнитное поле напряженностью $H = 1000$ А/м. Найти: 1) магнитный момент p_m катушки; 2) вращающий момент M , действующий на катушку, если ось катушки составляет угол $\phi = 30^\circ$ с линиями поля.

415. Тонкий провод длиной $l = 20$ см изогнут в виде полукольца и помещен в магнитное поле ($B = 10$ мТл) так, что площадь полукольца перпендикулярна линиям магнитной индукции. По проводу пропустили ток $I = 50$ А. Определить силу F , действующую на провод. Подводящие провода направлены вдоль линий магнитной индукции.

416. Шины генератора длиной $l = 4$ м находятся на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Найти силу взаимного отталкивания шин при коротком замыкании, если ток $I_{к.з}$ короткого замыкания равен 5 кА.

417. Квадратный контур со стороной $a = 10$ см, по которому течет ток $I = 50$ А, свободно установился в однородном магнитном поле ($B = 10$ мТл). Определить изменение ΔP потенциальной энергии контура при повороте вокруг оси, лежащей в плоскости контура, на угол $\phi = 180^\circ$.

418. Тонкое проводящее кольцо с током $I = 40$ А помещено в однородное магнитное поле ($B = 80$ мТл). Плоскость кольца перпендикулярна линиям магнитной индукции. Радиус R кольца равен 20 см. Найти силу F , растягивающую кольцо.

419. Квадратная рамка из тонкого провода может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из сторон. Масса m рамки равна 20 г.

Рамку поместили в однородное магнитное поле ($B = 0,1$ Тл), направленное вертикально вверх. Определить угол α , на который отклонилась рамка от вертикали, когда по ней пропустили ток $I = 10$ А.

420. По круговому витку радиусом $R = 5$ см течет ток $I = 20$ А. Виток расположен в однородном магнитном поле ($B = 40$ мТл) так, что нормаль к плоскости контура составляет угол $\phi = \pi/6$ с вектором \mathbf{B} . Определить изменение $\Delta\Pi$ потенциальной энергии контура при его повороте на угол $\phi = \pi/2$ в направлении увеличения угла ϕ .

421. По тонкому кольцу радиусом $R = 10$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 50$ нКл/м. Кольцо вращается относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр, с частотой $n = 10$ с⁻¹. Определить магнитный момент p_m , обусловленный вращением кольца.

422. Диск радиусом $R = 8$ см несет равномерно распределенный по поверхности заряд ($\sigma = 100$ нКл/м²). Определить магнитный момент p_m , обусловленный вращением диска, относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости диска. Угловая скорость вращения диска $\omega = 60$ рад/с.

423. Стержень длиной $l = 20$ см заряжен равномерно распределенным зарядом с линейной плотностью $\tau = 0,2$ мкКл/м. Стержень вращается с частотой $n = 10$ с⁻¹ относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Определить магнитный момент p_m , обусловленный вращением стержня.

424. Протон движется по окружности радиусом $R = 0,5$ см с линейной скоростью $v = 10^6$ м/с. Определить магнитный момент p_m , создаваемый эквивалентным круговым током.

425. Тонкое кольцо радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд $Q = 80$ нКл. Кольцо вращается с угловой скоростью $\omega = 50$ рад/с относительно оси, совпадающей с одним из диаметров кольца. Найти магнитный момент p_m , обусловленный вращением кольца.

426. Заряд $Q = 0,1$ мкКл равномерно распределен по стержню длиной $l = 50$ см. Стержень вращается с угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Найти магнитный момент p_m , обусловленный вращением стержня.

427. Электрон в атоме водорода движется вокруг ядра (протона) по окружности радиусом $R = 53$ пм.

Определить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

428. Плоский цилиндр радиусом $R=4$ см и высотой $h=15$ см несет равномерно распределенный по объему заряд ($\rho=0,1$ мкКл/м³). Цилиндр вращается с частотой $n=10$ с⁻¹ относительно оси, совпадающей с его геометрической осью. Найти магнитный момент p_m цилиндра, обусловленный его вращением.

429. По поверхности диска радиусом $R=15$ см равномерно распределен заряд $Q=0,2$ мкКл. Диск вращается с угловой скоростью $\omega=30$ рад/с относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить магнитный момент p_m , обусловленный вращением диска.

430. По тонкому стержню длиной $l=40$ см равномерно распределен заряд $Q=60$ нКл. Стержень вращается с частотой $n=12$ с⁻¹ относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через стержень на расстоянии $a=l/3$ от одного из его концов. Определить магнитный момент p_m , обусловленный вращением стержня.

431. Два иона разных масс с одинаковыми зарядами влетели в однородное магнитное поле, стали двигаться по окружностям радиусами $R_1=3$ см и $R_2=1,73$ см. Определить отношение масс ионов, если они прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов.

432. Однозарядный ион натрия прошел ускоряющую разность потенциалов $U=1$ кВ и влетел перпендикулярно линиям магнитной индукции в однородное поле ($B=0,5$ Тл). Определить относительную атомную массу A иона, если он описал окружность радиусом $R=4,37$ см.

433. Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов $U=800$ В и, влетев в однородное магнитное поле $B=47$ мТл, стал двигаться по винтовой линии с шагом $h=6$ см. Определить радиус R винтовой линии.

434. Альфа-частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U=300$ В и, попав в однородное магнитное поле, стала двигаться по винтовой линии радиусом $R=1$ см и шагом $h=4$ см. Определить магнитную индукцию B поля.

435. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U=100$ В и, влетев в однородное магнитное поле ($B=0,1$ Тл), стала двигаться по винтовой линии с шагом $h=6,5$ см и радиусом $R=1$ см. Определить отношение заряда частицы к ее массе.

436. Электрон влетел в однородное магнитное поле

($B = 200$ мТл) перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определить силу эквивалентного кругового тока $I_{\text{экв}}$, создаваемого движением электрона в магнитном поле.

437. Протон прошел ускоряющую разность потенциалов $U = 300$ В и влетел в однородное магнитное поле ($B = 20$ мТл) под углом $\alpha = 30^\circ$ к линиям магнитной индукции. Определить шаг h и радиус R винтовой линии, по которой будет двигаться протон в магнитном поле.

438. Альфа-частица, пройдя ускоряющую разность потенциалов U , стала двигаться в однородном магнитном поле ($B = 50$ мТл) по винтовой линии с шагом $h = 5$ см и радиусом $R = 1$ см. Определить ускоряющую разность потенциалов, которую прошла альфа-частица.

439. Ион с кинетической энергией $T = 1$ кэВ попал в однородное магнитное поле ($B = 21$ мТл) и стал двигаться по окружности. Определить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

440. Ион, попав в магнитное поле ($B = 0,01$ Тл), стал двигаться по окружности. Определить кинетическую энергию T (в эВ) иона, если магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока равен $1,6 \cdot 10^{-14}$ А·м².

441. Протон влетел в скрещенные под углом $\alpha = 120^\circ$ магнитное ($B = 50$ мТл) и электрическое ($E = 20$ кВ/м) поля. Определить ускорение a^* протона, если его скорость v ($|v| = 4 \cdot 10^5$ м/с) перпендикулярна векторам \mathbf{E} и \mathbf{B} .

442. Ион, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 645$ В, влетел в скрещенные под прямым углом однородные магнитное ($B = 1,5$ мТл) и электрическое ($E = 200$ В/м) поля. Определить отношение заряда иона к его массе, если ион в этих полях движется прямолинейно.

443. Альфа-частица влетела в скрещенные под прямым углом магнитное ($B = 5$ мТл) и электрическое ($E = 30$ кВ/м) поля. Определить ускорение a^* альфа-частицы, если ее скорость v ($|v| = 2 \cdot 10^6$ м/с) перпендикулярна векторам \mathbf{B} и \mathbf{E} , причем силы, действующие со стороны этих полей, противонаправлены.

444. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 1,2$ кВ, попал в скрещенные под прямым углом однородные магнитное и электрическое поля. Опре-

* Ускорение a определяется в момент вхождения заряженной частицы в область пространства, где локализованы однородные магнитное и электрическое поля.

делить напряженность E электрического поля, если магнитная индукция B поля равна 6 мТл.

445. Однородные магнитное ($B=2,5$ мТл) и электрическое ($E=10$ кВ/м) поля скрещены под прямым углом. Электрон, скорость v которого равна $4 \cdot 10^6$ м/с, влетает в эти поля так, что силы, действующие на него со стороны магнитного и электрического полей, сонаправлены. Определить ускорение a^* электрона.

446. Однозарядный ион лития массой $m=7$ а. е. м. прошел ускоряющую разность потенциалов $U=300$ В и влетел в скрещенные под прямым углом однородные магнитное и электрическое поля. Определить магнитную индукцию B поля, если траектория иона в скрещенных полях прямолинейна. Напряженность E электрического поля равна 2 кВ/м.

447. Альфа-частица, имеющая скорость $v=2$ Мм/с, влетает под углом $\alpha=30^\circ$ к сонаправленному магнитному ($B=1$ мТл) и электрическому ($E=1$ кВ/м) полям. Определить ускорение a^* альфа-частицы.

448. Протон прошел некоторую ускоряющую разность потенциалов U и влетел в скрещенные под прямым углом однородные поля: магнитное ($B=5$ мТл) и электрическое ($E=20$ кВ/м). Определить разность потенциалов U , если протон в скрещенных полях движется прямолинейно.

449. Магнитное ($B=2$ мТл) и электрическое ($E=1,6$ кВ/м) поля сонаправлены. Перпендикулярно векторам B и E влетает электрон со скоростью $v=0,8$ Мм/с. Определить ускорение a^* электрона.

450. В скрещенные под прямым углом однородные магнитное ($H=1$ МА/м) и электрическое ($E=50$ кВ/м) поля влетел ион. При какой скорости v иона (по модулю и направлению) он будет двигаться в скрещенных полях прямолинейно?

451. Плоский контур площадью $S=20$ см² находится в однородном магнитном поле ($B=0,03$ Тл). Определить магнитный поток Φ , пронизывающий контур, если плоскость его составляет угол $\varphi=60^\circ$ с направлением линий индукций.

452. Магнитный поток Φ сквозь сечение соленоида равен 50 мкВб. Длина соленоида $l=50$ см. Найти магнитный момент p_m соленоида, если его витки плотно прилегают друг к другу.

* См. ссылку на с. 142.

453. В средней части соленоида, содержащего $n = 8$ витков/см, помещен круговой виток диаметром $d = 4$ см. Плоскость витка расположена под углом $\varphi = 60^\circ$ к оси соленоида. Определить магнитный поток Φ , пронизывающий виток, если по обмотке соленоида течет ток $I = 1$ А.

454. На длинный картонный каркас диаметром $d = 5$ см уложена однослойная обмотка (виток к витку) из проволоки диаметром $d = 0,2$ мм. Определить магнитный поток Φ , создаваемый таким соленоидом при силе тока $I = 0,5$ А.

455. Квадратный контур со стороной $a = 10$ см, в котором течет ток $I = 6$ А, находится в магнитном поле ($B = 0,8$ Тл) под углом $\alpha = 50^\circ$ к линиям индукции. Какую работу A нужно совершить, чтобы при неизменной силе тока в контуре изменить его форму на окружность?

456. Плоский контур с током $I = 5$ А свободно установился в однородном магнитном поле ($B = 0,4$ Тл). Площадь контура $S = 200$ см². Поддерживая ток в контуре неизменным, его повернули относительно оси, лежащей в плоскости контура, на угол $\alpha = 40^\circ$. Определить совершенную при этом работу A .

457. Виток, в котором поддерживается постоянная сила тока $I = 60$ А, свободно установился в однородном магнитном поле ($B = 20$ мТл). Диаметр витка $d = 10$ см. Какую работу A нужно совершить для того, чтобы повернуть виток относительно оси, совпадающей с диаметром, на угол $\alpha = \pi/3$?

458. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции расположен плоский контур площадью $S = 100$ см². Поддерживая в контуре постоянную силу тока $I = 50$ А, его переместили из поля в область пространства, где поле отсутствует. Определить магнитную индукцию B поля, если при перемещении контура была совершена работа $A = 0,4$ Дж.

459. Плоский контур с током $I = 50$ А расположен в однородном магнитном поле ($B = 0,6$ Тл) так, что нормаль к контуру перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить работу, совершаемую силами поля при медленном повороте контура около оси, лежащей в плоскости контура, на угол $\alpha = 30^\circ$.

460. Определить магнитный поток Φ , пронизывающий соленоид, если его длина $l = 50$ см и магнитный момент $p_m = 0,4$ Вб.

461. В однородном магнитном поле ($B = 0,1$ Тл) рав-

номерно с частотой $n = 5 \text{ с}^{-1}$ вращается стержень длиной $l = 50 \text{ см}$ так, что плоскость его вращения перпендикулярна линиям напряженности, а ось вращения проходит через один из его концов. Определить индуцируемую на концах стержня разность потенциалов U .

462. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5 \text{ Тл}$ вращается с частотой $n = 10 \text{ с}^{-1}$ стержень длиной $l = 20 \text{ см}$. Ось вращения параллельна линиям индукции и проходит через один из концов стержня перпендикулярно его оси. Определить разность потенциалов U на концах стержня.

463. В проволочное кольцо, присоединенное к баллистическому гальванометру, вставили прямой магнит. При этом по цепи прошел заряд $Q = 50 \text{ мкКл}$. Определить изменение магнитного потока $\Delta\Phi$ через кольцо; если сопротивление цепи гальванометра $R = 10 \text{ Ом}$.

464. Тонкий медный провод массой $m = 5 \text{ г}$ согнут в виде квадрата, и концы его замкнуты. Квадрат помещен в однородное магнитное поле ($B = 0,2 \text{ Тл}$) так, что его плоскость перпендикулярна линиям поля. Определить заряд Q , который потечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию.

465. Рамка из провода сопротивлением $R = 0,04 \text{ Ом}$ равномерно вращается в однородном магнитном поле ($B = 0,6 \text{ Тл}$). Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки $S = 200 \text{ см}^2$. Определить заряд Q , который потечет по рамке при изменении угла между нормалью к рамке и линиями индукции: 1) от 0 до 45° ; 2) от 45 до 90° .

466. Проволочный виток диаметром $D = 5 \text{ см}$ и сопротивлением $R = 0,02 \text{ Ом}$ находится в однородном магнитном поле ($B = 0,3 \text{ Тл}$). Плоскость витка составляет угол $\varphi = 40^\circ$ с линиями индукции. Какой заряд Q протечет по витку при выключении магнитного поля?

467. Рамка, содержащая $N = 200$ витков тонкого провода, может свободно вращаться относительно оси, лежащей в плоскости рамки. Площадь рамки $S = 50 \text{ см}^2$. Ось рамки перпендикулярна линиям индукции однородного магнитного поля ($B = 0,05 \text{ Тл}$). Определить максимальную ЭДС \mathcal{E}_{max} , которая индуцируется в рамке при ее вращении с частотой $n = 40 \text{ с}^{-1}$.

468. Прямой проводящий стержень длиной $l = 40 \text{ см}$ находится в однородном магнитном поле ($B = 0,1 \text{ Тл}$). Концы стержня замкнуты гибким проводом, находящимся

ся вне поля. Сопротивление всей цепи $R=0,5$ Ом. Какая мощность P потребуется для равномерного перемещения стержня перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью $v=10$ м/с?

469. Проволочный контур площадью $S=500$ см² и сопротивлением $R=0,1$ Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле ($B=0,5$ Тл). Ось вращения лежит в плоскости кольца и перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить максимальную мощность P_{\max} , необходимую для вращения контура с угловой скоростью $\omega=50$ рад/с.

470. Кольцо из медного провода массой $m=10$ г помещено в однородное магнитное поле ($B=0,5$ Тл) так, что плоскость кольца составляет угол $\beta=60^\circ$ с линиями магнитной индукции. Определить заряд Q , который пройдет по кольцу, если снять магнитное поле.

471. Соленоид сечением $S=10$ см² содержит $N=10^3$ витков. При силе тока $I=5$ А магнитная индукция B поля внутри соленоида равна $0,05$ Тл. Определить индуктивность L соленоида.

472. На картонный каркас длиной $l=0,8$ м и диаметром $D=4$ см намотан в один слой провод диаметром $d=0,25$ мм так, что витки плотно прилегают друг к другу. Вычислить индуктивность L получившегося соленоида.

473. Катушка, намотанная на магнитный цилиндрический каркас, имеет $N=250$ витков и индуктивность $L_1=36$ мГн. Чтобы увеличить индуктивность катушки до $L_2=100$ мГн, обмотку катушки сняли и заменили обмоткой из более тонкой проволоки с таким расчетом, чтобы длина катушки осталась прежней. Сколько витков оказалось в катушке после перемотки?

474. Индуктивность L соленоида, намотанного в один слой на немагнитный каркас, равна $0,5$ мГн. Длина l соленоида равна $0,6$ м, диаметр $D=2$ см. Определить отношение n числа витков соленоида к его длине.

475. Соленоид содержит $N=800$ витков. Сечение сердечника (из немагнитного материала) $S=10$ см². По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией $B=8$ мТл. Определить среднее значение ЭДС $\langle \mathcal{E}_s \rangle$ самоиндукции, которая возникает на зажимах соленоида, если сила тока уменьшается практически до нуля за время $\Delta t=0,8$ мс.

476. По катушке индуктивностью $L=8$ мкГн течет ток $I=6$ А. Определить среднее значение ЭДС $\langle \mathcal{E}_s \rangle$ само-

индукции, возникающей в контуре, если сила тока изменится практически до нуля за время $\Delta t = 5$ мс.

477. В электрической цепи, содержащей резистор сопротивлением $R = 20$ Ом и катушку индуктивностью $L = 0,06$ Гн, течет ток $I = 20$ А. Определить силу тока I в цепи через $\Delta t = 0,2$ мс после ее размыкания.

478. Цепь состоит из катушки индуктивностью $L = 0,1$ Гн и источника тока. Источник тока отключили, не разрывая цепи. Время, через которое сила тока уменьшится до 0,001 первоначального значения, равно $t = 0,07$ с. Определить сопротивление катушки.

479. Источник тока замкнули на катушку сопротивлением $R = 10$ Ом и индуктивностью $L = 0,2$ Гн. Через какое время сила тока в цепи достигнет 50% максимального значения?

480. Источник тока замкнули на катушку сопротивлением $R = 20$ Ом. Через время $t = 0,1$ с тока I в катушке достигла 0,95 предельного значения. Определить индуктивность L катушки.

5. ОПТИКА

Основные формулы

Скорость света в среде

$$v = c/n,$$

где c — скорость света в вакууме; n — показатель преломления среды.

Оптическая длина пути световой волны

$$L = nl,$$

где l — геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n .

Оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta = L_1 - L_2.$$

Зависимость разности фаз от оптической разности хода световых волн

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{\Delta}{\lambda} \right),$$

где λ — длина световой волны.

Условие максимального усиления света при интерференции

$$\Delta = \pm k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Условие максимального ослабления света

$$\Delta = \pm(2k + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Оптическая разность хода световых волн, возникающая при отражении монохроматического света от тонкой пленки,

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} \pm \frac{\lambda}{2},$$

или

$$\Delta = 2dn \cos i_2 \pm \frac{\lambda}{2},$$

где d — толщина пленки; n — показатель преломления пленки; i_1 — угол падения; i_2 — угол преломления света в пленке.

Радиус светлых колец Ньютона в отраженном свете

$$r_k = \sqrt{(2k - 1)R\lambda/2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где k — номер кольца; R — радиус кривизны.

Радиус темных колец Ньютона в отраженном свете

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}.$$

Угол φ отклонения лучей, соответствующий максимуму (светлая полоса) при дифракции на одной щели, определяется из условия

$$a \sin \varphi = (2k + 1)\lambda/2 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

где a — ширина щели; k — порядковый номер максимума.

Угол φ отклонения лучей, соответствующий максимуму (светлая полоса) при дифракции света на дифракционной решетке, определяется из условия

$$d \sin \varphi = \pm k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

где d — период дифракционной решетки.

Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \lambda/\Delta\lambda = kN,$$

где $\Delta\lambda$ — наименьшая разность длин волн двух соседних спектральных линий (λ и $\lambda + \Delta\lambda$), при которой эти линии

могут быть видны раздельно в спектре, полученном посредством данной решетки; N — полное число щелей решетки.

Формула Вульфа — Брэггов

$$2d \sin \theta = k\lambda,$$

где θ — угол скольжения (угол между направлением параллельного пучка рентгеновского излучения, падающего на кристалл, и атомной плоскостью в кристалле); d — расстояние между атомными плоскостями кристалла.

Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} \varepsilon_B = n_{21},$$

где ε_B — угол падения, при котором отразившийся от диэлектрика луч полностью поляризован; n_{21} — относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

где I_0 — интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; I — интенсивность этого света после анализатора; α — угол между направлением колебаний электрического вектора света, падающего на анализатор, и плоскостью пропускания анализатора (если колебания электрического вектора падающего света совпадают с этой плоскостью, то анализатор пропускает данный свет без ослабления).

Угол поворота плоскости поляризации монохроматического света при прохождении через оптически активное вещество:

а) $\varphi = \alpha d$ (в твердых телах),

где α — постоянная вращения; d — длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе;

б) $\varphi = [\alpha] \rho d$ (в растворах),

где $[\alpha]$ — удельное вращение; ρ — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

Релятивистская масса

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \text{ или } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где m_0 — масса покоя частицы; v — ее скорость; c — скорость света в вакууме; β — скорость частицы, выраженная в долях скорости света ($\beta = v/c$).

лась на противоположную. При какой наименьшей толщине d_{\min} пленки это возможно?

Решение. Изменение интерференционной картины на противоположную означает, что на тех участках экрана, где наблюдались интерференционные максимумы, стали наблюдаться интерференционные минимумы. Такой сдвиг интерференционной картины возможен при изменении оптической разности хода пучков световых волн на нечетное число половин длин волн, т. е.

$$\Delta_2 - \Delta_1 = (2k + 1)\lambda/2, \quad (1)$$

где Δ_1 — оптическая разность хода пучков световых волн до внесения пленки; Δ_2 — оптическая разность хода тех же пучков после внесения пленки; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Наименьшей толщине d_{\min} пленки соответствует $k=0$. При этом формула (1) примет вид

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \lambda/2. \quad (2)$$

Выразим оптические разности хода Δ_2 и Δ_1 . Из рис. 59 следует:

$$\Delta_1 = l_1 - l_2,$$

$$\Delta_2 = [(l_1 - d_{\min}) + nd_{\min}] - l_2 = (l_1 - l_2) + d_{\min}(n - 1).$$

Подставим выражения Δ_1 и Δ_2 в формулу (2):

$$(l_1 - l_2) + d_{\min}(n - 1) - (l_1 - l_2) = \lambda/2,$$

или

$$d_{\min}(n - 1) = \lambda/2.$$

Отсюда

$$d_{\min} = \lambda/[2(n - 1)].$$

Произведем вычисления:

$$d_{\min} = \frac{0,8}{2(1,33 - 1)} \text{ мкм} = 1,21 \text{ мкм}.$$

Пример 2. На стеклянный клин с малым углом нормально к его грани падает параллельный пучок лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм. Число m возникающих при этом интерференционных полос, приходящихся на отрезок клина длиной l , равно 10. Определить угол α клина.

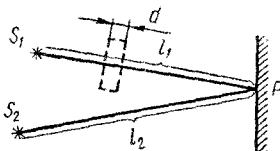


Рис. 59

Решение. Параллельный пучок света, падая нормально к

границы клина, отражается как от верхней, так и от нижней грани. Эти отраженные пучки света когерентны. Поэтому на поверхности клина будут наблюдаться интерференционные полосы. Так как угол клина мал, то отраженные пучки 1 и 2 света (рис. 60) будут практически параллельными.

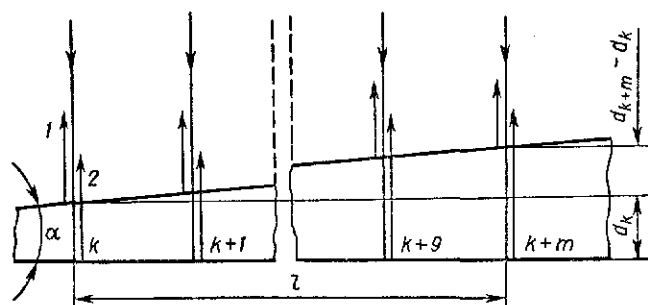


Рис. 60

Темные полосы видны на тех участках клина, для которых разность хода лучей кратна нечетному числу половин длин волн:

$$\Delta = (2k + 1)\lambda/2 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1)$$

Разность хода Δ двух волн складывается из разности оптических длин путей этих волн ($2dn \cos \epsilon'_2$) и половины длины волны ($\lambda/2$). Величина $\lambda/2$ представляет собой добавочную разность хода, возникающую при отражении световой волны 1 от оптически более плотной среды. Подставляя в формулу (1) разность хода Δ световых волн, получаем

$$2d_k n \cos \epsilon'_2 + \lambda/2 = (2k + 1)\lambda/2, \quad (2)$$

где n — показатель преломления стекла ($n = 1,5$); d_k — толщина клина в том месте, где наблюдается темная полоса, соответствующая номеру k ; ϵ'_2 — угол преломления.

Согласно условию, угол падения равен нулю; следовательно, и угол преломления ϵ'_2 равен нулю, а $\cos \epsilon'_2 = 1$. Раскрыв скобки в правой части равенства (2), после упрощения получим

$$2d_k n = k\lambda. \quad (3)$$

Пусть произвольной темной полосе k -го номера соответствует толщина d_k клина, а темной полосе $k+m$ -го номера — толщина d_{k+m} клина. Тогда (рис. 60), учитывая, что m полос укладывается на расстоянии l , найдем:

$$\sin \alpha = (d_{k+m} - d_k) / l. \quad (4)$$

Выразим из (3) d_k и d_{k+m} и подставим их в формулу (4). Затем, учитывая, что $\sin \alpha = \alpha$ (из-за малости угла α), получим

$$\alpha = \frac{(k+m)\lambda - k\lambda}{2nl} = \frac{m\lambda}{2nl}.$$

Подставляя значения физических величин, найдем

$$\alpha = \frac{10 \cdot 0,6 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 1,5 \cdot 1} \text{ рад} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

Выразим α в секундах. Для этого можно воспользоваться соотношением между радианом и секундой: $1 \text{ рад} = 206\,265'' \approx 2,06 \cdot 10^5''$. Тогда

$$\alpha = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2,06 \cdot 10^5 = 41,2''.$$

Пример 3. На дифракционную решетку в направлении нормали к ее поверхности падает монохроматический свет. Период решетки $d = 2$ мкм. Определить наибольший порядок дифракционного максимума, который дает эта решетка в случае красного ($\lambda_1 = 0,7$ мкм) и в случае фиолетового ($\lambda_2 = 0,41$ мкм) света.

Решение. Из формулы, определяющей положение главных максимумов дифракционной решетки, найдем порядок m дифракционного максимума:

$$m = (d \sin \varphi) / \lambda, \quad (1)$$

где d — период решетки; φ — угол дифракции; λ — длина волны монохроматического света. Так как $\sin \varphi$ не может быть больше 1, то число m не может быть больше d/λ , т. е.

$$m \leq d/\lambda. \quad (2)$$

Подставив в формулу (2) значения величин, получим:

$$m \leq 2/0,7 = 2,86 \quad (\text{для красных лучей});$$

$$m \leq 2/0,41 = 4,88 \quad (\text{для фиолетовых лучей}).$$

Если учесть, что порядок максимумов является целым числом, то для красного света $m_{\max} = 2$ и для фиолетового $m_{\max} = 4$.

Пример 4. Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от пластины пучок света образует угол $\varphi = 97^\circ$ с падающим пучком (рис. 61). Определить показатель преломления n_1 жидкости, если отраженный свет максимально поляризован.

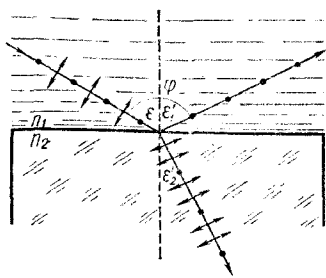


Рис. 61

Решение. Согласно закону Брюстера, пучок света, отраженный от диэлектрика, максимально поляризован в том случае, если тангенс угла падения численно равен относительному показателю преломления $\operatorname{tg} \varepsilon = n_{21}$, где n_{21} — показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (жидкости).

Относительный показатель преломления равен отношению абсолютных показателей преломления. Следовательно, $\operatorname{tg} \varepsilon = n_2/n_1$.

Так как угол падения равен углу отражения, то $\varepsilon = \varphi/2$ и, следовательно, $\operatorname{tg}(\varphi/2) = n_2/n_1$, откуда

$$n_1 = \frac{n_2}{\operatorname{tg}(\varphi/2)}.$$

Произведем вычисления:

$$n_1 = \frac{1,5}{\operatorname{tg}(97^\circ/2)} = \frac{1,5}{1,13} = 1,33.$$

Пример 5. Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол между их плоскостями пропускания составляет $\alpha = 60^\circ$. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность I_0 естественного света: 1) при прохождении через один николю N_1 ; 2) при прохождении через оба николя. Коэффициент поглощения света в николе $k = 0,05$. Потери на отражение света не учитывать.

Решение 1. Естественный свет, падая на грань призмы Николя (рис. 62), расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два пучка: обыкновенный и необыкновенный. Оба пучка одинаковы по интенсивности и полностью поляризованы. Плоскость колебаний необыкновенного пучка лежит в плоскости чертежа (плоскость главного сечения). Плоскость колебаний

обыкновенного пучка перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный пучок света (o) вследствие полного отражения от границы AB отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный пучок (e) проходит через призму, уменьшая свою интенсивность вследствие поглощения. Таким образом, интенсивность света, прошедшего через первую призму,

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1 - k).$$

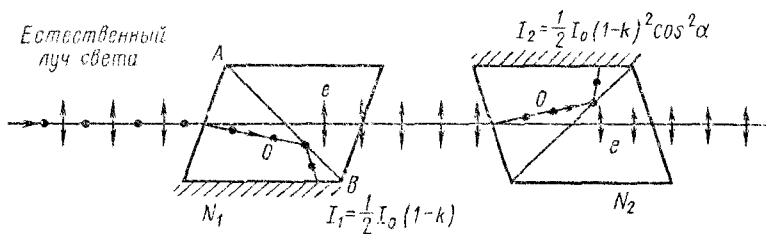


Рис. 62

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность I_0 естественного света, падающего на первый николю, на интенсивность I_1 поляризованного света:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2I_0}{I_0(1-k)} = \frac{2}{1-k}. \quad (1)$$

Произведем вычисления:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2}{1-0,05} = 2,1.$$

Таким образом, интенсивность уменьшается в 2,1 раза.

2. Плоскополяризованный пучок света интенсивности I_1 падает на второй николю N_2 и также расщепляется на два пучка различной интенсивности: обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный пучок полностью поглощается призмой, поэтому интенсивность его нас не интересует. Интенсивность I_2 необыкновенного пучка, вышедшего из призмы N_2 , определяется законом Малюса (без учета поглощения света во втором николе):

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha,$$

где α — угол между плоскостью колебаний в поляризованном пучке и плоскостью пропускания николя N_2 .

Учитывая потери интенсивности на поглощение во втором николе, получаем

$$I_2 = I_1(1 - k)\cos^2\alpha.$$

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность I_0 естественного света на интенсивность I_2 света, прошедшего систему из двух николей:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1(1-k)\cos^2\alpha}.$$

Заменяя отношение I_0/I_1 его выражением по формуле (1), получаем

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha}.$$

Произведем вычисления:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-0,05)^2\cos^2 60^\circ} = 8,86.$$

Таким образом, после прохождения света через два николя интенсивность его уменьшится в 8,86 раза.

Пример 6. Плоскополяризованный монохроматический пучок света падает на поляроид и полностью им гасится. Когда на пути пучка поместили кварцевую пластину, интенсивность I пучка света после поляроида стала равна половине интенсивности пучка, падающего на поляроид. Определить минимальную толщину кварцевой пластины. Поглощением и отражением света поляроидом пренебречь, постоянную вращения α кварца принять равной 48,9 град/мм.

Решение. Полное гашение света поляроидом означает, что плоскость пропускания поляроида (штриховая линия на рис. 63) перпендикулярна плоскости колебаний (I—I) плоскополяризованного света, падающего на него. Введение кварцевой пластины приводит к повороту плоскости колебаний света на угол

$$\varphi = \alpha l, \quad (1)$$

где l — толщина пластины.

Зная, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении его через поляроид, определим угол β , который установится между

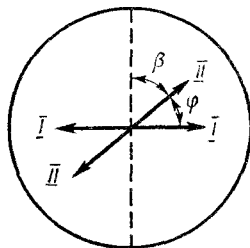


Рис. 63

плоскостью пропускания поляроида и новым направлением (II—II) плоскости колебаний падающего на поляризатор плоскополяризованного света. Для этого воспользуемся законом Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \beta.$$

Заметив, что $\beta = \pi/2 - \varphi$, можно написать

$$I = I_0 \cos^2(\pi/2 - \varphi), \text{ или } I = I_0 \sin^2 \varphi. \quad (2)$$

Из равенства (2) с учетом (1) получим $\alpha l = \arcsin \sqrt{I/I_0}$, откуда искомая толщина пластины

$$l = (1/\alpha) \arcsin \sqrt{I/I_0}.$$

Произведем вычисления во внесистемных единицах:

$$l = \frac{1}{48,9} \arcsin \sqrt{1/2} \text{ мм} = \frac{0,785}{48,9} \text{ мм} = 16 \text{ мкм}.$$

Пример 7. Определить импульс p и кинетическую энергию T электрона, движущегося со скоростью $v = 0,9c$, где c — скорость света в вакууме.

Решение. Импульсом частицы называется произведение массы частицы на ее скорость:

$$p = mv. \quad (1)$$

Так как скорость электрона близка к скорости света, то необходимо учесть зависимость массы от скорости, определяемую по формуле

$$m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (2)$$

где m — масса движущейся частицы; m_0 — масса покоящейся частицы; $\beta = v/c$ — скорость частицы, выраженная в долях скорости света.

Заменив в формуле (1) массу m ее выражением (2) и приняв во внимание, что $v = c\beta$, получим выражение для релятивистского импульса:

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \beta c = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \beta c. \quad (3)$$

Произведем вычисления:

$$p = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{\sqrt{1 - 0,81}} 0,9 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ кг} \cdot \text{м/с} = 5,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

В релятивистской механике кинетическая энергия T частицы определяется как разность между полной энергией E и энергией покоя E_0 этой частицы, т. е. $T = E - E_0$.

Так как $E = mc^2$ и $E_0 = m_0c^2$, то, учитывая зависимость массы от скорости, получаем $T = m_0c^2 / \sqrt{1 - \beta^2} - m_0c^2$ или

$$T = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (4)$$

Произведем вычисления:

$$\begin{aligned} T &= 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0,81}} - 1 \right) \text{ Дж} = \\ &= 8,18 \cdot 10^{-14} \cdot (2,29 - 1) \text{ Дж} = 1,06 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}. \end{aligned}$$

Так как во внесистемных единицах $m_0c^2 = 0,51 \text{ МэВ}$, то вычисления упрощаются:

$$T = 0,51 \cdot 1,29 \text{ МэВ} = 0,66 \text{ МэВ}.$$

Пример 8. Определить релятивистский импульс электрона, обладающего кинетической энергией $T = 5 \text{ МэВ}$.

Решение. Решение задачи сводится к установлению соотношения между релятивистским импульсом p частицы и ее кинетической энергией T .

Сначала установим связь между релятивистским импульсом и полной энергией частицы. Полная энергия E частицы прямо пропорциональна ее массе, т. е.

$$E = mc^2. \quad (1)$$

Зависимость массы от скорости определяется формулой

$$m = m_0 / \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (2)$$

Заменив массу m в формуле (1) ее выражением (2) и приняв во внимание, что $m_0c^2 = E_0$, получим

$$E = E_0 / \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (3)$$

Возведя обе части равенства (3) в квадрат, найдем $E^2 = E_0^2 / (1 - \beta^2)$, откуда

$$E^2 - (\beta E)^2 = E_0^2. \quad (4)$$

Очевидно, что

$$\beta E = (v/c)mc^2 = mvc = pc.$$

Поэтому равенство (4) можно переписать в виде $E^2 - p^2c^2 = E_0^2$, откуда релятивистский импульс

$$p = (1/c)\sqrt{E^2 - E_0^2} = (1/c)\sqrt{(E - E_0)(E + E_0)}.$$

откуда

$$v_{\max} = \sqrt{2(\epsilon_1 - A)/m_0}. \quad (5)$$

Проверим, дает ли полученная формула единицу скорости. Для этого в правую часть формулы (5) вместо символов величин подставим обозначения единиц:

$$\left(\frac{|\epsilon_1 - A|}{|m_0|}\right)^{1/2} = \left(\frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ кг}}\right)^{1/2} = \left(\frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2}{1 \text{ кг}}\right)^{1/2} = 1 \text{ м/с}.$$

Найденная единица является единицей скорости. Подставив значения величин в формулу (5), найдем

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2(1,28 \cdot 10^{-18} - 0,75 \cdot 10^{-18})}{9,11 \cdot 10^{-31}}} \text{ м/с} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

2. Вычислим энергию фотона γ -излучения:

$$\epsilon_2 = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-12}} \text{ Дж} = 1,99 \cdot 10^{-13} \text{ Дж},$$

или во внесистемных единицах

$$\epsilon_2 = \frac{1,99 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ эВ} = 1,24 \cdot 10^6 \text{ эВ} = 1,24 \text{ МэВ}.$$

Работа выхода электрона ($A = 4,7 \text{ эВ}$) пренебрежимо мала по сравнению с энергией фотона ($\epsilon_2 = 1,24 \text{ МэВ}$), поэтому можно принять, что максимальная кинетическая энергия электрона равна энергии фотона: $T_{\max} = \epsilon_2 = 1,24 \text{ МэВ}$. Так как в данном случае кинетическая энергия электрона больше его энергии покоя, то для вычисления скорости электрона следует взять релятивистскую формулу кинетической энергии (4). Из этой формулы найдем

$$\beta = \sqrt{(2E_0 + T)T / (E_0 + T)}.$$

Заметив, что $v = c\beta$ и $T_{\max} = \epsilon_2$, получим

$$v_{\max} = c \sqrt{(2E_0 + \epsilon_2)\epsilon_2 / (E_0 + \epsilon_2)}.$$

Произведем вычисления*:

$$v_{\max} = 3 \cdot 10^8 \frac{\sqrt{(2 \cdot 0,51 + 1,24) \cdot 1,24}}{0,51 + 1,24} \text{ м/с} = 2,85 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Пример 11. В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на угол $\theta =$

* Энергии E_0 и ϵ_2 входят в формулу в виде отношения, поэтому их можно не выражать в единицах СИ.

$= 90^\circ$. Энергия рассеянного фотона $\epsilon_2 = 0,4$ МэВ. Определить энергию фотона ϵ_1 до рассеяния.

Решение. Для определения энергии первичного фотона воспользуемся формулой Комптона:

$$\Delta\lambda = 2 \frac{h}{m_0c} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (1)$$

где $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ — изменение длины волны фотона в результате рассеяния на свободном электроне; h — постоянная Планка; m_0 — масса покоя электрона; c — скорость света в вакууме; ϑ — угол рассеяния фотона.

Преобразуем формулу (1): 1) заменим в ней $\Delta\lambda$ на $\lambda_2 - \lambda_1$; 2) выразим длины волн λ_1 и λ_2 через энергии ϵ_1 и ϵ_2 соответствующих фотонов, воспользовавшись формулой $\epsilon = hc/\lambda$; 3) умножим числитель и знаменатель правой части формулы на c . Тогда

$$\frac{hc}{\epsilon_2} - \frac{hc}{\epsilon_1} = \frac{hc}{m_0c^2} 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Сократим на hc и выразим из этой формулы искомую энергию:

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_2 m_0 c^2}{m_0 c^2 - \epsilon_2 2 \sin^2(\vartheta/2)} = \frac{\epsilon_2 E_0}{E_0 - 2\epsilon_0 \sin^2(\vartheta/2)}, \quad (2)$$

где $E_0 = m_0 c^2$ — энергия покоя электрона.

Вычисления по формуле (2) удобнее вести во внесистемных единицах. Так как для электрона $E_0 = 0,511$ МэВ, то

$$\epsilon_1 = \frac{0,4 \cdot 0,511}{0,511 - 2 \cdot 0,4 \sin^2(90^\circ/2)} \text{ МэВ} = 1,85 \text{ МэВ}.$$

Пример 12. Пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 663$ нм падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Поток излучения $\Phi_e = 0,6$ Вт. Определить: 1) силу давления F , испытываемую этой поверхностью; 2) число фотонов каждую секунду падающих на поверхность.

Решение. 1. Сила светового давления на поверхность равна произведению светового давления p на площадь S поверхности:

$$F = pS. \quad (1)$$

Световое давление может быть найдено по формуле

$$p = E_e(\rho + 1)/c, \quad (2)$$

где E_e — энергетическая освещенность;

c — скорость света в вакууме; ρ — коэффициент отражения.

Подставляя правую часть выражения (2) в формулу (1), получаем

$$F = E_e S(\rho + 1)/c. \quad (3)$$

Так как $E_e S$ представляет собой поток излучения Φ_e , то

$$F = \Phi_e(\rho + 1)/c. \quad (4)$$

Произведем вычисления, учитывая, что для зеркальной поверхности $\rho = 1$:

$$F = \frac{0,6}{3 \cdot 10^8} (1+1) \text{Н} = 4 \text{нН}.$$

2. Произведение энергии ϵ одного фотона на число фотонов n_1 , ежесекундно падающих на поверхность, равно мощности излучения, т. е. потоку излучения: $\Phi_e = \epsilon n_1$, а так как энергия фотона $\epsilon = hc/\lambda$, то

$$\Phi_e = hc n_1 / \lambda,$$

откуда

$$n_1 = \Phi_e \lambda / (hc). \quad (5)$$

Произведем вычисления:

$$n_1 = \frac{0,6 \cdot 6,63 \cdot 10^{-7}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{с}^{-1} = 2 \cdot 10^{18} \text{с}^{-1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. На пути пучка света поставлена стеклянная пластинка толщиной $d = 1$ мм так, что угол падения луча $i_1 = 30^\circ$. На сколько изменится оптическая длина пути светового пучка? [550 мкм]

2. На мыльную пленку с показателем преломления $n = 1,33$ падает по нормали монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм. Отраженный свет в результате интерференции имеет наибольшую яркость. Какова наименьшая возможная толщина d_{\min} пленки? [0,113 мкм]

3. Радиус второго темного кольца Ньютона в отраженном свете $r_2 = 0,4$ мм. Определить радиус R кривизмы плосковыпуклой линзы, взятой для опыта, если она освещена

щается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0,64$ мкм. [125 мм]

4. На пластину с щелью, ширина которой $a = 0,05$ мм, падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,7$ мкм. Определить угол φ отклонения лучей, соответствующий первому дифракционному максимуму. [$1^\circ 12'$]

5. Дифракционная решетка, освещенная нормально падающим монохроматическим светом, отклоняет спектр третьего порядка на угол $\varphi_1 = 30^\circ$. На какой угол φ_2 отклоняет она спектр четвертого порядка? [$41^\circ 50'$]

6. Угол преломления луча в жидкости $i_2 = 35^\circ$. Определить показатель преломления n жидкости, если известно, что отраженный пучок света максимально поляризован. [1,48]

7. На сколько процентов уменьшается интенсивность света после прохождения через призму Николя, если потери света составляют 10%? [На 55%]

8. При какой скорости v релятивистская масса частицы в $k = 3$ раза больше массы покоя этой частицы? [$2,83 \cdot 10^8$ м/с]

9. Определить скорость v электрона, имеющего кинетическую энергию $T = 1,53$ МэВ. [$2,91 \cdot 10^8$ м/с]

10. Электрон движется со скоростью $v = 0,6 c$, где c — скорость света в вакууме. Определить релятивистский импульс p электрона. [$2,0 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с]

11. Вычислить энергию, излучаемую за время $t = 1$ мин с площади $S = 1$ см² абсолютно черного тела, температура которого $T = 1000$ К. [340 Дж]

12. Длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения абсолютно черного тела, $\lambda_m = 0,6$ мкм. Определить температуру T тела. [4,82 кК]

13. Определить максимальную спектральную плотность $(r_{\lambda, T})_{\max}$ энергетической светимости (излучательности), рассчитанную на 1 нм в спектре излучения абсолютно черного тела. Температура тела $T = 1$ К. [13 Вт/(м²·нм)]

14. Определить энергию ϵ , массу m и импульс p фотона с длиной волны $\lambda = 1,24$ нм. [$1,60 \cdot 10^{-16}$ Дж; $1,78 \times 10^{-33}$ кг; $5,35 \cdot 10^{-25}$ кг м/с]

15. На пластину падает монохроматический свет ($\lambda = 0,42$ мкм). Фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов $U = 0,95$ В. Определить работу A выхода электронов с поверхности пластины. [2 эВ].

16. На цинковую пластину падает пучок ультрафиолетового излучения ($\lambda = 0,2$ мкм). Определить максимальную кинетическую энергию T_{\max} и максимальную скорость v_{\max} фотоэлектронов. [2,2 эВ; $8,8 \cdot 10^5$ м/с]

17. Определить максимальную скорость v_{\max} фотоэлектрона, вырванного с поверхности металла γ -квантом с энергией $\varepsilon = 1,53$ МэВ [$2,91 \cdot 10^8$ м/с]

18. Определить угол θ рассеяния фотона, испытавшего соударение со свободным электроном, если изменение длины волны при рассеянии $\Delta\lambda = 3,63$ пм. [120°]

19. Фотон с энергией ε_1 , равной энергии покоя электрона (m_0c^2), рассеялся на свободном электроне на угол $\theta = 120^\circ$. Определить энергию ε_2 рассеянного фотона и кинетическую энергию T электрона отдачи (в единицах m_0c^2). [$0,4m_0c^2$; $0,6m_0c^2$]

20. Поток энергии, излучаемой электрической лампой, $\Phi_e = 600$ Вт. На расстоянии $r = 1$ м от лампы перпендикулярно падающим лучам расположено круглое плоское зеркальце диаметром $d = 2$ см. Определить силу F светового давления на зеркальце. Лампу рассматривать как точечный изотропный излучатель. [$0,1$ нН]

21. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,663$ мкм падает на зачерненную поверхность и производит на нее давление $p = 0,3$ мкПа. Определить концентрацию n фотонов в световом пучке. [10^{12} м $^{-3}$]

Контрольная работа 5

Таблицы вариантов для специальностей, учебными планами которых предусмотрено по курсу физики шесть контрольных работ

Вариант	Номера задач							
0	510	520	530	540	550	560	570	580
1	501	511	521	531	541	551	561	571
2	502	512	522	532	542	552	562	572
3	503	513	523	533	543	553	563	573
4	504	514	524	534	544	554	564	574
5	505	515	525	535	545	555	565	575
6	506	516	526	536	546	556	566	576
7	507	517	527	537	547	557	567	577
8	508	518	528	538	548	558	568	578
9	509	519	529	539	549	559	569	579

**Таблица вариантов для специальностей, учебными планами
которых предусмотрено по курсу физики
четыре контрольных работы**

Ва- риант	Номера задач								
0	510	530	550	570	610	630	650	670	
1	501	521	541	561	601	621	641	661	
2	502	522	542	562	602	622	642	662	
3	503	523	543	563	603	623	643	663	
4	504	524	544	564	604	624	644	664	
5	505	525	545	565	605	625	645	665	
6	506	526	546	566	606	626	646	666	
7	507	527	547	567	607	627	647	667	
8	508	528	548	568	608	628	648	668	
9	509	529	549	569	609	629	649	669	

501. Между стеклянной пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой линзой находится жидкость. Найти показатель преломления жидкости, если радиус r_3 третьего темного кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм равен $0,82$ мм. Радиус кривизны линзы $R = 0,5$ м.

502. На тонкую пленку в направлении нормали к ее поверхности падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Отраженный от нее свет максимально усилен вследствие интерференции. Определить минимальную толщину d_{\min} пленки, если показатель преломления материала пленки $n = 1,4$.

503. Расстояние L от щелей до экрана в опыте Юнга равно 1 м. Определить расстояние между щелями, если на отрезке длиной $l = 1$ см укладывается $N = 10$ темных интерференционных полос. Длина волны $\lambda = 0,7$ мкм.

504. На стеклянную пластину положена выпуклой стороной плосковыпуклая линза. Сверху линза освещена монохроматическим светом длиной волны $\lambda = 500$ нм. Найти радиус R линзы, если радиус четвертого, темного кольца Ньютона в отраженном свете $r_4 = 2$ мм.

505. На тонкую глицериновую пленку толщиной $d = 1,5$ мкм нормально к ее поверхности падает белый свет. Определить длины волн λ лучей видимого участка спектра ($0,4 \leq \lambda \leq 0,8$ мкм), которые будут ослаблены в результате интерференции.

506. На стеклянную пластину нанесен тонкий слой прозрачного вещества с показателем преломления $n = 1,3$. Пластинка освещена параллельным пучком монохроматического света с длиной волны $\lambda = 640$ нм,

падающим на пластинку нормально. Какую минимальную толщину d_{\min} должен иметь слой, чтобы отраженный пучок имел наименьшую яркость?

507. На тонкий стеклянный клин падает нормально параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Расстояние между соседними темными интерференционными полосами в отраженном свете $b = 0,5$ мм. Определить угол α между поверхностями клина. Показатель преломления стекла, из которого изготовлен клин, $n = 1,6$.

508. Плосковыпуклая стеклянная линза с $f = 1$ м лежит выпуклой стороной на стеклянной пластинке. Радиус пятого темного кольца Ньютона в отраженном свете $r_5 = 1,1$ мм. Определить длину световой волны λ .

509. Между двумя плоскопараллельными пластинами на расстоянии $L = 10$ см от границы их соприкосновения находится проволока диаметром $d = 0,01$ мм, образуя воздушный клин. Пластины освещаются нормально падающим монохроматическим светом ($\lambda = 0,6$ мкм). Определить ширину b интерференционных полос, наблюдаемых в отраженном свете.

510. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается нормально падающим монохроматическим светом ($\lambda = 590$ нм). Радиус кривизны R линзы равен 5 см. Определить толщину d_3 воздушного промежутка в том месте, где в отраженном свете наблюдается третье светлое кольцо.

511. Какое наименьшее число N_{\min} штрихов должна содержать дифракционная решетка, чтобы в спектре второго порядка можно было видеть отдельно две желтые линии натрия с длинами волн $\lambda_1 = 589,0$ нм и $\lambda_2 = 589,6$ нм? Какова длина l такой решетки, если постоянная решетки $d = 5$ мкм?

512. На поверхность дифракционной решетки нормально к ее поверхности падает монохроматический свет. Постоянная дифракционной решетки в $n = 4,6$ раза больше длины световой волны. Найти общее число M дифракционных максимумов, которые теоретически можно наблюдать в данном случае.

513. На дифракционную решетку падает нормально параллельный пучок белого света. Спектры третьего и четвертого порядка частично накладываются друг на друга. На какую длину волны в спектре четвертого порядка накладывается граница ($\lambda = 780$ нм) спектра третьего порядка?

514. На дифракционную решетку, содержащую $n = 600$ штрихов на миллиметр, падает нормально белый свет. Спектр проецируется помещенной вблизи решетки линзой на экран. Определить длину l спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана $L = 1,2$ м. Границы видимого спектра: $\lambda_{кр} = 780$ нм, $\lambda_{ф} = 400$ нм.

515. На грань кристалла каменной соли падает параллельный пучок рентгеновского излучения. Расстояние d между атомными плоскостями равно 280 пм. Под углом $\theta = 65^\circ$ к атомной плоскости наблюдается дифракционный максимум первого порядка. Определить длину волны λ рентгеновского излучения.

516. На непрозрачную пластину с узкой щелью падает нормально плоская монохроматическая световая волна ($\lambda = 600$ нм). Угол отклонения лучей, соответствующих второму дифракционному максимуму, $\varphi = 20^\circ$. Определить ширину a щели.

517. На дифракционную решетку, содержащую $n = 100$ штрихов на 1 мм, нормально падает монохроматический свет. Зрительная труба спектрометра наведена на максимум второго порядка. Чтобы навести трубу на другой максимум того же порядка, ее нужно повернуть на угол $\Delta\varphi = 16^\circ$. Определить длину волны λ света, падающего на решетку.

518. На дифракционную решетку падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 410$ нм). Угол $\Delta\varphi$ между направлениями на максимумы первого и второго порядков равен $2^\circ 21'$. Определить число n штрихов на 1 мм дифракционной решетки.

519. Постоянная дифракционной решетки в $n = 4$ раза больше длины световой волны монохроматического света, нормально падающего на ее поверхность. Определить угол α между двумя первыми симметричными дифракционными максимумами.

520. Расстояние между штрихами дифракционной решетки $d = 4$ мкм. На решетку падает нормально свет с длиной волны $\lambda = 0,58$ мкм. Максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка?

521. Пластинку кварца толщиной $d = 2$ мм поместили между параллельными николями, в результате чего плоскость поляризации монохроматического света повернулась на угол $\varphi = 53^\circ$. Какой наименьшей толщины d_{min} следует взять пластинку, чтобы поле зрения поляриметра стало совершенно темным?

522. Параллельный пучок света переходит из глицерина в стекло так, что пучок, отраженный от границы раздела этих сред, оказывается максимально поляризованным. Определить угол γ между падающим и преломленным пучками.

523. Кварцевую пластинку поместили между скрещенными николями. При какой наименьшей толщине d кварцевой пластины поле зрения между николями будет максимально просветлено? Постоянная вращения α кварца равна 27 град/мм.

524. При прохождении света через трубку длиной $l_1 = 20$ см, содержащую раствор сахара концентрацией $C_1 = 10\%$, плоскость поляризации света повернулась на угол $\varphi_1 = 13,3^\circ$. В другом растворе сахара, налитом в трубку длиной $l_2 = 15$ см, плоскость поляризации повернулась на угол $\varphi_2 = 5,2^\circ$. Определить концентрацию C_2 второго раствора.

525. Пучок света последовательно проходит через два николя, плоскости пропускания которых образуют между собой угол $\varphi = 40^\circ$. Принимая, что коэффициент поглощения k каждого николя равен 0,15, найти, во сколько раз пучок света, выходящий из второго николя, ослаблен по сравнению с пучком, падающим на первый николь.

526. Угол падения ϵ луча на поверхность стекла равен 60° . При этом отраженный пучок света оказался максимально поляризованным. Определить угол ϵ_2 преломления луча.

527. Угол α между плоскостями пропускания поляризаторов равен 50° . Естественный свет, проходя через такую систему, ослабляется в $n = 8$ раз. Пренебрегая потерей света при отражении, определить коэффициент поглощения k света в поляриоидах.

528. Пучок света, идущий в стеклянном сосуде с глицерином, отражается от дна сосуда. При каком угле ϵ падения отраженный пучок света максимально поляризован?

529. Пучок света переходит из жидкости в стекло. Угол падения ϵ пучка равен 60° , угол преломления $\epsilon_2 = 50^\circ$. При каком угле падения ϵ_B пучок света, отраженный от границы раздела этих сред, будет максимально поляризован?

530. Пучок света падает на плоскопараллельную стеклянную пластину, нижняя поверхность которой находится в воде. При каком угле падения ϵ_B свет,

отраженный от границы стекло—вода, будет максимально поляризован?

531. Частица движется со скоростью $v = c/3$, где c — скорость света в вакууме. Какую долю энергии покоя составляет кинетическая энергия частицы?

532. Протон с кинетической энергией $T = 3$ ГэВ при торможении потерял треть этой энергии. Определить, во сколько раз изменился релятивистский импульс α -частицы.

533. При какой скорости β (в долях скорости света) релятивистская масса любой частицы вещества в $n = 3$ раза больше массы покоя?

534. Определить отношение релятивистского импульса p -электрона с кинетической энергией $T = 1,53$ МэВ к комптоновскому импульсу m_0c электрона.

535. Скорость электрона $v = 0,8c$ (где c — скорость света в вакууме). Зная энергию покоя электрона в мегаэлектрон-вольтах, определить в тех же единицах кинетическую энергию T электрона.

536. Протон имеет импульс $p = 469$ МэВ/с*. Какую кинетическую энергию необходимо дополнительно сообщить протону, чтобы его релятивистский импульс возрос вдвое?

537. Во сколько раз релятивистская масса m электрона, обладающего кинетической энергией $T = 1,53$ МэВ, больше массы покоя m_0 ?

538. Какую скорость β (в долях скорости света) нужно сообщить частице, чтобы ее кинетическая энергия была равна удвоенной энергии покоя?

539. Релятивистский электрон имел импульс $p_1 = m_0c$. Определить конечный импульс этого электрона (в единицах m_0c), если его энергия увеличилась в $n = 2$ раза.

540. Релятивистский протон обладал кинетической энергией, равной энергии покоя. Определить, во сколько раз возрастет его кинетическая энергия, если его импульс увеличится в $n = 2$ раза.

541. Вычислить истинную температуру T вольфрамовой раскаленной ленты, если радиационный пирометр показывает температуру $T_{\text{рад}} = 2,5$ кК. Принять, что поглощательная способность для вольфрама не зависит от частоты излучения и равна $a_i = 0,35$.

* 1 МэВ/с — единица импульса:

$$1 \text{ МэВ/с} = \frac{1,60 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}}{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}} = 5,33 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

542. Черное тело имеет температуру $T_1 = 500$ К. Какова будет температура T_2 тела, если в результате нагревания поток излучения увеличится в $n = 5$ раз?

543. Температура абсолютно черного тела $T = 2$ кК. Определить длину волны λ_m , на которую приходится максимум энергии излучения, и спектральную плотность энергетической светимости (излучательности) $(r_{\lambda, T})_{\max}$ для этой длины волны.

544. Определить температуру T и энергетическую светимость (излучательность) R_e абсолютно черного тела, если максимум энергии излучения приходится на длину волны $\lambda_m = 600$ нм.

545. Из смотрового окошечка печи излучается поток $\Phi_e = 4$ кДж/мин. Определить температуру T печи, если площадь окошечка $S = 8$ см².

546. Поток излучения абсолютно черного тела $\Phi_e = 10$ кВт. Максимум энергии излучения приходится на длину волны $\lambda_m = 0,8$ мкм. Определить площадь S излучающей поверхности.

547. Как и во сколько раз изменится поток излучения абсолютно черного тела, если максимум энергии излучения переместится с красной границы видимого спектра ($\lambda_{m1} = 780$ нм) на фиолетовую ($\lambda_{m2} = 390$ нм)?

548. Определить поглощательную способность a_T серого тела, для которого температура, измеренная радиационным пирометром, $T_{\text{рад}} = 1,4$ кК, тогда как истинная температура T тела равна $3,2$ кК.

549. Муфельная печь, потребляющая мощность $P = 1$ кВт, имеет отверстие площадью $S = 100$ см². Определить долю η мощности, рассеиваемой стенками печи, если температура ее внутренней поверхности равна 1 кК.

550. Средняя энергетическая светимость R поверхности Земли равна $0,54$ Дж/(см² · мин). Какова должна быть температура T поверхности Земли, если условно считать, что она излучает как серое тело с коэффициентом черноты $a_T = 0,25$?

551. Красная граница фотоэффекта для цинка $\lambda_0 = 310$ нм. Определить максимальную кинетическую энергию T_{\max} фотоэлектронов в электрон-вольтах, если на цинк падает свет с длиной волны $\lambda = 200$ нм.

552. На поверхность калия падает свет с длиной волны $\lambda = 150$ нм. Определить максимальную кинетическую энергию T_{\max} фотоэлектронов.

553. Фотон с энергией $\varepsilon = 10$ эВ падает на серебра-

ную пластину и вызывает фотоэффект. Определить импульс p , полученный пластиной, если принять, что направления движения фотона и фотоэлектрона лежат на одной прямой, перпендикулярной поверхности пластины.

554. На фотоэлемент с катодом из лития падает свет с длиной волны $\lambda = 200$ нм. Найти наименьшее значение задерживающей разности потенциалов U_{\min} , которую нужно приложить к фотоэлементу, чтобы прекратить фототок.

555. Какова должна быть длина волны γ -излучения, падающего на платиновую пластину, чтобы максимальная скорость фотоэлектронов была $v_{\max} = 3$ Мм/с?

556. На металлическую пластину направлен пучок ультрафиолетового излучения ($\lambda = 0,25$ мкм). Фототок прекращается при минимальной задерживающей разности потенциалов $U_{\min} = 0,96$ В. Определить работу выхода A электронов из металла.

557. На поверхность металла падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,1$ мкм. Красная граница фотоэффекта $\lambda_0 = 0,3$ мкм. Какая доля энергии фотона расходуется на сообщение электрону кинетической энергии?

558. На металл падает рентгеновское излучение с длиной волны $\lambda = 1$ нм. Пренебрегая работой выхода, определить максимальную скорость v_{\max} фотоэлектронов.

559. На металлическую пластину направлен монохроматический пучок света с частотой $\nu = 7,3 \cdot 10^{14}$ Гц. Красная граница λ_0 фотоэффекта для данного материала равна 560 нм. Определить максимальную скорость v_{\max} фотоэлектронов.

560. На цинковую пластину направлен монохроматический пучок света. Фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов $U = 1,5$ В. Определить длину волны λ света, падающего на пластину.

561. Фотон при эффекте Комптона на свободном электроне был рассеян на угол $\phi = \pi/2$. Определить импульс p (в МэВ/с)*, приобретенный электроном, если энергия фотона до рассеяния была $\epsilon_1 = 1,02$ МэВ.

562. Рентгеновское излучение ($\lambda = 1$ нм) рассеивается электронами, которые можно считать практически свободными. Определить максимальную длину волны λ_{\max} рентгеновского излучения в рассеянном пучке.

563. Какая доля энергии фотона приходится при

* См. сноску на с. 171.

эффекте Комптона на электрон отдачи, если рассеяние фотона происходит на угол $\theta = \pi/2$? Энергия фотона до рассеяния $\epsilon_1 = 0,51$ МэВ.

564. Определить максимальное изменение длины волны $(\Delta\lambda)_{\max}$ при комптоновском рассеянии света на свободных электронах и свободных протонах.

565. Фотон с длиной волны $\lambda_1 = 15$ пм рассеялся на свободном электроне. Длина волны рассеянного фотона $\lambda_2 = 16$ пм. Определить угол θ рассеяния.

566. Фотон с энергией $\epsilon_1 = 0,51$ МэВ был рассеян при эффекте Комптона на свободном электроне на угол $\theta = 180^\circ$. Определить кинетическую энергию T электрона отдачи.

567. В результате эффекта Комптона фотон с энергией $\epsilon_1 = 1,02$ МэВ рассеян на свободных электронах на угол $\theta = 150^\circ$. Определить энергию ϵ_2 рассеянного фотона.

568. Определить угол θ , на который был рассеян квант с энергией $\epsilon_1 = 1,53$ МэВ при эффекте Комптона, если кинетическая энергия электрона отдачи $T = 0,51$ МэВ.

569. Фотон с энергией $\epsilon_1 = 0,51$ МэВ при рассеянии на свободном электроне потерял половину своей энергии. Определить угол рассеяния θ .

570. Определить импульс p_e электрона отдачи, если фотон с энергией $\epsilon_1 = 1,53$ МэВ в результате рассеяния на свободном электроне потерял $1/3$ своей энергии.

571. Определить энергетическую освещенность (облученность) E_e зеркальной поверхности, если давление p , производимое излучением, равно 40 мкПа. Излучение падает нормально к поверхности.

572. Давление p света с длиной волны $\lambda = 40$ нм, падающего нормально на черную поверхность, равно 2 нПа. Определить число N фотонов, падающих за время $t = 10$ с на площадь $S = 1$ мм² этой поверхности.

573. Определить коэффициент отражения ρ поверхности, если при энергетической освещенности $E_e = 120$ Вт/м² давление p света на нее оказалось равным 0,5 мкПа.

574. Давление света, производимое на зеркальную поверхность, $p = 5$ мПа. Определить концентрацию n_0 фотонов вблизи поверхности, если длина волны света, падающего на поверхность, $\lambda = 0,5$ мкм.

575. На расстоянии $r = 5$ м от точечного монохроматического ($\lambda = 0,5$ мкм) изотропного источника расположена площадка ($S = 8$ мм²) перпендикулярно падаю-

щим пучкам. Определить число N фотонов, ежесекундно падающих на площадку. Мощность излучения $P = 100$ Вт.

576. На зеркальную поверхность под углом $\alpha = 60^\circ$ к нормали падает лучок монохроматического света ($\lambda = 590$ нм). Плотность потока энергии светового пучка $\Phi = 1$ кВт/м². Определить давление p , производимое светом на зеркальную поверхность.

577. Свет падает нормально на зеркальную поверхность, находящуюся на расстоянии $r = 10$ см от точечного изотропного излучателя. При какой мощности P излучателя давление p на зеркальную поверхность будет равным 1 мПа?

578. Свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм нормально падает на зеркальную поверхность и производит на нее давление $p = 4$ мкПа. Определить число N фотонов, падающих за время $t = 10$ с на площадь $S = 1$ мм² этой поверхности.

579. На зеркальную поверхность площадью $S = 6$ см² падает нормально поток излучения $\Phi_e = 0,8$ Вт. Определить давление p и силу давления F света на эту поверхность.

580. Точечный источник монохроматического ($\lambda = 1$ нм) излучения находится в центре сферической зачерненной колбы радиусом $R = 10$ см. Определить световое давление p , производимое на внутреннюю поверхность колбы, если мощность источника $P = 1$ кВт.

6. ЭЛЕМЕНТЫ АТОМНОЙ ФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ. ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные формулы

Боровская теория водородоподобного атома. Момент импульса электрона (второй постулат Бора)

$$L_n = \hbar n, \text{ или } m v_n r_n = \hbar n,$$

где m — масса электрона; v_n — скорость электрона на n -й орбите; r_n — радиус n -й стационарной орбиты; \hbar — постоянная Планка; n — главное квантовое число ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Радиус n -й стационарной орбиты

$$r_n = a_0 n^2,$$

где a_0 — первый боровский радиус.

Энергия электрона в атоме водорода

$$E_n = E_i/n^2,$$

где E_i — энергия ионизации атома водорода.

Энергия, излучаемая или поглощаемая атомом водорода,

$$\epsilon = \hbar\omega = E_{n_2} - E_{n_1},$$

или

$$\epsilon = E_i(1/n_1^2 - 1/n_2^2),$$

где n_1 и n_2 — квантовые числа, соответствующие энергетическим уровням, между которыми совершается переход электрона в атоме.

Спектроскопическое волновое число

$$\tilde{\nu} = 1/\lambda = R(1/n_1^2 - 1/n_2^2),$$

где λ — длина волны излучения или поглощения атомом; R — постоянная Ридберга.

Волновые свойства частиц. Длина волны де Бройля

$$\lambda = 2\pi\hbar/p,$$

где p — импульс частицы.

Импульс частицы и его связь с кинетической энергией T :

$$а) p = m_0v; p = \sqrt{2m_0T};$$

$$б) p = mv = \frac{m_0v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; p = \frac{1}{c}\sqrt{(2E_0 + T)T},$$

где m_0 — масса покоя частицы; m — релятивистская масса; v — скорость частицы; c — скорость света в вакууме; E_0 — энергия покоя частицы ($E_0 = m_0c^2$).

Соотношение неопределенностей:

$$а) \Delta p_x \Delta x \geq \hbar \text{ (для координаты и импульса),}$$

где Δp_x — неопределенность проекции импульса на ось X ; Δx — неопределенность координаты;

$$б) \Delta E \Delta t \geq \hbar \text{ (для энергии и времени),}$$

где ΔE — неопределенность энергии; Δt — время жизни квантовой системы в данном энергетическом состоянии.

Одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi(x) = 0,$$

где $\psi(x)$ — волновая функция, описывающая состояние частицы; m — масса частицы; E — полная энергия; $U = U(x)$ — потенциальная энергия частицы.

Плотность вероятности

$$\frac{d\omega(x)}{dx} = |\psi(x)|^2,$$

где $d\omega(x)$ — вероятность того, что частица может быть обнаружена вблизи точки с координатой x на участке dx .

Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2

$$\omega = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx.$$

Решение уравнения Шредингера для одномерного, бесконечно глубокого, прямоугольного потенциального ящика:

а) $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x$ (собственная нормированная волновая функция);

б) $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}$ (собственное значение энергии),

где n — квантовое число ($n = 1, 2, 3, \dots$); l — ширина ящика. В области $0 \leq x \leq l$ $U = \infty$ и $\psi(x) = 0$.

Атомное ядро. Радиоактивность. Массовое число ядра (число нуклонов в ядре)

$$A = Z + N,$$

где Z — зарядовое число (число протонов); N — число нейтронов.

Закон радиоактивного распада

$$dN = -\lambda N dt, \text{ или } N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где dN — число ядер, распадающихся за интервал времени dt ; N — число ядер, не распавшихся к моменту времени t ; N_0 — число ядер в начальный момент ($t=0$); λ — постоянная радиоактивного распада.

Число ядер, распавшихся за время t ,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}).$$

В случае, если интервал времени Δt , за который определяется число распавшихся ядер, много меньше периода полураспада $T_{1/2}$, то число распавшихся ядер можно определить по формуле

$$\Delta N = \lambda N \Delta t.$$

Зависимость периода полураспада от постоянной радиоактивного распада

$$T_{1/2} = (\ln 2) / \lambda = 0,693 / \lambda.$$

Среднее время τ жизни радиоактивного ядра, т. е. интервал времени, за который число нераспавшихся ядер уменьшается в e раз,

$$\tau = 1 / \lambda.$$

Число N атомов, содержащихся в радиоактивном изотопе,

$$N = m N_A / M,$$

где m — масса изотопа; M — молярная масса; N_A — постоянная Авогадро.

Активность A радиоактивного изотопа

$$A = -dN/dt = \lambda N, \text{ или } A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t},$$

где dN — число ядер, распадающихся за интервал времени dt ; A_0 — активность изотопа в начальный момент времени.

Удельная активность изотопа

$$a = A/m.$$

Дефект массы ядра

$$\Delta m = Z m_p + (A - Z) m_n - m_{\bar{y}},$$

где Z — зарядовое число (число протонов в ядре); A — массовое число (число нуклонов в ядре); $(A - Z)$ — число нейтронов в ядре; m_p — масса протона; m_n — масса нейтрона; $m_{\bar{y}}$ — масса ядра.

Энергия связи ядра

$$E_{\text{св}} = \Delta m c^2,$$

где Δm — дефект массы ядра; c — скорость света в вакууме.

Во внесистемных единицах энергия связи ядра равна $E_{\text{св}} = 931 \Delta m$, где дефект массы Δm — в а. е. м.; 931 — коэффициент пропорциональности (1 а. е. м. \sim 931 МэВ).

Теплоемкость кристалла. Средняя энергия квантового одномерного осциллятора

$$\langle \epsilon \rangle = \epsilon_0 + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1},$$

где ϵ_0 — нулевая энергия ($\epsilon_0 = 1/2\hbar\omega$); \hbar — постоянная Планка; ω — круговая частота колебаний осциллятора; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура.

Молярная внутренняя энергия системы, состоящей из невзаимодействующих квантовых осцилляторов,

$$U_m = U_{0m} + 3R\Theta_E/(e^{\Theta_E/T} - 1),$$

где R — молярная газовая постоянная; $\Theta_E = \hbar\omega/k$ — характеристическая температура Эйнштейна; $U_{0m} = = 3/2 R\Theta_E$ — молярная нулевая энергия (по Эйнштейну).

Молярная теплоемкость кристаллического твердого тела в области низких температур (предельный закон Дебая)

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 = 234R \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \quad (T \ll \Theta_D).$$

Теплота, необходимая для нагревания тела,

$$Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_m dT,$$

где m — масса тела; M — молярная масса; T_1 и T_2 — начальная и конечная температуры тела.

Элементы квантовой статистики. Распределение свободных электронов в металле по энергиям при 0 К

$$dn(\epsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon,$$

где $dn(\epsilon)$ — концентрация электронов, энергия которых заключена в пределах от ϵ до $\epsilon + d\epsilon$; m — масса электрона. Это выражение справедливо при $\epsilon < \epsilon_F$ (где ϵ_F — энергия или уровень Ферми).

Энергия Ферми в металле при $T = 0$ К

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3},$$

где n — концентрация электронов в металле.

Полупроводники. Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = \gamma_0 \exp(-\Delta E/2kT),$$

где ΔE — ширина запрещенной зоны; γ_0 — константа.
Сила тока в p - n -переходе

$$I = I_0 [\exp(eU/kT) - 1],$$

где I_0 — предельное значение силы обратного тока; U — внешнее напряжение, приложенное к p - n -переходу.

Контактные и термоэлектрические явления. Внутренняя контактная разность потенциалов

$$U_{12} = \frac{\varepsilon_{F_1} - \varepsilon_{F_2}}{e},$$

где ε_{F_1} и ε_{F_2} — энергия Ферми соответственно для первого и второго металлов; e — заряд электрона.

Примеры решения задач

Пример 1. Электрон в атоме водорода перешел с четвертого энергетического уровня на второй. Определить энергию испущенного при этом фотона.

Решение. Для определения энергии фотона воспользуемся сериальной формулой для водородоподобных ионов:

$$1/\lambda = RZ^2(1/n_1^2 - 1/n_2^2), \quad (1)$$

где λ — длина волны фотона; R — постоянная Ридберга; Z — заряд ядра в относительных единицах (при $Z=1$ формула переходит в сериальную формулу для водорода); n_1 — номер орбиты, на которую перешел электрон; n_2 — номер орбиты, с которой перешел электрон (n_1 и n_2 — главные квантовые числа).

Энергия фотона ε выражается формулой

$$\varepsilon = hc/\lambda.$$

Поэтому, умножив обе части равенства (1) на hc , получим выражение для энергии фотона:

$$\varepsilon = RhcZ^2(1/n_1^2 - 1/n_2^2).$$

Так как Rhc есть энергия ионизации E_i атома водорода, то

$$\varepsilon = E_i Z^2(1/n_1^2 - 1/n_2^2).$$

Вычисления выполним во внесистемных единицах:
 $E_i = 13,6 \text{ эВ}$ (см. табл. 1 Приложения); $Z = 1$; $n_1 = 2$;
 $n_2 = 4$:

$$\varepsilon = 13,6 \cdot 1^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \text{ эВ} = 13,6 \cdot 3/16 \text{ эВ} = 2,55 \text{ эВ.}$$

Пример 2. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U . Найти длину волны де Бройля электрона для двух случаев: 1) $U_1 = 51 \text{ В}$; 2) $U_2 = 510 \text{ кВ}$.

Решение. Длина волны де Бройля для частицы зависит от ее импульса p и определяется формулой

$$\lambda = h/p, \quad (1)$$

где h — постоянная Планка.

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия T . Связь импульса с кинетической энергией различна для нерелятивистского случая (когда кинетическая энергия частицы много меньше ее энергии покоя) и для релятивистского случая (когда кинетическая энергия сравнима с энергией покоя частицы).

В нерелятивистском случае

$$p = \sqrt{2m_0T}, \quad (2)$$

где m_0 — масса покоя частицы.

В релятивистском случае

$$p = \sqrt{(2E_0 + T)T} / c, \quad (3)$$

где $E_0 = m_0c^2$ — энергия покоя частицы.

Формула (1) с учетом соотношений (2) и (3) запишется:

в нерелятивистском случае

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0T}}, \quad (4)$$

в релятивистском случае

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{(2E_0 + T)T}/c}. \quad (5)$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условии задачи разности потенциалов $U_1 = 51 \text{ В}$ и $U_2 = 510 \text{ кВ}$, с энергией покоя электрона и в зависимости от этого решим, какую из формул (4) или (5) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U ,

$$T = eU.$$

В первом случае $T_1 = eU = 51 \text{ эВ} = 0,51 \cdot 10^{-4} \text{ МэВ}$, что много меньше энергии покоя электрона $E_0 = m_0 c^2 = 0,51 \text{ МэВ}$. Следовательно, в этом случае можно применить формулу (4). Для упрощения расчетов заметим, что $T_1 = 10^{-4} m_0 c^2$. Подставив это выражение в формулу (4), перепишем ее в виде

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 \cdot 10^{-4} \cdot m_0 c^2}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \frac{h}{m_0 c}.$$

Учитывая, что $h/m_0 c$ есть комптоновская длина волны Λ , получаем

$$\lambda_1 = 10^2 \Lambda / \sqrt{2}.$$

Так как $\Lambda = 2,43 \text{ пм}$ (см. табл. 1 Приложения), то

$$\lambda_1 = 10^2 \cdot 2,43 / \sqrt{2} \text{ пм} = 171 \text{ пм}.$$

Во втором случае кинетическая энергия $T_2 = eU_2 = 510 \text{ кэВ} = 0,51 \text{ МэВ}$, т. е. равна энергии покоя электрона. В этом случае необходимо применить релятивистскую формулу (5). Учитывая, что $T_2 = 0,51 \text{ МэВ} = m_0 c^2$, по формуле (5) находим

$$\lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{(2m_0 c^2 + m_0 c^2) m_0 c^2 / c}} = \frac{h}{\sqrt{3} m_0 c},$$

или

$$\lambda_2 = \Lambda / \sqrt{3}.$$

Подставим значение Λ и произведем вычисления:

$$\lambda_2 = 2,43 / \sqrt{3} \text{ пм} = 1,40 \text{ пм}.$$

Пример 3. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода составляет величину порядка $T = 10 \text{ эВ}$. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Решение. Соотношение неопределенностей для координаты и импульса имеет вид

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar, \quad (1)$$

где Δx — неопределенность координаты частицы (в данном случае электрона); Δp_x — неопределенность импульса частицы (электрона); \hbar — постоянная Планка.

Из соотношения неопределенностей следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры l , тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью

$$\Delta x = l/2.$$

Соотношение неопределенностей (1) можно записать в этом случае в виде

$$(l/2)\Delta p_x \geq \hbar,$$

откуда

$$l \geq 2\hbar/\Delta p_x. \quad (2)$$

Физически разумная неопределенность импульса Δp_x во всяком случае не должна превышать значения самого импульса p_x , т. е. $\Delta p_x \leq p_x$. Импульс p_x связан с кинетической энергией T соотношением $p_x = \sqrt{2mT}$. Заменяем Δp_x значением $\sqrt{2mT}$ (такая замена не увеличит l). Переходя от неравенства к равенству, получим

$$l_{\min} = 2\hbar/\sqrt{2mT}. \quad (3)$$

Проверим, дает ли полученная формула единицу длины. Для этого в правую часть формулы (3) вместо символов величин подставим обозначения их единиц:

$$\begin{aligned} \frac{[\hbar]}{([m][T])^{1/2}} &= \frac{1 \text{ Дж} \cdot \text{с}}{(1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ Дж})^{1/2}} = \left(\frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ кг}}\right)^{1/2} \cdot 1 \text{ с} = \\ &= \left(\frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2}{1 \text{ кг}}\right)^{1/2} \cdot 1 \text{ с} = 1 \text{ м}. \end{aligned}$$

Найденная единица является единицей длины. Произведем вычисления:

$$l_{\min} = \frac{2 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10} \text{ м} = 1,24 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 124 \text{ нм}.$$

Пример 4. Волновая функция $\psi(x) = \sqrt{2/l} \sin \frac{\pi}{l} x$ описывает основное состояние частицы в бесконечно глубоком прямоугольном ящике шириной l . Вычислить вероятность нахождения частицы в малом интервале $\Delta l = 0,01l$ в двух случаях: 1 (вблизи стенки) ($0 \leq x \leq \Delta l$); 2) в средней части ящика ($\frac{l}{2} - \frac{\Delta l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2} + \frac{\Delta l}{2}$).

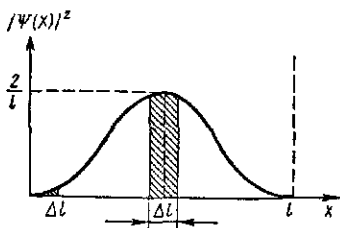


Рис. 64

Решение. Вероятность того, что частица будет обнаружена в интервале dx (от x до $x + dx$), пропорциональна этому интервалу и квадрату модуля волновой функции, описывающей данное состояние, равна

$$d\omega = |\psi(x)|^2 dx.$$

В первом случае искомая вероятность найдется интегрированием в пределах от 0 до $0,01l$ (рис. 64):

$$\omega = \frac{2}{l} \int_0^{0,01l} \sin^2 \frac{\pi}{l} x dx.$$

Знак модуля опущен, так как ψ — функция в данном случае не является комплексной.

Так как x изменяется в интервале $0 \leq x \leq 0,01l$ и, следовательно, $\pi x/l \ll 1$, справедливо приближенное равенство

$$\sin^2 \frac{\pi}{l} x \approx \left(\frac{\pi}{l} x \right)^2.$$

С учетом этого выражения (1) примет вид

$$\omega = \frac{2}{l} \int_0^{0,01l} \left(\frac{\pi}{l} x \right)^2 dx = \frac{2\pi^2}{l^3} \int_0^{0,01l} x^2 dx.$$

После интегрирования получим

$$\omega = \frac{2}{3} \pi^2 \cdot 10^{-6} = 6,6 \cdot 10^{-6}.$$

Во втором случае можно обойтись без интегрирования, так как квадрат модуля волновой функции вблизи ее максимума в заданном малом интервале ($\Delta l = 0,01l$) практически не изменяется. Искомая вероятность во втором случае определяется выражением

$$\omega = |\psi(l/2)|^2 \Delta l,$$

или

$$\omega = \frac{2}{l} \left(\sin \frac{\pi}{l} \frac{l}{2} \right)^2 \Delta l = \frac{2}{l} \cdot 0,01l = 0,02.$$

Пример 5. Вычислить дефект массы и энергию связи ядра ${}^7_3\text{Li}$.

Решение. Масса ядра всегда меньше суммы масс свободных (находящихся вне ядра) протонов и нейтронов, из которых ядро образовалось. Дефект массы ядра Δm и есть разность между суммой масс свободных нуклонов (протонов и нейтронов) и массой ядра, т. е.

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_a, \quad (1)$$

где Z — атомный номер (число протонов в ядре); A — массовое число (число нуклонов, составляющих ядро); m_p , m_n , m_a — соответственно массы протона, нейтрона и ядра.

В справочных таблицах всегда даются массы нейтральных атомов, но не ядер, поэтому формулу (1) целесообразно преобразовать так, чтобы в нее входила масса m_a нейтрального атома. Можно считать, что масса нейтрального атома равна сумме масс ядра и электронов, составляющих электронную оболочку атома: $m_a = m_{\text{я}} + Zm_e$, откуда

$$m_{\text{я}} = m_a - Zm_e. \quad (2)$$

Выразив в равенстве (1) массу ядра по формуле (2), получаем $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_a + Zm_e$, или

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - m_a.$$

Замечая, что $m_p + m_e = m_H$, где m_H — масса атома водорода, окончательно находим

$$\Delta m = Zm_H + (A - Z)m_n - m_a. \quad (3)$$

Подставив в выражение (3) числовые значения масс (см. табл. 15 и 17 Приложения), получим

$$\begin{aligned} \Delta m &= [3 \cdot 1,00783 + (7 - 3) \cdot 1,00867 - 7 \cdot 0,1601] \text{ а. е. м} = \\ &= 0,04216 \text{ а. е. м.} \end{aligned}$$

В соответствии с законом пропорциональности массы и энергии

$$E = c^2 \Delta m, \quad (4)$$

где c — скорость света в вакууме.

Коэффициент пропорциональности c^2 может быть выражен двояко:

$$c^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2, \text{ или } c^2 = \Delta E / \Delta m = 9 \cdot 10^{16} \text{ Дж/кг.}$$

Если вычислить энергию связи, пользуясь внесистемными единицами, то $c^2 = 931 \text{ МэВ/а. е. м}$. С учетом этого формула (4) примет вид

$$E = 931 \Delta m \text{ (МэВ)}. \quad (5)$$

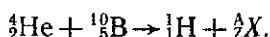
Подставив найденное значение дефекта массы ядра в формулу (5), получим

$$E = 931 \cdot 0,04216 \text{ МэВ} = 39,2 \text{ МэВ}.$$

Примечание. Термин «дефект массы» часто применяют в другом смысле: дефектом массы Δ называют разность между массой нейтрального атома данного изотопа и его массовым числом A : $\Delta = m_a - A$. Эта величина особого физического смысла не имеет, но ее использование позволяет в ряде случаев значительно упростить вычисления. В настоящем пособии всюду имеется в виду дефект массы Δm , определяемый формулой (1).

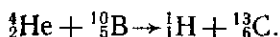
Пример 6. При соударении α -частицы с ядром бора ${}^{10}_5\text{B}$ произошла ядерная реакция, в результате которой образовалось два новых ядра. Одним из этих ядер было ядро атома водорода ${}^1_1\text{H}$. Определить порядковый номер и массовое число второго ядра, дать символическую запись ядерной реакции и определить ее энергетический эффект.

Решение. Обозначим неизвестное ядро символом ${}^A_Z\text{X}$. Так как α -частица представляет собой ядро гелия ${}^4_2\text{He}$, запись реакции имеет вид



Применив закон сохранения числа нуклонов, получим уравнение $4 + 10 = 1 + A$, откуда $A = 13$. Применив закон сохранения заряда, получим уравнение $2 + 5 = 1 + Z$, откуда $Z = 6$. Следовательно, неизвестное ядро является ядром атома изотопа углерода ${}^{13}_6\text{C}$.

Теперь можем записать реакцию в окончательном виде:



Энергетический эффект Q ядерной реакции определяется по формуле

$$Q = 931[(m_{\text{He}} + m_{\text{B}}) - (m_{\text{H}} + m_{\text{C}})].$$

Здесь в первых круглых скобках указаны массы исходных ядер, во вторых скобках — массы ядер — продуктов реакции. При числовых подсчетах по этой формуле массы ядер заменяют массами нейтральных атомов. Возможность такой замены вытекает из следующих соображений.

Число электронов в электронной оболочке нейтрального атома равно его зарядовому числу Z . Сумма зарядовых чисел исходных ядер равна сумме зарядовых чисел ядер — продуктов реакции. Следовательно, электронные

оболочки ядер гелия и бора содержат вместе столько же электронов, сколько их содержат электронные оболочки ядер углерода и водорода.

Очевидно, что при вычитании суммы масс нейтральных атомов углерода и водорода из суммы масс атомов гелия и бора массы электронов выпадут и мы получим тот же результат, как если бы брали массы ядер. Подставив массы атомов (см. табл. 15 Приложения) в расчетную формулу, получим

$$Q = 931(4,00260 + 10,01294) - (1,00783 + 13,00335) \text{ МэВ} = 4,06 \text{ МэВ}.$$

Пример 7. Определить начальную активность A_0 радиоактивного препарата магния ^{27}Mg массой $m = 0,2$ мкг, а также его активность A через время $t = 6$ ч. Период полураспада $T_{1/2}$ магния считать известным.

Решение. Активность A изотопа характеризует скорость радиоактивного распада и определяется отношением числа dN ядер, распавшихся за интервал времени dt , к этому интервалу:

$$A = -dN/dt. \quad (1)$$

Знак «—» показывает, что число N радиоактивных ядер с течением времени убывает.

Для того чтобы найти dN/dt , воспользуемся законом радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (2)$$

где N — число радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе, в момент времени t ; N_0 — число радиоактивных ядер в момент времени, принятый за начальный ($t=0$); λ — постоянная радиоактивного распада.

Продифференцируем выражение (2) по времени:

$$dN/dt = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

Исключив из формул (1) и (3) dN/dt , находим активность препарата в момент времени t :

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (4)$$

Начальную активность A_0 препарата получим при $t=0$:

$$A_0 = \lambda N_0. \quad (5)$$

Постоянная радиоактивного распада λ связана с периодом полураспада $T_{1/2}$ соотношением

$$\lambda = (\ln 2) / T_{1/2}. \quad (6)$$

Число N_0 радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе, равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества ν данного изотопа:

$$N_0 = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A, \quad (7)$$

где m — масса изотопа; M — молярная масса.

С учетом выражений (6) и (7) формулы (5) и (4) принимают вид

$$A_0 = \frac{m}{M} \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A; \quad (8) \quad A = \frac{m}{M} \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}. \quad (9)$$

Произведем вычисления, учитывая, что $T_{1/2} = 10 \text{ мин} = 600 \text{ с}$ (см. табл. 16 Приложения), $\ln 2 = 0,693$, $t = 6 \text{ ч} = 6 \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ с} = 2,16 \cdot 10^4 \text{ с}$:

$$A_0 = \frac{0,2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \frac{0,693}{600} 6,02 \cdot 10^{23} \text{ Бк} = 5,13 \cdot 10^{12} \text{ Бк} = 5,13 \text{ ТБк};$$

$$A = \frac{0,2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \frac{0,693}{600} 6,02 \cdot 10^{23} e^{-\frac{0,693}{600} \cdot 2,16 \cdot 10^4} \text{ Бк} = 81,3 \text{ Бк}.$$

Пример 8. Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна, вычислить удельную теплоемкость c при постоянном объеме алюминия при температуре $T = 200 \text{ К}$. Характеристическую температуру Θ_E Эйнштейна принять для алюминия равной 300 К .

Решение. Удельная теплоемкость c вещества может быть выражена через молярную теплоемкость C_m соотношением

$$c = C_m / M, \quad (1)$$

где M — молярная масса.

Молярная теплоемкость при постоянном объеме по теории Эйнштейна выражается формулой

$$C_m = 3R \left(\frac{\Theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\Theta_E/T}}{(e^{\Theta_E/T} - 1)^2}. \quad (2)$$

Подставив в (1) выражение теплоемкости C_m по формуле (2), получим

$$c = \frac{3R}{M} \left(\frac{\Theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\Theta_E/T}}{(e^{\Theta_E/T} - 1)^2}. \quad (3)$$

Произведем вычисления:

$$c = \frac{3 \cdot 8,31}{27 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{300}{200} \right)^2 \frac{e^{500/200}}{(e^{300/200} - 1)^2} \text{Дж/ (кг} \cdot \text{К)} = \\ = 770 \text{ Дж/ (кг} \cdot \text{К)}.$$

Пример 9. Определить теплоту ΔQ , необходимую для нагревания кристалла NaCl массой $m=20$ г от температуры $T_1=2$ К до температуры $T_2=4$ К. Характеристическую температуру Дебая Θ_D для NaCl принять равной 320 К и условие $T \ll \Theta_D$ считать выполненным.

Решение. Теплота ΔQ , подводимая для нагревания тела от температуры T_1 до T_2 , может быть вычислена по формуле

$$\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} C_T dT, \quad (1)$$

где C_T — теплоемкость тела.

Теплоемкость тела связана с молярной теплоемкостью соотношением

$$C_T = mC_m/M, \quad (2)$$

где m — масса тела; M — молярная масса.

Подставив выражение C_T в формулу (1), получим

$$\Delta Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_m dT. \quad (3)$$

В общем случае теплоемкость C_m есть сложная функция температуры, поэтому выносить ее за знак интеграла нельзя. Однако если выполнено условие $T \ll \Theta_D$, то нахождение ΔQ облегчается тем, что можно воспользоваться предельным законом Дебая, в согласии с которым теплоемкость пропорциональна кубу термодинамической температуры:

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3. \quad (4)$$

Подставляя молярную теплоемкость (4) в формулу (3), получим

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \int_{T_1}^{T_2} T^3 dT.$$

Выполним интегрирование:

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\Theta_D^3} \left(\frac{T_2^4}{4} - \frac{T_1^4}{4} \right).$$

Перепишав полученную формулу в виде

$$\Delta Q = \frac{3\pi^4}{5} \frac{m}{M} \frac{R}{\theta_b^3} (T_2^4 - T_1^4),$$

произведем вычисления:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \frac{3 \cdot (3,14)^4}{5} \frac{2 \cdot 10^{-2}}{58,5 \cdot 10^{-3}} \frac{8,31}{(320)^3} (4^4 - 2^4) \text{ Дж} = \\ &= 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 1,22 \text{ мДж}. \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислить максимальную энергию ε_F (энергию Ферми), которую могут иметь свободные электроны в металле (медь) при температуре $T = 0$ К. Принять, что на каждый атом меди приходится по одному валентному электрону.

Решение. Максимальная энергия ε_F , которую могут иметь электроны в металле при $T = 0$ К, связана с концентрацией свободных электронов соотношением

$$\varepsilon_F = \hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3} / (2m), \quad (1)$$

где \hbar — постоянная Планка; m — масса электрона.

Концентрация свободных электронов по условию задачи равна концентрации атомов, которая может быть найдена по формуле

$$n = \rho N_A / M, \quad (2)$$

где ρ — плотность меди; N_A — постоянная Авогадро; M — молярная масса.

Подставляя выражение n в формулу (1), получаем

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \rho \frac{N_A}{M} \right)^{2/3}.$$

Произведем вычисления:

$$\begin{aligned} \varepsilon_F &= \frac{(1,05 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \left[3 \cdot (3,14)^2 \cdot 8,9 \cdot 10^3 \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{-23}}{64 \cdot 10^{-3}} \right]^{2/3} \text{ Дж} = \\ &= 1,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 7,4 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

Пример 11. Кремниевый образец нагревают от температуры $t_1 = 0^\circ\text{C}$ до температуры $t_2 = 10^\circ\text{C}$. Во сколько раз возрастает его удельная проводимость?

Решение. Удельная проводимость γ собственных полупроводников связана с температурой T соотношением

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\Delta E / (2kT)},$$

где γ_0 — константа; ΔE — ширина запрещенной зоны.

Следовательно,

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{e^{-\Delta E/(2kT_1)}}{e^{-\Delta E/(2kT_2)}} = \exp\left[\frac{\Delta E}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Полагая для кремния $\Delta E = 1,1$ эВ, произведем вычисления:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \exp \frac{1,76 \cdot 10^{-19}}{2(1,38 \cdot 10^{-23})} \left(\frac{1}{273} - \frac{1}{283}\right) = 2,28.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить энергию ϵ фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на основной. [12,1 эВ]

2. Определить первый потенциал возбуждения ϕ_1 атома водорода. [10,2 В]

3. Вычислить длину волны де Бройля λ для электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов $U = 22,5$ В. [0,258 нм]

4. Вычислить длину волны де Бройля λ для протона, движущегося со скоростью $v = 0,6 c$ (c — скорость света в вакууме). [1,76 фм]

5. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальную кинетическую энергию T_{\min} электрона, движущегося внутри сферической области диаметром $d = 0,1$ нм. [15 эВ]

6. Определить относительную неопределенность $\Delta p/p$ импульса движущейся частицы, если допустить, что неопределенность ее координаты равна длине волны де Бройля. [0,16]

7. Электрон находится в прямоугольном потенциальном ящике с непроницаемыми стенками. Ширина ящика $l = 0,2$ нм, энергия электрона в ящике $E = 37,8$ эВ. Определить номер n энергетического уровня и модуль волнового вектора k . [2; $3,14 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-1}$]

8. Частица в потенциальном ящике находится в основном состоянии. Какова вероятность обнаружения частицы: в средней трети ящика? в крайней трети ящика? [0,609; 0,195]

9. Вычислить энергию связи $E_{\text{св}}$ ядра дейтерия ${}^2_1\text{H}$ и трития ${}^3_1\text{H}$. [2,22 МэВ; 8,47 МэВ]

10. Вычислить энергетический эффект Q реакции ${}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + \gamma$. [5,71 МэВ]

11. То же, для реакции ${}^6_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$. [4,03 МэВ]

12. Определить число N атомов радиоактивного препарата иода $^{131}_{53}\text{I}$ массой $m=0,5$ мкг, распавшихся в течение времени: 1) $t_1=1$ мин; 2) $t_2=7$ сут. [$1,38 \cdot 10^{11}$; $1,04 \cdot 10^{15}$]

13. Определить активность A радиоактивного препарата $^{90}_{38}\text{Sr}$ массой $m=0,1$ мкг. [543 кБк]

14. Определить частоту ν колебаний атомов серебра по теории теплоемкости Эйнштейна, если характеристическая температура серебра $\Theta_E=165$ К. [$3,44 \cdot 10^{-12}$ Гц]

15. Определить среднюю энергию $\langle \epsilon \rangle$ линейного, одномерного квантового осциллятора при температуре $T=\Theta_E=200$ К. [$1,61 \cdot 10^{-21}$ Дж]

16. Определить теплоту Q , необходимую для нагревания кристалла меди массой $m=100$ г от $T_1=10$ К до $T_2=20$ К. Характеристическая температура Дебая для меди $\Theta_D=320$ К. Считать условие $T_2 \ll \Theta_D$ выполненным. [3,48 Дж]

17. Выразить среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ через максимальную скорость v_{max} электронов в металле при температуре 0 К. [$\sqrt{3/5}v_{\text{max}}$]

18. Металл находится при температуре 0 К. Определить относительное число электронов, энергии которых отличаются от энергии Ферми не более чем на 2%. [0,03]

Контрольная работа 6

Таблица вариантов для специальностей, учебными планами которых предусмотрено по курсу физики шесть контрольных работ

Вариант	Номера задач							
0	601	611	621	631	641	651	661	671
1	602	612	622	632	642	652	662	672
2	603	613	623	633	643	653	663	673
3	604	614	624	634	644	654	664	674
4	605	615	625	635	645	655	665	675
5	606	616	626	636	646	656	666	676
6	607	617	627	637	647	657	667	677
7	608	618	628	638	648	658	668	678
8	609	619	629	639	649	659	669	679
9	610	620	630	640	650	660	670	680

601. Невозбужденный атом водорода поглощает квант излучения с длиной волны $\lambda=102,6$ нм. Вычислить, пользуясь теорией Бора, радиус r электронной орбиты возбужденного атома водорода.

602. Вычислить по теории Бора радиус r_2 второй стационарной орбиты и скорость v_2 электрона на этой орбите для атома водорода.

603. Вычислить по теории Бора период T вращения электрона в атоме водорода, находящегося в возбужденном состоянии, определяемом главным квантовым числом $n = 2$.

604. Определить изменение энергии ΔE электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с частотой $\nu = 6,28 \cdot 10^{14}$ Гц.

605. Во сколько раз изменится период T вращения электрона в атоме водорода, если при переходе в невозбужденное состояние атом излучил фотон с длиной волны $\lambda = 97,5$ нм?

606. На сколько изменилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 435$ нм?

607. В каких пределах $\Delta \lambda$ должна лежать длина волн монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света радиус r_n орбиты электрона увеличился в 16 раз?

608. В однозарядном ионе лития электрон перешел с четвертого энергетического уровня на второй. Определить длину волны λ излучения, испущенного ионом лития.

609. Электрон в атоме водорода находится на третьем энергетическом уровне. Определить кинетическую T , потенциальную Π и полную E энергию электрона. Ответ выразить в электрон-вольтах.

610. Фотон выбивает из атома водорода, находящегося в основном состоянии, электрон с кинетической энергией $T = 10$ эВ. Определить энергию ϵ фотона.

611. Вычислить наиболее вероятную дебройлевскую длину волны λ молекул азота, содержащихся в воздухе при комнатной температуре.

612. Определить энергию ΔT , которую необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от $\lambda_1 = 0,2$ мм до $\lambda_2 = 0,1$ нм.

613. На сколько по отношению к комнатной должна измениться температура идеального газа, чтобы дебройлевская длина волны λ его молекул уменьшилась на 20%?

614. Параллельный пучок моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму в виде узкой прямоугольной щели, ширина которой $a = 0,06$ мм. Опре-

делить скорость этих электронов, если известно, что на экране, отстоящем от щели на расстоянии $l=40$ мм, ширина центрального дифракционного максимума $b=10$ мкм.

615. При каких значениях кинетической энергии T электрона ошибка в определении дебройлевской длины волны λ по нерелятивистской формуле не превышает 10%?

616. Из катодной трубки на диафрагму с узкой прямоугольной щелью нормально к плоскости диафрагмы направлен поток моноэнергетических электронов. Определить анодное напряжение трубки, если известно, что на экране, отстоящем от щели на расстоянии $l=0,5$ м, ширина центрального дифракционного максимума $\Delta x=10,0$ мкм. Ширину b щели принять равной $0,10$ мм.

617. Протон обладает кинетической энергией $T=1$ кэВ. Определить дополнительную энергию ΔT , которую необходимо ему сообщить для того, чтобы длина волны λ де Бройля уменьшилась в три раза.

618. Определить длины волн де Бройля α -частицы и протона, прошедших одинаковую ускоряющую разность потенциалов $U=1$ кВ.

619. Электрон обладает кинетической энергией $T=1,02$ МэВ. Во сколько раз изменится длина волны де Бройля, если кинетическая энергия T электрона уменьшится вдвое?

620. Кинетическая энергия T электрона равна удвоенному значению его энергии покоя ($2m_0c^2$). Вычислить длину волны λ де Бройля для такого электрона.

621. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, движущегося внутри сферы радиусом $R=0,05$ нм.

622. Используя соотношение неопределенностей, оценить наименьшие ошибки Δv в определении скорости электрона и протона, если координаты центра масс этих частиц могут быть установлены с неопределенностью 1 мкм.

623. Какова должна быть кинетическая энергия T протона в моноэнергетическом пучке, используемого для исследования структуры с линейными размерами $l \approx 10^{-13}$ см?

624. Используя соотношение неопределенностей, оценить ширину l одномерного потенциального ящика, в котором минимальная энергия электрона $E_{\min}=10$ эВ.

625. Альфа-частица находится в бесконечно глубоком, одномерном, прямоугольном потенциальном ящике.

Используя соотношение неопределенностей, оценить ширину l ящика, если известно, что минимальная энергия α -частицы $E_{\min} = 8$ МэВ.

626. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии составляет $\Delta t \approx 10^{-8}$ с. При переходе атома в нормальное состояние испускается фотон, средняя длина волны $\langle \lambda \rangle$ которого равна 600 нм. Оценить ширину $\Delta \lambda$ излучаемой спектральной линии, если не происходит ее уширения за счет других процессов.

627. Для приближенной оценки минимальной энергии электрона в атоме водорода можно предположить, что неопределенность Δr радиуса r электронной орбиты и неопределенность Δp импульса p электрона на такой орбите соответственно связаны следующим образом: $\Delta r \approx r$ и $\Delta p \approx p$. Используя эти связи, а также соотношение неопределенностей, найти значение радиуса электронной орбиты, соответствующего минимальной энергии электрона в атоме водорода.

628. Моноэнергетический пучок электронов высвечивает в центре экрана электронно-лучевой трубки пятно радиусом $r \approx 10^{-3}$ см. Пользуясь соотношением неопределенностей, найти, во сколько раз неопределенность Δx координаты электрона на экране в направлении, перпендикулярном оси трубки, меньше размера r пятна. Длину L электронно-лучевой трубки принять равной 0,50 м, а ускоряющее электрон напряжение U — равным 20 кВ.

629. Среднее время жизни Δt атома в возбужденном состоянии составляет около 10^{-8} с. При переходе атома в нормальное состояние испускается фотон, средняя длина волны $\langle \lambda \rangle$ которого равна 400 нм. Оценить относительную ширину $\Delta \lambda / \lambda$ излучаемой спектральной линии, если не происходит уширения линии за счет других процессов.

630. Для приближенной оценки минимальной энергии электрона в атоме водорода можно предположить, что неопределенность Δr радиуса r электронной орбиты и неопределенность Δp импульса p электрона на такой орбите соответственно связаны следующим образом: $\Delta r \approx r$ и $\Delta p \approx p$. Используя эти связи, а также соотношение неопределенностей, определить минимальное значение энергии T_{\min} электрона в атоме водорода.

631. Частица находится в бесконечно глубоком, одномерном, прямоугольном потенциальном ящике. Найти отношение разности $\Delta E_{n, n+1}$ соседних энергетических уровней к энергии E_n частицы в трех случаях: 1) $n = 2$; 2) $n = 5$; 3) $n \rightarrow \infty$.

632. Электрон находится в бесконечно глубоком, одномерном, прямоугольном потенциальном ящике шириной $l = 0,1$ нм. Определить в электрон-вольтах наименьшую разность энергетических уровней электрона.

633. Частица в бесконечно глубоком, одномерном, прямоугольном потенциальном ящике шириной l находится в возбужденном состоянии ($n = 3$). Определить, в каких точках интервала $0 < x < l$ плотность вероятности нахождения частицы имеет максимальное и минимальное значения.

634. В прямоугольной потенциальной яме шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками ($0 < x < l$) находится частица в основном состоянии. Найти вероятность ω местонахождения этой частицы в области $1/4l < x < 3/4l$.

635. Частица в бесконечно глубоком, одномерном, прямоугольном потенциальном ящике находится в основном состоянии. Какова вероятность ω обнаружения частицы в крайней четверти ящика?

636. Волновая функция, описывающая движение электрона в основном состоянии атома водорода, имеет вид

$$\psi(r) = Ae^{-r/a_0},$$

где A — некоторая постоянная; a_0 — первый боровский радиус. Найти для основного состояния атома водорода наиболее вероятное расстояние электрона от ядра.

637. Частица находится в основном состоянии в прямоугольной яме шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками. Во сколько раз отличаются вероятности местонахождения частицы: ω_1 — в крайней трети и ω_2 — в крайней четверти ящика?

638. Волновая функция, описывающая движение электрона в основном состоянии атома водорода, имеет вид

$$\psi(r) = Ae^{-r/a_0},$$

где A — некоторая постоянная; a_0 — первый боровский радиус. Найти для основного состояния атома водорода среднее значение $\langle F \rangle$ кулоновской силы.

639. Электрон находится в бесконечно глубоком, одномерном, прямоугольном потенциальном ящике шириной l . В каких точках в интервале $0 < x < l$ плотности вероятности нахождения электрона на втором и третьем энергетических уровнях одинаковы? Вычислить плотность вероятности для этих точек. Решение пояснить графиком.

640. Волновая функция, описывающая движение электрона в основном состоянии атома водорода, имеет вид

$$\psi(r) = Ae^{-r/a_0},$$

где A — некоторая постоянная; a_0 — первый боровский радиус. Найти для основного состояния атома водорода среднее значение $\langle\Pi\rangle$ потенциальной энергии.

641. Найти период полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного изотопа, если его активность за время $t = 10$ сут уменьшилась на 24% по сравнению с первоначальной.

642. Определить, какая доля радиоактивного изотопа ${}^{225}_{89}\text{Ac}$ распадается в течение времени $t = 6$ сут.

643. Активность A некоторого изотопа за время $t = 10$ сут уменьшилась на 20%. Определить период полураспада $T_{1/2}$ этого изотопа.

644. Определить массу m изотопа ${}^{131}_{53}\text{I}$, имеющего активность $A = 37$ ГБк.

645. Найти среднюю продолжительность жизни τ атома радиоактивного изотопа кобальта ${}^{60}_{27}\text{Co}$.

646. Счетчик α -частиц, установленный вблизи радиоактивного изотопа, при первом измерении регистрировал $N_1 = 1400$ частиц в минуту, а через время $t = 4$ ч — только $N_2 = 400$. Определить период полураспада $T_{1/2}$ изотопа.

647. Во сколько раз уменьшится активность изотопа ${}^{32}_{15}\text{P}$ через время $t = 20$ сут?

648. На сколько процентов уменьшится активность изотопа иридия ${}^{192}_{77}\text{Ir}$ за время $t = 15$ сут?

649. Определить число N ядер, распадающихся в течение времени: 1) $t_1 = 1$ мин; 2) $t_2 = 5$ сут, — в радиоактивном изотопе фосфора ${}^{32}_{16}\text{P}$ массой $m = 1$ мг.

650. Из каждого миллиона атомов радиоактивного изотопа каждую секунду распадается 200 атомов. Определить период полураспада $T_{1/2}$ изотопа.

651. Определить количество теплоты Q , выделяющейся при распаде радона активностью $A = 3,7 \cdot 10^{10}$ Бк за время $t = 20$ мин. Кинетическая энергия T вылетающей из радона α -частицы равна 5,5 МэВ.

652. Масса $m = 1$ г урана ${}^{238}_{92}\text{U}$ в равновесии с продуктами его распада выделяет мощность $P = 1,07 \times 10^{-7}$ Вт. Найти молярную теплоту Q_m , выделяемую ураном за среднее время жизни τ атомов урана.

653. Определить энергию, необходимую для разделения ядра ${}^{20}\text{Ne}$ на две α -частицы и ядро ${}^{12}\text{C}$. Энергии

связи на один нуклон в ядрах ^{20}Ne , ^4He и ^{12}C равны соответственно 8,03; 7,07 и 7,68 МэВ.

654. В одном акте деления ядра урана ^{235}U освобождается энергия 200 МэВ. Определить: 1) энергию, выделяющуюся при распаде всех ядер этого изотопа урана массой $m = 1$ кг; 2) массу каменного угля с удельной теплотой сгорания $q = 29,3$ МДж/кг, эквивалентную в тепловом отношении 1 кг урана ^{235}U .

655. Мощность P двигателя атомного судна составляет 15 Мвт, его КПД равен 30%. Определить месячный расход ядерного горючего при работе этого двигателя.

656. Считая, что в одном акте деления ядра урана ^{235}U освобождается энергия 200 МэВ, определить массу m этого изотопа, подвергшегося делению при взрыве атомной бомбы с тротильным эквивалентом $30 \cdot 10^6$ кг, если тепловой эквивалент тротила q равен 4,19 МДж/кг.

657. При делении ядра урана ^{235}U под действием замедленного нейтрона образовались осколки с массовыми числами $M_1 = 90$ и $M_2 = 143$. Определить число нейтронов, вылетевших из ядра в данном акте деления. Определить энергию и скорость каждого из осколков, если они разлетаются в противоположные стороны и их суммарная кинетическая энергия T равна 160 МэВ.

658. Ядерная реакция $^{14}\text{N}(\alpha, p)^{17}\text{O}$ вызвана α -частицей, обладавшей кинетической энергией $T_\alpha = 4,2$ МэВ. Определить тепловой эффект этой реакции, если протон, вылетевший под углом $\theta = 60^\circ$ к направлению движения α -частицы, получил кинетическую энергию $T = 2$ МэВ.

659. Определить тепловые эффекты следующих реакций:



660. Определить скорости продуктов реакции $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$, протекающей в результате взаимодействия тепловых нейтронов с покоящимися ядрами бора.

661. Определить теплоту Q , необходимую для нагревания кристалла калия массой $m = 200$ г от температуры $T_1 = 4$ К до температуры $T_2 = 5$ К. Принять характеристическую температуру Дебая для калия $\Theta_D = 100$ К и считать условие $T \ll \Theta_D$ выполненным.

662. Вычислить характеристическую температуру Θ_D Дебая для железа, если при температуре $T = 20$ К молярная теплоемкость железа $C_m = 0,226$ Дж/К·моль. Условие $T \ll \Theta_D$ считать выполненным.

663. Система, состоящая из $N = 10^{20}$ трехмерных квантовых осцилляторов, находится при температуре $T = \Theta_E$ ($\Theta_E = 250$ К). Определить энергию E системы.

664. Медный образец массой $m = 100$ г находится при температуре $T_1 = 10$ К. Определить теплоту Q , необходимую для нагревания образца до температуры $T_2 = 20$ К. Можно принять характеристическую температуру Θ_D для меди равной 300 К, а условие $T \ll \Theta_D$ считать выполненным.

665. Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна, определить коэффициент упругости β связи атомов в кристалле алюминия. Принять для алюминия $\Theta_E = 300$ К.

666. Найти отношение средней энергии $\langle \epsilon_{кв} \rangle$ линейного одномерного осциллятора, вычисленной по квантовой теории, к энергии $\langle \epsilon_{кл} \rangle$ такого же осциллятора, вычисленной по классической теории. Вычисление произвести для двух температур: 1) $T = 0,1\Theta_E$; 2) $T = \Theta_E$, где Θ_E — характеристическая температура Эйнштейна.

667. Зная, что для алмаза $\Theta_D = 2000$ К, вычислить его удельную теплоемкость при температуре $T = 30$ К.

668. Молярная теплоемкость C_m серебра при температуре $T = 20$ К оказалась равной 1,65 Дж/(моль·К). Вычислить по значению теплоемкости характеристическую температуру Θ_D . Условие $T \ll \Theta_D$ считать выполненным.

669. Вычислить (по Дебаю) удельную теплоемкость хлористого натрия при температуре $T = \Theta_D/20$. Условие $T \ll \Theta_D$ считать выполненным.

670. Вычислить по теории Дебая теплоемкость цинка массой $m = 100$ г при температуре $T = 10$ К. Принять для цинка характеристическую температуру Дебая $\Theta_D = 300$ К и считать условие $T \ll \Theta_D$ выполненным.

671. Определить долю свободных электронов в металле при температуре $T = 0$ К, энергии ϵ которых заключены в интервале значений от $1/2\epsilon_{\max}$ до ϵ_{\max} .

672. Германиевый кристалл, ширина ΔE запрещенной зоны в котором равна 0,72 эВ, нагревают от температуры $t_1 = 0^\circ\text{C}$ до температуры $t_2 = 15^\circ\text{C}$. Во сколько раз возрастет его удельная проводимость?

673. При нагревании кремниевого кристалла от температуры $t_1 = 0^\circ$ до температуры $t_2 = 10^\circ\text{C}$ его удельная проводимость возрастает в 2,28 раза. По приведенным данным определить ширину ΔE запрещенной зоны кристалла кремния.

674. p - n -переход находится под обратным напряжением $U = 0,1$ В. Его сопротивление $R_1 = 692$ Ом. Каково сопротивление R_2 перехода при прямом напряжении?

675. Металлы литий и цинк приводят в соприкосновение друг с другом при температуре $T = 0$ К. На сколько изменится концентрация электронов проводимости в цинке? Какой из этих металлов будет иметь более высокий потенциал?

676. Сопротивление R_1 p - n -перехода, находящегося под прямым напряжением $U = 1$ В, равно 10 Ом. Определить сопротивление R_2 перехода при обратном напряжении.

677. Найти минимальную энергию W_{\min} , необходимую для образования пары электрон—дырка в кристалле GaAs , если его удельная проводимость γ изменяется в 10 раз при изменении температуры от 20 до 3°C.

678. Сопротивление R_1 кристалла PbS при температуре $t_1 = 20^\circ\text{C}$ равно 10^4 Ом. Определить его сопротивление R_2 при температуре $t_2 = 80^\circ\text{C}$.

679. Каково значение энергии Ферми ϵ_F у электронов проводимости двухвалентной меди? Выразить энергию Ферми в джоулях и электрон-вольтах.

680. Прямое напряжение U , приложенное к p - n -переходу, равно 2 В. Во сколько раз возрастет сила тока через переход, если изменить температуру от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 273$ К?

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	g	$9,81 \text{ м/с}^2$
Гравитационная постоянная	G	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Постоянная Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	$8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Стандартный объем*	V_m	$22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$
Постоянная Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Элементарный заряд	e	$1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Скорость света в вакууме	c	$3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Постоянная Стефана—Больцмана	σ	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Постоянная закона смещения Вина	b	$2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Постоянная Планка	h	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
	\hbar	$1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Ридберга	R	$1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Радиус Бора	a	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Комптоновская длина волны электрона	λ	$2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Магнетон Бора	μ_B	$0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$ (13,6 эВ)
Атомная единица массы	а.е.м.	$1,660 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Электрическая постоянная	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$

* Молярный объем идеального газа при нормальных условиях.

2. Некоторые астрономические величины

Наименование	Значение
Радиус Земли	$6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$
Масса Земли	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Радиус Солнца	$6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$
Масса Солнца	$1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
Радиус Луны	$1,74 \cdot 10^6 \text{ м}$
Масса Луны	$7,33 \cdot 10^{22} \text{ кг}$
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1,49 \cdot 10^{11} \text{ м}$
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3,84 \cdot 10^8 \text{ м}$

3. Плотность твердых тел

Твердое тело	Плотность, кг/м ³	Твердое тело	Плотность, кг/м ³
Алюминий	$2,70 \cdot 10^3$	Медь	$8,93 \cdot 10^3$
Барий	$3,50 \cdot 10^3$	Никель	$8,90 \cdot 10^3$
Ванадий	$6,02 \cdot 10^3$	Свинец	$11,3 \cdot 10^3$
Висмут	$9,80 \cdot 10^3$	Серебро	$10,5 \cdot 10^3$
Железо	$7,88 \cdot 10^3$	Цезий	$1,90 \cdot 10^3$
Литий	$0,53 \cdot 10^3$	Цинк	$7,15 \cdot 10^3$

4. Плотность жидкостей

Жидкость	Плотность, кг/м ³	Жидкость	Плотность, кг/м ³
Вода (при 4°C)	$1,00 \cdot 10^3$	Сероуглерод	$1,26 \cdot 10^3$
Глицерин	$1,26 \cdot 10^3$	Спирт	$0,80 \cdot 10^3$
Ртуть	$13,6 \cdot 10^3$		

5. Плотность газов (при нормальных условиях)

Газ	Плотность, кг/м ³	Газ	Плотность, кг/м ³
Водород	0,09	Гелий	0,18
Воздух	1,29	Кислород	1,43

6. Коэффициент поверхностного натяжения жидкостей

Жидкость	Коэффициент, мН/м	Жидкость	Коэффициент, мН/м
Вода	72	Ртуть	500
Мыльная пена	40	Спирт	22

7. Эффективный диаметр молекулы

Газ	Диаметр, м	Газ	Диаметр, м
Азот	$3,0 \cdot 10^{-10}$	Гелий	$1,9 \cdot 10^{-10}$
Водород	$2,3 \cdot 10^{-10}$	Кислород	$2,7 \cdot 10^{-10}$

8. Диэлектрическая проницаемость

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Вода	81	Парафин	2,0
Масло транс- форматорное	2,2	Стекло	7,0

9. Удельное сопротивление металлов

Металл	Удельное сопротивление, Ом·м	Металл	Удельное сопротивление, Ом·м
Железо	$9,8 \cdot 10^{-8}$	Нихром	$1,1 \cdot 10^{-6}$
Медь	$1,7 \cdot 10^{-8}$	Серебро	$1,6 \cdot 10^{-8}$

10. Энергия ионизации

Вещество	E_i , Дж	E_i , эВ
Водород	$2,18 \cdot 10^{-18}$	13,6
Гелий	$3,94 \cdot 10^{-18}$	24,6
Литий	$1,21 \cdot 10^{-17}$	75,6
Ртуть	$1,66 \cdot 10^{-18}$	10,4

11. Подвижность ионов в газах, $m^2/(B \cdot c)$

Газ	Положительные ионы	Отрицательные ионы
Азот	$1,27 \cdot 10^{-4}$	$1,81 \cdot 10^{-4}$
Водород	$5,4 \cdot 10^{-4}$	$7,4 \cdot 10^{-4}$
Воздух	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$

12. Показатель преломления

Вещество	Показатель	Вещество	Показатель
Алмаз	2,42	Глицерин	1,47
Вода	1,33	Стекло	1,50

13. Работа выхода электронов

Металл	A , Дж	A , эВ
Калий	$3,5 \cdot 10^{-19}$	2,2
Литий	$3,7 \cdot 10^{-19}$	2,3
Платина	$10 \cdot 10^{-19}$	6,3
Рубидий	$3,4 \cdot 10^{-19}$	2,1
Серебро	$7,5 \cdot 10^{-19}$	4,7
Цезий	$3,2 \cdot 10^{-19}$	2,0
Цинк	$6,4 \cdot 10^{-19}$	4,0

14. Относительные атомные массы (округленные значения) A_r и порядковые номера Z некоторых элементов

Элемент	Символ	A_r	Z	Элемент	Символ	A_r	Z
Азот	N	14	7	Марганец	Mn	55	25
Алюминий	Al	27	13	Медь	Cu	64	29
Аргон	Ar	40	18	Молибден	Mo	96	42
Барий	Ba	137	56	Натрий	Na	23	11
Ванадий	V	60	23	Неон	Ne	20	10
Водород	H	1	1	Никель	Ni	59	28
Вольфрам	W	184	74	Олово	Sn	119	50
Гелий	He	4	2	Платина	Pt	195	78
Железо	Fe	56	26	Ртуть	Hg	201	80
Золото	Au	197	79	Сера	S	32	16
Калий	K	39	19	Серебро	Ag	108	47
Кальций	Ca	40	20	Углерод	C	12	6
Кислород	O	16	8	Уран	U	238	92
Магний	Mg	24	12	Хлор	Cl	35	17

15. Массы атомов легких изотопов

Изотоп	Символ	Масса, а.е.м.	Изотоп	Символ	Масса, а.е.м.
Нейтрон	1_0n	1,00867	Бериллий	${}^9_4\text{Be}$	7,01693
Водород	${}^1_1\text{H}$	1,00783	Бор	${}^{10}_5\text{B}$	9,01219
	${}^2_1\text{H}$	2,01410		${}^{11}_5\text{B}$	11,00930
	${}^3_1\text{H}$	3,01605		Углерод	${}^{12}_6\text{C}$
Гелий	${}^3_2\text{He}$	3,01603	${}^{13}_6\text{C}$		13,00335
	${}^4_2\text{He}$	4,00260	${}^{14}_6\text{C}$		14,00324
Литий	${}^6_3\text{Li}$	6,01513	Азот	${}^{14}_7\text{N}$	14,00307
	${}^7_3\text{Li}$	7,01601		Кислород	${}^{16}_8\text{O}$
			${}^{17}_8\text{O}$		16,99913

16. Периоды полураспада радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ	Период полураспада
Актиний	$^{225}_{89}\text{Ac}$	10 сут
Иод	$^{131}_{53}\text{I}$	8 сут
Кобальт	$^{60}_{27}\text{Co}$	5,3 г
Магний	$^{27}_{12}\text{Mg}$	10 мин
Радий	$^{226}_{86}\text{Ra}$	1620 лет
Радон	$^{222}_{86}\text{Rn}$	3,8 сут
Стронций	$^{90}_{38}\text{Sr}$	27 лет
Фосфор	$^{32}_{15}\text{P}$	14,3 сут
Церий	$^{144}_{58}\text{Ce}$	285 сут

17. Масса и энергия покоя некоторых частиц

Частица	m_0		F_0	
	кг	а.е.м.	Дж	МэВ
Электрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1,672 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1876
α -частица	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3733
Нейтральный π -мезон	$2,41 \cdot 10^{-28}$	0,14498	$2,16 \cdot 10^{-11}$	135

18. Единицы СИ, имеющие специальные наименования

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	Выражение через основные и дополнительные единицы
Длина	L	метр	м	
Масса	M	килограмм	кг	
Время	T	секунда	с	

Основные единицы

Длина	L	метр	м
Масса	M	килограмм	кг
Время	T	секунда	с

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	Выражение через основные и дополнительные единицы
Сила электрического тока	I	ампер	А	
Термодинамическая температура	Θ	кельвин	К	
Количество вещества	N	моль	моль	
Сила света	J	кандела	кд	

Дополнительные единицы

Плоский угол	—	радиан	рад
Телесный угол	—	стерадиан	ср

Производные единицы

Частота	T^{-1}	герц	Гц	s^{-1}
Сила, вес	$LM T^{-2}$	ньютон	Н	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Давление, механическое напряжение	$L^{-1} M T^{-2}$	паскаль	Па	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	$L^2 M I^{-2}$	джоуль	Дж	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Мощность, поток энергии	$L^2 M T^{-3}$	ватт	Вт	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Количество электричества (электрический заряд)	TI	кулон	Кл	$s \cdot A$
Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	$L^2 M T^{-3} I^{-1}$	вольт	В	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Электрическая емкость	$L^{-2} M^{-1} T^4 I^2$	фарад	Ф	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Электрическое сопротивление	$L^2 M T^{-3} I^{-2}$	ом	Ом	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Электрическая проводимость	$L^{-2} M^{-1} T^3 I^2$	сименс	См	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
Магнитный поток	$L^2 M T^{-2} I^{-1}$	вебер	Вб	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Магнитная индукция	$M T^{-2} I^{-1}$	тесла	Тл	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	Выражение через основные и дополнительные единицы
Индуктивность, взаимная индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Световой поток	J	люмен	лм	кд · ср
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	лк	$m^{-2} \cdot кд \cdot ср$
Активность изотопа (активность вуклида в радиоактивном источнике)	T^{-1}	беккерель	Бк	s^{-1}
Поглощенная доза излучения	L^2I^{-2}	грей	Гр	$m^2 \cdot c^{-2}$

Примечания:

1. Кроме температуры Кельвина (обозначение T) допускается применять также температуру Цельсия (обозначение t), определяемую выражением $t = T - T_0$, где $T_0 = 273,15$ К. Температура Кельвина выражается в кельвинах, температура Цельсия — в градусах Цельсия (обозначение международного и русского °С). По размеру градус Цельсия равен кельвину.

2. Интервал или разность температур Кельвина выражают в кельвинах. Интервал или разность температур Цельсия допускается выражать как в кельвинах, так и в градусах Цельсия.

19. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка		Множитель	Приставка		Множитель
Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение	
экса	Э	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пэта	П	10^{15}	санτι	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	милли	м	10^{-3}
гига	Г	10^9	микро	мк	10^{-6}
мега	М	10^6	нано	н	10^{-9}
кило	к	10^3	пико	п	10^{-12}
гекто	г	10^2	фемто	ф	10^{-15}
дека	да	10^1	атто	а	10^{-18}

20. Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Названия букв
Α, α	альфа	Ν, ν	ню
Β, β	бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	гамма	Ο, ο	омикрон
Δ, δ	дэльта	Π, π	пи
Ε, ε	эпсилон	Ρ, ρ	ро
Ζ, ζ	дзета	Σ, σ	сигма
Η, η	эта	Τ, τ	тау
Θ, θ	тэта	Υ, υ	ипсилон
Ι, ι	иота	Φ, φ	фи
Κ, κ	каппа	Χ, χ	хи
Λ, λ	ламбда	Ψ, ψ	пси
Μ, μ	ми	Ω, ω	омега

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Рабочая программа	4
Литература	9
Общие методические указания	11
Учебные материалы по разделам курса физики	13
1. Физические основы классической механики	13
Основные формулы	13
Примеры решения задач	17
Задачи для самостоятельного решения	32
Контрольная работа 1	35
2. Молекулярная физика. Термодинамика	45
Основные формулы	45
Примеры решения задач	50
Задачи для самостоятельного решения	61
Контрольная работа 2	63
3. Электростатика. Постоянный электрический ток	70
Основные формулы	70
Примеры решения задач	75
Задачи для самостоятельного решения	95
Контрольная работа 3	97
4. Электромагнетизм	108
Основные формулы	108
Примеры решения задач	112
Задачи для самостоятельного решения	134
Контрольная работа 4	136
5. Оптика	147
Основные формулы	147
Примеры решения задач	151
Задачи для самостоятельного решения	164
Контрольная работа 5	166
6. Элементы атомной физики и квантовой механики. Физика твердого тела	175
Основные формулы	175
Примеры решения задач	180
Задачи для самостоятельного решения	191
Контрольная работа 6	192
Приложения	201