

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(Технический университет)

Кафедра теоретических основ химического машиностроения

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть II.

Сопротивление материалов.

Детали машин

Учебное пособие для студентов очной и заочной форм обучения
специальности «Менеджмент высоких технологий»

Санкт-Петербург

2010

Марцулевич Н.А., Луцко А.Н., Бартенев Д.А. Техническая механика, Часть II. Соппротивление материалов, Детали машин: Учебное пособие / Под ред. проф. Н.А.Марцулевича. – СПб. СПбГТИ (ТУ), 2010. - 494 с.

Материал учебного пособия полностью соответствует содержанию государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования по направлениям подготовки дипломированных специалистов по специальности 220701 «Менеджмент высоких технологий», а также по направлениям подготовки бакалавров 150600 «Материаловедение и технологии новых материалов» и 150400 «Технологические машины и оборудование». Отдельные главы пособия могут быть использованы при курсовом проектировании по дисциплине «Детали машин» студентами, обучающимися по специальностям 240801 «Машины и аппараты химических производств», 270101 «Механическое оборудование и технологические комплексы предприятий строительных материалов, изделий и конструкций», 240706 «Автоматизированное производство химических предприятий».

В пособие включены варианты контрольных заданий по основным разделам дисциплины «Техническая механика», которые будут полезны как при проведении практических занятий, так и при проведении индивидуальных контрольных мероприятий. Примеры решения конкретных задач подробно рассмотрены в соответствующих главах.

Учебное пособие предназначено для студентов 3 курса очной и заочной формы обучения специальности «Менеджмент высоких технологий».

Рецензенты:

1 С.М.Бауэр, доктор физико-математических наук, профессор кафедры гидроупругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского университета, член Национального Комитета по механике.

2 О.Г.Агошков, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой стрелково-пушечного, артиллерийского и ракетного вооружений Балтийского Государственного Технического Университета им. Д.Ф.Устинова («ВОЕНМЕХ»).

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии общеинженерного отделения СПбГТИ (ТУ) 5 мая 2010 года (протокол № 4).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	9
----------------	---

Сопротивление материалов

Глава 1. Основные понятия сопротивления материалов	10
1.1. Допущения, модели и расчетные схемы	10
1.2. Перемещения и деформации	12
1.3. Понятие о напряжениях	17
1.4. Контрольные вопросы	23
Глава 2. Внутренние силовые факторы в поперечных сечениях стержней	25
2.1. Метод сечений	25
2.2. Внутренние усилия при растяжении или сжатии стержня ...	28
2.3. Внутренние усилия при кручении	31
2.4. Внутренние силовые факторы при плоском изгибе	34
2.5. Внутренние усилия в плоских рамах	39
2.6. Внутренние усилия в криволинейных стержнях	45
2.7. Связь между внутренними силовыми факторами и напряжениями в материале	50
2.8. Контрольные вопросы	51
Глава 3. Линейное напряженное состояние	53
3.1. Внутренние силы, напряжения и деформации при растяжении (сжатии) стержней	53
3.2. Напряжения в произвольных сечениях стержня	57
3.3. Испытание материалов на растяжение и сжатие	62
3.4. Потенциальная энергия упругой деформации при растяжении (сжатии)	66
3.5. Контрольные вопросы	67
Глава 4. Плоское и объемное напряженные состояния	69
4.1. Напряжения в наклонных площадках при плоском напряженном состоянии	69
4.2. Графо-аналитический анализ плоского напряженного состояния	73
4.3. Напряжения в наклонных площадках при объемном напряженном состоянии	75
4.4. Обобщенный закон Гука	77
4.5. Удельная потенциальная энергия при объемном напряженном состоянии	79
4.6. Понятие о теориях прочности	81
4.7. Теория прочности Мора	85
4.8. Контрольные вопросы	89
Глава 5. Напряжения, деформации и перемещения при изгибе, кручении и сдвиге	90

5.1. Геометрические характеристики плоских фигур	90
5.2. Кручение прямолинейного стержня круглого поперечного сечения	96
5.3. Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня при изгибе	100
5.4. Касательные напряжения при плоском поперечном изгибе	103
5.5. Перемещения при изгибе	106
5.6. Напряжения при сдвиге	111
5.7. Потенциальная энергия упругой деформации при изгибе ..	113
5.8. Расчет балки на прочность и жесткость	115
5.9. Контрольные вопросы	122
Глава 6. Энергетические методы определения перемещений ..	123
6.1. Теорема Кастилиано	123
6.2. Метод Мора определения перемещений	127
6.3. Метод Верещагина	130
6.4. Контрольные вопросы	134
Глава 7. Устойчивость упругих конструкций	135
7.1. Понятие об устойчивости	135
7.2. Устойчивость сжатых стержней	136
7.3. Устойчивость колец и тонкостенных оболочек под действием наружного давления	141
7.4. Контрольные вопросы	144
Глава 8. Внутренние силовые факторы в статически неопределимых стержневых системах	145
8.1. Статически неопределимые системы	145
8.2. Канонические уравнения метода сил	147
8.3. Расчет статически неопределимой рамы методом сил ..	149
8.4. Раскрытие статической неопределимости методом конечных элементов	154
8.5. Контрольные вопросы	160
Глава 9. Напряженное состояние тонкостенных оболочек	161
9.1. Типовые оболочки химико-технологических аппаратов ..	161
9.2. Напряжения в осесимметричных оболочках, нагруженных внутренним давлением	163
9.3. Расчет на прочность типовых оболочек	168
9.4. Расчет на прочность плоских оболочек (пластин)	170
9.5. Контрольные вопросы	173
Глава 10. Сложное сопротивление стержней	174
10.1. Сочетание изгиба с растяжением	174
10.2. Косой изгиб	176
10.3. Внецентренное растяжение (сжатие)	177
10.4. Совместное действие изгиба и кручения	180
10.5. Контрольные вопросы	182
Глава 11. Напряженное состояние при динамическом	

нагрузении	183
11.1. Учет сил инерции при расчетах на прочность	183
11.2. Напряжения и деформации при ударе	186
11.3. Знакопеременные или циклические напряжения	191
11.4. Факторы, влияющие на предел выносливости	194
11.5. Определение предела выносливости при несимметричном цикле	197
11.6. Контрольные вопросы	199

Детали машин

Глава 12. Общие сведения о проектировании деталей машин	201
12.1. Понятие детали, узла, механической передачи, машины	201
12.2. Этапы проектирования изделий	202
12.3. Надёжность и экономичность деталей машин	203
12.4. Главные критерии работоспособности деталей машин	205
12.5. Расчётные модели деталей машин	212
12.6. Виды и этапы инженерных расчетов	216
12.7. Допускаемые напряжения. Коэффициент запаса прочности	217
12.8. Предельные напряжения для материала	218
12.9. Факторы, влияющие на статическую и усталостную прочность деталей машин	222
12.10. Чёрные металлы и сплавы. Назначение и основные способы термообработки	225
12.11. Цветные металлы и сплавы	228
12.12. Неметаллические материалы и их применение в машиностроении	230
12.13. Смазочные материалы	231
12.14. Контрольные вопросы	232
Глава 13. Механические передачи	233
13.1. Классификация и основные параметры механических передач. Законы передачи мощности и момента	233
13.2. Рычажные передачи	238
13.3. Контрольные вопросы	239
Глава 14. Зубчатые передачи	240
14.1. Классификация зубчатых передач	240
14.2. Геометрические параметры и кинематика прямозубых эвольвентных передач	243
14.3. Силы, действующие в прямозубых передачах	247
14.4. Геометрические параметры косозубых передач	248
14.5. Силы, действующие в косозубых передачах	250
14.6. Материалы цилиндрических колёс	253
14.7. Конструкции цилиндрических колёс	256

14.8. Точность зубчатых передач	261
14.9. Виды повреждения зубьев и критерии работоспособности зубчатых передач	264
14.10. Особенности распределение нагрузки в зубчатом зацеплении	266
14.11. Расчётная нагрузка	272
14.12. Расчёт цилиндрических зубчатых передач на контактную усталость активных поверхностей зубьев	274
14.13. Расчёт зубьев цилиндрических передач на прочность при изгибе	278
14.14. Допускаемые напряжения при расчёте зубчатых передач	282
14.15. Передачи с зацеплением Новикова	291
14.16. Геометрические параметры и кинематика прямозубых конических передач	295
14.17. Силы в зацеплении прямозубой конической передачи	300
14.18. Расчёт зубьев прямозубой конической передачи на контактную и изгибную усталость	301
14.19. Ряды зубчатых колёс	303
14.20. Контрольные вопросы	305
Глава 15. Планетарные и волновые передачи	307
15.1. Планетарные передачи	307
15.2. Волновые зубчатые передачи	312
15.3. Контрольные вопросы	315
Глава 16. Червячные передачи	316
16.1. Классификация червячных передач	316
16.2. Материалы червяка и червячного колеса	319
16.3. Геометрические параметры червячных передач	320
16.4. Кинематика червячных передач. КПД передачи	323
16.5. Силы, действующие в червячном зацеплении	326
16.6. Критерии работоспособности и расчёт червячной передачи	327
16.7. Допускаемые напряжения при расчёте червячных передач	331
16.8. Тепловой расчёт червячных передач	334
16.9. Контрольные вопросы	335
Глава 17. Передачи винт-гайка	336
17.1. Передачи винт-гайка. Общие сведения.	336
17.2. Передачи винт-гайка с трением скольжения	338
17.3. Контрольные вопросы	343
Глава 18. Цепные передачи	344
18.1. Цепные передачи. Общие сведения	344
18.2. Расчёт цепных передач	348
18.3. Контрольные вопросы	353

Глава 19. Фрикционные передачи	354
19.1. Общие сведения	354
19.2. Расчёт фрикционных передач	356
19.3. Фрикционные вариаторы	360
19.3. Контрольные вопросы	362
Глава 20. Ременные передачи	363
20.1. Общие сведения	363
20.2. Геометрические параметры и кинематика ременных передач	367
20.3. Силы, действующие в ременной передаче	369
20.4. Напряжения, возникающие в ремнях	371
20.5. Тяговая способность передачи	372
20.6. Расчёт ременной передачи	375
20.7. Конструкции шкивов	379
20.8. Контрольные вопросы	381
Глава 21. Валы и оси	382
21.1. Разновидности, конструктивные элементы валов и осей	382
21.2. Расчёт валов	385
21.3. Контрольные вопросы	395
Глава 22. Опоры валов и осей	396
22.1. Общие сведения о подшипниках скольжения	397
22.2. Основы расчёта подшипников скольжения	400
22.3. Общие сведения о подшипниках качения	402
22.4. Выбор и расчёт подшипников качения	405
22.5. Подшипниковые узлы. Уплотнения	411
22.6. Контрольные вопросы	414
Глава 23. Муфты	415
23.1. Общие сведения	415
23.2. Классификация механических муфт	416
23.3. Выбор и расчёт муфт	418
23.4. Контрольные вопросы	420
Глава 24. Соединение деталей машин	421
24.1. Основные типы неразъёмных и разъёмных соединений	421
24.2. Сварные соединения. Виды сварки.	
Классификация сварных соединений и сварных швов	421
24.3. Расчет на прочность сварных соединений	425
24.4. Паяные и клеевые соединения	427
24.5. Соединения заформовкой	430
24.6. Соединения заклёпками, вальцеванием и загибкой ..	430
24.7. Соединения с натягом (запрессовкой)	433
24.8. Общие сведения о резьбовых соединениях	435
24.9. Расчет на прочность резьбовых соединений	437
24.10. Определение усилий в затянутом резьбовом	

соединении при действии внешней осевой нагрузки	440
24.11. Расчёт резьбы на срез, смятие и изгиб	443
24.12. Шпоночные соединения	445
24.13. Шлицевые (зубчатые) соединения	447
24.15. Штифтовые соединения	448
24.16. Байонетные соединения	449
24.17. Клеммовые соединения	450
24.18. Профильные соединения	451
24.19. Контрольные вопросы	451
Глава 25. Упругие элементы	453
25.1. Общие сведения	453
25.2. Расчёт плоских и винтовых пружин	455
25.3. Контрольные вопросы	459
Глава 26. Корпусные детали механизмов	460
26.1. Общие сведения	460
26.2. Конструкция корпуса редуктора зубчатой передачи	460
26.3. Контрольные вопросы	463
Варианты контрольных заданий.	465
Контрольная работа № 1 – «Внутренние силовые факторы в поперечных сечениях стержней»;	
Контрольная работа № 2 – «Расчет статически определимых балок на прочность и жесткость»;	
Контрольная работа № 3 – «Метод сил»;	
Контрольная работа № 4 – «Кинематический расчёт привода»;	
Контрольная работа № 5 – «Расчёт элементов механических передач»;	
Контрольная работа № 6 – «Расчет соединений деталей».	
Литература	493

Введение

Вторая часть настоящего пособия содержит материал двух разделов курса по «Технической механике» - «Сопротивление материалов» и «Детали машин». С точки зрения требований, предъявляемых к уровню квалификации современного специалиста в области эксплуатации химического оборудования, данные разделы являются основными. Раздел «Сопротивление материалов» посвящен изложению важнейших положений анализа прочности и жесткости типовых элементов технологических машин и аппаратов. Указанные положения составляют суть инженерных методов расчета химического оборудования по главным критериям работоспособности. В то же время они позволяют глубже понять поведение конструкционных материалов под действием внешних нагрузок различного характера, в том числе циклических и ударных.

В разделе «Детали машин» инженерные методы расчета, с которыми студенты познакомились при изучении сопротивления материалов, применены к конкретным деталям и узлам технологического оборудования. Вопросы расчета являются необходимым этапом при проверке работоспособности действующего, при конструировании нового и выборе типового оборудования на основе государственных или отраслевых стандартов.

В конце каждой главы пособия после изложения теоретического материала приведены контрольные вопросы, позволяющие студентам лучше усвоить материал, сориентироваться в степени важности отдельных положений теории и проверить свои знания.

Уровень усвоения материала студенты должны подтвердить выполнением трех контрольных работ по каждой части курса, защита которых является необходимым условием допуска к экзамену. В пособие включены варианты заданий к ним, а в тексте соответствующих глав подробно разобраны примеры выполнения заданий. В конце пособия приведен список основной и дополнительной литературы, с помощью которой студенты могут более глубоко усвоить материал курса «Техническая механика».

Авторы выражают благодарность доценту Яковенко В.А. и старшему преподавателю Павловой Э.А. за помощь при подготовке вариантов контрольных заданий, а также доцентам Телепневу М.Д. и Барановскому В.М. за полезные замечания по отдельным главам пособия.

Сопrotивление материалов

Глава 1. Основные понятия сопротивления материалов

1.1. Допущения, модели и расчетные схемы

Важнейшие задачи раздела «Сопrotивление материалов» учебной дисциплины «Техническая механика» состоят в разработке инженерных методов расчета на прочность, жесткость и устойчивость различных конструкций, элементов, деталей и узлов химического оборудования, находящихся под действием различных сил и нагрузок. При этом необходимо учитывать геометрическую форму и размеры объектов, свойства конструкционного материала, из которого они изготовлены, а также условия их функционирования (температуру, давление, агрессивность рабочей среды и т. д.). Указанные методы расчета могут быть разработаны только исходя из анализа полной картины напряжений и деформаций, возникающих в материале в процессе эксплуатации оборудования. Провести такой анализ с учетом всех факторов не представляется возможным в силу их огромного разнообразия. Поэтому, как и в других разделах механики, в курсе «Сопrotивления материалов» используются упрощающие допущения, которые, с одной стороны, отбрасывают все несущественные факторы, а с другой – оставляют физическое существо задачи неизменным.

Упрощения, касающиеся геометрической формы изучаемых объектов, сводят все многообразие конфигураций реальных деталей и конструкций к трем идеализированным формам (**расчетным схемам**), а именно: брусу, оболочке и массиву.

Брусом называется материальное тело, у которого один из геометрических размеров (длина) значительно больше двух других. Под понятием «значительно больше» понимается такое соотношение между размерами, когда длина бруса, по крайней мере, на порядок превосходит его поперечные размеры. Расчетная схема бруса используется, например, при анализе напряженного состояния валов, несущих балок, колонных аппаратов.

Оболочкой называется материальное тело, у которого один из геометрических размеров (толщина) значительно меньше двух других. Расчетная схема оболочки используется в первую очередь при анализе напряженного состояния элементов корпусов технологических аппаратов.

Массивом называется материальное тело, у которого все три размера соизмеримы.

Как видно из приведенных определений, расчетные схемы бруса, оболочки и массива отличаются друг от друга только геометрической формой и охватывают все многообразие реальных объектов.

Другая группа допущений касается свойств материала, из которого изготовлены (или будут изготовлены, если речь идет о проектировании нового оборудования) деталь или элемент конструкции. Материал предполагается однородным, изотропным и сплошным. **Однородность** означает, что свойства материала одинаковы во всех его точках. У **изотропных** материалов свойства также одинаковы по всем направлениям. Наконец, свойство **сплошности** означает, что материал заполняет пространство непрерывным образом. Хотя гипотеза сплошности противоречит представлениям о молекулярном строении вещества, она не приводит к заметным погрешностям, поскольку размеры изучаемых в сопромате объектов намного больше межмолекулярного расстояния.

Еще одно свойство материалов, которое является определяющим при расчетах на жесткость, связано со способностью реальных тел деформироваться под действием сил. Если в теоретической механике и теории механизмов и машин (за редким исключением) все тела рассматриваются как абсолютно твердые, то в курсе сопромата от этой идеализации отказываются. Под **деформируемостью** понимают способность твердых тел изменять свои размеры и геометрическую форму под действием приложенных к ним сил.

Деформируемость твердых тел вызывает появление в них **внутренних сил**, которые оказывают сопротивление изменению их формы и размеров. Физическая природа внутренних сил обусловлена появлением в объеме тела дополнительных сил межмолекулярного взаимодействия при изменении первоначальной формы тела и, как следствие, расстояний между молекулами. Величина и распределение внутренних сил таковы, что они в точности уравнивают внешние нагрузки, вызывающие деформацию материала. С увеличением внешних нагрузок внутренние силы будут также увеличиваться. Однако их увеличение может происходить только до известного предела, который зависит от прочности данного материала. Превышение этого предела приводит к разрушению элемента конструкции.

Внутренние силы часто называют **силами упругости**, поскольку благодаря им твердые тела возвращают прежние размеры и форму после того, как внешние нагрузки прекращают действовать. Однако далеко не все тела обладают таким свойством. Если после прекращения действия внешних сил тело полностью сохраняет вызванную ими деформацию, то его называют **абсолютно неупругим**. Наоборот, если деформации полностью исчезают при снятии внешних нагрузок, то тело называется **абсолютно упругим**. И то и другое понятие являются идеализацией, так как в природе не существует абсолютно упругих и абсолютно неупругих тел.

Третью группу допущений, на основе которых выводятся важнейшие положения сопротивления материалов, составляют

допущения относительно характера внешних нагрузок. Внешние силы в зависимости от способа приложения делятся на объемные и поверхностные. **Объемные силы** действуют на каждую часть тела. Примерами таких сил могут служить силы тяжести или центробежные силы. **Поверхностные силы** приложены только к поверхностным точкам тела. В качестве примера можно указать силы давления и силы трения. Если площадь действия поверхностной силы мала по сравнению со всей поверхностью тела, то эту силу с большой степенью точности можно считать приложенной в точке. В этом случае силу называют **сосредоточенной**. В противном случае говорят о **распределенной нагрузке**. Например, воздействие снеговой нагрузки на резервуары для хранения сжиженных газов необходимо рассматривать как нагрузку, распределенную по поверхности крыши резервуара. Такая нагрузка измеряется в H/m^2 . Если участок действия распределенной нагрузки имеет малую ширину, то нагрузку можно считать распределенной по длине (погонная нагрузка) и относить ее к единице длины: $\text{H}/\text{м}$.

Очень важно учитывать характер внешних сил. Опыт показывает, что большинство конструктивных материалов совершенно по-разному воспринимает статические и динамические воздействия. Под **статическими** понимаются такие нагрузки, которые меняются со временем очень медленно, так что вызываемые ими ускорения, а, следовательно, и силы инерции пренебрежимо малы. При **динамическом нагружении** силами инерции пренебрегать нельзя. Иногда они являются определяющими как, например, при ударных нагрузках. Особый вид динамических нагрузок составляют **периодические нагрузки**, которые часто встречаются на практике. Такие нагрузки, изменяясь во времени по величине, могут менять и направление действия (знакопеременные нагрузки).

В заключение параграфа еще раз отметим, что при анализе напряженно-деформированного состояния некоторого реального элемента оборудования в сопротивлении материалов рассматривается его модель, которая составлена с помощью определенной идеализации его геометрической формы, свойств конструктивного материала и характера и способа приложения внешних нагрузок.

1.2. Перемещения и деформации

Прежде чем изучать конкретные виды напряженно-деформированных состояний необходимо ввести количественные меры для деформаций и внутренних усилий в материале. Рассмотрим некоторое деформируемое материальное тело (рис. 1.1) в неподвижной системе координат $Oxuz$. Пусть положение точки K_1 тела

до приложения нагрузки определяется радиус-вектором r_1 . После нагружения тела внешними усилиями отдельные точки тела изменяют свое положение в пространстве. Точка K_1 также переместится и займет положение K_2 , которому соответствует радиус-вектор r_2 . Радиус-вектор $\Delta r = r_2 - r_1$ называется **полным перемещением** точки K_1 тела. Обозначим проекции радиус-вектора Δr на координатные оси x, y, z через u, v и w соответственно. Тогда полное перемещение Δr может быть разложено по координатным осям следующим образом:

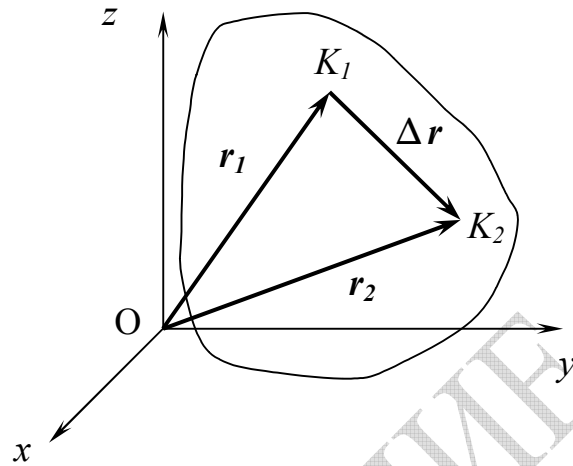


Рисунок 1.1

$$\Delta r = ui + vj + wk ,$$

где i, j и k – орты декартовой системы координат.

Перемещения, однако, еще не могут служить количественной мерой деформации материала, поскольку изменение положения точек на некотором участке тела иногда обусловлены деформацией материала совсем на другом участке. Так, точки стержня, изображенного на рис. 1.2, на участке BC получают перемещения за счет деформации материала только на участке AB . Для того чтобы ввести понятие деформации и найти связь между перемещениями и деформациями в материальном теле зафиксируем две точки A и B с

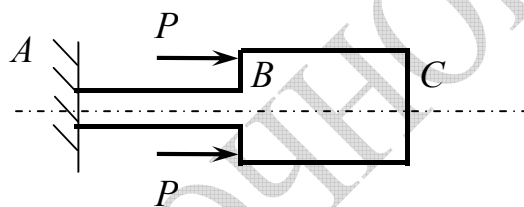


Рисунок 1.2

расстоянием между ними s . После приложения внешней нагрузки в результате деформации материала эти точки переместятся в положение A_1 и B_1 , расстояние между ними изменится и станет равным s_1 (рис. 1.3). Скалярная величина $\Delta s = s_1 - s$ называется **абсолютным удлинением** отрезка AB , а отношение абсолютного удлинения к первоначальной длине отрезка носит название **относительного удлинения**: $\delta = \Delta s / s$. Если

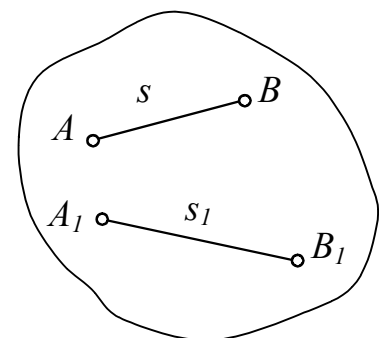


Рисунок 1.3

составить предел относительного удлинения при $s \rightarrow 0$, когда точка B стягивается к точке A , оставаясь на линии первоначального отрезка AB , то величина этого предела называется **линейной деформацией** ε_{AB} материала в точке A по направлению AB . Таким образом, по определению:

$$\varepsilon_{AB} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s}. \quad (1.1)$$

Из определения следует, что величина деформации может быть различной в разных направлениях и меняться от точки к точке. Деформации в направлении координатных осей обычно обозначаются через ε_x , ε_y и ε_z . Деформации, определяемые равенством (1.1), являются количественной мерой изменения геометрических размеров в окрестности точки A . Они не имеют размерности, иногда измеряются в процентах и для конструкционных материалов обычно составляют доли процентов, т. е. тысячные доли единицы.

Кроме линейной деформации введем понятие угловой деформации. С этой целью зафиксируем в материале ненагруженного тела три точки A , B и C , образующие некоторый угол $\angle BAC$ (см. рис. 1.4). После приложения внешних сил в результате деформации материала положение всех трех точек в общем случае изменится. Изменится и величина угла, который они составляют. Рассмотрим разность углов $\angle BAC - \angle B_1 A_1 C_1$, где B_1 , A_1 , C_1 – положение точек B , A , C после деформации материала. Предел этой разности при стягивании точек B и C к точке A называется угловой деформацией γ или углом сдвига в точке A в плоскости BAC , т. е.

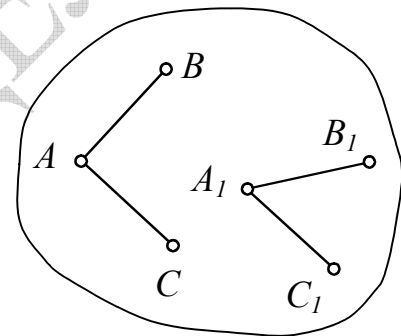


Рисунок 1.4

$$\gamma = \lim_{\substack{B \rightarrow A \\ C \rightarrow A}} \angle BAC - \angle B_1 A_1 C_1. \quad (1.2)$$

В координатных плоскостях угловые деформации принято обозначать через γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} .

Поскольку через любую точку твердого деформируемого тела можно провести бесконечно много прямых и бесконечно много плоскостей, то в каждой точке тела можно определить бесконечное множество линейных и угловых деформаций. *Полная совокупность всех линейных деформаций по различным направлениям и угловых деформаций в различных плоскостях для одной точки*

характеризует **деформированное состояние** материала в данной точке тела.

Для того чтобы найти связь между перемещениями и деформациями в материальном теле, подверженном действию внешних сил, выделим отрезок AB параллельный оси Ox и имеющий первоначальную длину dx (рис. 1.5). Пусть положение точки A определяется координатами x, y, z . Тогда координаты точки B будут $x + dx, y, z$. После деформации тела точки A и B переместятся в положение A_1 и B_1 соответственно. Точка A_1 имеет координаты: $A_1(x + u, y + v, z + w)$, где u, v, w – перемещения точки A в направлениях координатных осей. Для точки B приращение координат будет другим, поскольку перемещения u, v, w являются функциями координат. Поэтому координатами точки B_1

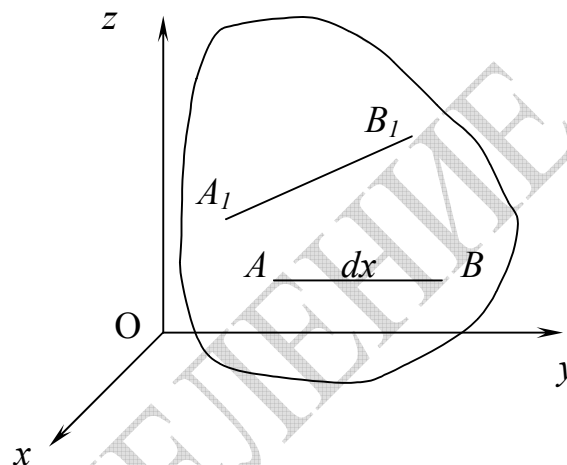


Рисунок 1.5

будут:

$$x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

$y + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx, z + w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$. Тогда деформация в точке A по направлению координатной оси Ox по определению равна:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{A_1B_1 - AB}{AB} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2} - dx}{dx} = \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \approx \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x}} - 1. \end{aligned}$$

При выполнении преобразований величины второго порядка малости опущены. Если теперь полученное выражение разложить в ряд Тейлора ^{*)}, сохранив первые два члена разложения, то окончательно для линейной деформации ε_x получим:

^{*)} Напомним, что разложение в ряд Тейлора степенной функции имеет вид:
 $(1 + x)^n \approx 1 + nx + \dots$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.3)$$

Рассуждая аналогично, можно получить соотношения для линейной деформации материала в направлении координатных осей Oy и Oz :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.3')$$

Полученные формулы называются **формулами Коши**. Они связывают линейные деформации и перемещения по осям координат.

Чуть более сложно выводятся соотношения, связывающие перемещения вдоль координатных осей и угловые деформации в координатных плоскостях. Приведем указанные соотношения без вывода:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.4)$$

Угловые и линейные деформации в материале не могут быть произвольными. Их связывают определенные соотношения. Чтобы получить их продифференцируем первое из равенств (1.4) сначала по x , а затем по y :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}. \quad (1.5)$$

Здесь учтены равенства (1.3) и (1.3'). Аналогично могут быть получены еще две формулы:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}. \quad (1.5')$$

Соотношения (1.5) называются **тождествами Сен-Венана**. Они показывают, что существует тесная корреляция между линейными и угловыми деформациями независимо от свойств конкретного материала.

Оказывается, что трех значений линейных деформаций вдоль координатных осей и трех значений угловых деформаций в координатных плоскостях достаточно, чтобы найти линейные и угловые деформации в данной точке материала в любых

направлениях. Следовательно, величины ε_x , ε_y , ε_z и γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} полностью определяют деформированное состояние материала в данной точке.

Как уже отмечалось, после снятия внешней нагрузки тела могут возвращать или не возвращать свои первоначальные размеры и форму. Это зависит как от свойств материала, так и от величины приложенных нагрузок. *Часть деформации, исчезающая после прекращения действия внешних сил, называется **упругой деформацией**. Деформация, не исчезающая после разгрузки, называется **остаточной** или **пластической**.*

Помимо линейных и угловых деформаций иногда важно оценить относительное изменение локального объема материала в окрестности данной точки в результате деформирования. Эта величина называется **объемной деформацией**. Ее нетрудно связать с линейными деформациями, если рассмотреть элементарный параллелепипед со сторонами dx , dy и dz . После приложения внешних сил и деформации материала длины сторон элементарного параллелепипеда станут равными $dx(1 + \varepsilon_x)$, $dy(1 + \varepsilon_y)$ и $dz(1 + \varepsilon_z)$. Тогда изменение объема элементарного параллелепипеда ΔV выражается разностью:

$$\Delta V = dx(1 + \varepsilon_x) dy(1 + \varepsilon_y) dz(1 + \varepsilon_z) - dx dy dz.$$

Раскроем скобки и учтем, что линейные деформации, как уже отмечалось, значительно меньше единицы. Поэтому их произведения, по крайней мере, на два порядка меньше, и ими можно пренебречь. С учетом этого для изменения объема получим:

$$\Delta V = dx dy dz(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Следовательно, объемная деформация e может быть выражена через линейные деформации с помощью соотношения:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (1.6)$$

1.3. Понятие о напряжениях

Внутренние силы, возникающие в объеме материала как реакция на воздействие внешних нагрузок, распределены внутри тела в общем случае неравномерно. Их направление и интенсивность в разных точках могут сильно меняться. Мерой интенсивности внутренних сил служат напряжения. Чтобы ввести это понятие, рассмотрим некоторое

сечение A нагруженного тела. В окрестности точки K этого сечения выделим элементарную площадку dA (см. рис. 1.6). Пусть равнодействующая всех внутренних сил, действующих в пределах выделенной площадки, равна df . С уменьшением площадки dA величина внутренних сил также будет уменьшаться. Гипотеза сплошности позволяет составить предел отношения величины внутренних сил на площадке dA к ее площади, т. е.

$$\mathbf{p} = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{f}}{dA} \quad (1.7)$$

Величина этого предела представляет собой **полное напряжение в точке K в сечении A** . Из определения полного напряжения видно, что единицей его измерения является Н/м^2 . Другими словами, напряжение характеризует величину внутренних сил, отнесенную к единице площади. Понятия напряжений и деформаций являются важнейшими в сопротивлении материалов.

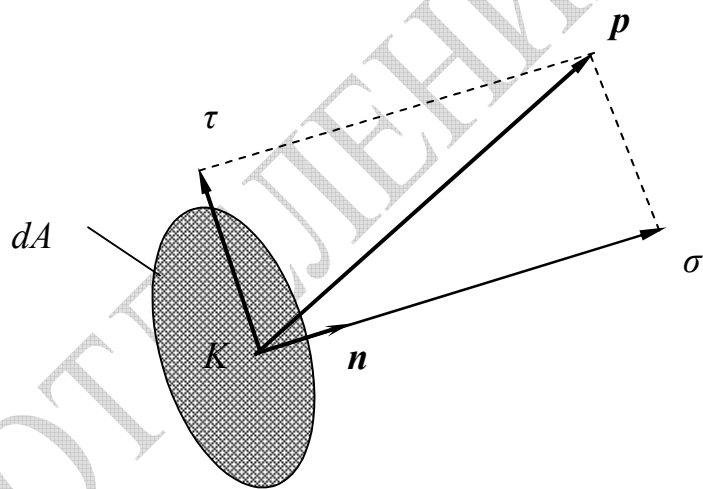


Рисунок 1.6

Прочность материала в большинстве случаев определяется величиной напряжений в материале. От величины деформаций зависит жесткость конструкции.

Если через ту же точку K провести другое сечение A' , то значение полного напряжения будет, вообще говоря, другим. Поэтому полное напряжение в материале зависит не только от координат, но и от ориентации сечения: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_n(x, y, z)$. Последняя, как известно, определяется направлением нормали \mathbf{n} к сечению, что отражено в обозначении полного напряжения. *Совокупность векторов полного напряжения, действующих в данной точке во всех сечениях, проведенных через нее, называется **напряженным состоянием в точке***.

Вектор полного напряжения может быть разложен на две составляющие: нормальную и касательную (рис. 1.6). Проекция вектора \mathbf{p} на нормаль носит название **нормального напряжения** и обозначается через σ . Составляющая вектора \mathbf{p} в плоскости сечения называется **касательным напряжением** и обозначается через τ . Характер воздействия на материал нормальных и касательных напряжений совершенно различен. Если нормальные напряжения

вызывают растяжение или сжатие материала в окрестности точки K , то касательные напряжения стремятся сдвинуть соседние слои материала относительно друг друга.

Оказывается, что величина полного напряжения в сечении с произвольной ориентацией может быть выражена через величины полного напряжения в сечениях, перпендикулярных осям координат. Пусть $\mathbf{p}_x(x, y, z)$, $\mathbf{p}_y(x, y, z)$ и $\mathbf{p}_z(x, y, z)$ - векторы полного напряжения в сечениях, перпендикулярных оси Ox , Oy и Oz соответственно. Тогда полное напряжение в сечении с нормалью \mathbf{n} связано с ними посредством соотношения:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_x \cos(\mathbf{n} \wedge x) + \mathbf{p}_y \cos(\mathbf{n} \wedge y) + \mathbf{p}_z \cos(\mathbf{n} \wedge z), \quad (1.8)$$

где $\cos(\mathbf{n} \wedge x)$, $\cos(\mathbf{n} \wedge y)$ и $\cos(\mathbf{n} \wedge z)$ - направляющие косинусы нормали \mathbf{n} к сечению. Формула (1.8) называется **формулой Коши**. Она позволяет сделать важный вывод: напряженное состояние в точке полностью определено, если известны векторы полного напряжения \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y и \mathbf{p}_z . Каждый из этих векторов имеет три проекции на оси декартовой системы координат (рис. 1.7): нормальные и касательные напряжения. Следовательно, напряженное состояние в данной точке материала определяется девятью скалярными величинами – проекциями векторов \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y и \mathbf{p}_z на оси координат. Эти девять величин образуют так называемый **тензор напряжений T** :

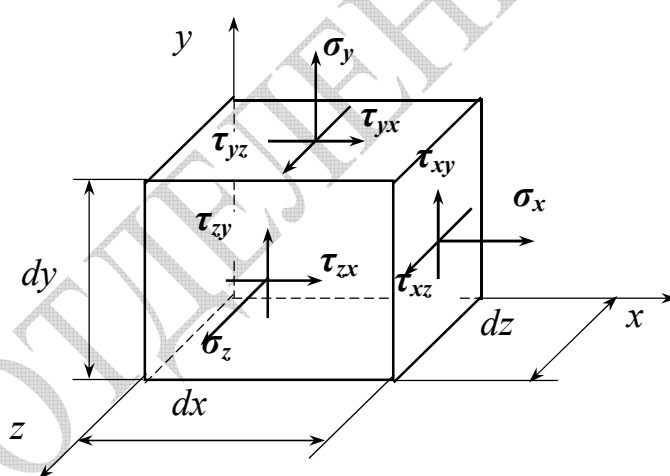


Рисунок 1.7

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

На рис. 1.7 показан элементарный параллелепипед, выделенный из объема материала, на гранях которого действуют напряжения, составляющие тензор T . На «невидимых» гранях действуют точно такие же напряжения, но противоположно направленные. Это нетрудно показать, если составить уравнения равновесия для выделенного параллелепипеда. Например, устремляя один из

размеров параллелепипеда к нулю ($dy \rightarrow 0$), составим уравнение равновесия по силам в проекциях на ось Oy :

$$\sigma_y dx dz + \sigma'_y dx dz = 0,$$

где σ'_y – нормальное напряжение на «невидимой» грани. Сокращая на площадь грани $dx dz$, получим: $\sigma_y = -\sigma'_y$, что и требовалось показать.

Составим теперь уравнение равновесия по моментам относительно координатной оси Oz . Сила, обусловленная действием касательного напряжения τ_{xy} на правой боковой грани, равна произведению этого напряжения на площадь грани: $\tau_{xy} dy dz$. Плечо указанной силы относительно оси Oz равно dx . Следовательно, момент, вызванный действием напряжения τ_{xy} , равен $\tau_{xy} dy dz dx$. Момент, обусловленный действием касательного напряжения τ_{yx} на верхней грани параллелепипеда, в силу аналогичных рассуждений равен $\tau_{yx} dz dx dy$. С учетом направления моментов уравнение равновесия будет иметь вид:

$$\tau_{xy} dy dz dx - \tau_{yx} dz dx dy = 0.$$

Отсюда следует, что $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Точно так же можно получить два других равенства: $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ и $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Эти соотношения носят название **закона парности касательных напряжений**: *на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра*. Закон парности справедлив при любых свойствах материала, а также при любых приложенных нагрузках. В силу этого закона тензор напряжений (1.9) всегда симметричен, а напряженное состояние в точке определяется шестью независимыми компонентами напряжений: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

Свойства тензоров во многом схожи со свойствами векторов. В частности, при переходе к другой системе координат компоненты тензора, также как и компоненты вектора будут меняться. Компоненты тензора напряжений изменятся, если, например, повернуть систему координат. Оказывается, что в каждой точке нагруженного тела обязательно найдется такая система осей Ox, Oy и Oz , в которой касательные напряжения $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ равны нулю. Такие оси называются **главными осями**. Соответствующие им взаимно перпендикулярные площадки называются **главными площадками**, а нормальные напряжения на них – **главными напряжениями**. В порядке возрастания их численных значений главные напряжения принято обозначать через $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$.

Если в качестве осей координат выбрать главные оси, то тензор напряжений в этих координатах примет вид:

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Следовательно, *напряженное состояние материала полностью определяется численными значениями трех главных напряжений.*

Пусть в качестве осей координат выбраны главные оси. Тогда полное напряжение на площадках перпендикулярных координатным осям будет равно: $\mathbf{p}_x (\sigma_1, 0, 0)$, $\mathbf{p}_y (0, \sigma_2, 0)$ и $\mathbf{p}_z (0, 0, \sigma_3)$. На площадке с произвольно ориентированной нормалью \mathbf{n} в соответствии с формулой Коши (1.8) будет действовать полное напряжение, компоненты которого выражаются через главные напряжения:

$$p_{nx} = \sigma_1 \cos(\mathbf{n}^{\wedge} x), \quad p_{ny} = \sigma_2 \cos(\mathbf{n}^{\wedge} y), \quad p_{nz} = \sigma_3 \cos(\mathbf{n}^{\wedge} z).$$

Если возвести в квадрат левые и правые части полученных равенств, сложить их и учесть, что сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, то придем к уравнению:

$$\frac{p_{nx}^2}{\sigma_1^2} + \frac{p_{ny}^2}{\sigma_2^2} + \frac{p_{nz}^2}{\sigma_3^2} = 1. \quad (1.11)$$

Смысл этого уравнения состоит в следующем. Величины p_{nx} , p_{ny} и p_{nz} представляют собой координаты конца вектора полного напряжения \mathbf{p}_n . С изменением направления нормали \mathbf{n} (т. е. с изменением ориентации сечения) вектор \mathbf{p}_n изменяется, но координаты его конца удовлетворяют уравнению (1.11) при любом направлении нормали \mathbf{n} . Уравнение (1.11) является уравнением эллипсоида. Таким образом, *геометрическое место концов вектора полного напряжения образует эллипсоид*, который носит название **эллипсоида напряжений**. Его полуосями служат главные напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 .

Наибольшей полуоси эллипсоида напряжений соответствует наибольшее главное напряжение σ_1 . Оно же одновременно является максимально возможным напряжением в данной точке материала из всех значений полного напряжения на множестве площадок, проходящих через данную точку. Аналогично, наименьшее из главных напряжений σ_3 будет одновременно минимальным из всех значений полного напряжения в данной точке.

В зависимости от величины главных напряжений различают три типа напряженного состояния материала в точке.

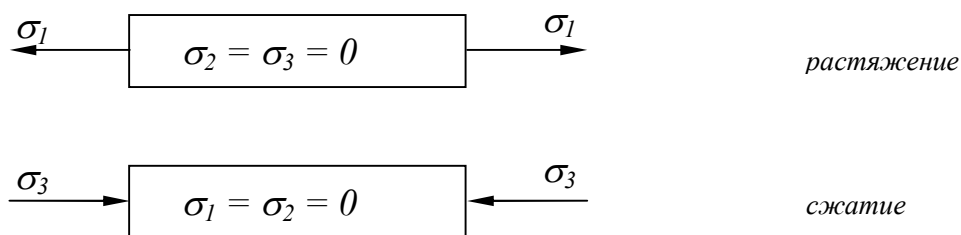


Рисунок 1.8

1. Линейное напряженное состояние. Этот тип реализуется тогда, когда два главных напряжения равны нулю, а оставшееся главное напряжение отлично от нуля. Возможные случаи приведены на рис. 1.8. При этом следует учитывать, что нормальное напряжение считается положительным, если оно вызывает растяжение материала, и отрицательным – в противном случае.

2. Плоское напряженное состояние. Этот тип напряженного состояния материала реализуется в том случае, когда одно главное напряжение равно нулю, а два другие нулю не равны. Возможные виды плоских напряженных состояний приведены на рис. 1.9.

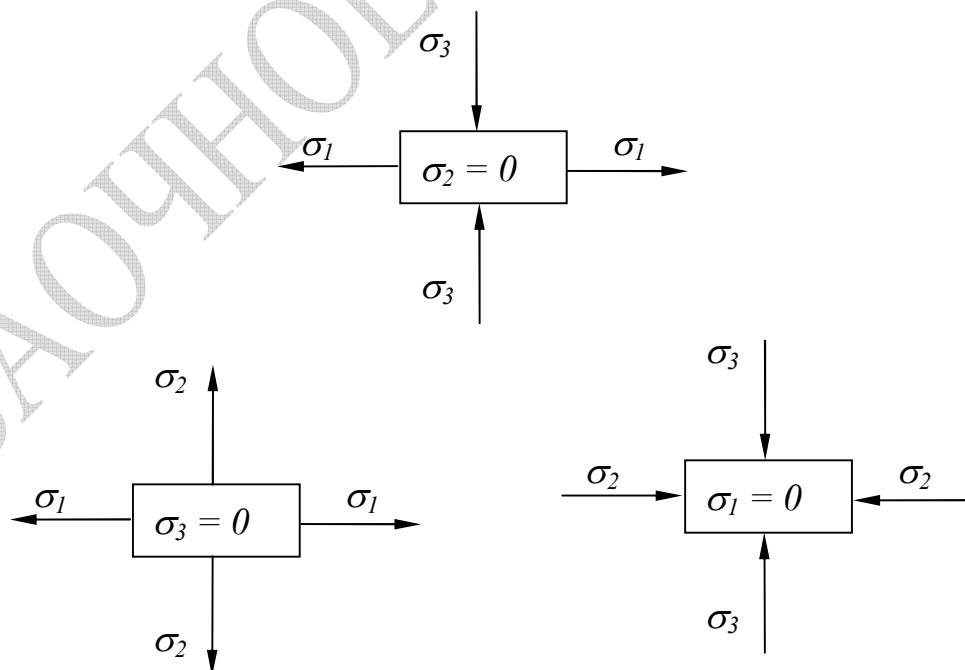


Рисунок 1.9

3. Объемное напряженное состояние. Этот тип реализуется в том случае, если все три главных напряжения отличны от нуля.

Независимо от типа напряженного состояния его анализ предполагает, что нагруженная конструкция подчиняется **принципу независимости действия сил**. Это означают следующее. Если к конструкции приложена система сил $\{F_i\}_n$, то деформированное и напряженное состояния материала в каждой точке конструкции можно рассматривать как суммарный результат от действия всех сил F_i по отдельности. Принцип независимости действия сил позволяет находить внутренние силы, напряжения и перемещения от силы F_i , не учитывая влияния других сил, действующих на конструкцию. Тогда совокупное действие системы сил $\{F_i\}_n$ можно получить сложением соответствующих воздействий от сил F_i .

1.4. Контрольные вопросы

1. Что такое расчетная схема реального объекта?
2. Перечислите основные упрощения, которые используются в сопротивлении материалов.
3. Для каких тел используется расчетная схема бруса?
4. Для каких тел используется расчетная схема оболочки?
5. Для каких тел используется расчетная схема массива?
6. Чем отличаются поверхностные силы от объемных сил?
7. В каких случаях поверхностную силу можно считать сосредоточенной?
8. Каков смысл распределенной нагрузки?
9. В чем состоит свойство деформируемости твердых тел?
10. Какая деформация называется упругой и какая пластической?
11. Какова физическая природа внутренних сил?
12. Что такое полное перемещение точки?
13. Чем отличаются перемещения от деформаций?
14. Какие основные виды деформаций вызываются внешними нагрузками?
15. Что такое линейная деформация материала в данной точке? От чего зависит ее величина?
16. Что такое угловая деформация?
17. Дайте определение деформированного состояния материала в точке.
18. Как связаны перемещения и деформации?
19. Что такое объемная деформация?
20. Что характеризует величина напряжений в данной точке материала?

21. Что такое полное напряжение? В каких единицах измеряются напряжения?
22. Чем отличаются нормальные напряжения от касательных по характеру воздействия на материал?
23. В чем заключается закон парности касательных напряжений?
24. Что такое главные оси и главные напряжения?
25. Дайте определение напряженного состояния материала в данной точке.
26. Каков смысл эллипсоида напряжений?
27. Перечислите типы напряженных состояний. В каких случаях реализуется каждое из них?
28. В чем заключается принцип независимости действия сил?

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Глава 2. Внутренние силовые факторы в поперечных сечениях стержней

2.1. Метод сечений

Под действием внешних нагрузок в объеме материала возникают внутренние усилия, величина и распределение которых в точности соответствуют величине и распределению внешних сил, так что система всех сил является уравновешенной. Определение внутренних усилий - первый этап расчета любых конструкций и оборудования по критериям работоспособности.

Методику определения внутренних усилий целесообразно рассмотреть для случая материальных тел, имеющих наиболее простую расчетную схему – расчетную схему бруса. Пусть имеется стержень, нагруженный системой внешних сил $\{F_i\}$ и находящийся в равновесии (рис. 2.1).

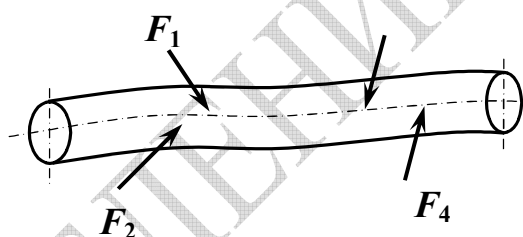


Рисунок 2.1

Мысленно рассечем его плоскостью, перпендикулярной оси стержня, и отбросим одну из частей (рис. 2.2). В получившемся сечении (так же как и во всем объеме тела) действуют внутренние силы P_j , распределенные в пределах рассматриваемого сечения по некоторому закону.

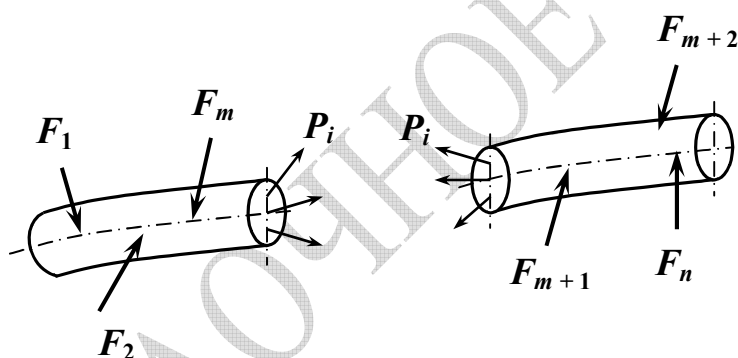


Рисунок 2.2

В силу равенства действия и противодействия внутренние усилия в сечении левой части стержня равны и противоположны по направлению внутренним усилиям, приложенным к сечению правой части стержня. Каждая из частей стержня под действием

приложенных к ней внешних сил и совокупности внутренних усилий в сечении находится в равновесии. Поэтому для них справедливы уравнения статики.

Для удобства анализа приведем внутренние силы P_j к главному вектору R и главному моменту M с центром приведения в центре тяжести поперечного сечения. Еще раз подчеркнем, что величины R и M характеризуют всю совокупность внутренних сил, действующих в данном поперечном сечении. В другом сечении их величина и направление будут другими. Таким образом, они являются

функциями координаты, отсчитываемой вдоль оси стержня. Введем локальную систему координат с началом также в центре тяжести сечения, направив ось Ox вдоль оси стержня по внешней нормали к сечению. Оси Oy и Oz расположим в плоскости сечения (рис. 2.3).

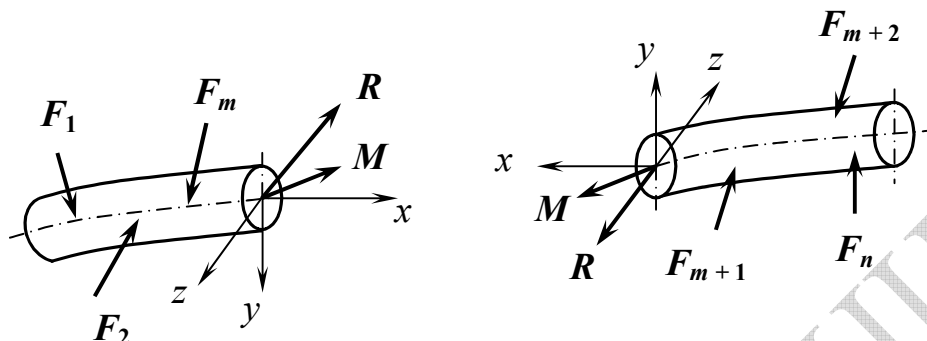


Рисунок 2.3

Проекции главного вектора и главного момента системы внутренних сил на оси координат называются **внутренними силовыми факторами** в данном поперечном сечении. Таким образом, шесть скалярных величин интегрально характеризуют величину внутренних сил в каждом поперечном сечении. В силу закона о равенстве действия и противодействия силовые факторы в сечениях левой и правой части стержня равны по величине и противоположны по направлению. Чтобы знак силового фактора, определенного в правой и левой части стержня, был одинаков, введем две системы координат (рис. 2.3). Оси Ox и Oy направим так, чтобы в сечении левой части стержня они образовали левую тройку, а в сечении правой - правую. Условимся при этом, что положительные направления внутренних силовых факторов совпадают с положительными направлениями координатных осей.

Нахождение численных значений внутренних силовых факторов основано на решении уравнений статики. В первой части настоящего пособия в главе 1 приведена система уравнений статики в общем случае (соотношения (1.17)):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad (1.17)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{Ox}(F_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{Oy}(F_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{Oz}(F_i) = 0.$$

Она включает шесть алгебраических уравнений. Но число внутренних силовых факторов также равно шести. Поэтому указанная система уравнений является замкнутой и может быть решена относительно

усилий, действующих в данном сечении. На практике эта идея реализуется следующим образом. Рассматривается одна из частей стержня по левую или правую сторону от сечения. Для нее составляются уравнения равновесия, которые должны содержать внешние силы, реакции опор (если на конструкцию наложены связи) и неизвестные внутренние усилия. Тогда первые три уравнения приведенной системы позволяют определить составляющие главного вектора \mathbf{R} внутренних сил, а оставшиеся три уравнения – составляющие главного момента \mathbf{M} .

Метод нахождения внутренних силовых факторов, основанный на построении уравнений равновесия для части нагруженного стержня, называется **методом сечений**. Он широко используется для анализа распределения внутренних сил в стержневых системах и конструкциях, имеющих расчетную схему бруса.

Рассмотрим составляющие главного вектора и главного момента системы внутренних сил. Проекция главного вектора \mathbf{R} на ось Ox называется **продольной силой** и обозначается через N . Продольная сила вызывается растяжением или сжатием стержня в зависимости от ее знака. Если она положительна (следовательно, направлена вдоль *внешней* нормали к сечению), то она обусловлена деформацией растяжения материала в данном сечении. В противном случае она вызывается сжатием.

Проекции главного вектора \mathbf{R} на оси Oy и Oz называются **поперечными силами** и обозначаются через Q_y и Q_z соответственно. Поперечные силы оказывают сопротивление перерезывающему воздействию на материал стержня внешних сил.

Проекция главного момента \mathbf{M} внутренних сил на ось Ox носит название **крутящего момента** и обычно обозначается через T . Этот внутренний силовой фактор противодействует скручиванию стержня вокруг продольной оси. Проекции M_y и M_z вектора \mathbf{M} на другие оси называются **изгибающими моментами**. Они препятствуют изгибу стержня в соответствующей плоскости.

Метод сечений позволяет выяснить характер зависимости и численное значение каждого из перечисленных внутренних силовых факторов от продольной координаты. Следовательно, уже на этом этапе инженерных расчетов можно ответить на целый ряд вопросов об особенностях реакции конструкции на внешние нагрузки. В частности, имея явный вид таких зависимостей, нетрудно установить, какой из факторов является доминирующим, где он достигает своих экстремальных значений, и какой вид деформации материала является определяющим. На практике подобные зависимости принято представлять в графической форме в виде так называемых **эпюр**.

При построении эпюр стержень разбивается на отдельные грузовые участки. Границами грузовых участков являются те сечения, в которых приложены сосредоточенные моменты или силы, а также

сечения, где начинается или заканчивается действие распределенных нагрузок. В пределах каждого грузового участка закон изменения внутренних силовых факторов постоянен. Этот закон описывается конкретной аналитической зависимостью и устанавливается с помощью метода сечения. График указанной зависимости и представляет собой эпюру. Обычно эпюру штрихуют прямыми линиями, перпендикулярными нулевой линии, по одну сторону которой откладывают отрицательные значения внутренних усилий, а по другую – положительные. Удобно также в характерных точках эпюр (на границах грузовых участков, в экстремальных точках) указывать их значения.

Величина внутренних силовых факторов определяется характером нагружения стержня. Очень часто внешние силы действуют таким образом, что некоторые внутренние силовые факторы равны нулю или пренебрежимо малы. Особую группу случаев представляют те способы нагружения, которые приводят к **простым видам деформации** материала стержня. Так, если из шести внутренних усилий отлична от нуля только продольная сила N , то говорят о **растяжении** или **сжатии** (в зависимости от знака N). Когда не равна нулю только одна из поперечных сил Q_y или Q_z , то этот случай соответствует **сдвигу** в направлении оси Ox или Oy . При **кручении** из шести внутренних усилий отличен от нуля только крутящий момент T . Наконец, когда $Q_y \neq 0$ и $M_z \neq 0$ или $Q_z \neq 0$ и $M_y \neq 0$, то деформацию стержня называют **плоским поперечным изгибом**. В первом случае изгиб происходит в плоскости Oxy , а во втором – в плоскости Oxz . При этом если поперечная сила оказывается равной нулю, то говорят о **чистом изгибе** в соответствующей плоскости.

Классификация простых видов нагружения облегчает анализ напряженного состояния элементов оборудования, имеющих расчетную схему бруса. Кроме того, используя принцип независимости действия сил, можно любой случай нагружения рассматривать как наложение нескольких простых видов. Тогда напряжения и деформации в произвольной точке конструкции будут представлять собой сумму напряжений и деформаций, обусловленных отдельными простыми видами нагружения.

2.2. Внутренние усилия при растяжении или сжатии стержня

При растяжении или сжатии стержня из шести внутренних силовых факторов отлична от нуля только продольная сила N . Такая ситуация возникает тогда, когда все внешние силы или их равнодействующая направлены вдоль продольной оси стержня. Для определения величины продольной силы воспользуемся методом сечений. Пусть требуется построить эпюру N для стержня, нагруженного так, как

показано на рис. 2.4. Стержень имеет три грузовых участка. Их границами являются сечения приложения внешних сил, а также сечения, в которых возникают опорные реакции. Величина и направление продольной силы находятся последовательно на каждом грузовом участке.

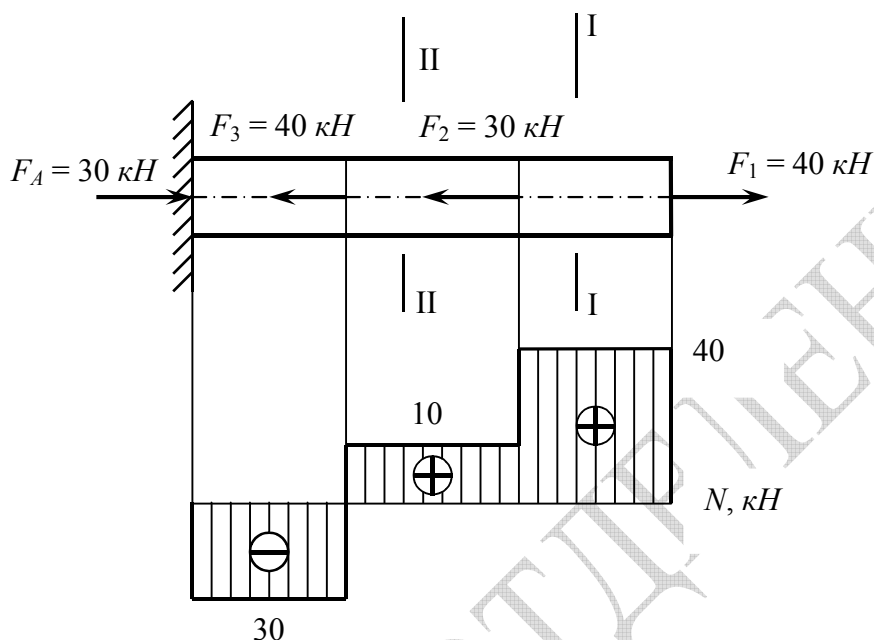


Рисунок. 2.4

Мысленно проведем поперечное сечение I – I в пределах крайнего правого грузового участка и отбросим часть стержня слева от этого сечения. Ось Ox направим вдоль внешней нормали к сечению (рис. 2.5), а искомый вектор N_1 (индекс 1 – номер грузового участка) – в положительном направлении координаты x . Составим уравнение равновесия для рассматриваемой части стержня, проектируя силы на горизонтальную ось:

$$N_1 - F_1 = 0,$$

откуда $N_1 = F_1 = 40$ кН. Поскольку сечение I – I проведено в произвольном месте первого грузового участка, значение продольной силы N_1 не зависит от координаты x . Следовательно, на протяжении всего первого грузового участка $N_1 = +40$ кН. Знак «+» перед значением силы указывает на то,

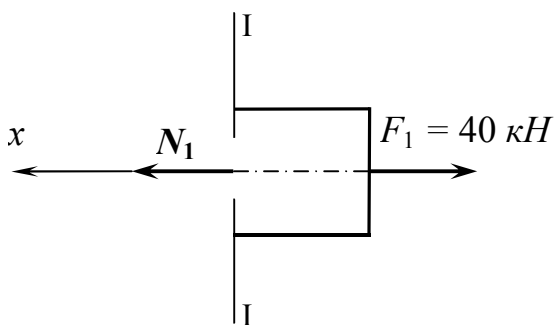


Рисунок 2.5

что она обусловлена растяжением материала, так как направлена в сторону внешней нормали к сечению.

Проведем теперь мысленное поперечное сечение II – II в пределах второго (среднего) грузового участка (рис. 2.6). Вдоль внешней нормали к сечению проведем ось x и вектор продольной силы N_2 . Тогда уравнение равновесия для рассматриваемой части стержня будет иметь вид:

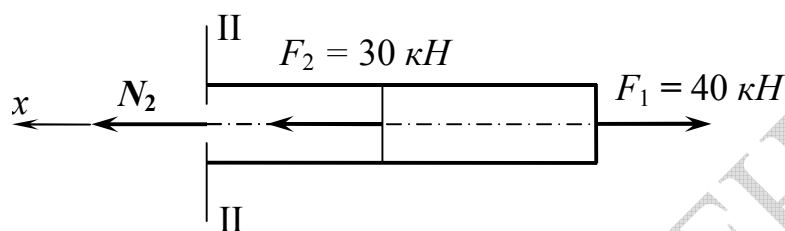


Рисунок 2.6

$$N_2 - F_1 + F_2 = 0.$$

Решая его относительно величины продольной силы, получим $N_2 = 10$ кН. Таким образом, материал стержня на втором грузовом участке также испытывает растяжение, но меньшей силой.

Применяя метод сечений к оставшемуся грузовому участку стержня (рис. 2.7) и действуя аналогично, придем к следующему уравнению равновесия:

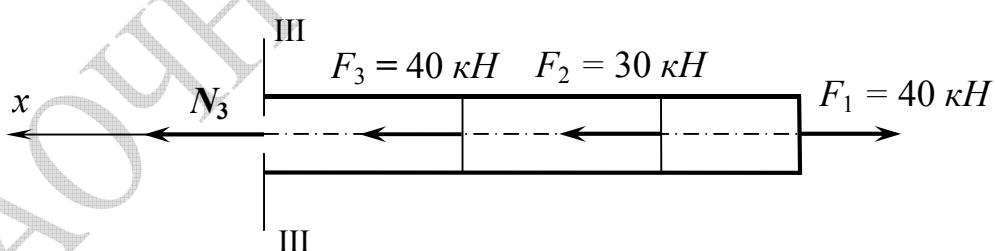


Рисунок 2.7

$$N_3 - F_1 + F_2 + F_3 = 0.$$

Из него нетрудно найти значение продольной силы на третьем грузовом участке стержня: $N_3 = -30$ кН. Знак «-» означает, что предварительно выбранное направление продольной силы (в сторону внешней нормали) не соответствует действительному направлению. На самом деле сила N_3 направлена внутрь материала и обусловлена

его сжатием. Этот результат должен быть отражен при построении эпюры.

Эпюра продольной силы, иллюстрирующая изменение продольной силы по длине стержня, представлена на рис. 2.4 непосредственно под расчетной схемой. На тех грузовых участках, где продольная сила вызвана растяжением материала, она считается положительной. Ее значения откладываются выше нулевой линии. На третьем грузовом участке продольная сила вызвана сжатием материала. Она считается отрицательной, а ее значения откладываются ниже нулевой линии.

В заключение отметим, что при использовании метода сечений совершенно безразлично, какую часть стержня мысленно отбрасывать, а какую оставлять. Результат в обоих случаях должен быть одинаков. Обычно оставляется та часть, при анализе которой получается более простое решение. В рассмотренной задаче можно было бы оставлять левую часть стержня. Однако при этом потребовалось бы предварительно определить величину реактивного усилия в заделке F_A .

2.3. Внутренние усилия при кручении

При кручении, как отмечалось выше, единственным внутренним силовым фактором отличным от нуля, является крутящий момент. Стержни, испытывающие кручение, называются **валами**. Рассмотрим прямолинейный стержень, нагруженный внешними парами сил, лежащими в плоскостях, перпендикулярных оси стержня. Моменты

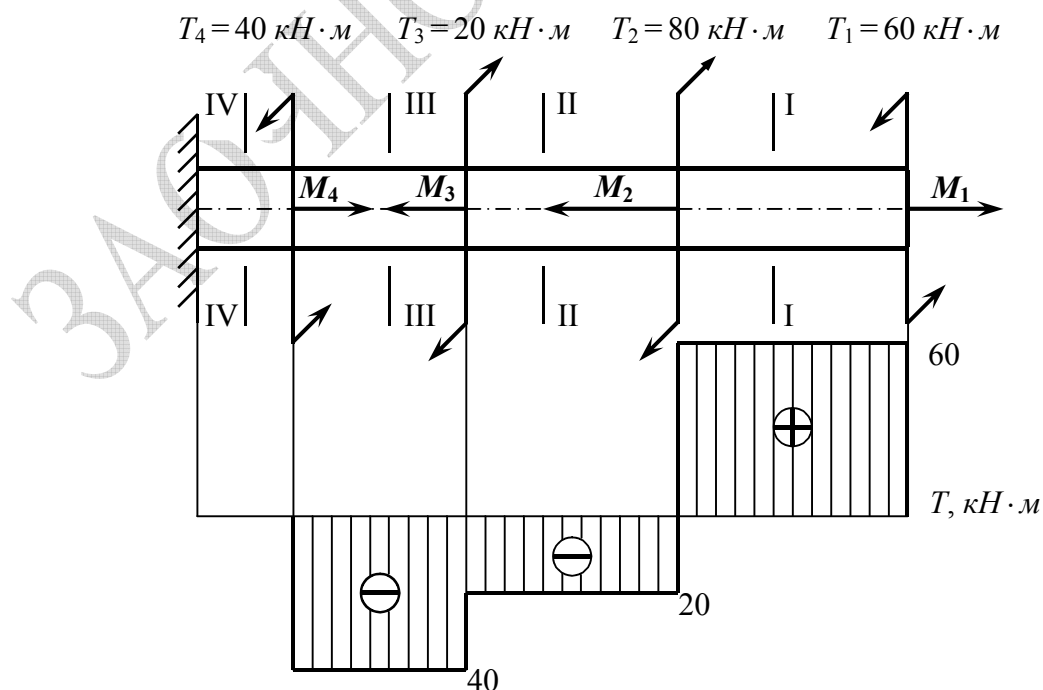


Рисунок 2.8

таких пар называются **скручивающими моментами**. Очевидно, что при таком характере нагружения в поперечных сечениях стержня будут действовать только крутящие моменты. Чтобы определить крутящие моменты и построить их эпюру, заменим пары сил M_i векторами их моментов. Как известно из раздела «Теоретическая механика», вектор момента пары сил перпендикулярен плоскости действия пары сил и направлен в ту сторону, откуда вращение пары кажется происходящим против часовой стрелки (рис. 2.8).

Поскольку скручивающие пары сил расположены в плоскостях, перпендикулярных оси стержня, векторы моментов этих пар будут направлены по оси стержня (рис. 2.8). Определим крутящие моменты T на каждом грузовом участке. Как и при нахождении продольных сил воспользуемся методом сечений.

Мысленно проведем поперечное сечение I - I в пределах первого грузового участка и отбросим левую часть стержня (рис. 2.9). Для оставшейся части стержня запишем уравнение равновесия по моментам в проекциях на ось Ox , положительное направление которой совпадает с направлением внешней нормали к сечению (четвертое уравнение системы (1.17)): $T_1 - M_1 = 0$. Следовательно,

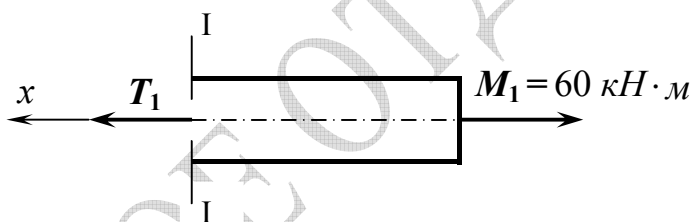


Рисунок 2.9

в каждом поперечном сечении первого грузового участка действует внутренний крутящий момент равный $60 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Причем вектор крутящего момента направлен в сторону внешней нормали к сечению.

Аналогично найдем величину крутящего момента на других грузовых участках. В сечении II - II, проведенном в пределах второго грузового участка, действует внутренний крутящий момент T_2 . Уравнение равновесия для части стержня, показанной на рис. 2.10, имеет вид:

$$T_2 - M_1 + M_2 = 0.$$

Решая его относительно T_2 и подставляя численные значения входящих в него величин, получим: $T_2 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Знак «-» указывает на

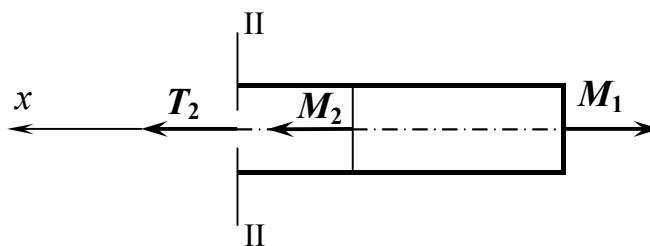


Рисунок 2.10

то, что первоначально выбранное направление момента T_2 (в сторону внешней нормали к сечению) было неверным. На самом деле вектор внутреннего крутящего момента на втором грузовом участке направлен в сторону внутренней нормали.

Нахождение внутреннего крутящего момента на третьем и четвертом грузовых участках иллюстрируют рис. 2.11 и рис. 2.12. Соответствующие уравнения равновесия и полученные результаты представлены ниже.

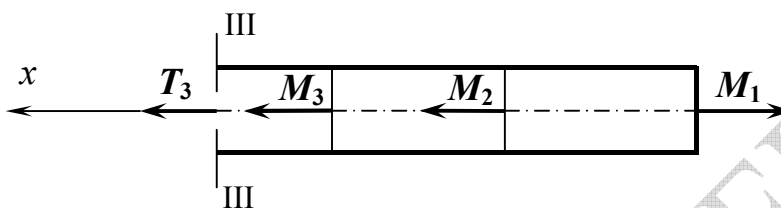


Рисунок 2.11

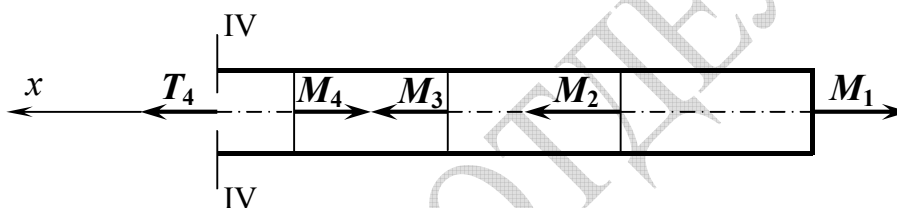


Рисунок 2.12

Для третьего грузового участка:

$$T_3 - M_1 + M_2 + M_3 = 0, \Rightarrow T_3 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для четвертого грузового участка:

$$T_4 - M_1 + M_2 + M_3 - M_4 = 0, \Rightarrow T_4 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На рис. 2.8 зависимость крутящего момента от продольной координаты представлена в виде эпюры. Указанная зависимость имеет ступенчатый характер, причем величина скачка на границе двух грузовых участках в точности равна величине скручивающего внешнего момента, действующего в граничном сечении. Аналогичная закономерность имела место при определении продольной силы в поперечных сечениях стержня (рис. 2.4).

2.4. Внутренние силовые факторы при плоском изгибе

Плоский поперечный изгиб имеет место в тех случаях, когда внешние нагрузки и реакции опор действуют в одной плоскости, совпадающей с плоскостью симметрии поперечного сечения, и перпендикулярны продольной оси стержня. При этом в поперечных сечениях возникают изгибающий момент и поперечная сила. Если последняя равна нулю, то плоский поперечный изгиб сводится к чистому изгибу.

Внешние усилия, поперечная сила и изгибающий момент в каждом сечении изогнутого стержня связаны дифференциальными соотношениями, которые используются при получении эпюр при изгибе. Для их вывода рассмотрим прямолинейный стержень, нагруженный распределенной нагрузкой $q(x)$, которая в общем случае может меняться вдоль оси стержня (рис. 2.13).

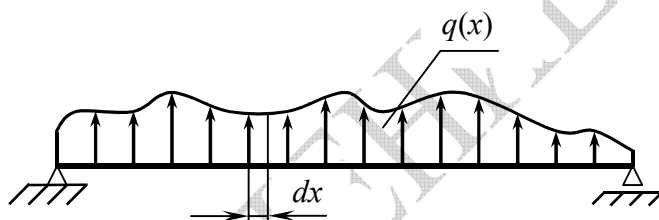


Рисунок 2.13

Выделим элемент стержня длиной dx и составим уравнения равновесия для этого элемента. Пусть в левом сечении действуют поперечная сила Q и изгибающий момент M , а в правом сечении поперечная сила $Q + dQ$ и изгибающий момент $M + dM$ (рис. 2.14). Уравнение равновесия по силам в проекциях на ось Oy может быть записано следующим образом:

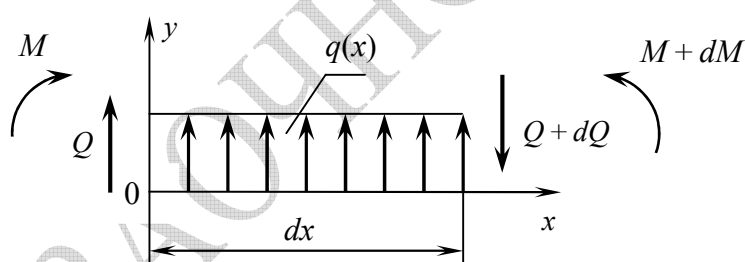


Рисунок 2.14

$$Q + q(x)dx - Q - dQ = 0.$$

Отсюда вытекает, что распределенная нагрузка и поперечная сила в каждом сечении связаны соотношением:

$$q(x) = \frac{dQ(x)}{dx}. \quad (2.1)$$

Следовательно, первая производная от поперечной силы по продольной координате в некотором сечении равна значению распределенной нагрузки в этом же сечении.

Уравнение равновесия выделенного элемента стержня по моментам относительно левого сечения имеет вид:

$$M + dM - M - (Q + dQ)dx + q(x)(dx)^2 / 2 = 0.$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости, получим следующую связь между поперечной силой в произвольном сечении стержня и действующим в этом же сечении изгибающим моментом:

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx}. \quad (2.2)$$

Следовательно, первая производная от изгибающего момента по продольной координате в некотором сечении равна величине поперечной силы в этом же сечении.

Сочетание равенств (2.1) и (2.2) приводит еще к одному соотношению, связывающему распределенную нагрузку и изгибающий момент:

$$q(x) = \frac{d^2M(x)}{dx^2}. \quad (2.3)$$

Следовательно, вторая производная от изгибающего момента по продольной координате в некотором сечении равна значению распределенной нагрузки в этом же сечении.

Соотношения (2.1) – (2.3) называются **дифференциальными соотношениями при изгибе**. Они носят общий характер, позволяя контролировать правильность построения эпюр. Из них, в частности, следует, что на тех грузовых участках, где распределенная нагрузка отсутствует, поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Там, где на стержень действует равномерно распределенная нагрузка ($q = const$), поперечная сила линейно зависит от продольной координаты, а изгибающий момент подчиняется квадратичной зависимости. Причем, если в некотором сечении поперечная сила обращается в нуль, то изгибающий момент в этом сечении достигает своего экстремального значения.

Кроме того, для эпюр $Q(x)$ и $M(x)$ справедливо то же замечание, которое было сделано ранее относительно эпюр продольной силы и крутящего момента: в сечении, где действует внешняя сосредоточенная сила или сосредоточенный момент, на соответствующей эпюре будет иметь место скачок, величина которого равна значению внешней силы или момента.

Применим теперь равенство (2.1) участку стержня конечной длины, граничные сечения которого имеют координаты x_1 и x_2 . Интегрирование его в пределах этого участка приведет к следующему равенству:

$$Q_2 - Q_1 = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx, \quad (2.4)$$

где Q_1 и Q_2 – значения поперечной силы на границах участка. Это равенство означает, что *разность значений поперечной силы на некотором участке стержня, ограниченном координатами x_1 и x_2 , равна площади под графиком функции $q(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$* . Если применить аналогичную операцию интегрирования к соотношению (2.2), то придем к другому важному равенству:

$$M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} Q(x) dx, \quad (2.5)$$

где M_1 и M_2 – значения изгибающего момента на границах участка. Из полученного равенства следует, что *разность значений изгибающего момента на участке стержня, равна площади, ограниченной графиком функции $Q(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$* .

Рассмотрим задачу нахождения поперечной силы и изгибающего момента, а также построения эпюр этих внутренних усилий на конкретном примере. Пусть прямолинейный стержень нагружен внешними усилиями так, как показано на рис. 2.15. Прежде всего, необходимо определить опорные реакции F_A и F_B . Для этого составим уравнения равновесия всего стержня по моментам. Алгебраическая сумма всех моментов относительно опоры A должна быть равной нулю. Следовательно,

$$-q \cdot 2 \cdot 1 - M - 4F + 5F_B = 0, \quad \text{отсюда} \quad F_B = 72 \text{ кН.}$$

Алгебраическая сумма моментов от всех приложенных к стержню усилий относительно опоры B также должна быть нулевой. Следовательно,

$$q \cdot 2 \cdot 4 - M + 1 \cdot F - 5F_A = 0, \quad \text{отсюда} \quad F_A = 28 \text{ кН.}$$

Третье уравнение равновесия (по силам в проекциях на вертикальную ось) позволяет проверить найденные значения опорных реакций. Действительно,

$$F_A + F_B - 2q - F = 28 + 72 - 40 - 60 = 0.$$

Таким образом, реакции найдены правильно.

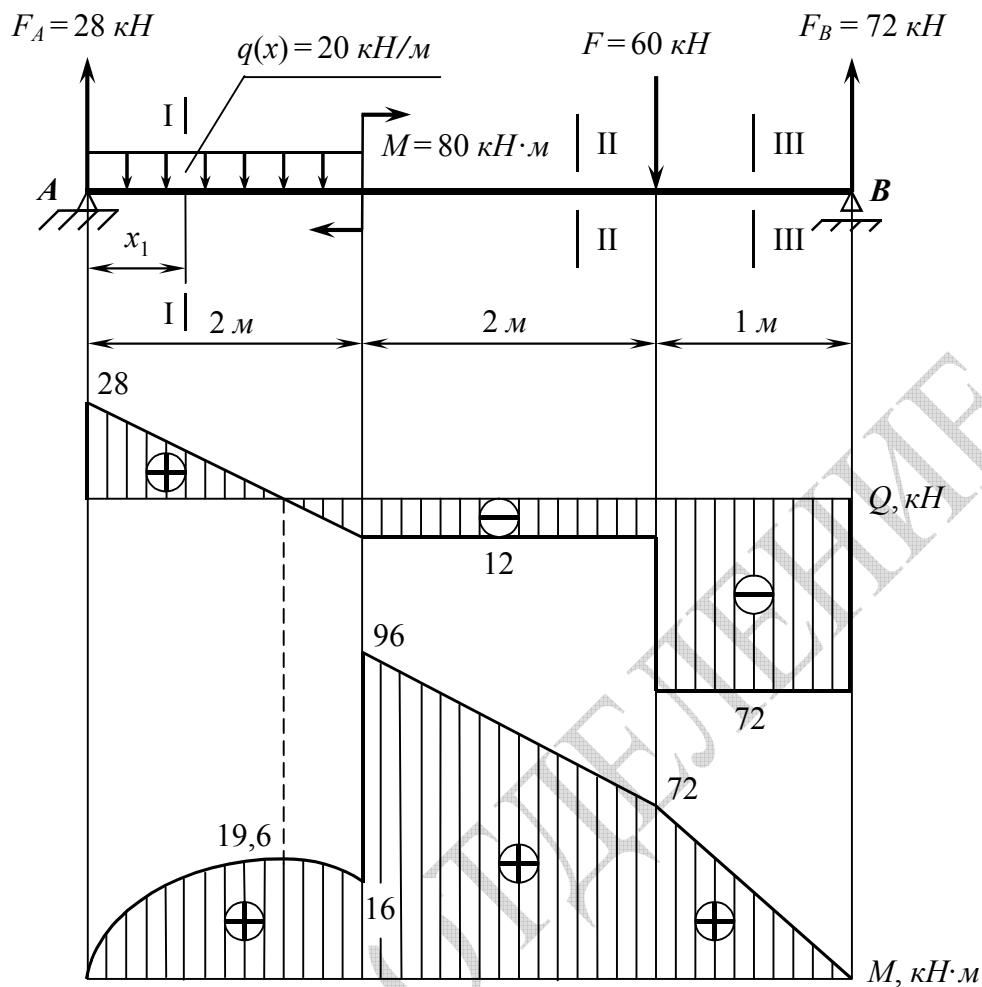


Рисунок 2.15

Перейдем к отысканию внутренней поперечной силы и изгибающего момента на грузовых участках стержня. Проведем сечение $I-I$ на первом грузовом участке и рассмотрим левую часть стержня (рис. 2.16). В сечении выберем систему координат в соответствии с рекомендациями параграфа 2.1 (рис. 2.3). Определяемые внутренние силовые факторы направим в положительные стороны соответствующих осей. Рассматриваемая часть стержня находится в равновесии. Поэтому для нее справедливы уравнения статики. Уравнение равновесия по силам имеет

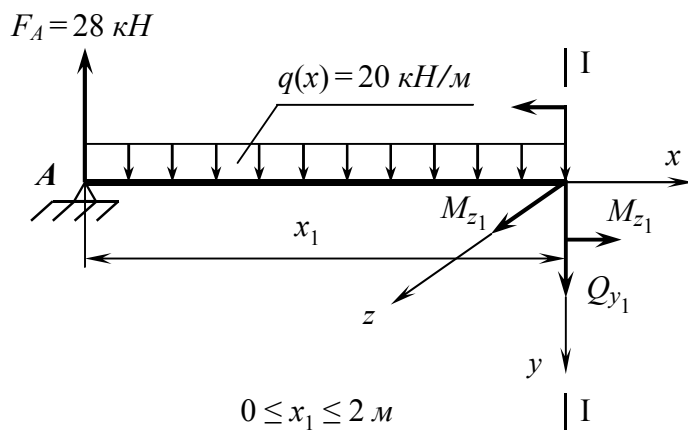


Рисунок 2.16

ВИД:

$$Q_y - F_A + q \cdot x_1 = 0, \text{ откуда } Q_y = F_A - q \cdot x_1 = 28 - 20x_1.$$

Таким образом, на первом грузовом участке поперечная сила Q_y линейно зависит от расстояния до опоры, уменьшаясь от 28 кН на опоре до -12 кН на правой границе участка. Функция $Q_y(x)$ обращается в нуль в некотором сечении. Найдем координату этого сечения. Для этого приравняем к нулю полученное выражение:

$$Q_y = 28 - 20x_1 = 0, \quad x_1 = 1,4 \text{ м.}$$

В соответствии с дифференциальным соотношением (2.2) при $x_1 = 1,4 \text{ м}$ функция $M_z(x)$ должна иметь экстремум. Явный вид этой функции найдем, составив уравнение равновесия по моментам для части стержня, представленной на рис. 2.16. При этом все моменты целесообразно относить к сечению I-I. Указанное уравнение равновесия имеет вид:

$$M_z - F_A \cdot x_1 + q \frac{x_1^2}{2} = 0, \text{ откуда } M_z(x_1) = -q \frac{x_1^2}{2} + F_A \cdot x_1 = -10x_1^2 + 28x_1.$$

Для последующего построения эпюры изгибающего момента удобно найти значения функции $M_z(x)$ на границах грузового участка и в точке экстремума:

$$M_z(0) = 0, \quad M_z(2) = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad M_z(1,4) = 19,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

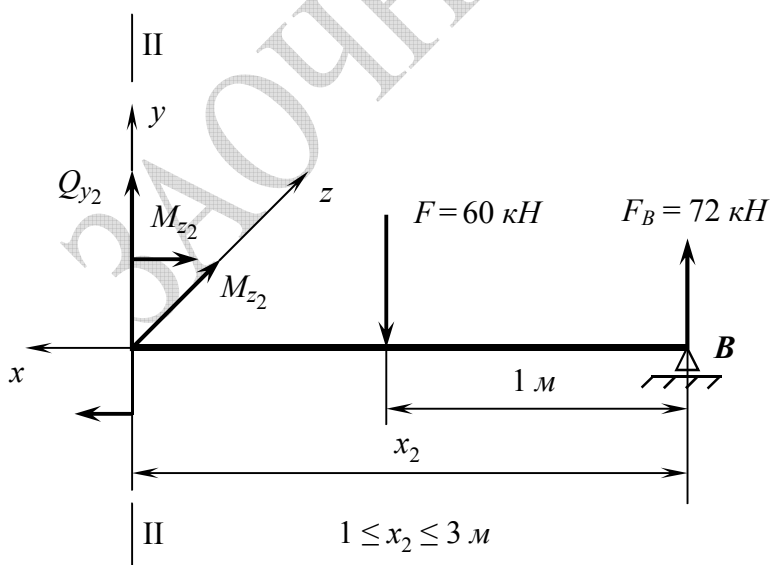


Рисунок 2.17

Перейдем к отысканию поперечной силы и изгибающего момента на втором грузовом участке. Для этого проведем сечение II-II в пределах этого участка и рассмотрим условия равновесия правой части стержня (рис. 2.17).

Соответствующие уравнения запишутся в виде:

$$Q_y - F + F_B = 0,$$

$$M_z + F \cdot (x_2 - 1) - F_B \cdot x_2 = 0.$$

Подставляя численные значения внешней силы и реакции опоры, получаем:

$$Q_y = -12 \text{ кН},$$

$$M_z(x_2) = 12x_2 + 60 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Аналогичным образом найдем явный вид зависимостей поперечной силы и изгибающего момента от продольной координаты на третьем грузовом участке (рис. 2.18). Уравнения равновесия:

$$Q_y + F_B = 0, \quad M_z - F_B \cdot x_3 = 0.$$

Подставляя значение опорной реакции, приходим к искомым зависимостям:

$$Q_y = -72 \text{ кН},$$

$$M_z = 72 \cdot x_3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Полученные результаты позволяют построить эпюры внутренних усилий по всей длине стержня (рис. 2.15). Нетрудно видеть, что все отмеченные выше свойства эпюр, а также связь между ними легко прослеживаются.

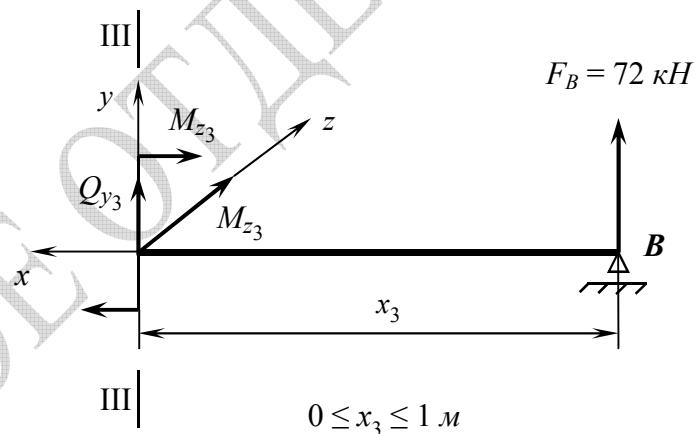


Рисунок 2.18

2.5. Внутренние усилия в плоских рамах

Ра́мы представляют собой стержневые системы, собранные из нескольких прямых стержней, которые жестко связаны между собой. Если оси стержней, составляющих раму, лежат в одной плоскости, то такая рама называется **плоской рамой**. В общем случае стержни рамы могут иметь различные поперечные сечения, как в отношении размеров, так и в отношении формы. Они могут быть изготовлены из материалов с различными механическими характеристиками. Однако здесь рассматриваются только такие рамы, стержни которых имеют

одинаковые сечения. Причем будем считать, что ось симметрии всех стержней и все внешние силы лежат в плоскости рамы. В этом случае в сечениях стержней возникнут три внутренних усилия: продольная сила, поперечная сила и изгибающий момент. Эпюры этих усилий находятся также с помощью метода сечений.

В качестве примера рассмотрим плоскую раму, изображенную на рис. 2.19. Пусть она нагружена двумя сосредоточенными силами F_1 и F_2 , сосредоточенным моментом M и двумя распределенными нагрузками q_1 и q_2 . Величины указанных усилий и место их приложения приведены на рисунке. Там же приведены длины грузовых участков.

Прежде всего, определяются реакции опор A и B . Горизонтальная реакция X_A на опоре A (предварительно направим ее вправо) определяется из уравнения равновесия по силам:

$$X_A + q_2 \cdot 2 - F_1 = 0, \quad \text{отсюда} \quad X_A = -20 \text{ кН}.$$

Знак «-» указывает, что первоначально выбранное направление реактивной силы оказалось ошибочным. На схеме рамы отмечаем

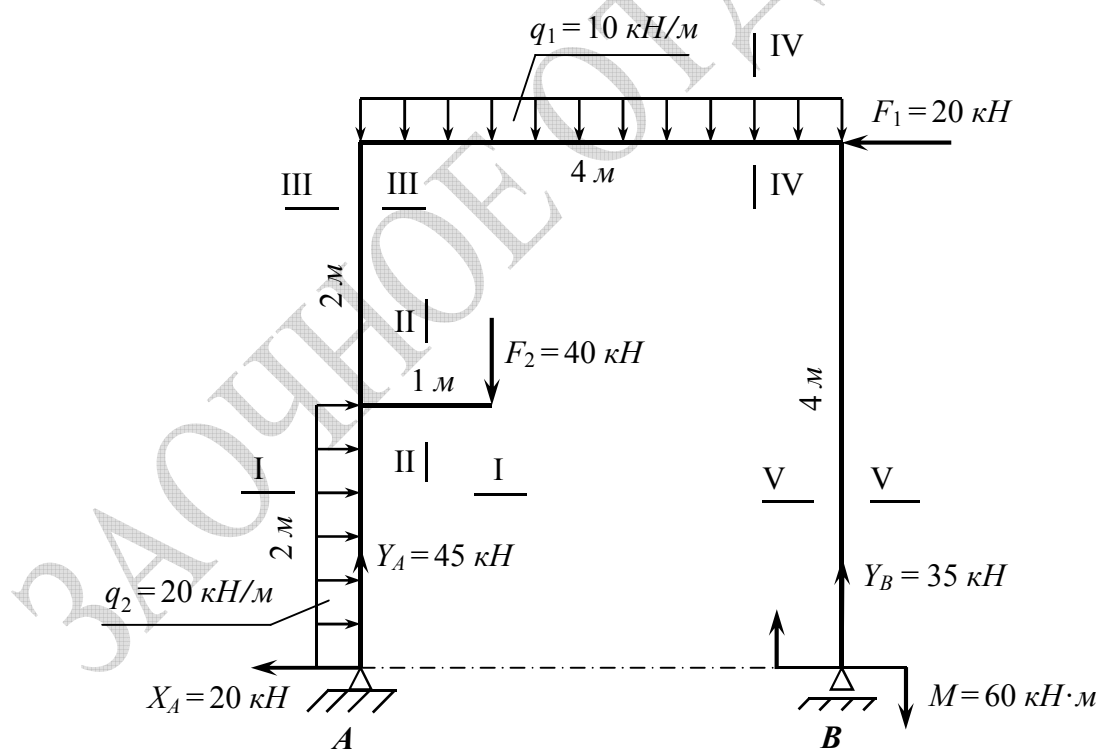


Рисунок 2.19

истинное направление реакции X_A и ее численное значение. Вертикальные реакции в опорах A и B определим из уравнений

равновесия по моментам. Алгебраическая сумма моментов всех усилий относительно опоры А должна быть равна нулю:

$$-q_2 \cdot 2 \cdot 1 - F_2 \cdot 1 - q_1 \cdot 4 \cdot 2 + F_1 \cdot 4 - M + Y_B \cdot 4 = 0.$$

Подставляя численные значений усилий, для реакции Y_B найдем:

$$Y_B = \frac{40 + 40 + 80 - 80 + 60}{4} = 35 \text{ kH}.$$

Аналогично определим вертикальную реакцию на опоре А:

$$-q_2 \cdot 2 \cdot 1 + F_2 \cdot 3 + q_1 \cdot 4 \cdot 2 + F_1 \cdot 4 - M - Y_B \cdot 4 = 0.$$

$$Y_A = \frac{-40 + 120 + 80 + 80 - 60}{4} = 45 \text{ kH}$$

Определение поперечной силы и изгибающего момента начнем с первого грузового участка. В пределах этого участка мысленно проведем поперечное сечение и отбросим более нагруженную часть рамы (рис. 2.20). Для того чтобы задаться направлением координатных осей, будем рассматривать грузовой участок «изнутри» контура, определяя таким образом левую и правую часть стержня.

Из уравнений статики найдем искомые зависимости для силовых факторов на первом грузовом участке. Уравнение равновесия по силам в проекциях на продольную ось имеет вид:

$$N_1 + Y_A = 0 \Rightarrow N_1 = -Y_A = -45 \text{ kH}$$

(сжатие)

Уравнение равновесия по силам в проекциях на направление, перпендикулярное оси стержня, запишется следующим образом:

$$Q_1 - X_A + q_2 \cdot x_1 = 0, \Rightarrow$$

$$Q_1(x_1) = X_A - q_2 \cdot x_1 = 20 - 20 x_1.$$

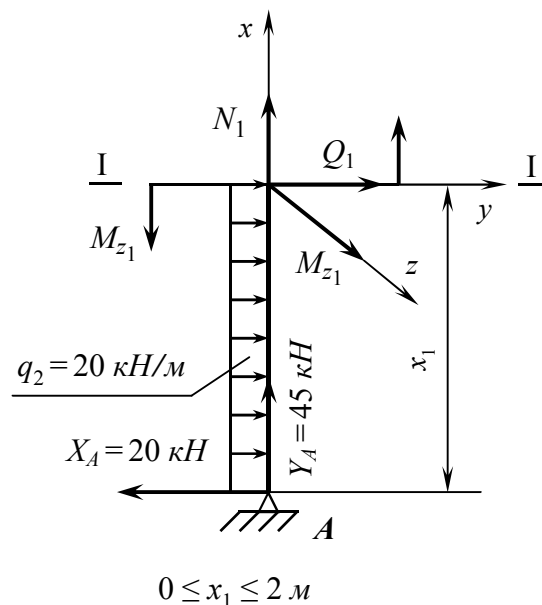


Рисунок 2.20

Нетрудно видеть, что поперечная сила на первом грузовом участке обращается в нуль при $x_1 = 1$ м. Следовательно, в сечении с этим значением продольной координаты изгибающий момент имеет экстремум. Явный вид зависимости $M_z(x_1)$ найдем, составив уравнение равновесия по моментам. Моменты целесообразно относить к рассматриваемому сечению стержня.

$$M_z - X_A \cdot x_1 + q_2 \frac{x_1^2}{2} = 0, \Rightarrow M_z(x_1) = -q_2 \frac{x_1^2}{2} + X_A \cdot x_1 = -10x_1^2 + 20x_1.$$

Полученная параболическая зависимость действительно достигает своего экстремального значения при $x_1 = 1$ м: $M_z(1) = 10$ кН·м.

Определим внутренние усилия на втором грузовом участке (сечение II-II), действуя аналогичным образом. Комментарии к уравнениям и преобразованиям опустим в виду их полной идентичности с приведенными выше. Уравнение равновесия по силам в проекциях на продольную ось дает: $N_2 = 0$. Уравнение равновесия по силам в проекциях на ось y имеет простой вид: $Q_2 - F_2 = 0$. Отсюда видно, что

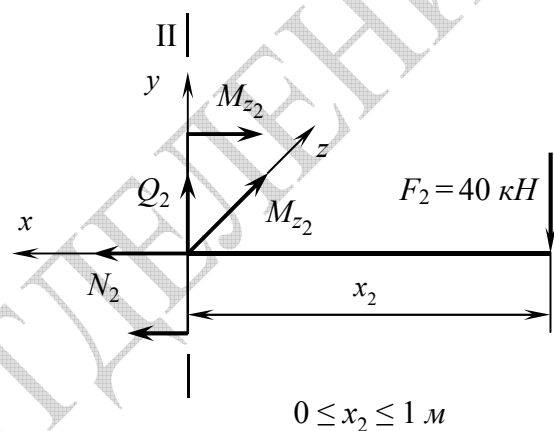
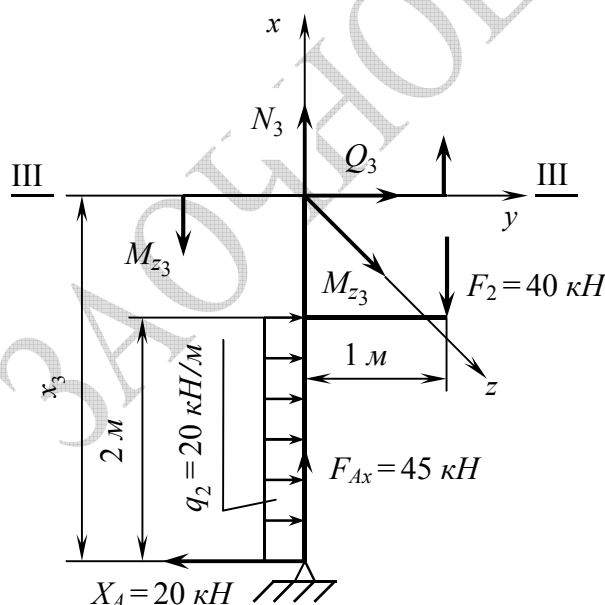


Рисунок 2.21

поперечная сила Q_2 на втором грузовом участке постоянна и равна 40 кН. Уравнение равновесия по моментам приведет к зависимости $M_z(x_2) = -40 \cdot x_2$ кН.

Анализ внутренних усилий на третьем грузовом участке (сечение III-III) нетрудно провести с помощью рис. 2.22. Проектируя все силы на ось x , получим следующее уравнение равновесия:



$$2 \text{ м} \leq x_2 \leq 4 \text{ м}$$

Рисунок 2.22

$$N_3 + Y_A - F_2 = 0,$$

отсюда $N_3 = -Y_A + F_2 =$

$$-45 + 40 = -5 \text{ кН}.$$

В проекциях на ось y получим:

$$Q_3 + q_2 \cdot 2 - X_A = 0.$$

Решение этого уравнения для поперечной силы на третьем грузовом участке дает значение: $Q_3 = -20 \text{ кН}$. Наконец, составляя уравнение равновесия по моментам:

$$M_z - F_2 \cdot 1 + q_2 \cdot 2 \cdot (x_3 - 1) - X_A \cdot x_3 = 0,$$

для изгибающего момента на рассматриваемом грузовом участке получим зависимость:

$$M_z = F_2 \cdot 1 - q_2 \cdot 2 \cdot (x_3 - 1) + X_A \cdot x_3 = -20x_3 + 80.$$

Четвертому грузовому (сечение IV-IV) участку соответствует рис. 2.23. При анализе этого участка целесообразно отбросить левую часть рамы как более нагруженную. Уравнения равновесия и их решения имеют вид:

по силам в проекциях на ось x

$$N_4 + F_1 = 0, \quad N_4 = -20 \text{ кН}.$$

по силам в проекциях на ось y

$$Q_4 + Y_B - q_1 \cdot x_4 = 0,$$

$$Q_4 = 10x_4 - 35.$$

по моментам относительно рассматриваемого сечения

$$M_z + M - Y_B \cdot x_4 + q_1 \cdot \frac{x_4^2}{2} = 0, \quad M_z(x_4) = -5x_4^2 + 35x_4 - 60.$$

Из полученного решения видно, что изгибающий момент достигает своего экстремального значения, равного $1,25 \text{ кН}\cdot\text{м}$, при $x_4 = 3,5 \text{ м}$ там, где поперечная сила обращается в нуль.

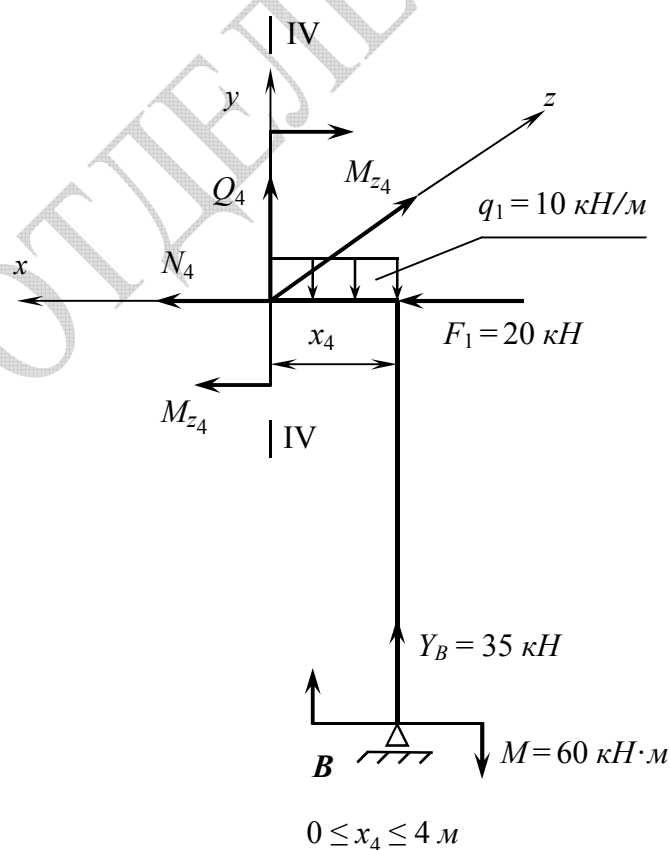


Рисунок 2.23

Анализ пятого грузового участка не представляет трудностей. Его результаты: $N_5 = -35 \text{ кН}$, $Q_5 = 0$, $M_z = -60 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Все полученные зависимости приводятся в виде эпюр (рис. 2.24). Нулевая линия каждой эпюры повторяет контур рамы. Отрицательные значения внутренних силовых факторов откладываются с внутренней стороны контура, положительные – с наружной. Для построенных

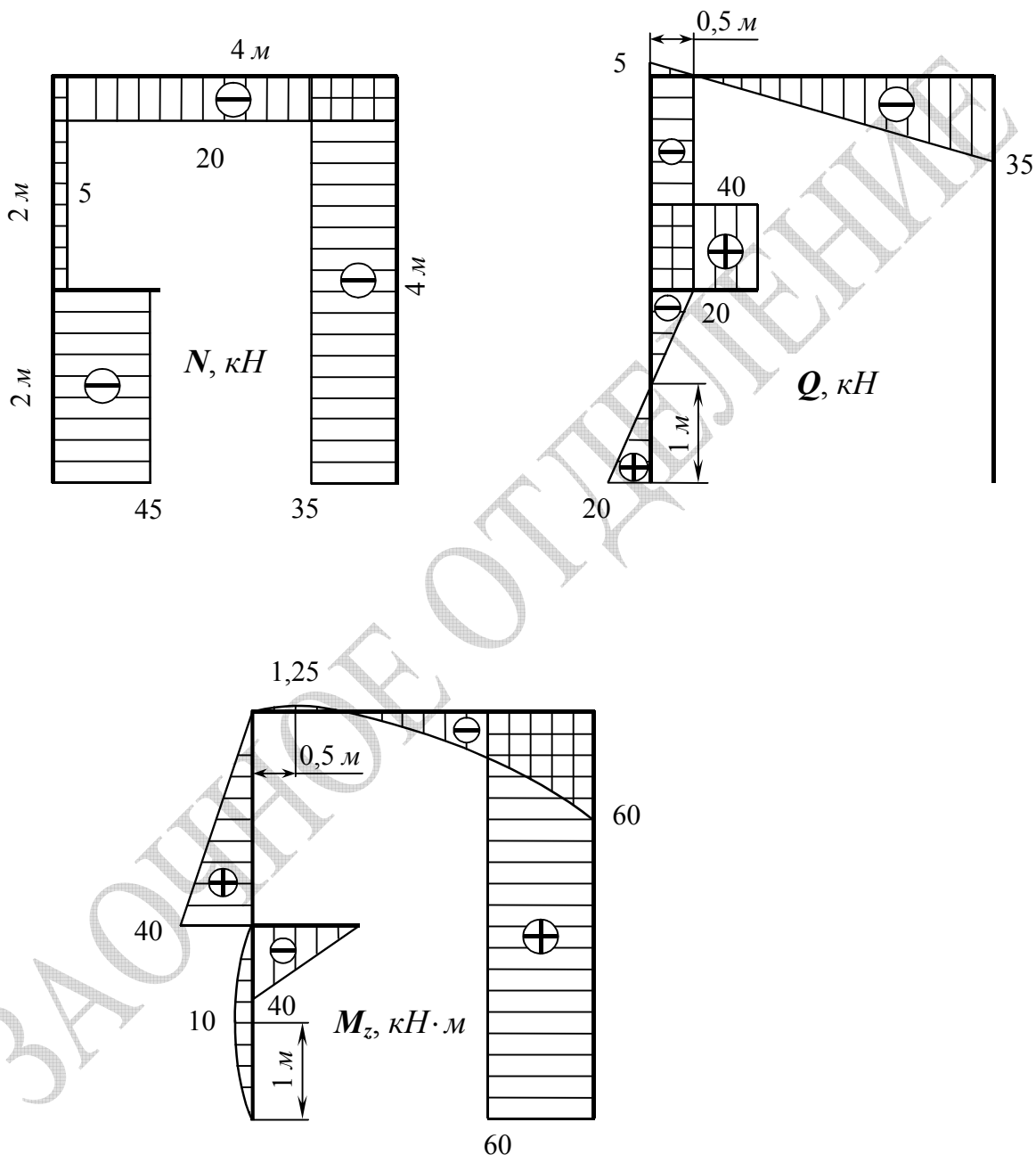


Рисунок 2.24

эпюр справедливы все дифференциальные соотношения (2.1) – (2.5). Указанные соотношения обычно используют для проверки правильности построения эпюр. Должны выполняться также условия

равновесия всех узлов рамы. Чтобы проверить последние, необходимо мысленно провести сечения в стержнях, составляющих данный узел, на бесконечно малом удалении от него и рассмотреть усилия, действующие в полученных сечениях. Например, на узел рамы, в котором сходятся три стержня (рис. 2.24), согласно представленным эпюрам действуют сжимающее усилие 45 кН в нижнем стержне, сжимающее усилие 5 кН в верхнем стержне и поперечная сила 40 кН в боковом стержне. Эти три силы представляют собой уравновешенную систему сил. Кроме того, на этот узел действуют два момента (в верхнем и боковом стержнях), которые также уравновешивают друг друга.

Отметим в заключение одно важное обстоятельство. Выбранный ранее способ направления координатных осей в методе сечений приводит к тому, что эпюра изгибающего момента строится с вогнутой стороны стержней. Как выяснится позднее, на вогнутой стороне материал испытывает сжатие. Поэтому при построении эпюры изгибающего момента руководствуются простым правилом: эпюра строится на сжатом волокне. При этом необходимость приводить знаки «+» или «-» отпадает.

2.6. Внутренние усилия в криволинейных стержнях

Достаточно часто технологическое оборудование включает детали и элементы конструкций, имеющих расчетную схему бруса, ось которого не является прямой линией. В поперечных сечениях криволинейных стержней возникают те же внутренние усилия, что и в рамах: продольные и поперечные силы, а также изгибающий момент. Здесь рассмотрен наиболее простой случай, когда ось криволинейного стержня представляет собой дугу окружности известного радиуса. В этом случае положение произвольного сечения целесообразно определять величиной полярного угла φ . Некоторую сложность при нахождении внутренних силовых факторов в криволинейных стержнях представляет вычисление проекций распределенной нагрузки на ось стержня и момента относительно некоторого сечения. Для вывода соответствующих формул рассмотрим участок стержня, ось которого является дугой окружности радиуса R (рис. 2.25). Пусть на участке стержня, ограниченном сечениями со значениями полярного угла φ_1 и φ_2 , действует

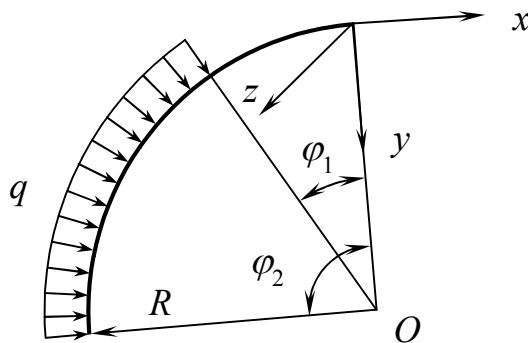


Рисунок 2.25

распределенная нагрузка q , которая в общем случае также может зависеть от φ . Рассмотрим бесконечно малый элемент стержня, границам которого отвечают значения полярного угла φ и $\varphi + d\varphi$. Длина этого элемента, очевидно, равна $Rd\varphi$, а сила, обусловленная действием распределенной нагрузки на нем, - $q Rd\varphi$. Направление этой силы перпендикулярно оси стержня, т. е. линия ее действия проходит через центр O . Поэтому проекция указанной силы на ось x в интересующем нас сечении составит величину $q R \sin \varphi d\varphi$ (рис. 2.25). Интегрируя это выражение по всему участку стержня, где приложена распределенная нагрузка, приходим к соотношению для полной проекции распределенной нагрузки на продольную ось стержня в данной поперечном сечении:

$$pr_x(q) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} qR \sin \varphi d\varphi = qR(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2). \quad (2.6)$$

В полученной формуле принято $q = const$. В противном случае подынтегральная функция становится более сложной. Углы φ_1 и φ_2 определяют границы участка, на котором действует распределенная нагрузка, причем φ_1 соответствует ближайшей границе, а φ_2 – более удаленной от того сечения, где определяются внутренние усилия.

Проектирование элементарной силы $qRd\varphi$ на ось y и последующее интегрирование от φ_1 до φ_2 приведет к соотношению для полной проекции распределенной нагрузки на поперечное к оси стержня направление в данном поперечном сечении:

$$pr_y(q) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} qR \cos \varphi d\varphi = qR(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1). \quad (2.7)$$

Момент распределенной нагрузки относительно сечения, в котором вычисляются внутренние усилия, может быть определен аналогичным образом. Плечо элементарной силы $qRd\varphi$, очевидно, равно $R \sin \varphi$. Тогда искомый момент будет равен:

$$mom_z(q) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} qR^2 \sin \varphi d\varphi = qR^2(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2). \quad (2.8)$$

В качестве примера найдем внутренние усилия в криволинейном стержне, изображенном на рис. 2.26. Стержень состоит из двух грузовых участков и нагружен одной сосредоточенной силой, одним сосредоточенным моментом и распределенной нагрузкой. Определим

прежде всего реакции в опорах A и B . Уравнение равновесия по моментам относительно опоры A может быть записано следующим образом:

$$Y_B \cdot 2R + M - F \cdot R - q R^2 = 0.$$

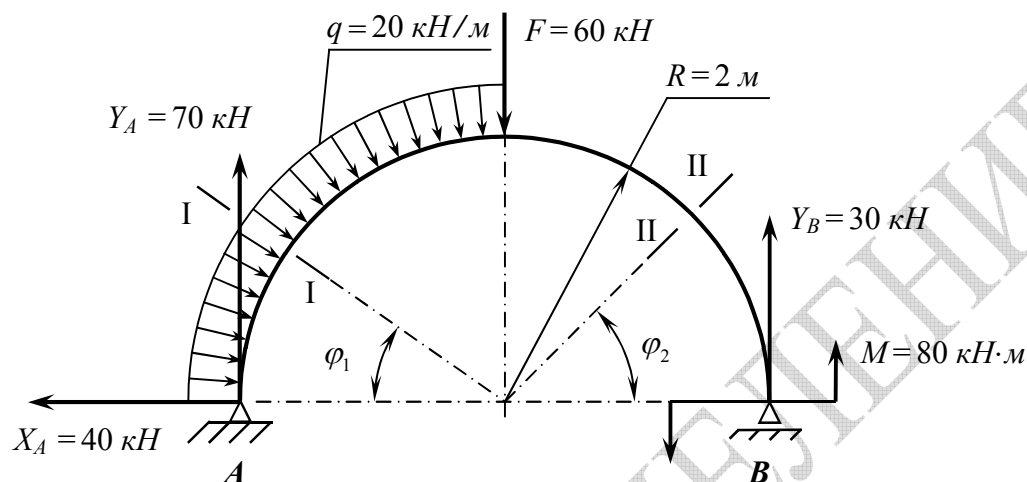


Рисунок 2.26

Здесь использована формула (2.8) при значениях угла $\varphi_1 = 0^\circ$ и угла $\varphi_2 = 90^\circ$. Из составленного уравнения нетрудно найти значение реакции Y_B :

$$Y_B = \frac{60 \cdot 2 - 80 + 80}{4} = 30 \text{ kH}.$$

Уравнение равновесия по моментам относительно опоры B имеет вид:

$$- Y_A \cdot 2R + M + F \cdot R + q R^2 = 0.$$

Здесь также применена формула (2.8) при $\varphi_1 = 90^\circ$ и $\varphi_2 = 180^\circ$. Отсюда находим значение реакции Y_A :

$$Y_A = \frac{120 + 80 + 80}{4} = 70 \text{ kH}.$$

Проектируя все силы, включая найденные реакции, на вертикальное направление, убедимся, что реакции найдены правильно. Действительно,

$$Y_A + Y_B - F - qR = 70 + 30 - 60 - 20 \cdot 2 = 0.$$

Здесь использована формула (2.6) применительно к поперечному сечению стержня на опоре А, поскольку в этом сечении продольная ось стержня имеет вертикальное направление.

Внутренние усилия определяются последовательно на отдельных грузовых участках с помощью метода сечений. Проведем произвольное поперечное сечение в пределах первого грузового участка (сечение I-I). Его положение характеризуется значением

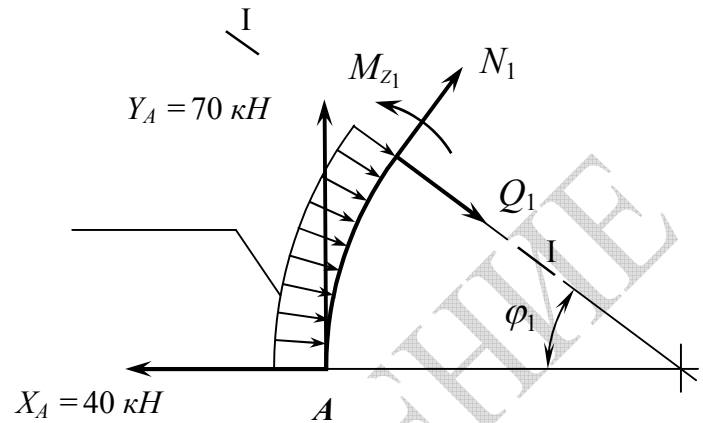


Рисунок 2.27

полярного угла φ_1 (рис. 2.27), который меняется от 0 до $\pi/2$. Мысленно отбросим правую часть стержня и запишем уравнения равновесия для оставшейся части. В проекциях на продольную ось стержня в выбранном сечении с учетом (2.6) имеем:

$$N_1 - X_A \sin \varphi_1 + Y_A \cos \varphi_1 + qR (\cos 0 - \cos \varphi_1) = 0.$$

Подставляя численные значения усилий, после несложных преобразований для продольной силы на первом грузовом участке получим следующую зависимость от полярного угла:

$$N_1(\varphi_1) = 40 \sin \varphi_1 - 30 \cos \varphi_1 - 40.$$

В проекциях на ось y локальной системы координат выбранного поперечного сечения уравнение равновесия с учетом (2.7) будет:

$$Q_1 - X_A \cos \varphi_1 - Y_A \sin \varphi_1 + qR (\sin \varphi_1 - \sin 0) = 0.$$

Отсюда нетрудно выразить поперечную силу как функцию полярного угла:

$$Q_1(\varphi_1) = 30 \sin \varphi_1 + 40 \cos \varphi_1.$$

Наконец, уравнение равновесия по моментам с учетом (2.8) запишется следующим образом:

$$M_z - X_A R \sin \varphi_1 - Y_A R (1 - \cos \varphi_1) + qR^2 (\cos 0 - \cos \varphi_1) = 0.$$

После несложных преобразований получим явный вид зависимости внутреннего изгибающего момента от полярного угла на первом грузовом участке стержня:

$$M_z(\varphi_1) = 80 \sin \varphi_1 - 220 \cos \varphi_1 + 220.$$

Аналогичные рассуждения можно применить ко второму грузовому участку. Рис. 2.28 иллюстрирует направление искомых внутренних усилий в произвольном поперечном сечении на этом участке. Составим уравнение равновесия по силам в проекциях на продольную ось стержня в данном сечении:

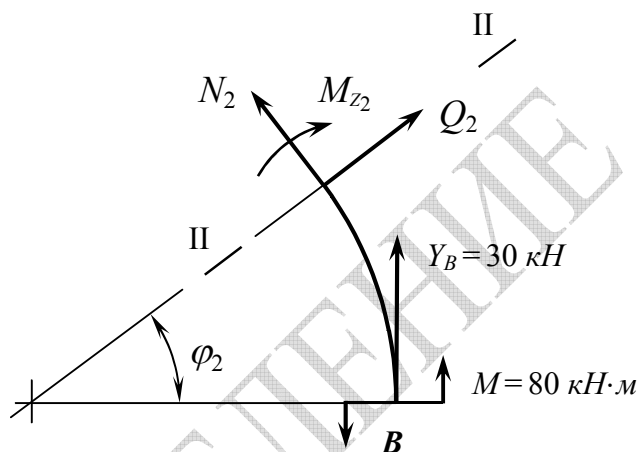


Рисунок 2.28

$$N_2 + Y_B \cos \varphi_2 = 0,$$

отсюда $N_2(\varphi_2) = -Y_B \cos \varphi_2 = -30 \cos \varphi_2$.

Проектируя действующие на часть стержня силы на поперечное направление, запишем соответствующее уравнение равновесия:

$$Q_2 + Y_B \sin \varphi_2 = 0, \text{ отсюда } Q_2(\varphi_2) = -Y_B \sin \varphi_2 = -30 \sin \varphi_2.$$

Уравнение равновесия по моментам будет иметь вид:

$$M_z - M - Y_B (R - R \cos \varphi_2) = 0,$$

отсюда $M_z(\varphi_2) = M + Y_B (R - R \cos \varphi_2) = 80 + 60 (1 - \cos \varphi_2)$.

Используя полученные зависимости для продольной и поперечной сил, а также для изгибающего момента на обоих грузовых участках криволинейного стержня, построим эпюры этих внутренних усилий (рис. 2.29). Для более точного построения эпюр значения усилий вычисляются при различных углах φ , включая те, которые отвечают граничным сечениям грузовых участков. Полученные значения внутренних усилий откладываются по нормали к нулевой линии, которая повторяет контур стержня. Отрицательные значения откладываются внутрь контура, положительные – наружу.

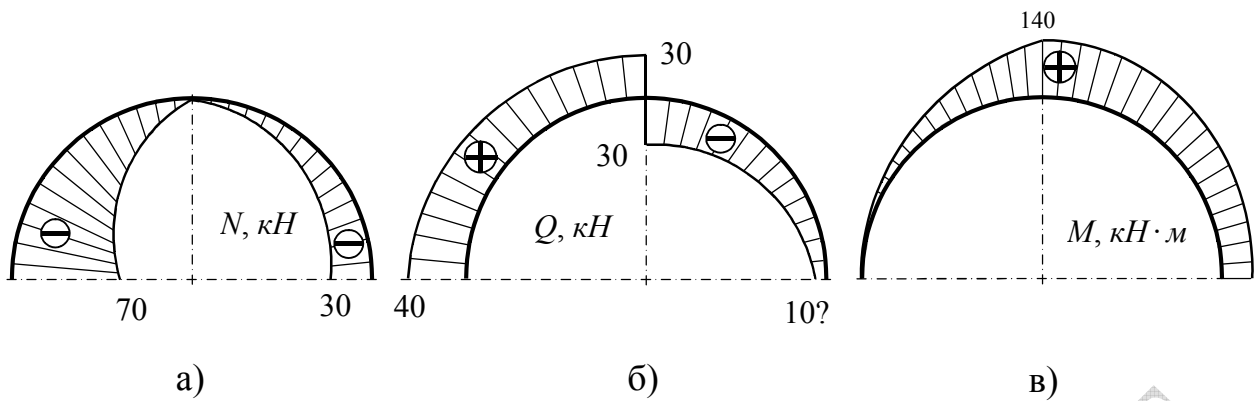


Рисунок 2.29

2.7. Связь между внутренними силовыми факторами и напряжениями в материале

Как уже отмечалось выше, внутренние силовые факторы характеризуют совокупное действие всех внутренних сил в данном поперечном сечении. Распределение внутренних сил по площади сечения в каждом конкретном случае может быть неоднородным. В некоторых точках сечения они могут быть небольшими, тогда как в других – достигать опасных для конструкционного материала значений. Поэтому очень важно иметь меру локальной величины внутренних сил. Такой мерой служат напряжения в материале, понятие о которых введено в предыдущей главе.

Так, при растяжении или сжатии стержня, когда в поперечных сечениях действует только продольная сила N , отношение этой силы к площади A поперечного сечения даст величину нормальных напряжений в материале: $\sigma = N / A$. Однако растяжение или сжатие стержня представляют собой простейший случай напряженного состояния, при котором внутренние усилия распределены в сечении равномерно. Поэтому величина напряжений в каждой точке поперечного сечения будет одинаковой. В общем случае она может меняться от одной точки сечения к другой. Следовательно, полное значение продольной силы может быть получено путем интегрирования нормальных напряжений, действующих в поперечном сечении, по всему сечению:

$$N = \iint_A \sigma dA . \quad (2.9)$$

Аналогичная связь имеет место между поперечными силами и касательными напряжениями:

$$Q_y = \iint_A \tau_{xy} dA, \quad Q_z = \iint_A \tau_{xz} dA. \quad (2.10)$$

Крутящий момент T интегрально характеризует вращательное действие касательных напряжений вокруг оси стержня. Поэтому он связан с величиной напряжений τ_{xy} и τ_{xz} посредством соотношений:

$$T = \iint_A (\tau_{xy} z - \tau_{xz} y) dA. \quad (2.11)$$

Наконец, изгибающие моменты M_y и M_z выражаются через нормальные напряжения в поперечном сечении стержня следующим образом:

$$M_y = \iint_A \sigma_x z dA \quad \text{и} \quad M_z = \iint_A \sigma_x y dA. \quad (2.12)$$

Приведенные формулы, связывающие величину внутренних усилий и напряжений, будут использованы при изучении отдельных простых видов деформаций.

2.8. Контрольные вопросы

1. В чем состоит сущность метода сечений?
2. Что такое внутренние силовые факторы? Какова их физическая природа?
3. Какие внутренние усилия могут возникать в поперечных сечениях стержней в общем случае нагружения?
4. Как могут быть найдена величина внутренних усилий?
5. Какими деформациями вызваны внутренние силовые факторы при растяжении, кручении, сдвиге и изгибе?
6. Что называется эпюрой внутреннего усилия и для чего строятся эпюры?
7. Перечислите простые виды деформации стержня.
8. Чем отличается чистый изгиб от плоского поперечного изгиба?
9. В чем состоит правило знаков для продольной силы?
10. Какой характер нагружения приводит к кручению?
11. Какой характер нагружения приводит к плоскому поперечному изгибу?
12. Как определяется знак крутящего момента при построении его эпюры?

13. Сформулируйте дифференциальные соотношения между распределенной нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом при изгибе.
14. Какие конструкции называются плоскими рамами?
15. Какие уравнения применяются для определения опорных реакций в рамах и проверки их правильности?
16. Как определяется знак поперечной силы и изгибающего момента при построении эпюр этих внутренних усилий?
17. Какие возможности существуют для проверки правильности эпюр внутренних силовых факторов в рамах?
18. Что значит, что эпюра изгибающего момента строится на сжатом волокне?
19. Какие внутренние усилия возникают в криволинейных стержнях?
20. Как определяется вклад распределенной нагрузки в значение продольной и поперечной сил в данном поперечном сечении?
21. Как определяется вклад распределенной нагрузки в значение изгибающего момента в данном поперечном сечении?
22. С какими напряжениями в поперечном сечении связана продольная сила?
23. С какими напряжениями в поперечном сечении связан крутящий момент?
24. С какими напряжениями в поперечном сечении связаны поперечная сила и изгибающий момент?

Глава 3. Линейное напряженное состояние

3.1. Внутренние силы, напряжения и деформации при растяжении (сжатии) стержней

Наиболее простой реализацией линейного напряженного состояния является растяжение или сжатие прямого стержня продольной силой, действующей строго вдоль его оси (рис. 3.1). Такой характер нагружения возникает во многих конструктивных элементах химического оборудования. Трубы кожухотрубных теплообменников, тросы подъемника, опорные стойки емкостных аппаратов, штоки поршневых компрессоров и многие другие элементы испытывают сжатие или растяжение. В предыдущей главе было показано, что в этом случае в поперечных сечениях стержня действует продольная

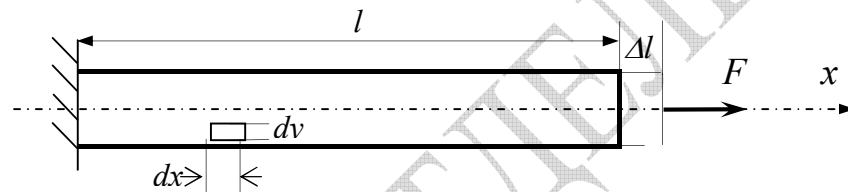


Рисунок 3.1

сила N , которая для расчетной схемы на рис. 3.1 во всех сечениях одинакова и равна внешней силе: $N = F$. Сжатие отличается от растяжения только знаком продольной силы, хотя на практике большинство материалов при этих видах деформации ведут себя по разному, например, в области больших нагрузок.

Нормальные напряжения, вызванные деформацией растяжения (сжатия) согласно (2.9) связаны с величиной продольной силы соотношением:

$$N = \iint_A \sigma_x dA .$$

Если материал стержня однороден, что является одним из основных допущений сопротивления материалов, то внутренние силы распределены по сечению равномерно. Следовательно, нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения одинаковы. Тогда предыдущее соотношение упрощается и принимает вид:

$$N = \sigma_x A \quad \text{или} \quad \sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}, \quad (3.1)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня. Правило знаков для напряжений вытекает из полученной формулы: *напряжения положительны при растяжении материала*, поскольку при этом $N > 0$, и *отрицательны при сжатии* ($N < 0$).

За счет деформации материала под действием силы F размеры стержня меняются. Пусть l исходная длина стержня, а $l + \Delta l$ – его длина после приложения силы F . Величина Δl , на которую изменяется длина стержня, называется **полным** или **абсолютным удлинением**. Отношение абсолютного удлинения стержня к его первоначальной длине носит название **относительного удлинения**:

$$\delta = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3.2)$$

Несмотря на то, что относительное удлинение является следствием деформации материала, оно не совпадает с величиной линейной деформации, определяемой соотношением (1.1). Действительно, как следует из определения линейной деформации ε , она служит характеристикой изменения размеров малой области в окрестности данной точки и может быть различной для разных участков стержня. Поэтому величину относительного удлинения δ можно рассматривать как некое среднее значение линейной деформации в продольном направлении. Ясно, что при однородном напряженном состоянии относительное удлинение совпадает с продольной деформацией.

Опыты показывают, что материал стержня в условиях его растяжения будет испытывать не только продольную, но и поперечную деформацию. Если h – характерный поперечный размер стержня до нагружения, то после приложения растягивающей силы F он уменьшится на величину Δh , которая называется **абсолютным сужением**. Отношение $\delta^* = \Delta h / h$ носит название **относительного сужения** и, так же как и величина δ , она является мерой средней деформации материала стержня в поперечном направлении. При однородном напряженном состоянии она совпадает с линейной деформацией в поперечном направлении.

Оказывается, что величины δ и δ^* связаны между собой. Их отношение для каждого конструкционного материала есть величина постоянная, не зависящая от характера нагружения, которому подвергается элемент оборудования. Следовательно, отношение деформаций в двух взаимно перпендикулярных направлениях

является индивидуальной характеристикой материала. Она называется **коэффициентом Пуассона**:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon} \right|. \quad (3.3)$$

Знак абсолютной величины отражает тот факт, что величины ε и ε^* имеют разные знаки. При растяжении продольная деформация положительна, а поперечная отрицательна. При сжатии продольная деформация меньше нуля, а поперечная положительна: поперечный размер после нагружения увеличивается.

В случае неоднородного напряженного состояния выделим бесконечно малый элемент стержня длиной dy и шириной dx (рис. 3.1). После приложения внешней нагрузки в результате деформации материала размеры элемента получают приращения $\Delta(dy)$ и $\Delta(dx)$. Тогда продольная ε_x и поперечная ε_y деформации на данном участке стержня определяются с помощью соотношений:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta(dy)}{dy}. \quad (3.4)$$

Ранее уже отмечалось, что появление в материале внутренних сил (а значит, и напряжений) есть результат реакции элемента оборудования на внешние нагрузки и вызываемые ими деформации. Другими словами, напряжения в материале являются следствием его деформации. Поэтому эти величины должны быть количественно связаны между собой. Действительно, между напряжениями и деформациями в области упругого изменения размеров и формы твердых тел имеет место линейная зависимость:

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (3.5)$$

Это соотношение называется **законом Гука** при растяжении (сжатии). *Закон Гука устанавливает прямую пропорциональность между величинами напряжений σ и линейных относительных деформаций ε .* Коэффициент пропорциональности E называется **модулем продольной упругости** или модулем Юнга. Он представляет собой важнейшую механическую характеристику конструкционных материалов и является величиной справочной. Поскольку относительная деформация – величина безразмерная, модуль продольной упругости имеет размерность напряжения, т. е. Па = Н / м². Следовательно, по своему физическому содержанию модуль E является некоторым напряжением. Из равенства (3.5) ясно, что это

напряжение, при котором $\varepsilon = 1$. Но относительная продольная деформация становится равной единице тогда, когда длина стержня при растяжении удваивается. Таким образом, величина модуля продольной упругости характеризует напряжения, которые возникли бы в материале, если бы его длина при растяжении увеличилась в два раза. Поэтому для основных конструкционных материалов модуль E достигает очень больших значений. Например, для сталей $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Па. Конечно, задолго до того, как будут достигнуты напряжения такой величины, элемент конструкции разрушится.

От величины модуля продольной упругости зависит также склонность материала к деформированию под действием заданных нагрузок. Из (3.5) следует, что при фиксированной картине напряжений величина относительной деформации уменьшается с увеличением E . Таким образом, модуль упругости характеризует жесткость конструкционного материала, т. е. его способность сопротивляться изменению размера и формы элемента конструкции под действием внешних нагрузок. Без учета этого свойства не обходится ни один современный инженерный расчет.

Применим закон Гука (3.5) к напряжениям и деформациям в продольном направлении, учитывая (3.1) и (3.4):

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad \text{или} \quad \frac{N}{A} = E \frac{\Delta(dx)}{dx}.$$

Отсюда для абсолютного удлинения бесконечно малого элемента стержня получаем:

$$\Delta(dx) = \frac{Ndx}{AE}.$$

Таким образом, локальное удлинение материала пропорционально величине продольной силы (при отрицательных значениях N речь идет о сжатии), действующей на данном грузовом участке, и обратно пропорционально произведению AE . Его называют **жесткостью стержня при растяжении**. Оно совокупным образом отражает влияние механических свойств материала и геометрии поперечного сечения на величину перемещений.

Если последнее равенство проинтегрировать по всей длине стержня, то слева получим полное удлинение стержня Δl :

$$\Delta l = \int_l \frac{Ndx}{AE}. \quad (3.6)$$

Это равенство называется законом Гука в абсолютных удлинениях. Оно учитывает тот факт, что в общем случае все величины, стоящие под знаком интеграла, могут меняться по длине стержня. Если они постоянны, то последнее равенство упрощается:

$$\Delta l = \frac{Nl}{AE} = \frac{Fl}{AE} \quad (3.6')$$

3.2. Напряжения в произвольных сечениях стержня

Результаты предыдущего параграфа показывают, что в сечениях стержня, перпендикулярных его оси, действуют нормальные напряжения, которые вычисляются с помощью соотношения (3.1). С другой стороны, как уже отмечалось, величина напряжений зависит от ориентации площадки, на которой они действуют. Поэтому следует ожидать, что в сечениях стержня, не совпадающих с поперечным сечением, картина напряжений будет совсем иной.

Для выяснения этого вопроса в стержне, изображенном на рис. 3.1, проведем сечение, составляющее угол α с поперечным сечением. Обозначим через A_α площадь этого сечения, а через p_α полное внутреннее напряжение на наклонном сечении. В силу однородности материала оно будет одинаково во всех точках сечения $p_\alpha = \text{const}$ и направлено параллельно оси стержня (рис. 3.2). Из условия равновешенности внешних и внутренних сил следует, что справедливо следующее равенство:

$$p_\alpha A_\alpha = \sigma A = F, \quad (3.7)$$

где σ - напряжения, действующие в поперечном сечении стержня, A - площадь поперечного сечения. Площади A и A_α связаны между собой с помощью соотношения: $A = A_\alpha \cos \alpha$. С учетом этого для полного

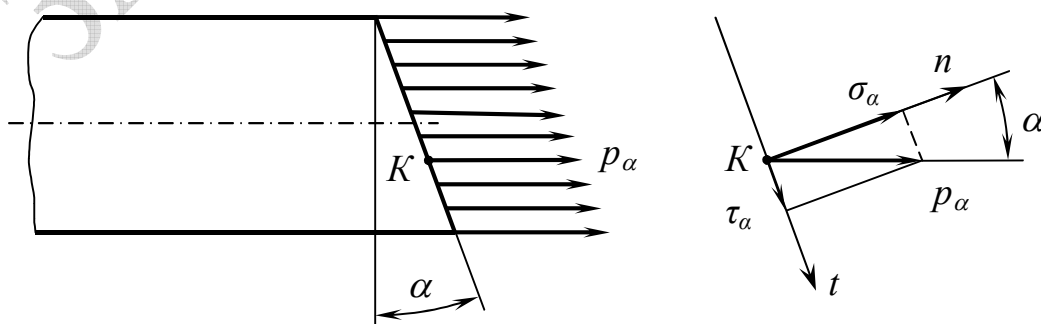


Рисунок 3.2

напряжения получим:

$$p_{\alpha} = \sigma \cos \alpha. \quad (3.8)$$

Разложим теперь вектор полного напряжения p_{α} на нормальную σ_{α} и касательную τ_{α} составляющие (рис. 3.2):

$$\sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha. \quad (3.9)$$

$$\tau_{\alpha} = p_{\alpha} \sin \alpha = \sigma \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha. \quad (3.10)$$

Полученные выражения для нормальных и касательных напряжений позволяют проанализировать напряженное состояние материала в некоторой его точке. Как и следовало ожидать, величина напряжений в условиях линейного напряженного состояния зависит от ориентации сечения. Этот факт является проявлением более общих закономерностей, о которых говорилось в параграфе 1.3. При $\alpha = 0$, т. е. в поперечных сечениях стержня, касательные напряжения отсутствуют (формула (3.10)), а нормальные напряжения достигают своих наибольших значений, равных $\sigma = F / A$. При $\alpha = 90^{\circ}$, т. е. в продольных сечениях, и касательные и нормальные напряжения обращаются в нуль. Другими словами, продольные слои растянутого стержня не имеют друг с другом силового взаимодействия.

Наконец, при $\alpha = 45^{\circ}$ касательные напряжения максимальны и равны $\sigma / 2$. Это обстоятельство является причиной того, что разрушение деталей, подверженных растяжению или сжатию, происходит в виде среза вдоль плоскостей, наклоненных к их продольной оси под углом 45° .

Установим, как связаны напряжения на взаимно перпендикулярных площадках. Для этого положим в формулах (3.9) и (3.10) $\angle \beta = \angle \alpha + 90^{\circ}$ и оценим величину напряжений в сечении с углом наклона равным β :

$$\sigma_{\beta} = \sigma \cos^2 \beta = \sigma \cos^2 (\alpha + 90^{\circ}) = \sigma \sin^2 \alpha.$$

С учетом (3.9) приходим к важному выводу:

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \text{inv} = \sigma,$$

т. е. *сумма нормальных напряжений, действующих на взаимно перпендикулярных площадках, для данной точки есть величина постоянная.*

Величина касательных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках с учетом соотношения (3.10) может быть оценена аналогичным образом:

$$\tau_{\beta} = \frac{\sigma}{2} \sin 2(\alpha + 90^{\circ}) = \frac{\sigma}{2} \sin(2\alpha + 180^{\circ}) = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = -\tau_{\alpha}.$$

Полученный результат в точности соответствует закону парности касательных напряжений, сформулированному в подразделе 1.3.

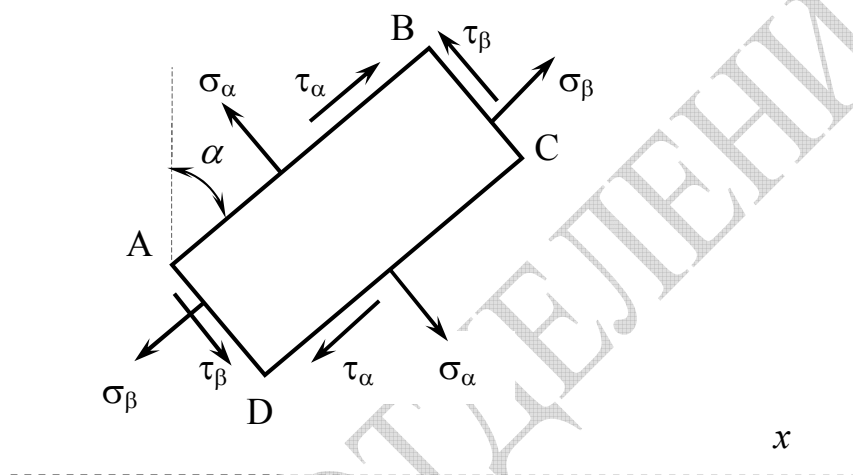


Рисунок 3.3

Обратимся теперь к анализу деформированного состояния материала стержня. С этой целью выделим в материале в продольном сечении бесконечно малый прямоугольник $ABCD$ (рис. 3.3). Под действием внешних нагрузок длина его сторон изменится, прямые углы перекосятся, и прямоугольник превратится в параллелограмм. При растяжении материала углы при вершинах A и C уменьшатся, а при вершинах B и D – увеличатся. Найдем величину угла сдвига, используя его определение (1.2). В соответствии с определением он равен величине, на которую изменится один из углов (например, угол при вершине A) выделенного прямоугольника вследствие деформации материала. В свою очередь изменение величины $\angle A$ происходит благодаря повороту отрезков AB и AD вокруг точки A .

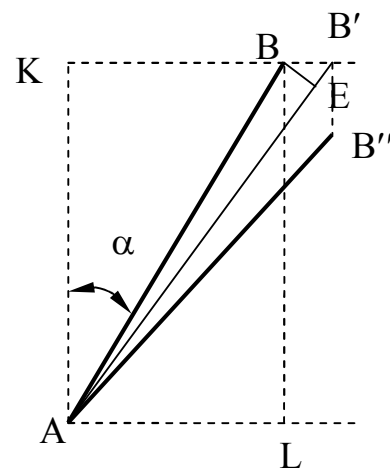


Рисунок 3.4.

Оценим угол поворота отрезка AB . Отрезок изменит свое положение за счет деформации

материала, как в продольном, так и в поперечном направлении. На этом отрезке как на диагонали построим прямоугольник $AKBL$, стороны которого KB и AL ориентированы вдоль продольной оси стержня (рис. 3.4).

Из-за продольной деформации точка B сместится в положение B' . При этом отрезок AB повернется на угол $\angle BAB'$. Этот угол можно рассматривать как центральный угол, стягивающий дугу BE радиуса AB . Тогда с точностью до величин более высокого порядка малости имеем:

$$\angle BAB' \cdot AB = BE = BB' \cos \alpha.$$

Величина отрезка BB' может быть выражена через линейную деформацию в продольном направлении ε_x . Действительно, согласно (1.1) она представляет собой отношение абсолютного удлинения (BB') к первоначальной длине отрезка KB : $\varepsilon_x = BB' / KB$. С учетом этого из предыдущего равенства для угла $\angle BAB'$ получаем:

$$\angle BAB' = \frac{KB}{AB} \varepsilon_x \cos \alpha = \varepsilon_x \sin \alpha \cos \alpha. \quad (3.11)$$

Полученное выражение позволяет определить угол поворота отрезка AB , обусловленный деформацией материала только в продольном направлении. Но деформация происходит также и в поперечном направлении. Вследствие этой деформации конец отрезка AB попадет в положение B'' , а сам отрезок повернется еще на угол $\angle B'AB''$. Рассуждая аналогичным образом, нетрудно выразить $\angle B'AB''$ через величину линейной деформации материала в поперечном направлении ε_y :

$$\angle B'AB'' = \varepsilon_y \sin \alpha \cos \alpha. \quad (3.12)$$

Полный угол \angle_{AB} поворота отрезка AB может быть получен как сумма углов $\angle BAB'$ и $\angle B'AB''$ (см. рис. 3.4). Следовательно, учитывая (3.11) и (3.12), имеем:

$$\angle_{AB} = \angle BAB' + \angle B'AB'' = (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Воспользуемся определением коэффициента Пуассона (3.3) и законом Гука (3.5). Тогда полный угол поворота отрезка AB можно выразить следующим образом:

$$\angle_{AB} = (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma}{E}(1 + \mu) \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma}{2E}(1 + \mu) \sin 2\alpha .$$

Точно так же для полного угла \angle_{AD} поворота отрезка AD нетрудно получить аналогичное выражение. Отличие состоит в том, что вместо угла α во всех выкладках необходимо использовать угол $\alpha + 90^\circ$. В результате получим:

$$\angle_{AD} = -\frac{\sigma}{2E}(1 + \mu) \sin 2\alpha .$$

Искомая угловая деформация γ_α (угол сдвига) в точке A согласно определению (1.2) представляет собой разность углов \angle_{AB} и \angle_{AD} :

$$\gamma_\alpha = \angle_{AB} - \angle_{AD} = \frac{\sigma}{E}(1 + \mu) \sin 2\alpha .$$

Сравнивая полученное выражение с (3.10), видим, что между угловой деформацией и касательным напряжением справедливы следующие соотношения связи:

$$\gamma_\alpha = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_\alpha \quad \text{или} \quad \tau_\alpha = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_\alpha . \quad (3.13)$$

Полученные соотношения аналогичны закону Гука (3.5). Они устанавливают прямо пропорциональную зависимость между напряжениями и деформациями. Коэффициент пропорциональности

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (3.14)$$

называется **модулем сдвига** или **модулем упругости второго рода**. Соотношения (3.13) являются следствием закона Гука и выполняются для всех видов напряженных состояний. Они носят название **закона Гука при сдвиге**.

Размерность модуля сдвига G совпадает с размерностью модуля продольной упругости E , а именно Па = Н/м² (это вытекает из (3.14)). Его физический смысл нетрудно выявить из (3.13): $\tau = G \gamma$. Модуль сдвига для данного конструкционного материала равен такому касательному напряжению, при котором угол сдвига равен 1 радиану.

3.3. Испытание материалов на растяжение и сжатие

Модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона являются индивидуальными механическими характеристиками конструкционных материалов. Они зависят от химического состава материалов, его микроструктуры и многих других факторов. Численные значения этих и других механических характеристик могут быть определены только экспериментальными методами. Поэтому к настоящему времени разработано достаточно много методик опытного изучения механических свойств материалов. Все они носят общее название **испытания материалов**.

В лабораторных условиях проще всего может быть реализовано линейное напряженное состояние при растяжении или сжатии образца, изготовленного из того материала, который подвергается испытанию. Кроме того, результаты, полученные при испытаниях на растяжение, дают достаточно точное представление о поведении материала при других видах деформации: сдвиге, кручении и изгибе. Поэтому основными и наиболее распространенными являются испытания материалов на растяжение и сжатие.

Испытания на растяжение проводят на особых разрывных машинах с использованием стандартных образцов, изготовленных из испытываемого материала. Разрывные машины нагружают образец медленно возрастающей (статической) нагрузкой от нуля до величины, разрушающей образец. Во время испытания фиксируется зависимость абсолютного удлинения образца Δl от величины растягивающей силы F . График этой зависимости носит название **диаграммы растяжения**. По оси ординат в определенном масштабе откладывается величина силы в различные моменты испытания, а по оси абсцисс – величина абсолютного удлинения.

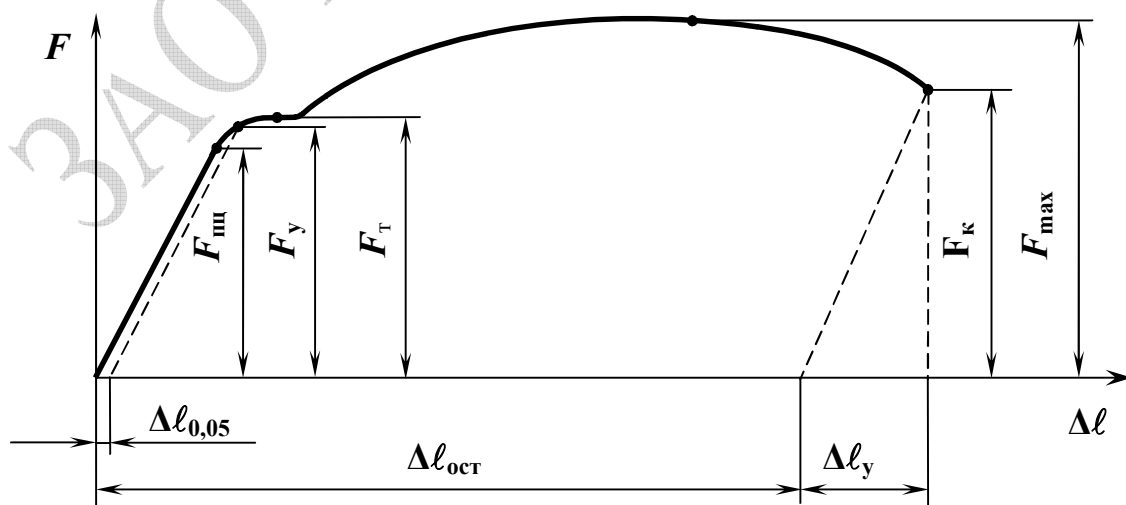


Рисунок 3.5
62

На рис. 3.5 показана диаграмма растяжения, характерная для малоуглеродистых сталей. Из нее видно, что поведение материала при растяжении на разных стадиях испытания совершенно различно. В начале нагружения при сравнительно малых значениях растягивающей силы диаграмма линейна: здесь удлинение образца пропорционально силе F . Следовательно, в этой области деформаций справедлив закон Гука в абсолютных удлинениях (3.6'). Деформации имеют упругий характер и практически полностью исчезают после снятия нагрузки. Границе области линейной зависимости $\Delta l(F)$ соответствует определенное значение растягивающей силы $F_{пц}$. Указанное значение зависит, конечно, не только от свойств материала, но и от размеров образца. Чтобы исключить зависимость от размера образца, силы $F_{пц}$ относят к первоначальной площади поперечного сечения A_0 образца. Согласно (3.1), в результате получится напряжение, которое принято обозначать $\sigma_{пц}$ и которое называется **пределом пропорциональности**: $\sigma_{пц} = F_{пц} / A_0$.

Таким образом, *пределом пропорциональности называется то наибольшее напряжение, до которого деформации в материале растут пропорционально напряжениям, т. е. справедлив закон Гука.* Предел пропорциональности представляет собой первую количественную характеристику, отвечающую упругим свойствам конструкционного материала.

Следующая характерная точка диаграммы растяжения соответствует началу появления в материале первых остаточных деформаций. Этой точке отвечает значение растягивающей силы F_y (рис. 3.5) и напряжение в материале $\sigma_y = F_y / A_0$, которое называется **пределом упругости**. При достижении предела упругости относительная деформация не превышает $0.002 \div 0.005$ %. Для большинства материалов предел упругости мало отличается от предела пропорциональности.

При дальнейшем увеличении нагрузки F зависимость $\Delta l(F)$ резко меняется. Удлинение образца начинает расти почти без увеличения силы (образец испытывает пластическое деформирование – «течет»). Это явление называется **текучестью**. Площадке текучести (горизонтальному участку диаграммы растяжения, рис. 3.5) отвечает значение силы F_T и напряжение в материале $\sigma_T = F_T / A_0$, которое называется **пределом текучести**. Предел текучести является одной из важнейших механических характеристик конструкционных материалов, поскольку его превышение приводит к недопустимым остаточным деформациям и выходу из строя оборудования.

За пределом текучести материал вновь начинает оказывать сопротивление деформации. Однако характер зависимости $\Delta l(F)$ совсем другой, чем в области упругих деформаций. Остаточные деформации быстро нарастают с увеличением нагрузки, которая в

некоторой точке достигает своего максимального значения F_{max} . С этого момента начинается процесс разрушения образца. Поэтому напряжение, отвечающее этому значению нагрузки, называется **пределом прочности**: $\sigma_{пч} = F_{max} / A_0$. Часто эту характеристику материала называют временным сопротивлением и обозначают σ_{σ} .

Процесс разрушения на диаграмме растяжения описывается нисходящей ветвью. Он начинается с образования местного сужения образца, называемого **шейкой**. Деформации теперь происходят в основном здесь. Они приводят к быстрому уменьшению поперечного сечения в районе шейки и разрыву образца. По силе F_k в момент разрыва (рис. 3.5) и площади поперечного сечения A_k образца в месте его разрушения можно определить напряжение в материале в момент его разрушения: $\sigma_k = F_k / A_k$. Это напряжение иногда называют истинным пределом прочности.

Предел текучести и предел прочности, найденные по результатам испытаний на растяжение, служат для определения численных значений **допускаемых напряжений**, входящих в условия прочности и расчеты на прочность. В случае пластичных материалов допускаемое напряжение определяется через предел текучести: $[\sigma] = \sigma_m / n_m$. Коэффициент n_m называется **коэффициентом запаса текучести**, величина которого регламентируется государственными стандартами. В химической промышленности коэффициент запаса текучести обычно принимают равным 1,5. Для хрупких материалов в качестве предельного напряжения используется предел прочности: $[\sigma] = \sigma_{пч} / n_{пч}$, где $n_{пч}$ – **коэффициент запаса прочности**. Для химического оборудования $n_{пч} = 2,5 \div 3,5$.

Судить о том, является ли материал хрупким или пластичным позволяют численные значения других характеристик: относительного удлинения и относительного сужения. **Относительное удлинение после разрыва** образца определяется соотношением:

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} \cdot 100 \% ,$$

где l_k – длина образца после разрыва, l_0 – длина в начале испытания.

Относительное сужение после разрыва определяется по площади сечения A_k в месте разрыва образца:

$$\psi = \frac{A_k - A_0}{A_0} \cdot 100\% .$$

Чем больше две последние характеристики, тем материал пластичнее. Примерами пластичных материалов могут служить

малоуглеродистая сталь, медь, свинец. Для них относительное удлинение $\delta > 5\%$. Чем ниже эти характеристики, тем более хрупок материал. Примерами хрупких материалов являются закаленная сталь, чугун, стекло. Для них относительное удлинение $\delta < 5\%$.

Испытания материалов с получением диаграммы растяжения (сжатия) дают достаточно полную информацию о механических свойствах материалов. Однако их проведение требует времени и по этой причине затруднительно при оперативном контроле качества изготовления деталей или элементов конструкции. Поэтому на практике часто используют упрощенную оценку свойств материалов с помощью пробы на **твердость**. Под твердостью материала понимается его способность оказывать сопротивление механическому проникновению в него другого тела. Твердость позволяет судить о прочности и пластических свойствах материала. Действительно, при вдавливании в поверхность испытуемого тела (детали) некоторого заостренного предмета в материале возникнут местные напряжения, которые с увеличением нагрузки приведут к локальным пластическим деформациям. Величина этих остаточных деформаций, очевидно, зависит от характеристик прочности и пластичности.

При испытаниях на твердость в поверхность детали вдавливается заданной силой F закаленный стальной шарик диаметра D . Затем измеряется диаметр d оставшегося на поверхности отпечатка. Вычисляется площадь поверхности луночки, оставленной шариком. Из элементарной стереометрии известно, что указанная площадь A равна:

$$A = \frac{\pi D}{2} (D - \sqrt{D^2 - d^2}).$$

Отношение вдавливающей силы к площади лунки называется числом твердости H_B по Бринелю:

$$H_B = \frac{F}{A}.$$

Число твердости H_B измеряется в Па и связано с пределом прочности материалов приближенным равенством:

$$\sigma_{\text{пл}} \approx 0,36 H_B.$$

Таким образом, испытания на твердость позволяют достаточно быстро определить прочностные характеристики материала, не разрушая детали.

3.4. Потенциальная энергия упругой деформации при растяжении (сжатии)

Диаграмму растяжения (3.5) можно рассмотреть с энергетической точки зрения. Действительно, приложенная к образцу растягивающая сила совершает работу на тех перемещениях, которые фиксируются на оси абсцисс. То же самое происходит при действии внешних сил на любое упругое тело. Работа, как известно, пропорциональна величине действующих сил и перемещениям тех точек, где они приложены. Совершаемая силами работа частично переходит в кинетическую энергию движения тела, а частично - в потенциальную энергию упругой деформации. Последний вид энергии знаком нам, например, по работе различных упругих амортизирующих элементов (пружин, рессор), спортивных снарядов (трамплинов, батуты, луков), мальчишеских развлечений (рогаток, арбалетов).

Если нагружение происходит достаточно медленно (статическое нагружение), то скорость перемещения масс тела будет небольшой, и кинетической энергией можно пренебречь. В этом случае вся совершаемая внешними силами работа перейдет в потенциальную энергию упругой деформации. При снятии внешних сил накопленная потенциальная энергия совершит определенную работу. Таким образом, упругое тело может служить своего рода аккумулятором энергии.

Допустим теперь, что при растяжении стержня деформации остаются упругими, так что справедлив закон Гука. Тогда весь процесс статического нагружения стержня силой F может быть представлен линейной зависимостью, изображенной на рис. 3.6. Поскольку сила не остается постоянной, совершаемую ей работу Q можно найти путем интегрирования элементарной работы по всему промежутку $(0, \Delta l)$:

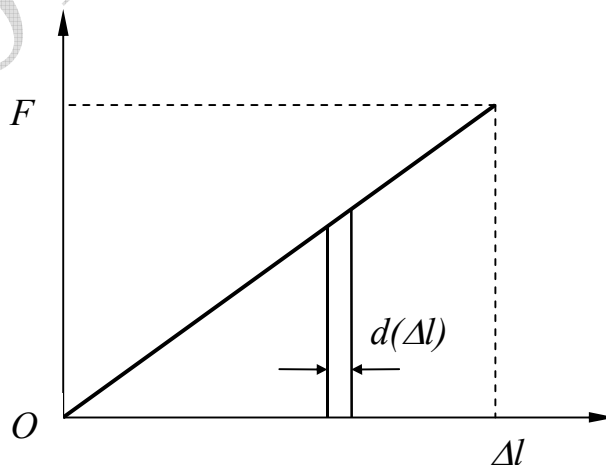


Рисунок 3.6

$$Q = \int_0^{\Delta l} F d(\Delta l) = \frac{1}{2} F \Delta l. \quad (3.15)$$

Воспользуемся теперь законом Гука в абсолютных удлинениях (3.6'). Тогда для потенциальной энергии упругой деформации U при растяжении получим следующее выражение:

$$U = Q = \frac{F^2 l}{2AE} = \frac{N^2 l}{2AE}, \quad (3.16)$$

где N – продольная внутренняя сила в материале стержня.

Еще раз отметим допущения, при которых справедлива полученная формула. Во-первых, работа внешних сил полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации; во-вторых, процесс нагружения является статическим и, в-третьих, справедлив закон Гука. Если продольная сила меняется вдоль оси стержня, то формула (3.16) легко обобщается:

$$U = \int_0^l \frac{N^2(x)}{2AE} dx. \quad (3.17)$$

Как выяснится позднее, потенциальная энергия упругой деформации играет важную роль во многих методах сопротивления материалов, позволяющих определить перемещения конкретных точек различных конструкций.

Иногда требуется найти величину удельной потенциальной энергии, т. е. энергии, отнесенной к единице объема материала упругого тела. В случае растянутого стержня его объем $V = A l$. Тогда для удельной потенциальной энергии u имеем:

$$u = \frac{N^2 l}{2AE} \cdot \frac{1}{Al} = \frac{N^2}{2A^2 E} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon. \quad (3.18)$$

При выводе использованы соотношения (3.1) для напряжений при растяжении и закон Гука (3.5).

3.5. Контрольные вопросы

1. Какие напряжения возникают в материале стержня при его растяжении или сжатии?
2. В каком случае нормальные напряжения считаются положительными, а в каком отрицательными?
3. Дайте определение абсолютного и относительного удлинения.
4. Какие деформации материала возникают при растяжении стержня?
5. Почему напряженное состояние при растяжении или сжатии стержня является линейным?
6. Что характеризует коэффициент Пуассона?

7. В чем состоит существо закона Гука?
8. Что такое модуль продольной упругости, в чем его физический смысл?
9. Что такое жесткость стержня при растяжении?
10. Сформулируйте закон Гука в абсолютных удлинениях.
11. Какие напряжения действуют в наклонных сечениях стержня?
12. В каких сечениях касательные напряжения достигают своих максимальных значений?
13. Как связаны между собой угол сдвига и касательное напряжение?
14. Что такое модуль сдвига и что он характеризует?
15. Сформулируйте закон Гука при сдвиге.
16. С какой целью проводятся испытания материалов?
17. Что такое диаграмма растяжения? В каких координатах она строится и какую информацию несет?
18. Что такое предел пропорциональности, предел упругости, предел текучести и предел прочности?
19. Какие напряжения выбираются в качестве допускаемых для хрупких и пластичных материалов?
20. Назовите характеристики пластичности.
21. Что является источником потенциальной энергии упругой деформации?
22. От чего зависит величина потенциальной энергии деформации упругого тела при растяжении или сжатии?
23. Чему равна удельная (отнесенная к единице объема тела) потенциальная энергия упругой деформации?
24. При каких допущениях может быть оценена величина потенциальной энергии упругого тела?

Глава 4. Плоское и объемные напряженные состояния

4.1. Напряжения в наклонных площадках при плоском напряженном состоянии

Согласно классификации напряженных состояний, приведенной в подразделе 1.3., при плоском напряженном состоянии отличны от нуля два главных напряжения. Для определенности считаем, что это напряжения σ_1 и σ_2 . Эти напряжения действуют на главных площадках, на которых касательные напряжения отсутствуют. Анализ плоского напряженного состояния в некоторой точке материала сходен с анализом линейного напряженного состояния, проведенном в предыдущей главе. Прежде всего, необходимо получить расчетные соотношения, позволяющие вычислять значения нормальных и касательных напряжений в произвольно ориентированном сечении.

Для вывода указанных соотношений выделим в материале элементарный параллелепипед так, чтобы две пары его граней совпадали с первой и второй главными площадками. Тогда на оставшейся паре граней напряжения будут равны нулю ($\sigma_3 = 0$). Рассмотрим сечение параллелепипеда, составляющее угол α с первой главной площадкой (рис. 4.1). Площадь этого сечения dA_α и площади главных площадок связаны соотношениями:

$$dA_\alpha = \frac{dA_1}{\cos \alpha} = \frac{dA_2}{\sin \alpha}. \quad (4.1)$$

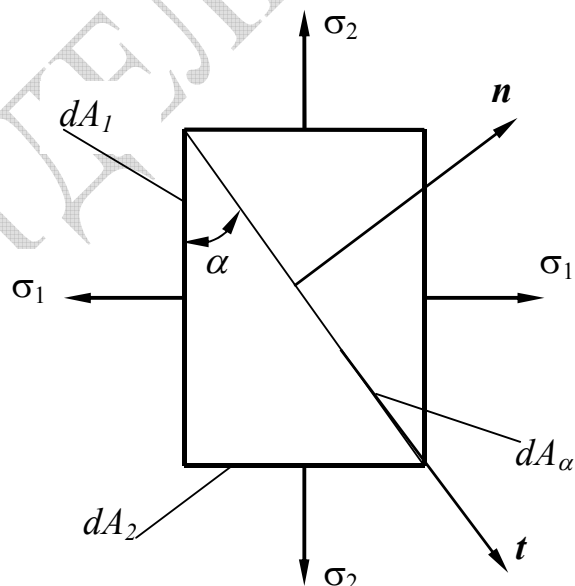


Рисунок 4.1

Составим уравнения равновесия левой от сечения части выделенного параллелепипеда, проектируя действующие на него силы на направление нормали \mathbf{n} и вектора \mathbf{t} , лежащего в плоскости сечения. Пусть σ_α - нормальное напряжение на наклонной площадке. Тогда $\sigma_\alpha dA_\alpha$ - сила, обусловленная действием этого напряжения в направлении нормали \mathbf{n} . Следовательно, уравнение равновесия рассматриваемой части параллелепипеда в проекции на нормаль \mathbf{n} запишется следующим образом:

$$\sigma_\alpha dA_\alpha - \sigma_1 dA_1 \cos \alpha - \sigma_2 dA_2 \sin \alpha = 0.$$

Используя равенства (4.1) для напряжения σ_α , получим:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha . \quad (4.2)$$

В проекции на направление вектора \mathbf{t} уравнение равновесия будет иметь вид:

$$\tau_{\alpha} dA_{\alpha} - \sigma_1 dA_1 \sin \alpha + \sigma_2 dA_2 \cos \alpha = 0 .$$

С учетом равенств (4.1) для напряжения τ_{α} получим:

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha . \quad (4.3)$$

Из последней формулы следует, что наибольшие касательные напряжения действуют в сечении, расположенном под углом 45° к главным площадкам, и они равны половине разности главных напряжений. Этот результат аналогичен выводу о касательных напряжениях на наклонных площадках при линейном напряженном состоянии (подраздел 3.2).

Особый случай напряженного состояния возникает тогда, когда главные напряжения равны по величине, но противоположны по знаку: $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$. В этом случае, как следует из формулы (4.2), на площадках, расположенных под углом 45° к главным площадкам, нормальные напряжения отсутствуют. Такое напряженное состояние называют **ЧИСТЫМ СДВИГОМ**. Оно будет рассмотрено позднее.

Оценим напряжения на площадке, перпендикулярной исходной. Для этого положим в формулах (4.2) и (4.3) угол $\beta = \alpha + 90^{\circ}$. Из (4.2) имеем:

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \cos^2(\alpha + 90^{\circ}) + \sigma_2 \sin^2(\alpha + 90^{\circ}) = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha .$$

Это равенство совместно с (4.2) позволяет заключить, что, как и в условиях линейного напряженного состояния, сумма нормальных напряжений на взаимно перпендикулярных площадках есть величина постоянная, равная сумме главных напряжений:

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{inv} . \quad (4.4)$$

Подстановка $\beta = \alpha + 90^{\circ}$ в соотношение (4.3) дает:

$$\tau_{\beta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2(\alpha + 90^{\circ}) = -\tau_{\alpha} . \quad (4.5)$$

Это соотношение выражает собой проявление закона парности касательных напряжений в случае плоского напряженного состояния.

Формулы (4.2) и (4.3) позволяют вычислить нормальные и касательные напряжения в произвольно ориентированном сечении при условии, что значения главных напряжений известны. Рассмотрим теперь обратную задачу. Пусть известны значения нормальных и касательных напряжений на двух произвольных взаимно перпендикулярных площадках. По этим значениям требуется найти величины главных напряжений, а также положение главных площадок.

Вновь в объеме материала выделим элементарный параллелепипед. На его гранях действуют в общем случае нормальные и касательные напряжения. Пусть нормальные напряжения равны σ_x и σ_y . Касательные напряжения в силу закона парности на всех четырех гранях одинаковы и равны τ (рис. 4.2). Рассмотрим сечение под углом α к площадке dA_x . Площади площадок dA_x , dA_y и dA_α связаны соотношениями, аналогичными (4.1):

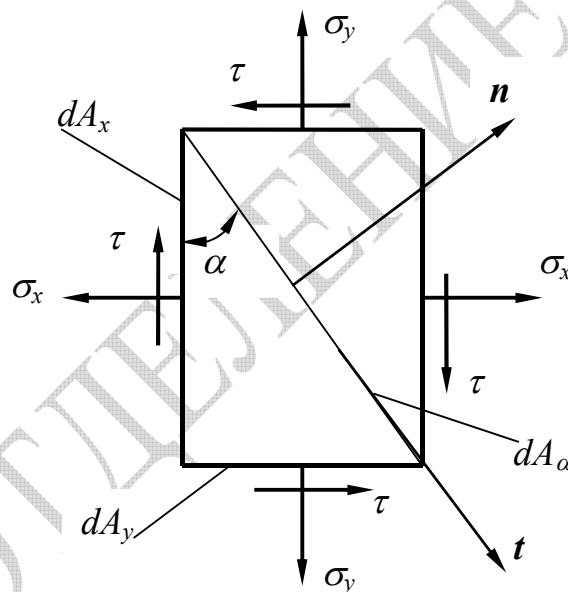


Рисунок 4.2

$$dA_\alpha = \frac{dA_x}{\cos \alpha} = \frac{dA_y}{\sin \alpha}.$$

Составим уравнения равновесия части параллелепипеда слева от сечения dA_α . Проектируя все силы на направление нормали n , получим:

$$\sigma_\alpha dA_\alpha - \sigma_x dA_x \cos \alpha - \sigma_y dA_y \sin \alpha + \tau dA_x \sin \alpha + \tau dA_y \cos \alpha = 0,$$

где σ_α - напряжение, действующее на площадке dA_α . С учетом соотношения между площадями площадок для этого напряжения получим:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau \sin 2\alpha. \quad (4.6)$$

Уравнение равновесия в проекциях на направление вектора t запишется следующим образом:

$$\tau_{\alpha} dA_{\alpha} - \sigma_x dA_x \sin \alpha + \sigma_y dA_y \cos \alpha - \tau dA_x \cos \alpha + \tau dA_y \sin \alpha = 0.$$

После несложных преобразований для касательного напряжения в сечении, составляющем угол α осью Oy , получим:

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha. \quad (4.7)$$

Формулы (4.6) и (4.7) позволяют определить напряжения в сечении с любой ориентацией, если известны напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках. Кроме того, с их помощью можно найти положение главных площадок. Действительно, поскольку на главных площадках касательные напряжения равны нулю, из (4.7) следует, что угол наклона, определяющий их положение, может быть найден из формулы:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x}. \quad (4.8)$$

Величину главных напряжений определим из соотношения (4.6), подставив в него угол α , соответствующий положению главных площадок: $\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x}$. При этом необходимо воспользоваться известными тригонометрическими равенствами:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \quad \text{и} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha). \quad (4.9)$$

Для этого значения угла α соотношение (4.6) примет вид:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \tau \operatorname{tg} 2\alpha \right) \cos 2\alpha.$$

Если теперь воспользоваться известной из тригонометрии связью между тангенсом и косинусом

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}$$

и подставить значение угла наклона главной площадки, то окончательно для величин главных напряжений получим соотношение:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} . \quad (4.10)$$

Знак «+» здесь соответствует первому главному напряжению, а знак «-» - второму главному напряжению.

В заключение еще раз подчеркнем, что полученные в этом подразделе формулы позволяют решить две важные задачи анализа плоского напряженного состояния материала в данной точке. Прямая задача: по известным значениям главных напряжений найти величину нормальных и касательных напряжений на площадке с произвольной ориентацией. Обратная задача: по известным напряжениям на двух взаимно перпендикулярных площадках найти значения главных напряжений и положение главных площадок.

4.2. Графо-аналитический анализ плоского напряженного состояния

Прямая и обратная задачи, сформулированные в предыдущем параграфе, могут быть решены графически, что иногда представляется более удобным. Величина нормальных и касательных напряжений в некотором сечении определяется с помощью соотношений (4.2) и (4.3) через значения главных напряжений. Выражение (4.2) можно записать иначе, если воспользоваться тригонометрическими тождествами (4.9):

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha . \quad (4.11)$$

Величина касательных напряжений задается соотношением:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha .$$

Исключим из этих двух равенств угол α наклона сечения к первой главной площадке. Для этого первое слагаемое правой части соотношения (4.11) перенесем в левую часть, затем возведем в квадрат оба соотношения и сложим. В результате получим:

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 . \quad (4.12)$$

Если ввести систему координат, по оси абсцисс которой откладывать нормальные напряжения σ_α , а по оси ординат – касательные напряжения τ_α , то равенство (4.12) задает в этих координатах окружность радиуса $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ с центром на оси σ_α на расстоянии $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ от начала координат. Эта окружность называется **кругом Мора** или **круговой диаграммой напряженного состояния** материала в данной точке (рис. 4.3). Каждой точке А круга Мора соответствует определенная секущая площадка, задаваемая конкретным значением угла α . При этом величина нормальных напряжений на этой площадке равна абсциссе точки А, а величина

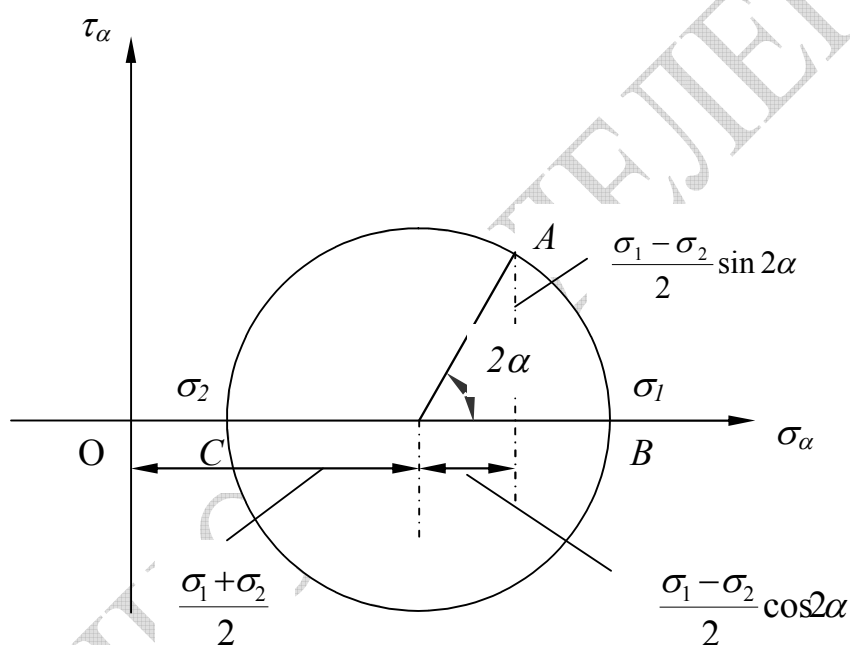


Рисунок 4.3

касательных напряжений – ее ординатой. Так, при $\alpha = 0$ секущая площадка совпадает с первой главной площадкой (точка В диаграммы, рис. 4.3). Касательное напряжение здесь равно нулю, а нормальное – равно первому главному напряжению σ_1 . Значению $\alpha = 90^\circ$ соответствует другая главная площадка (точка С диаграммы), на которой нормальное напряжение равно второму главному напряжению σ_2 . Максимальное касательное напряжение достигается при $\alpha = 45^\circ$.

Нетрудно видеть, каким образом с помощью графического метода может быть решена прямая задача анализа плоского напряженного состояния. По известным значениям главных напряжений необходимо

вычислить радиус круга Мора и положение его центра. Построив его в координатах (σ, τ) , для заданного α находится соответствующая точка на круге Мора. Абсцисса и ордината этой точки будут равны искомым напряжениям на площадке с углом наклона α .

При решении обратной задачи, когда заданы напряжения σ_x, σ_y и τ в некотором сечении, следует поступить следующим образом. В координатной плоскости (σ, τ) отмечаются две точки: (σ_x, τ) и $(\sigma_y, -\tau)$. Это напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках. Поэтому на круге Мора они разделены дугой в 180° . Отрезок, соединяющий указанные точки, будет диаметром круга Мора, а его середина будет центром круга. После построения диаграммы необходимо найти точки пересечения круга с осью абсцисс, которые дадут значения главных напряжений.

Угол α , определяющий положение первой главной площадки по отношению к площадке с исходными напряжениями σ_x, τ может быть найден с помощью формулы (4.8).

4.3. Напряжения в наклонных площадках при объемном напряженном состоянии

При объемном напряженном состоянии все три главных напряжения отличны от нуля. Свяжем значения напряжений на площадке с заданной ориентацией с главными напряжениями, которые будем считать известными. Пусть ориентация площадки задана направляющими косинусами вектора нормали \mathbf{n} к ней.

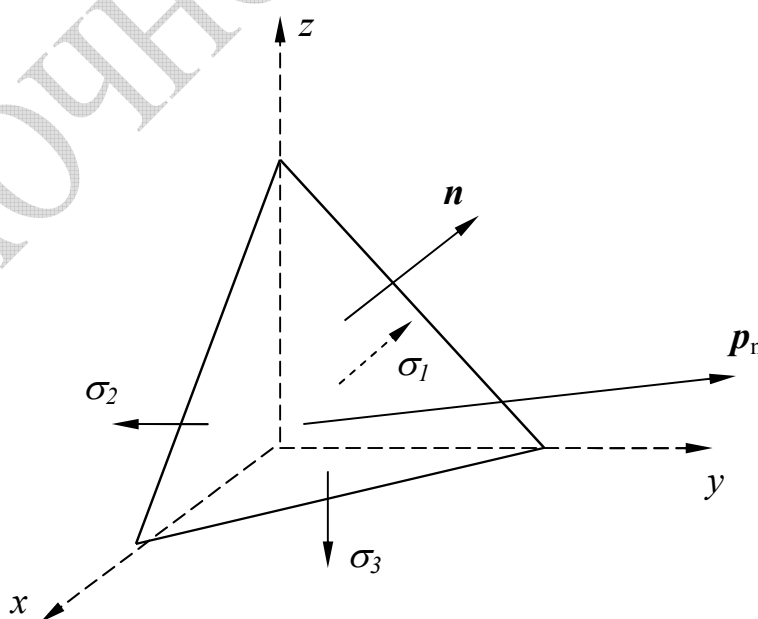


Рисунок 4.4

Обозначим направляющий косинус $\cos(\mathbf{n}, \hat{x})$ между вектором нормали и осью Ox через l , направляющий косинус $\cos(\mathbf{n}, \hat{y})$ - через m и направляющий косинус $\cos(\mathbf{n}, \hat{z})$ - через q . Таким образом, координатами вектора \mathbf{n} являются числа l , m и q , которые связаны известным соотношением:

$$l^2 + m^2 + q^2 = 1. \quad (4.13)$$

Выделим в материале элементарный объем в виде четырехгранника (рис. 4.4) так, чтобы три его грани совпадали с главными площадками, а четвертая – с площадкой с заданной ориентацией. Как и прежде площади граней четырехгранника подчиняются соотношениям:

$$dA_n = \frac{dA_1}{l} = \frac{dA_2}{m} = \frac{dA_3}{q}. \quad (4.14)$$

Обозначим проекции полного вектора \mathbf{p}_n внутренних напряжений на координатные оси через p_x , p_y и p_z и составим уравнения равновесия выделенного четырехгранника по силам. В проекции на ось Ox имеем:

$$\sigma_1 dA_1 - p_x dA_n = 0.$$

Отсюда для проекции вектора полного напряжения на ось Ox находим:

$$p_x = \sigma_1 \frac{dA_1}{dA_n} = \sigma_1 l. \text{ Для проекций на другие оси аналогично получим}$$

выражения: $p_y = \sigma_2 m$ и $p_z = \sigma_3 q$. Нормальное напряжение σ_n на наклонной площадке представляет собой проекцию вектора полного напряжения на направление нормали. Как известно из векторной алгебры, указанная проекция равна скалярному произведению векторов \mathbf{p}_n и \mathbf{n} . Таким образом, для σ_n имеем:

$$\sigma_n = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{n} = p_x l + p_y m + p_z q = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 q^2. \quad (4.15)$$

Нетрудно видеть, что полученная формула является обобщением формулы (4.2) для плоского напряженного состояния.

Найдем теперь касательное напряжение τ_n на площадке, ориентация которой определяется вектором нормали \mathbf{n} . По теореме Пифагора:

$$p_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \quad \text{или} \quad \tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}.$$

Поскольку $p_n^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$, с учетом (4.15) для касательного напряжения получим:

$$\tau_n = \sqrt{l^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + q^2 \sigma_3^2 - (\sigma_1 l^2)^2 - \dots - \sigma_2 \sigma_3 m^2 q^2}. \quad (4.16)$$

Частным случаем полученных формул являются выражения для напряжений на площадках равнонаклонных ко всем трем главным площадкам. Эти площадки называются октаэдрическими. Для них, очевидно, направляющие косинусы одинаковы и равны по $1/\sqrt{3}$. При этом формула (4.15) примет вид:

$$\sigma_{окт} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad (4.17)$$

т. е. нормальное напряжение на октаэдрической площадке равно среднему арифметическому трех главных напряжений. Формула (4.16) также существенно упростится:

$$\tau_{окт} = \sqrt{\frac{2}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3)}. \quad (4.18)$$

4.4. Обобщенный закон Гука

При анализе линейного напряженного состояния говорилось о связи между напряжениями и деформациями, возникающими в материале. Эта связь выражается законом Гука (3.5), который устанавливает прямо пропорциональную зависимость между напряжениями и деформациями в области упругого изменения размеров и формы. Аналогичная связь существует и в случае объемного напряженного состояния.

Выделим в материале элементарный параллелепипед, грани которого перпендикулярны осям декартовой системы координат. На гранях параллелепипеда в общем случае действуют нормальные и касательные напряжения. О характере их действия на материал говорилось ранее. Нормальные напряжения вызывают линейные деформации, поскольку они вызваны локальным сжатием или растяжением материала. Касательные напряжения вызывают угловые деформации. Они вызваны сдвигом соседних слоев материала относительно друг друга. Учитывая это обстоятельство, оценим линейную деформацию в направлении каждой из координатных осей. При этом воспользуемся принципом независимости действия сил.

Пусть в материале действует только напряжение σ_x . Это напряжение согласно закону Гука (3.5) вызовет деформацию ε_x в направлении оси Ox равную: $\varepsilon_x = \sigma_x / E$, где E – модуль продольной упругости. Но и в направлении других осей также возникнет деформация материала в силу взаимосвязи между линейными деформациями в двух взаимно перпендикулярных направлениях (см. подраздел 3.1). В направлении оси Oy она равна $\varepsilon_y = -\mu \sigma_x / E$, в направлении оси Oz она также равна $\varepsilon_z = -\mu \sigma_x / E$.

Аналогичные выражения для линейных деформаций получатся, если в материале будет действовать либо только напряжение σ_y , либо только σ_z . При одновременном действии всех трех напряжений деформации будут суммироваться. Складывая деформации в направлении каждой из координатных осей, обусловленные действием напряжений σ_x , σ_y и σ_z , получим следующие три соотношения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x - \mu\sigma_z), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y).\end{aligned}\tag{4.19}$$

Полученные соотношения выражают собой **обобщенный закон Гука**, который устанавливает линейную связь между деформациями материала и напряжениями в нем. С их помощью можно в частности оценить изменение объема материала при деформации. В главе было получено следующее выражение для объемной деформации материала (соотношение (1.6.)):

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

При подстановке в него правых частей равенств (4.19) получим:

$$e = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).\tag{4.20}$$

Это соотношение справедливо для любого напряженного состояния.

Допустим, что материал испытывает всестороннее равномерное сжатие. Тогда напряжение в разных направлениях одинаковы: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$. Обе части равенства (4.20) должны быть отрицательны. Это возможно только тогда, когда $1 - 2\mu > 0$. Следовательно, коэффициент Пуассона не может превосходить величину 0,5. С другой стороны, согласно равенству (3.3) этот коэффициент не может быть отрицательным. Поэтому для любого реального материала значение его коэффициента Пуассона должно лежать в пределах: $0 < \mu < 0,5$.

4.5. Удельная потенциальная энергия при объемном напряженном состоянии

При деформации упругого тела в его объеме накапливается потенциальная энергия, величина которой в единице объема в условиях линейного напряженного состояния определяется формулой (3.18). В условиях объемного напряженного состояния эта формула легко обобщается. Если σ_1, σ_2 и σ_3 - главные напряжения, то используя принцип независимости действия сил, можем записать:

$$u = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 - относительные линейные деформации материала в направлении действия главных напряжений. Выразим эти деформации с помощью обобщенного закона Гука (4.19). После несложных преобразований получим:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]. \quad (4.21)$$

Полученное выражение задает величину потенциальной энергии упругой деформации в единице объема тела. Для того чтобы вычислить потенциальную энергию во всем теле, необходимо (4.21) проинтегрировать по его объему.

Потенциальную энергию деформации принято условно разделять на два независимых слагаемых: энергию, обусловленную изменением объема, и энергию, обусловленную изменением формы тела. Обозначим первую через $u_{об}$, а вторую – через u_{ϕ} и выведем формулы для вычисления обеих. Для этого каждое из главных напряжений представим в виде суммы:

$$\sigma_1 = p + \sigma'_1; \quad \sigma_2 = p + \sigma'_2; \quad \sigma_3 = p + \sigma'_3. \quad (4.22)$$

Такое представление означает, что заданное исходное напряженное состояние разбивается на два (рис. 4.5). Первое представляет собой всестороннее равномерное растяжение (сжатие), а второе дополняет всестороннее растяжение до заданного напряженного состояния.

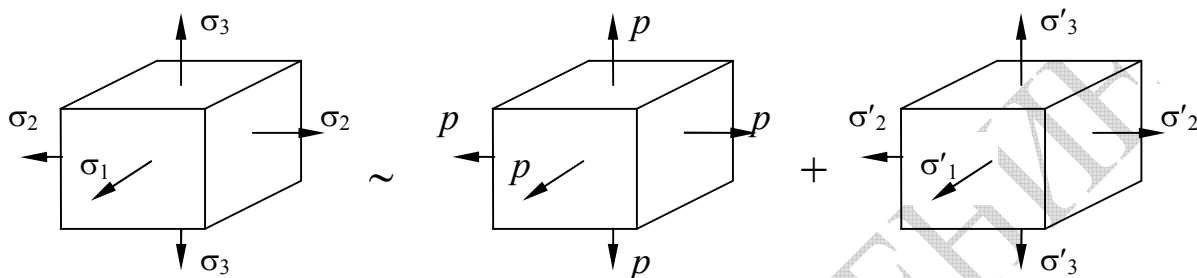


Рисунок 4.5

Величина p подбирается так, чтобы изменение объема в дополнительном напряженном состоянии отсутствовало. Это будет выполнено, если согласно соотношению (4.20) напряжения в этом состоянии удовлетворяют условию:

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0.$$

Складывая соотношения (4.22), с учетом последнего равенства для p получим:

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Следовательно, при p равном среднему арифметическому главных напряжений напряженное состояние материала под действием напряжений σ'_1 , σ'_2 и σ'_3 не приведет к изменению его объема.

Подставим в выражение (4.21) для потенциальной энергии u значение той части главных напряжений, которое отвечает за изменение объема материала. Тогда для $u_{об}$ получим следующее выражение:

$$u_{об} = \frac{1}{2E}(3p^2 - 2\mu \cdot 3p^2) = \frac{(1 - 2\mu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{6E}. \quad (4.23)$$

Другая часть напряжений отвечает за изменение формы, так что потенциальная энергия, обусловленная изменением формы, может быть найдена как разность правых частей равенств (4.21) и (4.23):

$$\begin{aligned}
 u_{\text{фор}} &= u - u_{\text{об}} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3) = \\
 &= \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

4.6. Понятие о теориях прочности

При линейном напряженном состоянии (растяжении или сжатии) условие прочности сводится к требованию, чтобы максимальные нормальные напряжения не превосходили допустимой величины $[\sigma]$. Последняя через соответствующие коэффициенты запаса связана с пределом текучести σ_m для пластичных материалов и с пределом прочности $\sigma_{пч}$ для хрупких (см. подраздел 3.3). Обе величины σ_m и $\sigma_{пч}$ выступают в качестве предельных значений напряжений, при достижении которых в материале начинают происходить необратимые изменения (нарастание остаточных деформаций или хрупкое разрушение). Состояние материала, в котором действуют предельные напряжения, называется **предельным** (или **опасным**) **состоянием**.

Понятие предельного состояния можно использовать и для общего случая напряженного состояния. Именно, *под предельным состоянием материала в общем случае понимают наступление состояния текучести для пластичных материалов и разрушения – для хрупких*. Однако простое сопоставление возникающих в материале напряжений с величинами σ_m и $\sigma_{пч}$ не может служить в качестве критерия прочности. В самом деле, пределы текучести и прочности определяются экспериментально при осевом растяжении образцов. При объемном напряженном состоянии в каждой точке материала одновременно действуют растягивающие и сдвиговые усилия по различным направлениям. Другими словами, условия нагружения образца при испытаниях и реального элемента конструкции не являются **подобными**.

Создать при испытаниях образцов точно такие же условия, при которых эксплуатируется реальный элемент конструкции невозможно, поскольку при объемном напряженном состоянии для деталей различной геометрической формы между главными напряжениями σ_1 , σ_2 , σ_3 возникает бесчисленное количество комбинаций, как по их

направлениям, так и по их величине. Поэтому на практике при анализе работоспособности элементов конструкции в общем случае нагружения используется подход, не основанный на физическом моделировании в условиях испытаний.

Указанный подход состоит в подборе критерия предельного напряженного состояния, который позволяет сравнить напряженные состояния с различным сочетанием главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ с напряженным состоянием при простом растяжении. Сравнение проводится с помощью так называемого **эквивалентного напряжения** $\sigma_{эке}$. *Под эквивалентным напряжением понимается такое напряжение в материале при простом растяжении, которое является равноопасным с объемным напряженным состоянием, характеризуемым напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.* Использование понятия эквивалентного напряжения позволяет свести расчет на прочность в сложном напряженном состоянии к расчету на прочность при растяжении по схеме: $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \rightarrow \sigma_{эке}$ и $\sigma_{эке} \leq [\sigma]$.

Очевидно, что основная сложность оценки предельного состояния в общем случае нагружения заключается в нахождении физически обоснованной связи между эквивалентным напряжением $\sigma_{эке}$ и главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Такая связь должна исходить из истинных причин возникновения предельного (опасного) состояния в некоторой области материала. В настоящее время существует несколько различных теоретических представлений о причинах разрушения материалов. Указанные теоретические представления носят название **гипотез** (или теорий) **прочности**. Каждая из них позволяет на основании механических характеристик, полученных в испытаниях на растяжение, оценить возможность разрушения материала в сложном напряженном состоянии.

Первая гипотеза прочности (или гипотеза наибольших нормальных напряжений) постулирует, что *предельное состояние материала при объемном напряженном состоянии наступает в тот момент, когда наибольшее нормальное напряжение достигает величины предельного напряжения при линейном напряженном состоянии.* Поскольку наибольшим нормальным напряжением является главное напряжение σ_1 , из приведенной формулировки следует, что в соответствии с первой гипотезой прочности условие прочности может быть записано в форме:

$$\sigma_{эке} = \sigma_1 \leq [\sigma]. \quad (4.25)$$

В основе первой гипотезы прочности лежат достаточно простые представления о поведении конструкционного материала в условиях объемного напряженного состояния. Они оправдывают себя в области расчета конструкций из таких весьма хрупких материалов, как камень,

кирпич, керамика, инструментальная сталь и т. п. Для большинства конструкционных материалов первая гипотеза прочности является чрезмерно приближенной.

Вторая гипотеза прочности (или гипотеза наибольших линейных деформаций) утверждает, что *предельное состояние материала при объемном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшая линейная деформация достигает величины предельной для линейного напряженного состояния.*

Получим выражение для эквивалентного напряжения, вытекающее из второй гипотезы прочности. Наибольшее относительное удлинение происходит, очевидно, в направлении действия наибольшего главного напряжения, т. е. в направлении σ_1 . Поэтому в формулировке гипотезы речь идет об ε_1 . Согласно обобщенному закону Гука (формула (4.19)), величина ε_1 связана с тремя главными напряжениями посредством соотношения: $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3)$.

Предельная относительная деформация при простом растяжении-сжатии $\varepsilon_{пр}$ возникает при действии в материале предельных напряжений $\sigma_{пр}$, под которыми, как уже отмечалось, понимается либо предел текучести (для пластичных материалов), либо предел прочности (для хрупких материалов). Связь между ними дает соотношение (3.5): $\varepsilon_{пр} = \sigma_{пр} / E$. Таким образом, условие достижения предельного состояния по второй гипотезе прочности имеет вид:

$$\frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3) = \frac{\sigma_{пр}}{E},$$

откуда следует, что вторая гипотеза прочности приводит к следующему выражению для эквивалентного напряжения:

$$\sigma_{экр} = \sigma_1 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3 \quad (4.26)$$

и соответствующему условию прочности:

$$\sigma_1 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3 \leq [\sigma].$$

Выражение (4.26) показывает, что гипотеза наибольших линейных деформаций более полно учитывает особенности объемного напряженного состояния (эквивалентное напряжение зависит от всех трех главных напряжений). Тем не менее, опыты подтверждают эту гипотезу лишь для хрупких материалов, таких, например, как высокопрочная закаленная сталь и легированный чугун.

Третья гипотеза прочности (или гипотеза наибольших касательных напряжений) предполагает, что *предельное состояние материала при объемном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигает величины предельных касательных напряжений при простом растяжении.*

Опыты свидетельствуют, что положения этой гипотезы прочности достаточно точно отражают причины появления опасного состояния (текучести) в элементах конструкции, изготовленных из пластичных материалов, которые одинаково сопротивляются растяжению и сжатию. Из формулировки третьей гипотезы следует, что условие прочности при объемном напряженном состоянии имеет вид:

$$\tau_{max} \leq [\tau],$$

где τ_{max} – максимальное касательное напряжение при объемном напряженном состоянии, $[\tau]$ – предельное значение касательного напряжения при растяжении. В подразделе 4.1 было установлено, что наибольшие касательные напряжения действуют в сечении, расположенном под углом 45° к главным площадкам, и они равны половине разности наибольшего и наименьшего главных напряжений: $\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2$. Предельное касательное напряжение при растяжении $[\tau]$ равно $[\sigma] / 2$ и действует в сечении, расположенном под углом 45° к оси стержня (подраздел 3.2). Следовательно, условие достижения предельного состояния по третьей гипотезе прочности имеет вид:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{[\sigma]}{2},$$

а эквивалентное напряжение и условие прочности записываются следующим образом:

$$\sigma_{экр} = \sigma_1 - \sigma_3; \quad \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (4.27)$$

К недостаткам третьей теории прочности относится ограниченность ее пластичными материалами.

Четвертая гипотеза прочности исходит из более глубоких представлений о механизмах нарушения внутренней структуры материалов, нагруженных внешними силами. Согласно этой гипотезе, *предельное состояние материала при объемном напряженном состоянии наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия, накапливаемая элементом конструкции при изменении его*

формы, достигает предельной величины энергии изменения формы при простом растяжении-сжатии.

Используя ранее полученную формулу (4.24) для случая предельного состояния материала при растяжении ($\sigma_1 = [\sigma]$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), получим следующее выражение для предельной величины потенциальной энергии изменения формы при линейном напряженном состоянии:

$$u_{\phi} = \frac{1 + \mu}{3E} [\sigma]^2 .$$

Тогда с учетом (4.24) условие прочности и выражение для эквивалентного напряжения по четвертой гипотезе прочности запишутся следующим образом:

$$\sigma_{\text{эке}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leq [\sigma] . \quad (4.28)$$

Расчеты по четвертой теории прочности дают результаты, примерно совпадающие с результатами расчетов по третьей теории прочности и хорошо подтверждаемые экспериментами с пластичными материалами.

4.7. Теория прочности Мора

В подразделе 4.2. было показано, что при плоском напряженном состоянии напряжения в каждой точке материала зависят от ориентации площадки, на которой они действуют. Эта зависимость может быть представлена графически в виде круга Мора. Каждой точке этого круга соответствует сечение с конкретным значением угла наклона по отношению к первой главной площадке. Таким образом, в условиях плоского напряженного состояния с помощью круга Мора нетрудно определить напряжения во всех сечениях, нормали к которым лежат в плоскости действия главных напряжений σ_1 и σ_2 .

В случае объемного напряженного состояния отличны от нуля все три главных напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 . Для каждой пары главных напряжений может быть построен свой круг Мора, точки которого характеризуют напряжения в сечениях с нормальными, лежащими в плоскости действия данной пары главных напряжений. Поскольку главные напряжения удовлетворяют неравенствам $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то круг Мора, соответствующий паре σ_1, σ_3 будет иметь наибольший радиус, равный $(\sigma_1 - \sigma_3) / 2$. Радиусы двух других кругов Мора (рис. 4.6), соответствующих парам σ_1, σ_2 и σ_2, σ_3 , будут меньше, а именно:

$(\sigma_1 - \sigma_2) / 2$ и $(\sigma_2 - \sigma_3) / 2$. Следовательно, напряженное состояние материала в точке в общем случае может быть представлено графически тремя кругами Мора.

Пусть имеется некоторое напряженное состояние, заданное тремя главными напряжениями $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Будем одновременно пропорционально увеличивать все три его компоненты. Рано или поздно это напряженное состояние станет предельным (образец либо

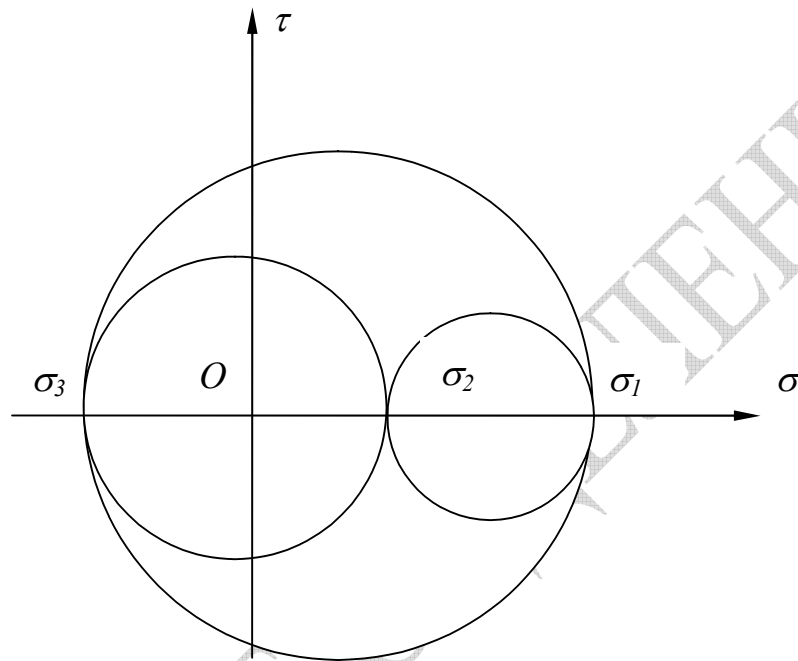


Рисунок 4.6

разрушится, либо появятся пластические деформации). Вычертим для полученного предельного состояния в координатах (σ, τ) наибольший из трех кругов Мора. Он называется **предельным кругом**. Затем образец того же материала приведем в другое напряженное состояние $\{\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3\}$ и вновь станем пропорционально увеличивать главные напряжения до наступления предельного состояния. На диаграмме вновь вычертим предельный круг. Повторив эти построения многократно, в результате получим семейство предельных кругов Мора для различных видов напряженного состояния данного материала. Общая огибающая семейства предельных кругов представляет собой множество точек, координаты которых определяют комбинацию нормальных и касательных напряжений, являющуюся предельной для данного материала. Таким образом, форма указанной огибающей может служить механической характеристикой материала такой же, например, как диаграмма растяжения. При этом предполагается, что эта огибающая для

данного материала является единственной. На таких положениях основана теория прочности Мора.

Выведем выражение для эквивалентного напряжения $\sigma_{\text{экв}}$, вытекающее из приведенных представлений, полагая, что огибающая может быть аппроксимирована отрезком прямой. Вычертим два предельных круга Мора, соответствующих растяжению и сжатию, и проведем к ним общую касательную (рис. 4.7). Пусть теперь имеется

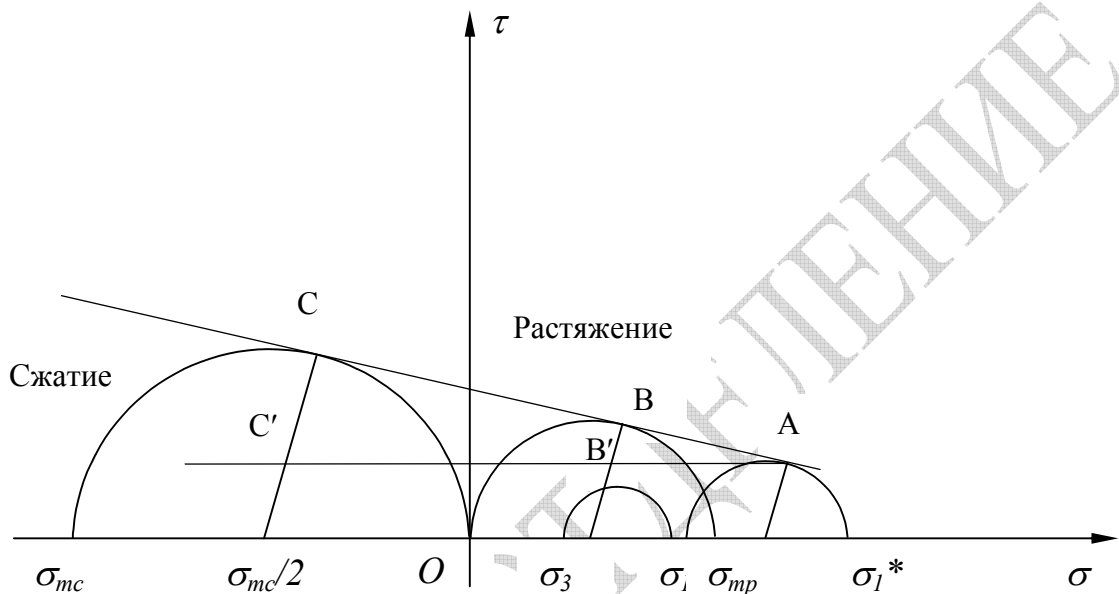


Рисунок 4.7

некоторое напряженное состояние, заданное наибольшим σ_1 и наименьшим σ_3 главными напряжениями. Ему соответствует круг Мора в координатах (σ, τ) . Увеличим компоненты этого напряженного состояния в n раз так, чтобы его круг Мора стал предельным. При этом главные напряжения примут значения:

$$\sigma_1^* = n\sigma_1 \quad \text{и} \quad \sigma_3^* = n\sigma_3. \quad (4.29)$$

Пусть этот предельный круг касается огибающей в точке А. Из точки А проведем горизонтальную прямую АВ'С' (см. рис. 4.7). В силу подобия треугольников АВ'В и АСС' можем записать:

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{AB'}{AC'}.$$

Отрезок BB' представляет собой разность радиусов предельных кругов при растяжении и при напряженном состоянии с главными

напряжениями σ_1^* и σ_3^* . Отрезок CC' также является разностью радиусов предельных кругов при сжатии и круга, построенного на напряжениях σ_1^* и σ_3^* . Поэтому длины всех отрезков, входящих в пропорцию, могут быть выражены через предельные напряжения при растяжении и сжатии. В качестве таковых применительно к пластичным материалам должны быть выбраны пределы текучести σ_{mp} и σ_{mc} . Из рис. 4.7 видно, что выражения для длин отрезков запишутся следующим образом:

$$BB' = \frac{\sigma_{mp}}{2} - \frac{\sigma_1^* - \sigma_3^*}{2}; \quad CC' = \frac{\sigma_{mc}}{2} - \frac{\sigma_1^* - \sigma_3^*}{2};$$

$$AB' = \frac{\sigma_1^* + \sigma_3^*}{2} - \frac{\sigma_{mp}}{2}; \quad AC' = \frac{\sigma_1^* + \sigma_3^*}{2} + \frac{\sigma_{mc}}{2}.$$

Подставляя эти выражения в предыдущую пропорцию, после несложных преобразований получим:

$$\sigma_{mp} = \sigma_1^* - \frac{\sigma_{mp}}{\sigma_{mc}} \sigma_3^* \quad \text{или} \quad \frac{\sigma_{mp}}{n} = \sigma_1^* - \frac{\sigma_{mp}}{\sigma_{mc}} \sigma_3^*. \quad (4.30)$$

Коэффициент n в (4.29) показывает, во сколько раз напряжения при заданном напряженном состоянии меньше, чем напряжения в предельном состоянии. Поэтому его можно рассматривать как коэффициент запаса прочности. Тогда в левой части второго соотношения стоит допускаемое напряжение $[\sigma]$ при растяжении, а правую часть в соответствии с определением эквивалентного напряжения можно воспринимать как $\sigma_{эке}$ для объемного напряженного состояния. Если отношение предела текучести при растяжении к пределу текучести при сжатии обозначить через m , то выражение для эквивалентного напряжения в рамках теории прочности Мора примет вид:

$$\sigma_{эке} = \sigma_1 - m \sigma_3. \quad (4.31)$$

Из этого выражения видно, что теория прочности Мора в качестве частных случаев включает первые три теории прочности. Действительно, при $m = 0$ приходим к соотношению (4.25) – I теория прочности; при $m = \mu$ – к выражению (4.26) без учета σ_2 – II теория прочности и, наконец, при $m = 1$ – к выражению (4.27) – III теория прочности. Последнее имеет место в том случае, когда материал имеет при растяжении и сжатии одинаковые пределы текучести.

Основной недостаток теории прочности Мора связан с недостаточной точностью определения огибающей для совокупности предельных кругов. Кроме того, эта теория не учитывает влияние второго главного напряжения.

4.8. Контрольные вопросы

1. Какое напряженное состояние называется плоским?
2. Как найти положение главных площадок и напряжения, действующие на них?
3. В чем состоят прямая и обратная задачи анализа плоского напряженного состояния?
4. Что такое круговая диаграмма напряженного состояния?
5. Как строится круг Мора, и какой смысл имеют точки этого круга?
6. Как с помощью круга Мора решаются прямая и обратная задачи анализа напряженного состояния материала?
7. Сформулируйте обобщенный закон Гука. Что постулирует этот закон?
8. Как связаны объемная деформация и напряжения, действующие в материале?
9. В каких пределах лежат численные значения коэффициента Пуассона для реальных материалов?
10. Чему равна удельная потенциальная энергия упругой деформации? Из каких слагаемых она складывается?
11. Что такое предельное состояние материала?
12. Что понимается под эквивалентным напряжением? Как используется это понятие при формулировке условий прочности в условиях объемного напряженного состояния?
13. Сформулируйте первую гипотезу прочности.
14. Что постулирует вторая гипотеза прочности?
15. При каких условиях в материале наступает предельное состояние в рамках третьей гипотезы прочности?
16. Сформулируйте четвертую гипотезу прочности.
17. В чем состоят основные положения теории прочности Мора?
18. Как связаны гипотезы прочности и теория прочности Мора?

Глава 5. Напряжения, деформации и перемещения при изгибе, кручении и сдвиге

5.1. Геометрические характеристики плоских фигур

Вернемся к анализу простых видов деформации стержней. Пока что рассмотрен лишь один простой вид (глава 3) – растяжение (сжатие). При анализе этого вида деформации было установлено, что напряжения и деформации, возникающие в материале, а также перемещения отдельных точек стержня зависят не только от действующих нагрузок, но и от величины площади поперечного сечения. Интуитивно ясно, что при других видах деформации (кручении, изгибе, сдвиге) стержни с различной геометрией поперечного сечения при одних и тех же нагрузках будут вести себя по-разному. При растяжении влияние геометрии поперечного сечения отражалось через его площадь. При кручении, изгибе и сдвиге в расчетные соотношения для напряжений, деформаций и перемещений входят другие геометрические характеристики поперечного сечения, которые рассмотрим в этом подразделе.

Пусть задана некоторая плоская фигура (рис. 5.1), обладающая конфигурацией и размерами поперечного сечения стержня. Введем систему координат Oxy и рассмотрим интеграл вида:

$$\mathfrak{I} = \iint_A x^a y^b dA, \quad (5.1)$$

где a и b – целые неотрицательные числа, а интегрирование ведется

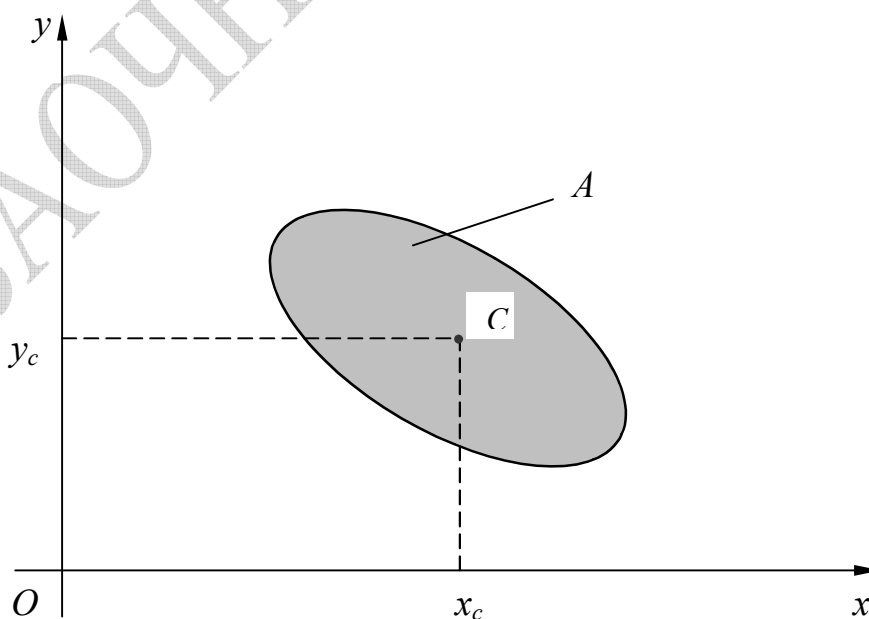


Рисунок 5.1.

по всей площади плоской фигуры. Величина \mathfrak{S} , определяемая соотношением (5.1), называется **моментом плоской фигуры относительно координатных осей** Ox и Oy . Сумма m показателей a и b носит название степени момента: $m = a + b$. Наиболее важными в сопротивлении материалов являются моменты, степень которых не превышает двух.

Момент нулевой степени (оба показателя a и b равны нулю)

$$\mathfrak{S} = \iint_A dA = A$$

равен площади плоской фигуры. Моментов первой степени можно составить два: когда $a = 1$ и $b = 0$ либо когда $a = 0$ и $b = 1$. Они имеют вид:

$$S_y = \iint_A x dA \quad \text{и} \quad S_x = \iint_A y dA \quad (5.2)$$

Величина S_y называется **статическим моментом плоской фигуры относительно оси** Oy , а величина S_x – статическим моментом этой фигуры относительно оси Ox . Из определения видно, что численное значение статического момента зависит от размера и формы фигуры, а также от положения оси, относительно которой он вычисляется. Размерность статических моментов m^3 . Они позволяют определить координаты центра тяжести плоской фигуры посредством равенств:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{1}{A} \iint_A x dA ; \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{1}{A} \iint_A y dA \quad (5.3)$$

Эти равенства позволяют найти положение центра тяжести фигуры, если известны статические моменты, или, наоборот, найти статические моменты при известном положении центра тяжести.

Статические моменты обладают следующими свойствами:

1. Статический момент составной фигуры относительно любой оси равен сумме статических моментов ее частей относительно этой же оси. Это свойство вытекает из аддитивности операции интегрирования.
2. Статический момент относительно любой оси, проходящей через центр тяжести фигуры, равен нулю. Данное свойство является следствием определения (5.3) статических моментов. Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется **центральной**.

3. Статический момент относительно оси симметрии плоской фигуры равен нулю. Это свойство выполняется в силу того, что под интегралом в (5.3) стоит нечетная функция. Таким образом, ось симметрии всегда проходит через центр тяжести фигуры.

Моментов второй степени можно составить три (при $a = 2$ и $b = 0$, при $a = 1$ и $b = 1$, при $a = 0$ и $b = 2$):

$$I_x = \iint_A y^2 dA, \quad I_y = \iint_A x^2 dA, \quad I_{xy} = \iint_A xy dA. \quad (5.4)$$

Величины I_x и I_y называются **моментами инерции плоской фигуры относительно осей** Ox и Oy соответственно. Величина I_{xy} носит название **центробежного момента инерции**. Размерность моментов инерции m^4 . Как выяснится позднее, моменты инерции представляют собой важнейшие геометрические характеристики поперечных сечений стержней.

Из определений (5.4) видно, что моменты инерции I_x и I_y всегда положительны, тогда как центробежный момент инерции I_{xy} может принимать как положительные так и отрицательные значения.

Рассмотрим сумму моментов инерции I_x и I_y и учтем, что величина $x^2 + y^2 = r^2$ равна квадрату расстояния до начала координат:

$$I_p = I_x + I_y = \iint_A (x^2 + y^2) dA = \iint_A r^2 dA. \quad (5.5)$$

Величина I_p является еще одной геометрической характеристикой плоской фигуры, которая называется **полярным моментом инерции**. Она также может принимать только положительные значения.

Моменты инерции, так же как и статические моменты, обладают свойством аддитивности, т. е. момент инерции составной фигуры равен сумме моментов инерции всех ее частей. Численные значения моментов инерции также зависят как от формы и размера фигуры, так и от расположения осей, относительно которых они вычисляются. Те оси координат, относительно которых центробежный момент инерции обращается в нуль, называются **главными осями инерции**. Моменты инерции I_x и I_y , вычисленные относительно главных осей, носят название **главных моментов инерции**.

При переходе к другой системе координат значения всех моментов инерции изменяются. Исключение составляет только полярный момент инерции I_p , который остается постоянным при повороте координатных осей. Выясним, как связаны значения моментов инерции относительно центральных осей и относительно произвольных осей, им параллельных. Пусть оси Sx и Sy –

центральные (точка C совпадает с центром тяжести плоской фигуры), а оси Ox' и Oy' параллельны им и отстоят от них на расстояния a и b соответственно. Координаты точки в системах координат S_{xy} и $Ox'y'$, очевидно, связаны между собой равенствами: $x' = x + b$, $y' = y + a$. Момент инерции некоторой фигуры относительно оси Ox' равен:

$$I_{x'} = \iint_A (y')^2 dA = \iint_A (y + a)^2 dA = \iint_A (y^2 + 2ay + a^2) dA =$$

$$= \iint_A y^2 dA + 2a \iint_A y dA + a^2 \iint_A dA.$$

Первый интеграл в правой части равенства представляет собой момент инерции I_x относительно оси Sx , второй интеграл – статический момент, равный нулю в силу свойства 2, и третий интеграл – площадь фигуры A . Следовательно, моменты инерции относительно оси Sx и оси Ox' связаны соотношением:

$$I_{x'} = I_x + A a^2. \quad (5.6)$$

Таким образом, момент инерции относительно любой оси, параллельной центральной, равен сумме момента инерции относительно центральной оси и произведения площади фигуры на квадрат расстояния между осями. Для других моментов инерции нетрудно получить аналогичные равенства:

$$I_{y'} = I_y + A b^2 \quad \text{и} \quad I_{x'y'} = I_{xy} + A a b. \quad (5.6')$$

Полученные равенства позволяют сделать важный вывод: *из всех моментов инерции относительно параллельных осей наименьшее значение имеет момент относительно центральной оси (центральный момент).*

Теперь рассмотрим вопрос, как изменяется момент инерции при повороте координатных осей. Пусть имеется две системы координат Oxy и $Ox'y'$ с общим началом и углом α между соответствующими осями (рис. 5.2). Будем считать, что моменты инерции I_x , I_y и I_{xy} относительно осей Ox и Oy заданной плоской фигуры известны. Найдем моменты инерции этой фигуры относительно осей Ox' и Oy' .

Прежде всего установим связь между координатами некоторой точки B в обеих системах координат. Несложные геометрические построения позволяют записать:

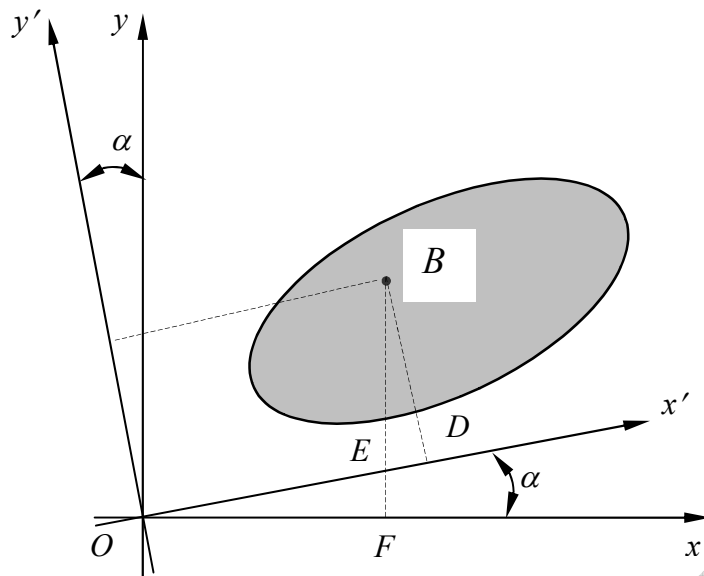


Рисунок 5.2.

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha .$$

$$y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha .$$

Используя эти представления, вычислим момент инерции $I_{x'}$:

$$I_{x'} = \iint_A y'^2 dA = \iint_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \iint_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \iint_A x^2 dA -$$

$$- \sin 2\alpha \iint_A xy dA = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha .$$

Точно так же для $I_{y'}$ получим:

$$I_{y'} = I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha .$$

Складывая предыдущие равенства, убеждаемся, что при повороте координатных осей сумма моментов инерции, равная полярному моменту инерции, остается постоянной:

$$I_{x'} + I_{y'} = I_p = I_x + I_y = inv .$$

Для центробежного момента инерции $I_{x'y'}$ после аналогичных преобразований получим:

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\sin 2\alpha - I_{xy} \cos 2\alpha .$$

Это соотношение дает возможность определить положение главных осей инерции. Поскольку для главных осей центробежный момент инерции равен нулю, из последнего соотношения получаем:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} . \quad (5.7)$$

Из этого соотношения определяется угол α между главными осями и осями координат, относительно которых известны моменты инерции I_x , I_y и I_{xy} .

Главные оси инерции обладают еще одним важным свойством. Оказывается, что относительно главных осей моменты инерции достигают своих экстремальных значений. Причем один из них имеет максимум, а другой – минимум.

Найдем главные моменты инерции простейших плоских фигур, пользуясь их определением (5.4).

Прямоугольник со сторонами b и h (рис. 5.3). Оси координат проходят через центр тяжести прямоугольника C и совпадают с осями симметрии. Выделим элемент прямоугольника с основанием b и высотой dy . Его площадь, очевидно, равна $dA = b dy$. Тогда момент инерции относительно оси Sx найдется в результате несложных вычислений:

$$I_x = \iint_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} by^2 dy = \frac{bh^3}{12} .$$

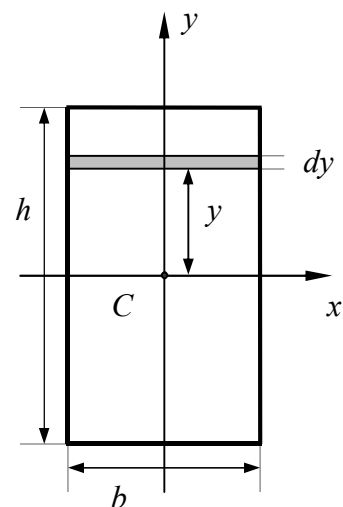


Рисунок 5.3

Круг диаметром d . Оси координат проходят через центр круга. Из соображений симметрии ясно, что моменты инерции относительно осей Sx и Sy совпадают и в силу (5.5) равны половине полярного момента инерции. Поэтому целесообразно вычислить последний. При этом воспользуемся полярными координатами:

$$I_p = \iint_A r^2 dA = \iint_A r^2 \cdot r d\varphi dr = \frac{\pi d^4}{32} .$$

Следовательно,

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_p = \frac{\pi d^4}{64} .$$

Кольцо с внутренним диаметром d_v и наружным диаметром d_n . Все вычисления повторяют предыдущий случай, только нижний предел интегрирования по r будет другим. В итоге приходим к следующему результату:

$$I_x = I_y = \frac{\pi d_n^4}{64} (1 - \alpha^4),$$

где $\alpha = d_v / d_n$ – отношение внутреннего и наружного диаметров кольца.

5.2. Кручение прямолинейного стержня круглого поперечного сечения

При кручении в поперечных сечениях стержня (вала) действует один внутренний силовой фактор – крутящий момент. Метод сечений, изложенный в главе 2, позволяет определить, как крутящий момент меняется вдоль оси вала. Деформации материала, возникающие при кручении, приводят к повороту одного поперечного сечения относительно другого на некоторый угол, который называется **углом закручивания**. В настоящем параграфе будут выведены расчетные соотношения для напряжений и перемещений при кручении, позволяющих сформулировать условия прочности и жесткости при этом виде деформации стержней.

Рассмотрим элемент вала, ограниченный двумя поперечными сечениями, отстоящими друг от друга на расстоянии dx , и цилиндрическим сечением радиуса r (рис. 5.4). Под действием скручивающего момента T сечение 2 повернется относительно сечения 1 на некоторый угол $d\varphi$. При этом точка b переместится в положение b' . Длина дуги bb' с одной стороны может быть выражена через угол $d\varphi$, а с другой - через угол γ . В первом случае $bb' = r d\varphi$, а во втором $bb' = dx \operatorname{tg} \gamma$. Угол γ , как следует из определения (1.2), есть не что иное, как угол сдвига, характеризующий угловую деформацию материала. В силу малости деформаций $\operatorname{tg} \gamma$ без потери точности можно заменить его аргументом. Тогда имеем:

$$r d\varphi = dx \gamma \quad \text{или} \quad \gamma = r \frac{d\varphi}{dx} = r\Phi$$

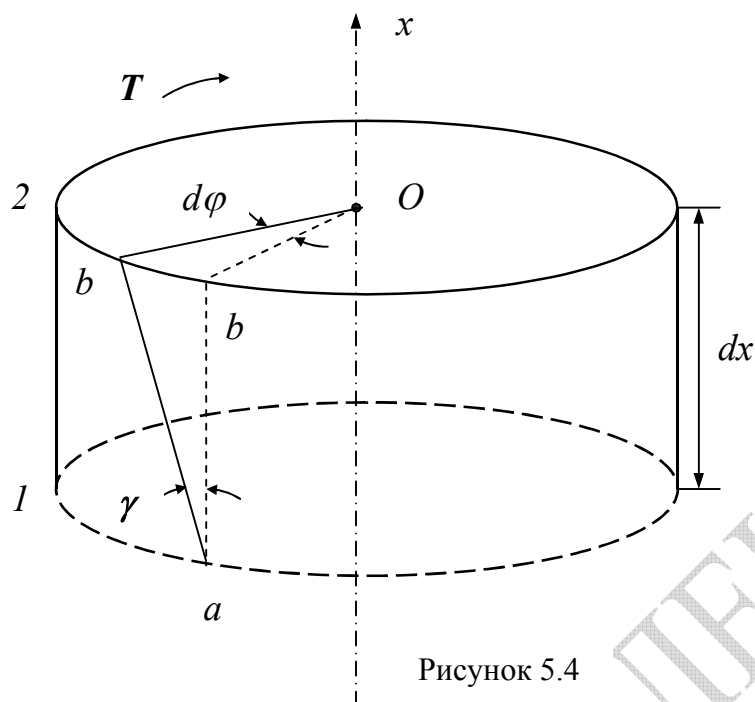


Рисунок 5.4

где Φ - относительный угол закручивания (угол закручивания, приходящийся на единицу длины вала).

Закон Гука при сдвиге (3.13) позволяет связать угловую деформацию и касательные напряжения в материале:

$$\tau = G r \Phi. \quad (5.8)$$

Здесь G – модуль сдвига, который определяется соотношением (3.14). Из полученного выражения для напряжений следует, что они не одинаковы в различных точках поперечного сечения, как это было при растяжении. В центре сечения касательные напряжения невелики, увеличиваются с увеличением расстояния до оси вала и достигают максимальных значений на периферии сечения.

Ранее отмечалось, что напряжения в материале распределяются таким образом, чтобы в точности уравновесить внешние нагрузки. В данном случае скручивающий момент T уравновешивается совокупным действием касательных напряжений в сечении. Если выделить элементарную площадку dA , то сила, обусловленная напряжениями на этой площадке, равна τdA , а создаваемый ею элементарный момент относительно оси вала - $r \tau dA$, где r - расстояние от площадки dA до оси вала. Суммарное действие всех элементарных моментов уравновешивает скручивающий момент T . Поэтому приходим к равенству:

$$T = \iint_A r \tau dA .$$

Подставим сюда правую часть (5.8), учтем соотношение (5.5) для полярного момента и вынесем за знак интегрирования произведение $G\Phi$, постоянное во всех точках сечения. В результате получим следующее равенство:

$$\Phi = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p} , \quad (5.9)$$

позволяющее вычислить относительный угол закручивания при известном значении внутреннего крутящего момента в данном сечении, модуле сдвига и полярном моменте инерции. Произведение GI_p называется **жесткостью стержня при кручении**. Чем больше значение жесткости, тем меньше деформации и перемещения.

Полный угол закручивания участка вала длиной L получим, интегрируя (5.9) по длине участка:

$$\varphi = \int_0^L \frac{T}{GI_p} dx . \quad (5.10)$$

Это выражение учитывает, очевидно, возможность изменения внутреннего крутящего момента вдоль оси стержня, а также его жесткости. При постоянных значениях указанных величин выражение (5.10) упрощается:

$$\varphi = \frac{TL}{GI_p} . \quad (5.11)$$

Чтобы получить расчетное соотношение для напряжений подставим правую часть (5.9) в (5.8). В результате получим:

$$\tau = Gr \frac{T}{GI_p} = \frac{rT}{I_p} . \quad (5.12)$$

Таким образом, *напряжения при кручении пропорциональны расстоянию до оси вала, величине внутреннего крутящего момента и обратно пропорциональны полярному моменту инерции.*

Потенциальная энергия упругой деформации при кручении может быть вычислена на основе соображений аналогичных тем, которые

были высказаны в параграфе 3.4 при анализе растяжения. Потенциальная энергия dU в элементе вала длиной dx равна работе, совершаемой скручивающим моментом T на перемещении $d\varphi$: $dU = \frac{1}{2} T d\varphi$. Это соотношение аналогично соотношению (3.15) для растягивающей силы. С учетом (5.9) его можно записать в виде:

$$dU = \frac{T^2 dx}{2GI_p} \quad (5.13)$$

Величина полной потенциальной энергии в стержне длиной L найдется путем интегрирования предыдущего выражения:

$$U = \int_0^L \frac{T^2 dx}{2GI_p} \quad (5.14)$$

Полученные соотношения позволяют сформулировать условия прочности и жесткости при кручении. Условие прочности состоит в требовании, чтобы максимальные касательные напряжения не превосходили допустимого значения $[\tau]$, которое для конструкционных материалов является справочной величиной и обычно составляет около половины допустимого нормального напряжения при растяжении $[\sigma]$. Максимальное значение напряжения, как следует из (5.12), достигается в том сечении, где действует наибольший крутящий момент T_{max} , при $r = r_{max} = d/2$ (d – диаметр вала). Следовательно, условие прочности сводится к выполнению неравенства:

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} d}{2I_p} = \frac{T_{max}}{W_p} \leq [\tau] \quad (5.15)$$

Здесь $W_p = 2I_p/d$ – **полярный момент сопротивления** поперечного сечения, еще одна его геометрическая характеристика. Для круглого сечения $W_p = \pi d^3 / 16$.

Условие жесткости выражается в требовании, чтобы максимальные значения относительных углов закручивания не превосходили допустимой величины: $\Phi_{max} \leq [\Phi]$. Последняя для разных типов оборудования различна и, как правило, устанавливается на основе опыта эксплуатации. Например, для валов допустимый относительный угол закручивания принимается в пределах $(0,5 \div 3,5) \cdot 10^{-2}$ рад/м.

5.3. Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня при изгибе

При изгибе в поперечных сечениях стержня действует изгибающий момент. Если все другие внутренние силовые факторы равны нулю, то изгиб называется чистым. Если совместно с изгибающим моментом не равна нулю и поперечная сила, то такой вид деформации называют **поперечным изгибом**. Стержень, работающий на изгиб, принято называть **балкой**.

Пусть имеется балка с заданным поперечным сечением. Введем систему координат следующим образом. Ось Ox направим вдоль оси балки, а оси Oy и Oz – вдоль главных осей инерции поперечного сечения.

Плоскость, проходящая через ось балки и одну из главных центральных осей инерции поперечного сечения, называется **главной плоскостью стержня**. Если все внешние силы лежат в одной из главных плоскостей стержня, то изгиб, вызванный действием этих сил, называют **плоским изгибом**.

Выясним, какие напряжения возникают в стержне, подверженном плоскому чистому изгибу. На рис. 5.5 показан элемент стержня, испытывающий чистый изгиб. Под действием изгибающих моментов ось балки приобретает кривизну, которая количественно характеризуется локальным значением радиуса кривизны r . Нетрудно видеть, что на выпуклой стороне балки материал испытывает удлинение, тогда как на вогнутой – сжатие. Следовательно, в центре балки находится слой материала, который не подвергается ни сжатию, ни удлинению. Этот слой называется **нейтральным слоем**.

Выведем соотношения для расчета напряжений в материале исходя из следующих допущений:

- возникающие в материале деформации малы и подчиняются закону Гука;
- справедлива так называемая гипотеза плоских сечений, согласно которой поперечные сечения остаются плоскими после деформации

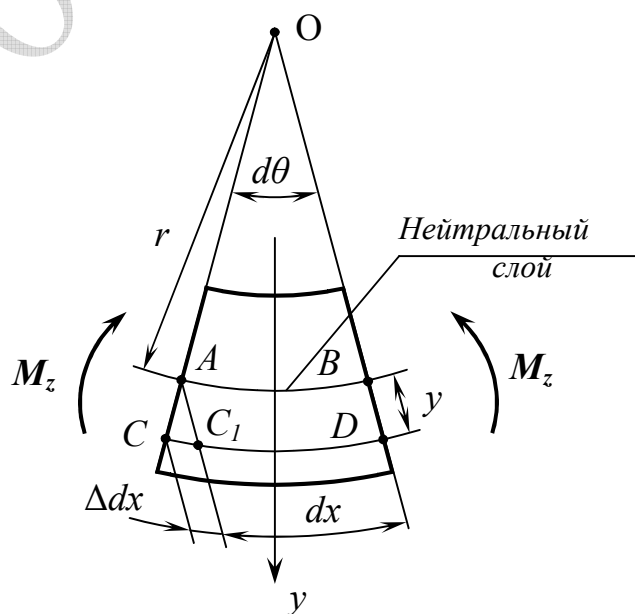


Рисунок 5.5

- стержня, поворачиваясь относительно оси, перпендикулярной плоскости действия внешних нагрузок, на некоторый угол;
- слои материала параллельные нейтральному слою не оказывают друг на друга давления (нормальные напряжения в этих плоскостях отсутствуют);
- нормальные напряжения в поперечных сечениях распределены равномерно по ширине балки.

Оценим величину деформаций при изгибе. Для этого рассмотрим отрезок CD , параллельный оси балки и лежащий на расстоянии y от нейтрального слоя (рис. 5.5). До нагружения изгибающим моментом длина отрезка CD равнялась длине отрезка AB на оси балки, которую можно выразить через радиус кривизны оси балки r и угол $d\theta$: $CD = AB = r \cdot d\theta$. После нагружения длина отрезка CD стала равной $(r + y) d\theta$. Следовательно, относительное удлинение отрезка CD оценивается величиной:

$$\varepsilon_{CD} = \frac{(r + y)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{y}{r}$$

Отсюда видно, что величина деформации при изгибе увеличивается с расстоянием до нейтрального слоя, меняет знак при переходе через слой и пропорциональна кривизне изогнутой оси балки.

Полученное выражение для относительной линейной деформации подставим в закон Гука при растяжении (3.5). Получим следующую связь напряжений с кривизной оси стержня:

$$\sigma(y) = E \varepsilon_{CD} = E \frac{y}{r} \quad (5.16)$$

Воспользоваться полученными формулами для расчета деформаций и напряжений нельзя, поскольку не известна зависимость кривизны $1/r$ от величины изгибающего момента. Получим ее. Для этого рассмотрим поперечное сечение балки и действующие в нем напряжения. Выделим в сечении малую площадку dA , находящуюся на расстоянии y от нейтрального слоя. Нормальные напряжения, действующие на этой площадке, создают момент относительно **нейтральной оси**, которой называется линия пересечения данного сечения с нейтральным слоем. Величина этого элементарного момента, очевидно, равна $\sigma dA y$. Результирующий момент всех нормальных напряжений, действующих в сечении, может быть получен путем интегрирования элементарного момента по всему сечению. С другой стороны, согласно (2.12), он равен величине

изгибающего момента M_z в этом сечении. Следовательно, с учетом (5.16) имеем:

$$M_z = \iint_A y E \frac{y}{r} dA = \frac{E}{r} \iint_A y^2 dA$$

Интеграл, стоящий в правой части полученного равенства, согласно определению (5.4) представляет собой момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси. С учетом этого получим следующее выражение для кривизны изогнутой оси балки:

$$\frac{1}{r} = \frac{M_z}{E I_z} \quad (5.17)$$

Таким образом, кривизна оси балки пропорциональна величине изгибающего момента в данном поперечном сечении и обратно пропорциональна произведению $E I_z$, которое называется **жесткостью стержня при изгибе** (аналогично жесткости $E A$ при растяжении и жесткости $G I_p$ при кручении). Поскольку изгибающий момент может меняться по длине балки, меняется и ее кривизна.

Подставив соотношение (5.17) в формулу (5.16), получим выражение для расчета нормальных напряжений в поперечном сечении стержня:

$$\sigma(y) = \frac{M_z y}{I_z}. \quad (5.18)$$

Это соотношение носит название **формулы Навье**. Оно позволяет провести простой анализ распределения напряжений в сечении. На нейтральной оси сечения при $y = 0$ напряжения равны нулю, малы по абсолютной величине в центре сечения (при малых значениях y) и достигают наибольших значений на периферии сечения. Следствием столь неравномерной картины напряжений послужило то, что на практике широко применяются балки с поперечным сечением специального профиля (двутавра, швеллера, уголка). У таких профилей основное количество металла сосредоточено на периферии сечения (в области больших напряжений), что позволяет значительно снизить металлоемкость конструкций.

Формула Навье дает возможность сформулировать условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе. Как обычно, оно состоит в требовании, чтобы максимальные напряжения не превосходили допускаемых значений. Максимальные нормальные напряжения возникнут, очевидно, в том сечении, где действует

наибольший изгибающий момент, и в тех точках этого сечения, которые находятся на максимальном удалении от нейтрального слоя. Следовательно, условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max} y_{\max}}{I_z} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (5.19)$$

Здесь W_z – **момент сопротивления сечения** относительно нейтральной оси (аналогично W_p при кручении).

Иногда при проверке условий прочности по нормальным напряжениям приходится учитывать, что при изгибе одна часть материала испытывает растяжение, а другая – сжатие. Для большинства материалов значения допускаемых напряжений при сжатии $[\sigma]_{сж}$ и растяжении $[\sigma]_p$ различны. В этих случаях условие (5.19) распадается на два: $\sigma_{\min} \geq [\sigma]_{сж}$ и $\sigma_{\max} \leq [\sigma]_p$. В первом из этих неравенств учтено, что при сжатии напряжения отрицательны.

5.4. Касательные напряжения при плоском поперечном изгибе

При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки кроме изгибающего момента действует поперечная сила. Согласно (2.10) ее величина определяется совокупным действием в поперечных сечениях касательных напряжений. Для вывода расчетного соотношения, позволяющего оценить касательные напряжения, рассмотрим балку прямоугольного сечения со сторонами b и h . Выделим элемент такой балки толщиной dx .

Проведем сечение параллельное нейтральному слою на расстоянии y от него и составим уравнение равновесия для элементарного параллелепипеда со сторонами $\frac{h}{2} - y$, b и dx (рис. 5.6).

На гранях выделенного параллелепипеда действуют нормальные и касательные напряжения. Нормальные напряжения на боковых гранях равны σ и $\sigma + d\sigma$, величина которых определяется значениями изгибающего момента M и $M + dM$ в соответствующих сечениях. На боковых

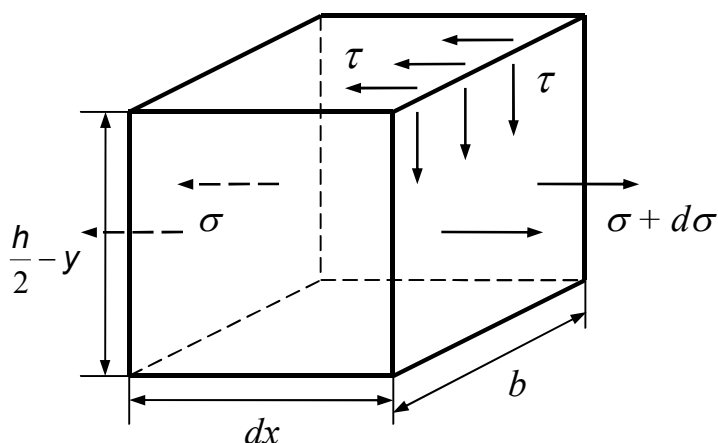


Рисунок 5.6

гранях действуют также искомые касательные напряжения τ . По закону парности касательных напряжений такие же по величине τ будут действовать на верхней грани параллельной нейтральному слою. Составим уравнение равновесия элементарного параллелепипеда в проекциях на продольную ось балки (ось Ox), считая, что распределение нормальных напряжений подчиняется формуле Навье (5.18), а касательные напряжения распределены равномерно по ширине сечения. При этом нужно иметь в виду, что на нижней грани касательные напряжения отсутствуют, поскольку силового взаимодействия поверхностных слоев балки с ее окружением нет.

С учетом сказанного уравнение равновесия будет иметь вид:

$$\iint_{A_1} (\sigma + d\sigma) dA_1 - \iint_{A_1} \sigma dA_1 - \tau b dx = 0.$$

Здесь A_1 – боковая грань выделенного параллелепипеда, т. е. часть поперечного сечения балки, расположенная ниже рассматриваемого слоя материала с координатой y . Для нормальных напряжений воспользуемся формулой Навье:

$$\iint_{A_1} \frac{(M + dM)y}{I_z} dA_1 - \iint_{A_1} \frac{My}{I_z} dA_1 - \tau b dx = 0.$$

После несложных преобразований приходим к равенству:

$$\frac{dM}{I_z} \iint_{A_1} y dA_1 - \tau b dx = 0.$$

Входящий в это равенство интеграл согласно определению (5.2) представляет собой статический момент относительно нейтральной оси части поперечного сечения, расположенной ниже рассматриваемого слоя материала. Выразим из последнего равенства касательное напряжение τ , учитывая связь между изгибающим

моментом и поперечной силой: $\frac{dM}{dx} = Q$ (формула (2.2)).

Окончательно получим:

$$\tau(y) = \frac{QS_z(y)}{b(y)I_z}. \quad (5.20)$$

Полученная формула называется **формулой Журавского** для касательных напряжений при плоском поперечном изгибе. Она позволяет найти распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения. Указанное распределение зависит от характера изменения статического момента $S_z(y)$ и ширины сечения $b(y)$ по его высоте, что отражено в формуле (5.20). В свою очередь характер изменения этих величин определяется профилем поперечного сечения.

Пользуясь формулой Журавского проанализируем распределение касательных напряжений для наиболее простого профиля – прямоугольника со сторонами b и h (рис. 5.7). Для такого профиля ширина b постоянна, а момент инерции вычислен в параграфе 5.1:

$$I_z = \frac{bh^3}{12}.$$

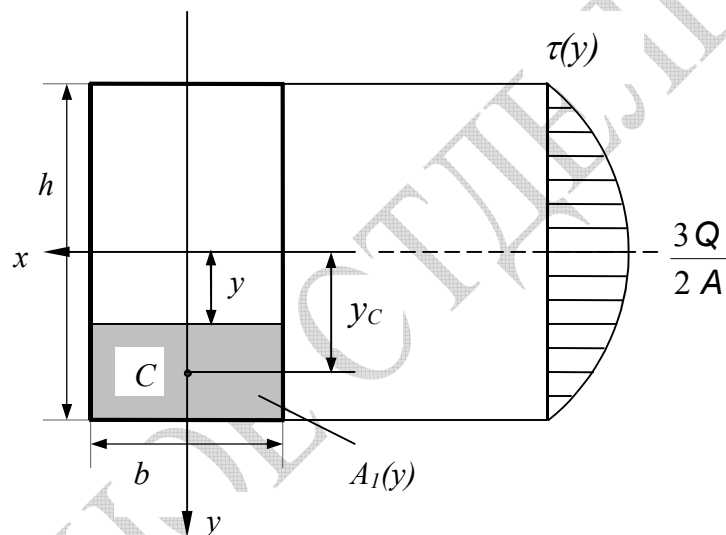


Рисунок 5.7

Найдем явный вид зависимости $S_z(y)$. Зафиксируем некоторое значение координаты y и выразим величину статического момента той части поперечного сечения, точки которой имеют большее значение этой координаты (на рисунке эта часть заштрихована). В данном случае удобно воспользоваться соотношением (5.3). Согласно ему искомый статический момент равен произведению площади A_1 на координату центра тяжести y_c . Очевидно, что

$$A_1 = b \left(\frac{h}{2} - y \right); \quad y_c = y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2} = \frac{y + \frac{h}{2}}{2}.$$

Следовательно, касательное напряжение зависит от координаты по параболическому закону:

$$\tau(y) = \frac{Q \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{2I_z} . \quad (5.21)$$

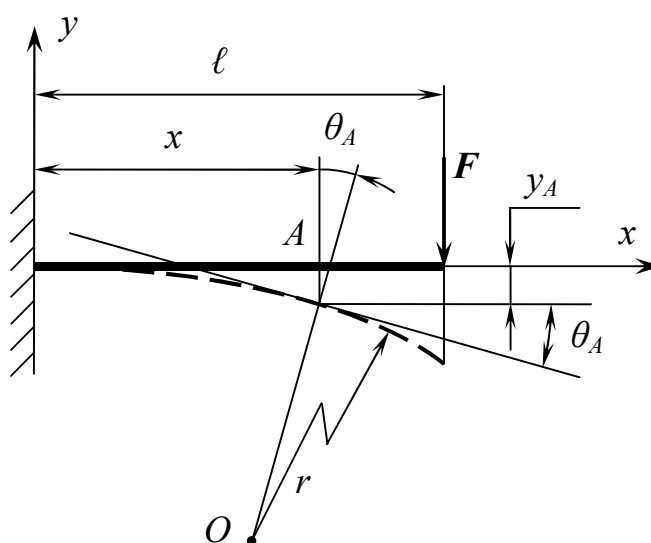
Зависимость $\tau(y)$ обычно иллюстрируется эпюрой (рис. 5.7), которая помещается рядом с профилем балки и позволяет легко узнать величину напряжения в каждой точке поперечного сечения. Нетрудно видеть, что максимальное значение касательного напряжения $3Q/2A$ достигается в нейтральном слое. Знак напряжения соответствует знаку поперечной силы.

5.5. Перемещения при изгибе

Формулы Навье (5.18) и Журавского (5.20) позволяют оценить величину нормальных и касательных напряжений в любой точке балки, подверженной изгибу. При этом формула (5.17) дает возможность рассчитать величину возникающих деформаций в терминах кривизны изогнутой оси балки. Однако, использовать последнюю формулу для практических расчетов неудобно, поскольку непосредственно измерять кривизну изогнутой оси балки довольно затруднительно. В силу этого при оценке жесткости балок вместо кривизны ее оси используются другие характеристики. Введем их.

Рассмотрим балку длиной l , нагруженную силой F (рис. 5.8). Под действием нагрузки центр тяжести каждого сечения переместится в главной плоскости балки Oxy .

Геометрическое место центров тяжести поперечных сечений деформированной балки называется **упругой линией балки**. Пусть центр тяжести некоторого сечения A , находящегося на расстоянии x от левого конца, переместится на величину y_A . Эта величина называется **прогибом** (линейным перемещением). Это же сечение при изгибе балки повернется на некоторый угол θ_A в плоскости Oxy . Он



характеризует угловое перемещение и называется **углом поворота сечения**. Обе характеристики – прогиб и угол поворота сечения – являются функциями продольной координаты x . В каждом сечении обе характеристики перемещений связаны между собой соотношением:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \theta(x). \quad (5.22)$$

Выведем формулы для расчета перемещений при заданных геометрических размерах балки и внешних нагрузках. Для этого преобразуем формулу (5.17) так, чтобы вместо кривизны она содержала только что рассмотренные характеристики. Воспользуемся известным из математики выражением для кривизны плоской кривой $y = y(x)$:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Углы поворота $\theta = \frac{dy}{dx}$ при эксплуатации химического оборудования по порядку величины не превышают 10^{-2} рад. Поэтому в знаменателе приведенного выражения вторым слагаемым можно пренебречь. Следовательно, кривизна изогнутой оси балки целиком определяется второй производной от прогиба:

$$\frac{1}{r} \approx \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (5.23)$$

Подставив правую часть этого равенства в (5.17), получим уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z} \quad \text{или} \quad EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = M_z(x), \quad (5.24)$$

которое называется **дифференциальным уравнением упругой линии балки** или **дифференциальным уравнением оси изогнутой балки**.

Проиллюстрируем применение этого уравнения при решении простой задачи. Пусть дана балка, нагруженная заданной сосредоточенной силой F (рис. 5.9). Кроме того, пусть известны

геометрические характеристики балки l и I_z , а также модуль продольной упругости E . Требуется определить характер изменения прогиба $y(x)$ по длине балки. Введем систему координат, совместив ее начало с левым концом балки. Тогда изгибающий момент в сечении с координатой x будет равен: $M_z(x) = -Fx$. Подставляя это выражение во второе уравнение (5.24) и интегрируя один раз, получим:

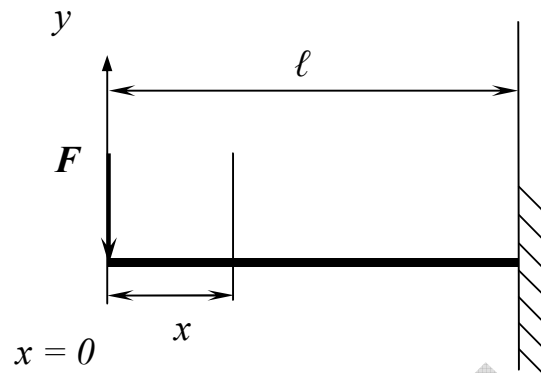


Рисунок 5.9

$$EI_z \frac{dy}{dx} = -\frac{Fx^2}{2} + C, \quad (5.25)$$

где C – постоянная интегрирования. Интегрируя вторично, приходим к кубической зависимости прогиба от продольной координаты:

$$EI_z y(x) = -\frac{Fx^3}{6} + Cx + D. \quad (5.26)$$

Постоянные интегрирования найдем из условий на правом конце балки.

На правом конце балки в жесткой заделке при $x = l$ равны нулю и прогиб, и угол поворота сечения. Подставляя $x = l$ в (5.25) и (5.26), имеем:

$$\theta(l) = \frac{dy}{dx} = -\frac{Fl^2}{2} + C = 0,$$

$$y(l) = -\frac{Fl^3}{6} + Cl + D = 0.$$

Из первого уравнения найдем значение константы C , а из второго – D :

$$C = \frac{Fl^2}{2}, \quad D = -\frac{Fl^3}{3}.$$

Следовательно, уравнение оси изогнутой балки будет иметь вид:

$$EI_z y(x) = -\frac{Fx^3}{6} + \frac{Fl^2}{2} - \frac{Fl^3}{3}. \quad (5.27)$$

Найдем прогиб и угол поворота крайнего левого сечения балки:

$$y(0) = -\frac{Fl^3}{3EI_z} \quad \text{и} \quad \theta(0) = \frac{Fl^2}{2EI_z}. \quad (5.28)$$

Рассмотрим теперь вопрос об интегрировании уравнения упругой линии балки (5.24) в общем случае. Пусть балка нагружена произвольным набором сосредоточенных моментов $\{M_i\}$, сосредоточенных сил $\{F_j\}$ и распределенных нагрузок $\{q_k\}$. Каждой внешней нагрузке соответствует координата сечения ее приложения, которая отсчитывается от левого конца балки (рис. 5.10). Для того

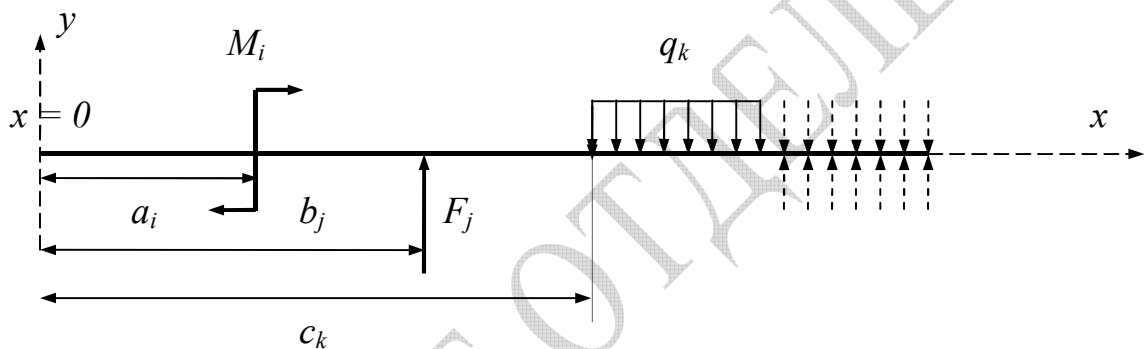


Рисунок 5.10

чтобы исключить из рассмотрения координаты сечений, в которых заканчивается действие распределенной нагрузки, применим следующий искусственный прием. Каждый участок с распределенной нагрузкой продлим до правого конца балки с приложением компенсирующей нагрузки (равной по величине, но противоположно направленной).

Рассмотрим сечение балки с некоторым фиксированным значением x . Согласно методу поперечных сечений, внутренний изгибающий момент $M_z(x)$ в рассматриваемом сечении, входящий в уравнение (5.24), должен иметь такую величину, которая уравнивает сумму моментов, обусловленную действием всех внешних нагрузок, приложенных к балке по левую или правую сторону от сечения. Следовательно, момент $M_z(x)$ равен алгебраической сумме моментов относительно данного сечения тех нагрузок, координата приложения которых меньше значения x (в том числе и компенсирующих):

$$M_z(x) = \sum_{a_i \leq x} M_i(x - a_i)^0 + \sum_{b_j \leq x} F_j(x - b_j) + \frac{1}{2} \sum_{c_k \leq x} q_k(x - c_k)^2.$$

Выбор знаков каждого слагаемого в этом выражении вытекает из вида дифференциального уравнения изогнутой оси балки (5.24). Согласно этому уравнению знак момента и второй производной от прогиба один и тот же. В свою очередь, как известно из математики, знак второй производной определяет направление кривизны плоской кривой. Следовательно, если некоторая внешняя нагрузка пытается изогнуть балку выпуклостью вверх, то соответствующее слагаемое берется со знаком минус (вторая производная меньше нуля). Если нагрузка пытается придать балке кривизну выпуклостью вниз (вторая производная положительна), то слагаемое берется со знаком плюс.

Подставим выражение для момента $M_z(x)$ в уравнение (5.24) и проинтегрируем один раз. Слева получим первую производную от прогиба, которая в силу (5.22) равна углу поворота сечения $\theta(x)$. Справа однократное интегрирование даст первообразную степенной функции:

$$EI_z \theta(x) = EI_z \theta_0 + \sum_{a_i \leq x} M_i(x - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{b_j \leq x} F_j(x - b_j)^2 + \frac{1}{6} \sum_{c_k \leq x} q(x - c_k)^3. \quad (5.29)$$

Здесь θ_0 – угол поворота сечения в начале координат. Полученное соотношение позволяет по заданным внешним усилиям рассчитать угол поворота θ для любого сечения.

Повторное интегрирование приведет к аналогичному соотношению для прогиба:

$$EI_z y(x) = EI_z y_0 + EI_z \theta_0 x + \frac{1}{2} \sum_{a_i \leq x} M_i(x - a_i)^2 + \frac{1}{6} \sum_{b_j \leq x} F_j(x - b_j)^3 + \frac{1}{24} \sum_{c_k \leq x} q(x - c_k)^4. \quad (5.30)$$

Величины $EI_z y_0$ и $EI_z \theta_0$ называются **начальными параметрами**. Они находятся из условия закрепления балки. В частности, если ее левый конец жестко зашпелен, то оба начальных параметра равны нулю.

Соотношения (5.29) и (5.30) называются **универсальными уравнениями упругой линии** балки, изогнутой заданными внешними нагрузками. Они лежат в основе расчетов на жесткость при изгибе. Условия жесткости при этом вытекают из ограничений на максимальные перемещения:

$$y_{max} \leq [y]; \quad \theta_{max} \leq [\theta] \quad (5.31)$$

Величины допускаемых прогибов $[y]$ и углов поворота $[\theta]$ принимаются в соответствии со справочной литературой или нормами, основанными на опыте эксплуатации данного класса оборудования. Так, для валов перемешивающих устройств в аппаратах, работающих при повышенном давлении, прогиб вала на участке сальникового уплотнения не должен превышать $[y] = 0.5$ мм для обеспечения герметичности. Допускаемое значение угла поворота $[\theta]$ при установке вала в подшипниках качения не должно превосходить 0.01 рад., а при установке в подшипниках скольжения 0.001 рад. Бо́льшие значения углов поворота приведут к резкому сокращению сроков службы деталей подшипников.

5.6. Напряжения при сдвиге

Сдвигом называется деформация стержня, в поперечных сечениях которого действует только поперечная сила Q , а изгибающий момент пренебрежимо мал. Рассмотрим картину силового нагружения стержня, приводящую к сдвигу (рис. 5.11). Пусть две равные по величине, но противоположно направленные силы F действуют в поперечных сечениях стержня, расстояние между которыми dx . Такая картина нагружения возникает, например, при операции резания металлических листов или прутьев.

В сечении I-I действует внутренняя поперечная сила $Q = F$ и изгибающий момент приблизительно равный $F dx / 2$. Напряжения в материале и поперечная сила связаны соотношением (2.10):

$$Q = \iint_A \tau dA .$$

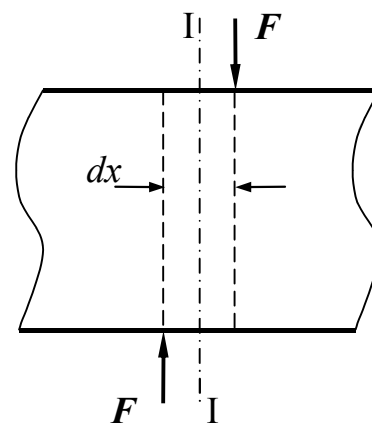


Рисунок 5.11

Предполагая, что касательные напряжения распределены в сечении равномерно, получаем:

$$Q = \tau A \quad \text{или} \quad \tau = Q / A. \quad (5.32)$$

Эта формула может служить основой расчета на прочность при сдвиге. При этом условие прочности состоит в требовании, чтобы максимальные значения касательных напряжений не превосходили допускаемой величины: $\tau_{max} \leq [\tau]$.

Сдвиг приводит к появлению угловых деформаций в материале. Действительно, если увеличивать силу F , то прямые углы

элементарного параллелепипеда толщиной dx сначала перекашиваются, а затем происходит срез стержня по некоторому среднему сечению. Таким образом, деформация при сдвиге состоит во взаимном смещении близлежащих поперечных сечений относительно друг друга.

Ранее отмечалось (параграф 4.1), что напряженное состояние сдвига может возникнуть и в более общем случае нагружения. Например, когда на элемент стержня одновременно действуют сжимающие и растягивающие усилия во взаимно перпендикулярных направлениях. В этом случае напряжения на различно ориентированных площадках определяются формулами (4.2) и (4.3):

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha ; \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha ,$$

где α - угол наклона площадки к первой главной площадке. Указанное напряженное состояние будет плоским, поскольку $\sigma_2 = 0$. Если главные напряжения σ_1 и σ_3 по абсолютной величине равны друг другу, то из приведенных формул следует, что при $\alpha = 45^{\circ}$ и $\alpha = 135^{\circ}$ нормальное напряжение обращается в нуль, а касательное напряжение $\tau_{\alpha} = \sigma_1$. Такое напряженное состояние элементарного объема материала, когда на его гранях действуют только касательные напряжения, называется чистым сдвигом.

Под действием касательных напряжений верхняя грань выделенного элемента сдвинется относительно нижней грани на расстояние Δ (рис. 5.12). Эта величина называется **абсолютным сдвигом**. Отношение $\Delta / dy = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$, которое является мерой угловой деформации материала, носит название **относительного сдвига**. В области упругих деформаций напряжения τ и деформации γ связаны законом Гука: $\tau = G \gamma$.

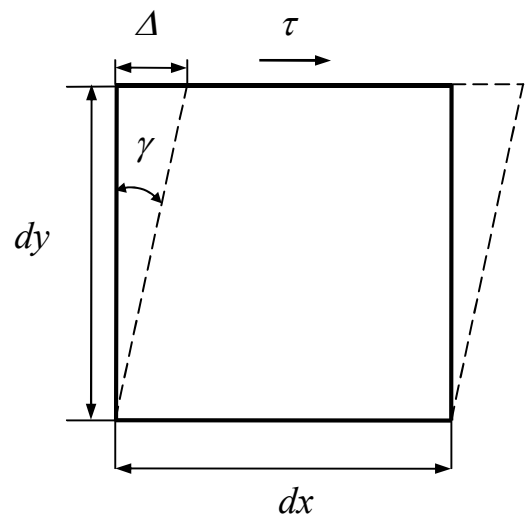


Рисунок 5.12

Найдем потенциальную энергию упругой деформации при чистом сдвиге. Пусть δ - толщина выделенного элемента. Тогда произведение $\tau \delta dx$ представляет собой силу, вызванную действием касательных напряжений на верхней грани. Работа этой силы на перемещении Δ равна:

$$dA = \frac{1}{2} \tau \delta dx \Delta = \frac{1}{2} \tau \delta \gamma dx dy = dU .$$

Как и ранее, здесь используется предположение, что работа, совершаемая внутренними силами, полностью переходит в энергию деформации. Если разделить полученное выражение на объем выделенного элемента, то результат даст удельную потенциальную энергию упругой деформации u :

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{dU}{\delta dx dy} = \frac{1}{2} \gamma \tau = \frac{\tau^2}{2G} . \quad (5.33)$$

5.7. Потенциальная энергия упругой деформации при изгибе

Рассмотрим сначала балку, подверженную чистому изгибу. При этом все допущения будут такими же, как и в подразделе 3.4 при анализе потенциальной энергии при растяжении стержней. Именно, будем считать, что вся работа внешних усилий переходит в потенциальную энергию упругой деформации: $dU = dA$, а деформации остаются в области справедливости закона Гука.

При чистом изгибе работу совершает изгибающий момент на перемещении, роль которого в данном случае играет угол поворота сечения θ . По аналогии с (3.15) можем записать:

$$A = \int_0^\theta M d(\theta) = \frac{1}{2} M \theta . \quad (5.34)$$

Величина изгибающего момента в данном сечении и угол его поворота связаны дифференциальным уравнением оси изогнутой балки (5.24):

$$EI \frac{d\theta}{dx} = M(x) \quad \text{откуда} \quad d\theta = \frac{M(x) dx}{EI} .$$

Тогда работа изгибающего момента на элементарном перемещении $d\theta$ с учетом (5.34) будет равна:

$$dA = \frac{1}{2} M d\theta = \frac{M^2(x) dx}{2EI} = dU . \quad (5.35)$$

Величина потенциальной энергии, накопленная во всем стержне, при чистом изгибе может быть получена в результате интегрирования этого выражения по всей длине:

$$U = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EI} . \quad (5.36)$$

В случае плоского поперечного изгиба работу совершают изгибающий момент и поперечная сила. Работу первого задает выражение (5.36). Найдем работу поперечной силы, пользуясь результатами предыдущего параграфа. Если бы касательные напряжения, вызванные действием Q , были распределены в поперечном сечении равномерно, то с учетом (5.33) потенциальная

энергия в элементе стержня длиной dx была бы равна: $du = \frac{\tau^2}{2G} A dx$.

Но согласно формуле Журавского (5.20) величина τ зависит от положения точки в сечении. Для того чтобы учесть непостоянство касательного напряжения, необходимо проинтегрировать величину потенциальной энергии для бесконечно малой площадки dA по всему сечению:

$$dU = \int_A \frac{\tau^2 dA}{2G} dx .$$

Воспользуемся формулой Журавского (5.20), подставив ее правую часть в подынтегральное выражение:

$$dU = \frac{dx}{2G} \int_A \left(\frac{QS_z}{bI_z} \right)^2 dA = \frac{Q^2 dx}{2GA} A \int_A \left(\frac{S_z}{bI_z} \right)^2 dA = K_y \frac{Q^2 dx}{2GA} . \quad (5.37)$$

Коэффициент K_y зависит исключительно от величины и формы поперечного сечения. Он носит название **коэффициента формы** поперечного сечения. Индекс при этом коэффициенте указывает, вдоль какой координатной оси действует поперечная сила, вызывающая деформацию.

Полная величина потенциальной энергии упругой деформации, обусловленная поперечной силой Q , может быть получена в результате интегрирования выражения (5.37) по всей длине стержня:

$$U = \int_l K_y \frac{Q^2 dx}{2GA} . \quad (5.38)$$

5.8. Расчет балки на прочность и жесткость

В качестве примера применения полученных в этой главе соотношений рассмотрим полный расчет балки по критериям прочности и жесткости. Пусть имеется двухопорная балка двутаврового поперечного сечения, нагруженная заданными внешними нагрузками (рис. 5.13, а). Требуется провести ее полный расчет на прочность и жесткость.

Прежде всего, определим опорные реакции. Составляя уравнения равновесия по моментам относительно опор А и В, получим:

$$\Sigma M_A = 0: -M - q \cdot 5 \cdot 0,5 - 9F + 8R_B = 0 \Rightarrow R_B = 58,75 \text{ кН}$$

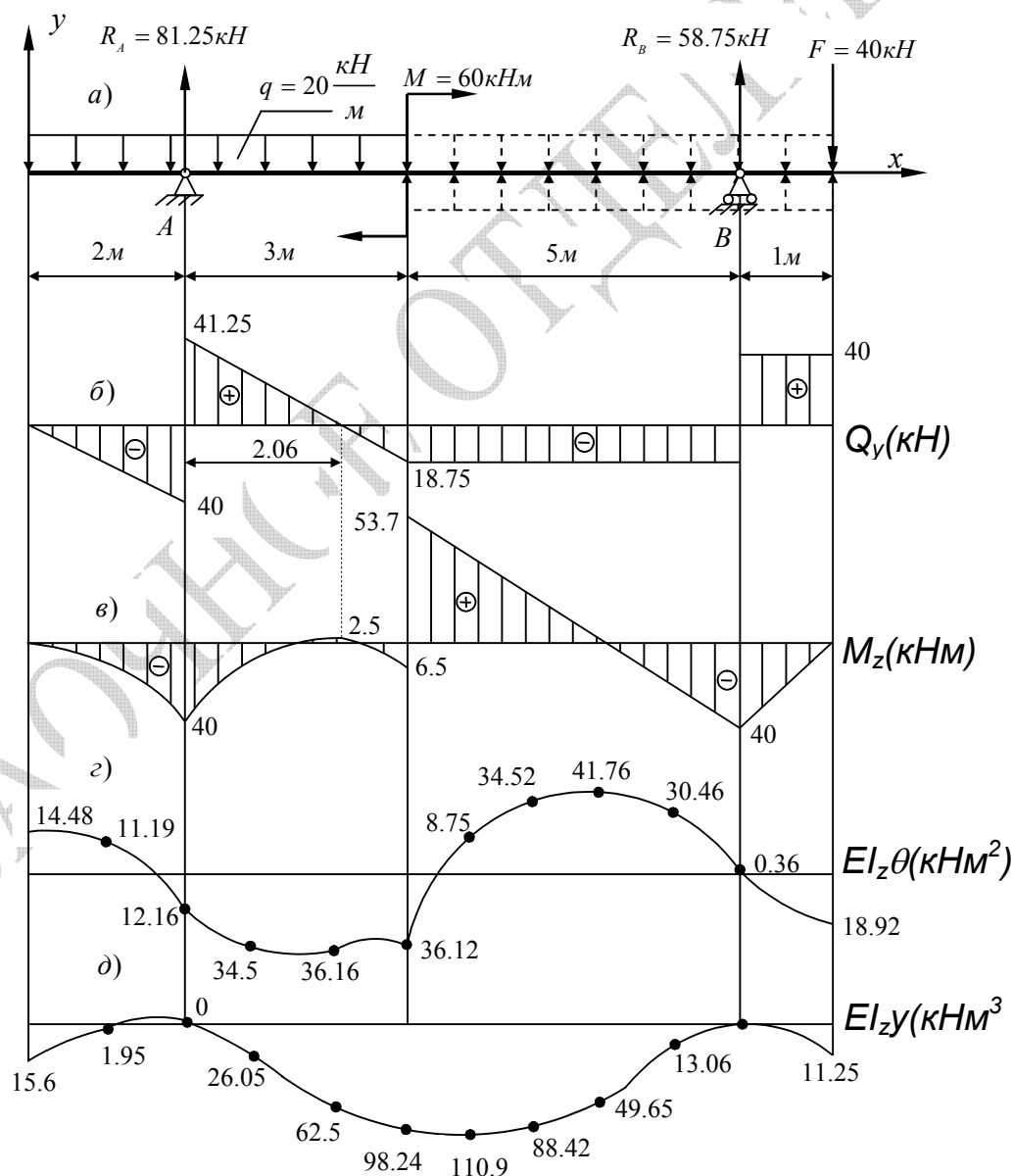


Рисунок 5.13.

$$\Sigma M_B = 0: -M + q \cdot 5 \cdot 7,5 - F - 8R_A = 0 \Rightarrow R_A = 81,25 \text{ кН}$$

Проверим найденные значения опорных реакций, составив уравнение равновесия по силам в проекции на вертикальную ось:

$$\Sigma Y = 0: -5q - F + R_A + R_B = 0.$$

Уравнение равновесия выполняется. Следовательно, опорные реакции найдены правильно.

В соответствии с методикой, изложенной в главе 2, при известных опорных реакциях строим эпюры поперечной силы $Q_y(x)$ и изгибающего момента $M_z(x)$. Они приведены на рис. 5.13, б, в.

Примем в качестве допускаемого нормального напряжения $[\sigma]$ значение 160 МПа. Тогда из условия прочности по нормальным напряжениям (5.19) можем определить расчетное значение момента сопротивления поперечного сечения двутавровой балки:

$$W_{н.о.} = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{5,37 \cdot 10^4}{1,6 \cdot 10^8} = 3,36 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 336 \text{ см}^3.$$

По сортаменту отечественного проката (ГОСТ 8239-89 «Двутавры стальные горячекатаные. Сортамент») подбираем номера профиля двутавровой балки с ближайшим большим и ближайшим меньшим значениями момента сопротивления. В нашем случае это профили № 24а ($W_{н.о.} = 317 \text{ см}^3$) и № 27 ($W_{н.о.} = 371 \text{ см}^3$). Проверяем пригодность двутавра с меньшим размером поперечного сечения, учитывая, что, согласно нормам государственного стандарта, допускается перенапряжение в пределах до 5% от величины допускаемого напряжения. Максимальное напряжение в указанном двутавре:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{н.о.}} = \frac{5,37 \cdot 10^4}{3,17 \cdot 10^{-4}} = 1,69 \cdot 10^8 \text{ Па} = 169 \text{ МПа}.$$

Вычисляем процент перенапряжения:

$$\eta = \frac{169 - 160}{160} = \frac{9}{160} \approx 0,056 = 5,6\% > 5\%.$$

Таким образом, профиль № 24а не удовлетворяет требованиям ГОСТа. Следовательно, условию прочности по нормальным

напряжениям соответствует двутавр с номером профиля № 27 и моментом сопротивления $W_{н.о.} = 371 \text{ см}^3$.

Проверим теперь условие прочности выбранной балки по касательным напряжениям, используя формулу Журавского (5.20) и принимая в качестве допускаемого касательного напряжения величину $[\tau] = 0,6 [\sigma] = 96 \text{ МПа}$. По эпюре $Q_y(x)$ (см. рис. 5.13,б) находим максимальное по абсолютной величине значение поперечной силы: $Q_y(x) = 41,25 \text{ кН}$. Геометрические параметры, входящие в соотношение (5.20), находим из сортамента для двутавровой балки № 27:

$$S_{\max}^* = 210 \text{ см}^3 = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3; \quad b_{\min} = 6 \text{ мм} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$I_{н.о.} = 5010 \text{ см}^4 = 5,01 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Для τ_{\max} имеем:

$$\tau_{\max} = \frac{41,25 \cdot 10^3 \cdot 2,1 \cdot 10^{-4}}{5,01 \cdot 10^{-5} \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 0,288 \cdot 10^8 \text{ Па} = 28,8 \text{ МПа} < [\tau]$$

Следовательно, условие прочности по касательным напряжениям для выбранной балки выполняется.

После проверки прочности балки по напряжениям в поперечных сечениях следует провести более детальный анализ картины напряжений в опасных сечениях. Опасными сечениями балки будут те, где одновременно велики и изгибающий момент, и поперечная сила. В нашем случае таких сечений два (см. рис. 5.13, б, в). Это сечение на опоре А, в котором максимальна поперечная сила и действует большой по абсолютной величине изгибающий момент, а также сечение на границе второго и третьего грузовых участков. В этом сечении изгибающий момент принимает максимальное значение. Рассмотрим второе из указанных сечений. На рис. 5.14 приведены действительное и упрощенное изображение двутаврового сечения с указанием геометрических размеров профиля № 27. Значения нормальных, касательных, главных и эквивалентного напряжений будем определять в точках 1 ÷ 7. Следует отметить, что точки 2 и 3 геометрически представляют одну и ту же точку сечения, но, условно первую считают принадлежащей полке сечения (для нее в расчетах принимается $b = 125 \text{ мм}$), вторую – стойке сечения (для точки 3 принимают $b = 6 \text{ мм}$).

Величину нормальных напряжений в характерных точках сечения вычисляем с помощью формулы Навье (5.18):

$$\tau(2) = \frac{Q \cdot S^*(2)}{I_{н.о.} \cdot b(2)}.$$

Статический момент для точки 2 равен произведению площади $A(2)$ части сечения, расположенной выше точки 2, на расстояние $y(2)$ от нейтральной оси до центра тяжести площади $A(2)$. С учетом размеров двутавра, приведенных на рис. 5.14, имеем:

$$A(2) = 9,8 \cdot 10^{-3} \cdot 1,25 \cdot 10^{-1} = 1,225 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$y(2) = 1,35 \cdot 10^{-1} - 4,9 \cdot 10^{-3} = 1,3 \cdot 10^{-1} \text{ м};$$

$$S^*(2) = 1,225 \cdot 10^{-3} \cdot 1,3 \cdot 10^{-1} = 1,59 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$\tau(2) = \frac{-18,75 \cdot 10^3 \cdot 1,59 \cdot 10^{-4}}{5,01 \cdot 10^{-5} \cdot 1,25 \cdot 10^{-1}} = -0,47 \cdot 10^6 \text{ Па} = -0,47 \text{ МПа}.$$

Для точки (3), в силу ранее сделанного замечания, все величины, входящие в формулу (5.20), имеют те же значения за исключением ширины профиля b . Последняя в этом случае равна ширине стойки двутавра, т.е. $b(3) = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ (см. рис. 5.14). Таким образом,

$$\tau(3) = \frac{-18,75 \cdot 10^3 \cdot 1,59 \cdot 10^{-4}}{5,01 \cdot 10^{-5} \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = -9,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = -9,9 \text{ МПа}.$$

Статический момент для точки 4 находим по сортаменту для выбранного профиля № 27: $S^*(4) = 210 \text{ см}^3 = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$. Тогда

$$\tau(4) = \frac{-18,75 \cdot 10^3 \cdot 2,1 \cdot 10^{-4}}{5,01 \cdot 10^{-5} \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = -1,3 \cdot 10^7 \text{ Па} = -13 \text{ МПа}.$$

Значения касательных напряжений в точках 5 и 6 такие же, как и в точках 3 и 2 соответственно:

$$\tau(5) = \tau(3) = -9,9 \text{ МПа}; \quad \tau(6) = \tau(2) = -0,47 \text{ МПа}.$$

Полученные значения касательных напряжений в различных точках поперечного сечения балки также заносим в таблицу и представляем в виде эпюры (рис. 5.14).

Для каждой из точек в координатах σ , τ строим круги Мора следующим образом: на координатной плоскости отмечаем точку, абсцисса которой равна величине нормального напряжения σ , а ордината – касательного τ . Затем на оси ординат находим точку с координатами $(0; -\tau)$. Указанные точки соединяем отрезком, на котором, как на диаметре, строим окружность. Эта окружность называется круговой диаграммой напряженного состояния материала в данной точке поперечного сечения балки. Она позволяет определить величину нормальных и касательных напряжений на произвольно ориентированной площадке. Точки пересечения круга Мора с осью абсцисс позволяют найти величину главных напряжений σ_1 и σ_3 . По формуле (4.10) также можно вычислить значения главных напряжений для всех характерных точек сечения и сравнить их с полученными графически. На рис. 5.14 представлена зависимость главных напряжений по высоте профиля.

Эквивалентное напряжение в точках 1 ÷ 7 находим, используя соотношение (4.28) при $\sigma_2 = 0$. По найденным значениям строим эпюры распределения напряжений (рис. 5.14).

В наиболее опасных точках сечения (точки 3 и 5) проверяем прочность балки по эквивалентному напряжению на опоре А (во втором опасном сечении):

$$|\sigma(3)| = |\sigma(5)| = \frac{M_u \cdot y}{I_{н.о.}} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 1,35 \cdot 10^{-1}}{5,01 \cdot 10^{-5}} = 1,08 \cdot 10^8 \text{ Па} = 108 \text{ МПа},$$

$$\tau(3) = \tau(5) = \frac{Q \cdot S^*(3)}{I_{н.о.} \cdot b} = \frac{41,25 \cdot 10^3 \cdot 1,59 \cdot 10^{-4}}{5,01 \cdot 10^{-5} \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 0,22 \cdot 10^8 \text{ Па} = 22 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{108^2 + 3 \cdot 22^2} = 114,5 \text{ МПа} \quad \langle [\sigma].$$

Таким образом, условие прочности по эквивалентному напряжению во втором опасном сечении (на опоре А) выполняется.

Вычислим теперь перемещения поперечных сечений балки, возникающие под действием внешних нагрузок. Для этого воспользуемся соотношениями (5.29) и (5.30). Значения начальных параметров $EI_{н.о.}\theta_0$ и $EI_{н.о.}y_0$ определяем из условий на опорах: $EI_{н.о.}y(2) = EI_{н.о.}y(10) = 0$. Записывая соотношение (5.30) последовательно, при $x = 2$ и $x = 10$, получаем два уравнения:

$$0 = EI_{н.о.}y_0 + 2EI_{н.о.}\theta_0 - \frac{1}{24}q \cdot 2^4,$$

$$0 = EI_{н.о.}y_0 + 10EI_{н.о.}\theta_0 + \frac{1}{2}M \cdot 5^2 + \frac{1}{6}R_A \cdot 8^3 - \frac{1}{24}q \cdot 10^4 + \frac{1}{24}q \cdot 5^4.$$

Решая полученную систему уравнений, получаем:

$$EI_{н.о.} \theta_0 = 14,5 \text{ кНм}^2; \quad EI_{н.о.} y_0 = -15,6 \text{ кНм}^3.$$

Зная значение начальных параметров, по соотношениям (5.29) и (5.30) вычисляем комплексы $EI_{н.о.} \theta(x)$ и $EI_{н.о.} y(x)$ по всей длине балки через каждый метр. Результаты представляем в виде эпюр перемещений (см. рис. 5.13, а, б).

Зная перемещения поперечных сечений балки, можно проверить выполнение условий жесткости (5.31) для различных участков балки.

I консоль:

$$|y_{\max}| = \frac{|EI_{н.о.} y|_{\max}}{EI_{н.о.}}.$$

Из эпюры $EI_{н.о.} y(x)$ для этого участка балки находим $|EI_{н.о.} y| = 15,6 \text{ кНм}^3$. Тогда

$$|y_{\max}| = \frac{1,56 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5,01 \cdot 10^{-5}} = 1,56 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Следовательно,

$$\frac{|y_{\max}|}{l} = \frac{1,56 \cdot 10^{-3}}{2} = 0,78 \cdot 10^{-3} < 0,01.$$

где 0,01 – допускаемая величина относительного прогиба для консольного участка балки.

II консоль:

$$|y_{\max}| = \frac{1,125 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5,01 \cdot 10^{-5}} = 1,125 \cdot 10^{-3} \text{ м,}$$

$$\frac{|y_{\max}|}{l} = \frac{1,125 \cdot 10^{-3}}{1} = 1,125 \cdot 10^{-3} < 0,01.$$

Пролет балки:

$$|y_{\max}| = \frac{1,109 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5,01 \cdot 10^{-5}} = 1,11 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$$

$$\frac{|y_{\max}|}{l} = \frac{1,11 \cdot 10^{-2}}{8} = 1,38 \cdot 10^{-3} < 3,3 \cdot 10^{-3}.$$

где $3,3 \cdot 10^{-3}$ - допускаемая величина относительного прогиба для пролета.

Таким образом, условие жесткости выполняется на всех участках балки. В результате расчета показано, что двутавровое сечение балки № 27 удовлетворяет условиям прочности и жесткости.

5.8. Контрольные вопросы

1. Какие геометрические характеристики поперечных сечений вы знаете?
2. Что такое статический момент плоской фигуры относительно координатных осей?
3. Как связаны координаты центра тяжести фигуры и ее статические моменты?
4. Какие оси называются центральными?
5. Какие величины называются моментами инерции и центробежными моментами инерции плоских фигур?
6. Что такое полярный момент инерции поперечного сечения?
7. Какие оси называются главными осями инерции?
8. Какими свойствами обладают моменты инерции?
9. Какие напряжения возникают в материале при кручении прямолинейных стержней? От чего зависит их величина?
10. К чему сводятся перемещения при кручении?
11. От чего зависит угол закручивания поперечных сечений?
12. Сформулируйте условия прочности и жесткости при кручении.
13. В чем отличие чистого изгиба от плоского поперечного изгиба?
14. От чего зависит величина нормальных напряжений при изгибе?
15. От чего зависит величина касательных напряжений при плоском поперечном изгибе?
16. Какие величины характеризуют перемещения при изгибе?
17. Как связаны между собой прогиб и угол поворота сечения?
18. Запишите дифференциальное уравнение упругой линии балки и объясните смысл входящих в него величин.
19. Запишите универсальное уравнение упругой линии балки. Каков смысл слагаемых в этом уравнении?
20. Сформулируйте условия прочности и жесткости при изгибе.
21. Какие напряжения возникают при сдвиге? Как определить их величину?
22. Как найти величину потенциальной энергии упругой деформации при простых видах нагружения стержней?

Глава 6. Энергетические методы определения перемещений

6.1. Теорема Кастилиано

Рассмотрим произвольное деформируемое твердое тело, на которое действуют две системы обобщенных сил $\{P\}_1$ и $\{P\}_2$. Под термином «обобщенная сила» будем понимать либо сосредоточенную силу, либо сосредоточенный момент. Пусть силы $\{P\}_1$ приложены в точках $\{M\}_1$, а силы $\{P\}_2$ – в точках $\{M\}_2$. Каждая из двух систем обобщенных сил вызовет в материале тела соответствующие перемещения (линейные или угловые). Для тех и других перемещений будем также использовать единый термин «обобщенные перемещения». Обозначим через δ_{11} –совокупность обобщенных перемещений в точках $\{M\}_1$, вызванных силами $\{P\}_1$; через δ_{21} – совокупность обобщенных перемещений в точках $\{M\}_2$, также вызванных силами $\{P\}_1$; через δ_{12} – совокупность обобщенных перемещений в точках $\{M\}_1$, вызванных силами $\{P\}_2$; через δ_{22} – совокупность обобщенных перемещений в точках $\{M\}_2$, вызванных действием сил $\{P\}_2$.

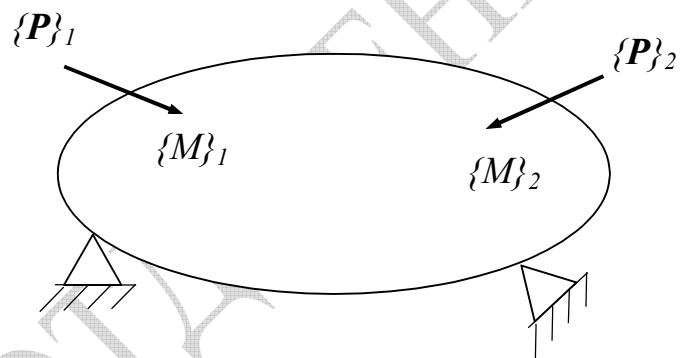


Рисунок 6.1

Допустим, что силы $\{P\}_1$ и $\{P\}_2$ прилагаются к телу в следующем порядке. Сначала прикладывается система обобщенных сил $\{P\}_1$. После того как под действием этих сил все точки тела получат некоторые перемещения, к телу прикладывается система обобщенных сил $\{P\}_2$. Тогда полная работа, совершенная обеими системами сил на соответствующих перемещениях, складывается из трех слагаемых:

$$\sum A = \frac{1}{2} P_1 \delta_{11} + \frac{1}{2} P_2 \delta_{22} + \frac{1}{2} P_1 \delta_{12} .$$

Поменяем теперь порядок приложения сил: сначала приложим силы $\{P\}_2$, а затем силы $\{P\}_1$. Тогда та же работа может быть представлена следующей суммой:

$$\sum A = \frac{1}{2} P_1 \delta_{11} + \frac{1}{2} P_2 \delta_{22} + \frac{1}{2} P_2 \delta_{21} .$$

Сравнивая оба равенства, приходим к заключению, что *работа сил первой системы на перемещениях, вызванных силами второй системы, равна работе сил второй системы на перемещениях, вызванных силами первой системы*:

$$P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21}. \quad (6.1)$$

Этот вывод о взаимности работ двух систем сил на «чужих» перемещениях составляет содержание теоремы Бетти. В частном случае, если вместо двух систем сил взять две силы единичной величины, то равенство (6.1) примет вид: $\delta_{12} = \delta_{21}$. Следовательно, *перемещение в точке 1, вызванное действием единичной силы в точке 2, равно перемещению в точке 2, вызванному единичной силой, приложенной в точке 1*.

Перейдем к формулировке и доказательству теоремы Кастилиано. Пусть на упругое тело действует система обобщенных сил P_1, P_2, \dots, P_n . Соответствующие обобщенные перемещения обозначим через $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Под действием этой системы сил тело приобретет некоторое количество потенциальной энергии упругой деформации, которое будет функцией всех сил: $U = U(P_1, P_2, \dots, P_n)$. Если сила P_n получит приращение dP_n , то величина U также изменится:

$$U = U(P_1, P_2, \dots, P_n) + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n. \quad (6.2)$$

Изменим теперь порядок приложения к телу сил, т. е. сначала приложим силу dP_n . Она вызовет перемещение $d\delta_n$ и совершит работу:

$$dA = \frac{1}{2} dP_n d\delta_n = dU.$$

Затем приложим все остальные силы P_1, P_2, \dots, P_n . Тогда суммарное количество потенциальной энергии составит величину:

$$U = U(P_1, P_2, \dots, P_n) + \frac{1}{2} dP_n d\delta_n + dP_n \delta_n. \quad (6.3)$$

Последнее слагаемое представляет собой работу силы dP_n на перемещении δ_n . Приравнявая правые части соотношений (6.2) и (6.3) и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим:

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n}. \quad (6.4)$$

Это равенство – символьная запись теоремы Кастилиано: *частная производная от потенциальной энергии упругой деформации по обобщенной силе равна обобщенному перемещению в точке приложения этой силы в направлении ее действия.*

Теорема Кастилиано является удобным инструментом для нахождения перемещений отдельных точек конструкций. Рассмотрим ее использование применительно к прямым стержням. В общем случае, когда стержень одновременно подвергается сжатию, кручению, изгибу и сдвигу, полная потенциальная энергия, накопленная стержнем, складывается из шести слагаемых:

$$U = \int_l \frac{N^2 dx}{2EA} + \int_l \frac{T^2 dx}{2GI_p} + \int_l K_y \frac{Q_y^2 dx}{2GA} + \int_l K_z \frac{Q_z^2 dx}{2GA} + \int_l \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} + \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z}. \quad (6.5)$$

Здесь использованы ранее полученные формулы для потенциальной энергии, накопленной стержнем при простых видах деформации. Каждое слагаемое отражает вклад отдельного вида деформации в величину потенциальной энергии. При этом учтено, что изгиб и сдвиг могут происходить в двух главных плоскостях стержня.

В большинстве практически важных случаях основной вклад в энергию упругой деформации вносят изгибающие и крутящий моменты. Остальные слагаемые, как правило, пренебрежимо малы. Применим теорему Кастилиано для нахождения перемещений балки, приведенной на рис. 5.9. Пусть известны геометрические параметры балки, величина приложенной силы F и модуль продольной упругости E . Требуется найти величину прогиба u и угол поворота θ крайнего левого сечения.

Поскольку балка испытывает изгиб в одной из главных плоскостей, в выражении (6.5) для потенциальной энергии следует учитывать лишь одно из слагаемых (последнее). Зависимость изгибающего момента от продольной координаты имеет вид: $M_z(x) = -Fx$. Тогда величина потенциальной энергии может быть получена в результате интегрирования:

$$U = \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} = \frac{1}{2EI_z} \int_l (Fx)^2 dx = \frac{F^2 l^3}{6EI_z}.$$

В сечении, в котором требуется найти прогиб, действует внешняя сила F . Поэтому условия данной задачи в точности соответствуют

условиям теореме Кастилиано. Следовательно, искомый прогиб равен:

$$y_0 = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{Fl^3}{3EI_z}.$$

Знак «+» означает в полученном результате, что найденное перемещение совпадает по направлению с силой F . В противном случае ответ был бы получен со знаком «-». Заметим, что результат решения не отличается от (5.28) при решении этой же задачи более трудоемким методом.

Найдем теперь угол поворота крайнего левого сечения. Внешний момент в этом сечении отсутствует. Для того чтобы применить теорему Кастилиано в данном случае, воспользуемся искусственным приемом. В крайнем левом сечении приложим дополнительный фиктивный момент M_ϕ равный нулю (рис. 6.2). Тогда зависимость внутреннего изгибающего момента от продольной координаты будет описываться функцией:

$$M_z(x) = -Fx - M_\phi.$$

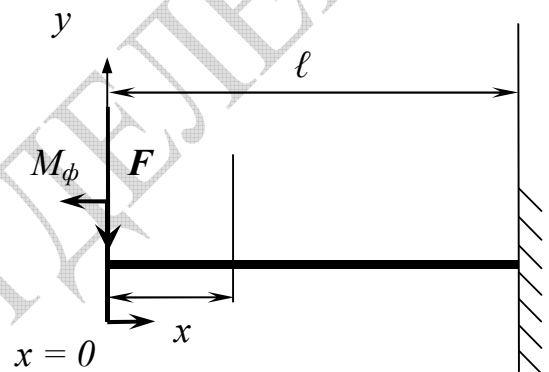


Рисунок 6.2

Величина потенциальной энергии, накопленная в стержне, вычисляется путем интегрирования:

$$U = \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} = \frac{1}{2EI_z} \int_l (-Fx - M_\phi)^2 dx = \frac{1}{2EI_z} \left(\frac{F^2 l^3}{3} + FM_\phi l^2 + M_\phi^2 l \right).$$

Искомый угол поворота получим, дифференцируя результат по M_ϕ при условии, что фиктивный момент равен нулю:

$$\theta_0 = \frac{\partial U}{\partial M_\phi} \Big|_{M_\phi=0} = \frac{Fl^2}{2EI_z}.$$

Сравнивая приведенное решение с решением этой же задачи в параграфе 5.5, видим, насколько эффективен и прост в использовании метод, основанный на теореме Кастилиано.

6.2. Метод Мора определения перемещений

Запишем формулу Кастилиано (6.4) несколько иначе, считая для простоты, что стержень подвергается только изгибу в плоскости Oxy . При этом изменим порядок дифференцирования и интегрирования в правой части. В результате получим:

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} = \frac{\partial}{\partial P_n} \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} = \int_l \frac{M_z}{2EI_z} \frac{\partial M_z}{\partial P_n} dx .$$

Выясним смысл производной $\frac{\partial M_z}{\partial P_n}$. Если в сечении стержня, где вычисляется перемещение, приложена сосредоточенная сила F (она играет роль обобщенной силы P_n), то внутренний изгибающий момент равен $M_z = Fx$, а $\frac{\partial M_z}{\partial F} = x = 1 \cdot x$. Следовательно, производную $\frac{\partial M_z}{\partial F}$ можно рассматривать как изгибающий момент, возникающий в поперечном сечении стержня под действием единичной силы, приложенной в интересующем нас сечении в заданном направлении.

Аналогичный вывод получится, если в сечении приложен сосредоточенный момент M . Действительно, в этом случае $M_z = M$ и $\frac{\partial M_z}{\partial M} = 1$, т. е. производная равна единичному моменту, приложенному в сечении, где вычисляется перемещение (угол поворота θ). В обоих случаях $\frac{\partial M_z}{\partial P_n} = M_{z1}$, где M_{z1} – внутренний изгибающий момент от обобщенной силы единичной величины, приложенной в сечении, в котором находится перемещение.

Если стержень одновременно подвергается сжатию, кручению, изгибу и сдвигу, и полная потенциальная энергия определяется соотношением (6.5), то формула Кастилиано обобщается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \delta_n = & \int_l \frac{NN_1}{EA} dx + \int_l K_y \frac{Q_y Q_{y1}}{GA} dx + \int_l K_z \frac{Q_z Q_{z1}}{GA} dx + \\ & + \int_l \frac{TT_1}{GI_p} dx + \int_l \frac{M_y M_{y1}}{EI_y} dx + \int_l \frac{M_z M_{z1}}{EI_z} dx . \end{aligned} \quad (6.6)$$

Интегралы, входящие в это соотношение, получили название **интегралов Мора**. В качестве подинтегральной функции в каждом интеграле фигурирует произведение внутреннего силового фактора, обусловленного действием внешних нагрузок, и соответствующего силового фактора, обусловленного действием единичной обобщенной силы (сосредоточенной силы или сосредоточенного момента), приложенной в точке, где вычисляется перемещение.

Метод нахождения перемещений с использованием соотношения (6.6) называется **методом Мора**. Он предполагает следующую последовательность вычислений.

1. Составляется выражение для изгибающего момента от внешних приложенных нагрузок.
2. В сечении, где ищется обобщенное перемещение, прикладывается соответствующая единичная обобщенная сила и составляется выражение для изгибающего момента только от единичной обобщенной силы.
3. Вычисляется интеграл Мора.

Проиллюстрируем метод Мора на примере решения несложной задачи. Пусть дана однопролетная балка длиной $2l$, нагруженная распределенной нагрузкой q (рис. 6.3). Требуется определить прогиб u_C сечения C – середины балки – и угол поворота θ_A сечения A на шарнирной опоре. В соответствии с порядком вычислений, сформулированным выше, найдем зависимость изгибающего момента, обусловленного действием распределенной нагрузки. Эта

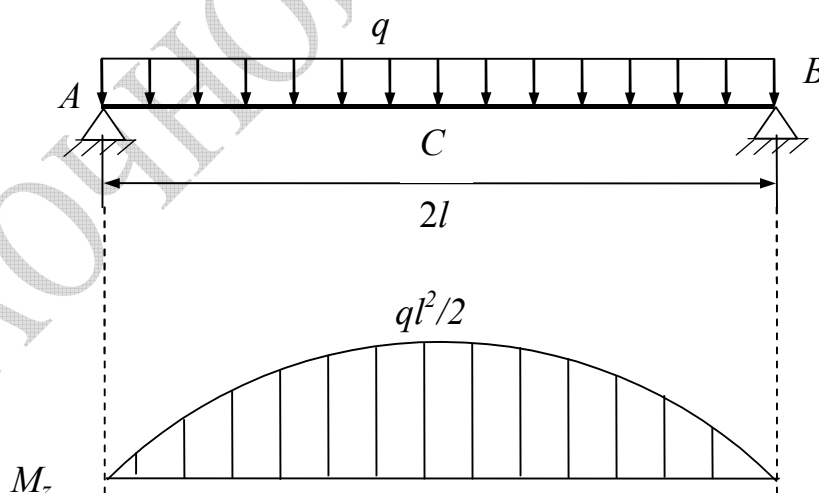


Рисунок 6.3

зависимость, очевидно, имеет вид:

$$M_z(x) = -\frac{1}{2}qx^2 + qlx. \quad (6.7)$$

Эпюра изгибающего момента M_z приведена на рис. 6.3. под расчетной схемой балки.

Для нахождения прогиба y_C приложим в середине балки единичную сосредоточенную силу (рис. 6.4) и составим выражение для изгибающего момента, обусловленного действием этой силы:

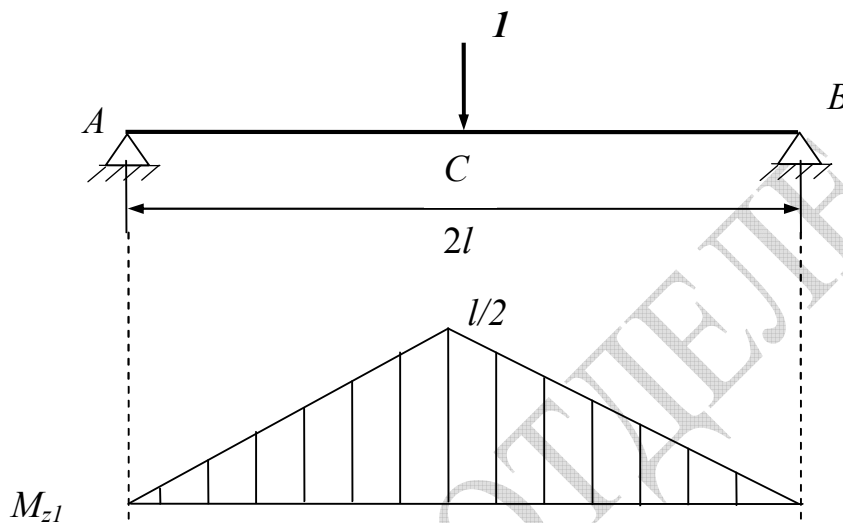


Рисунок 6.4

$$M_{z1}(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{при } 0 < x < l,$$

$$M_{z1}(x) = \frac{1}{2}(2l - x) \quad \text{при } l < x < 2l.$$

(6.8)

Эпюра изгибающего момента M_{z1} приведена на рис. 6.4. под расчетной схемой балки.

Прогиб y_C обусловлен изгибом балки в плоскости Оху. Поэтому в формуле (6.6) будет отличен от нуля только один из интегралов Мора – последний. С учетом соотношений (6.7) и (6.8), а также симметрии эпюр относительно середины балки имеем:

$$y_C = \int_0^{2l} \frac{M_z M_{z1}}{EI_z} dx = \frac{2}{EI_z} \int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2} + qlx \right) \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{5}{24} \cdot \frac{ql^4}{EI_z}.$$

Определим теперь угол поворота θ_A сечения A балки. Для этого приложим в этом сечении момент единичной величины (рис. 6.5) и составим выражение для внутреннего изгибающего момента M_{z1} :

$$M_{z1}(x) = \left(1 - \frac{x}{2l}\right).$$

Искомый угол поворота определим, вычисляя интеграл Мора, в котором подынтегральной функцией является произведение только что найденного момента и момента (6.7):

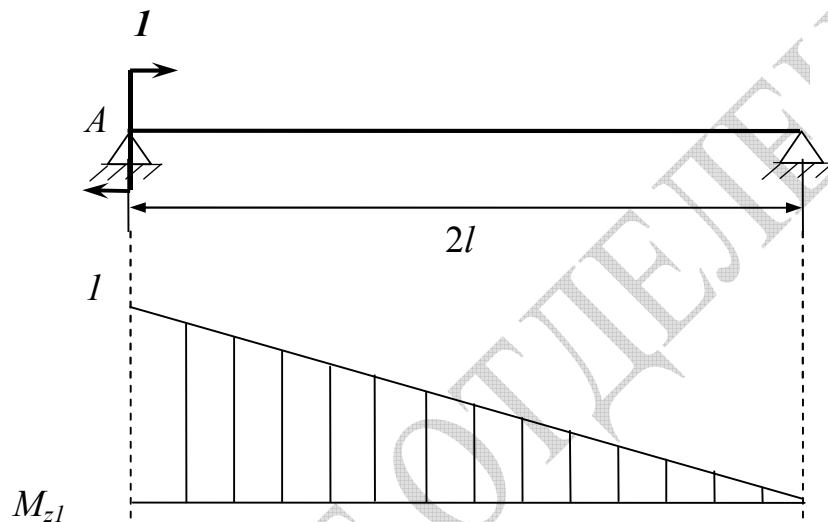


Рисунок 6.5

$$\theta_A = \int_0^{2l} \frac{M_z M_{z1}}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \int_0^{2l} \left(-\frac{qx^2}{2} + qlx\right) \left(1 - \frac{x}{2l}\right) dx = \frac{ql^3}{9EI_z}.$$

И для прогиба, и для угла поворота результаты получились со знаком «+». Следовательно, направление перемещений совпадает с направлением единичных обобщенных сил, приложенных к балке.

6.3. Метод Верещагина

В интеграле Мора для любого вида перемещения функция M_{z1} является линейной относительно координаты x , т. е. $M_{z1} = ax + b$. Рассмотрим участок стержня l_i , на котором изгибающий момент $M_z(x)$ непрерывен и имеет непрерывную производную, и преобразуем интеграл:

$$\int_{l_i} M_z(x)M_{z1}(x)dx = \int_{l_i} M_z(ax + b)dx = a \int_{l_i} xM_z(x)dx + b \int_{l_i} M_z(x)dx .$$

Интеграл $\int_{l_i} M_z(x)dx$ представляет собой площадь ω_i фигуры, ограниченной эпюрой изгибающего момента M_z на участке стержня l_i . Интеграл $\int_{l_i} xM_z(x)dx$ равен статическому моменту относительно оси Oy той же фигуры. По одному из свойств статических моментов он равен произведению площади ω_i на абсциссу x_C^i центра тяжести этой фигуры. Следовательно,

$$\int_{l_i} M_z(x)M_{z1}(x)dx = a\omega_i x_C^i + b\omega_i = \omega_i(ax_C^i + b) = \omega_i\eta_i, \quad (6.9)$$

где $\eta_i = ax_C^i + b = M_{z1}(x_C^i)$ - ордината, взятая с эпюры изгибающего момента от единичной обобщенной силы в точке с координатой равной координате центра тяжести эпюры $M_z(x)$. В случае, если эпюра $M_z(x)$ – кусочно-непрерывная функция, искомое перемещение получим в результате перемножения эпюр $M_z(x)$ и $M_{z1}(x)$ на каждом участке с последующим сложением произведений:

$$\delta = \sum_i \frac{\omega_i\eta_i}{(EI_z)_i} . \quad (6.10)$$

Это соотношение носит название **формулы Верещагина**. Оно, в частности, предполагает, что участки стержневой системы могут иметь различную жесткость на изгиб.

Из сказанного следует, что метод Верещагина не требует вычисления интегралов. Для его применения необходимо уметь находить площади и абсциссу центра тяжести плоских фигур, ограниченных эпюрами изгибающего момента. В большинстве практически важных случаях эпюры представляют собой совокупность прямоугольников ($M_z(x)$ постоянна), треугольников ($M_z(x)$ линейная функция) и параболических треугольников ($M_z(x)$ квадратичная функция). Величина площади и положение центра тяжести этих фигур хорошо известны (рис. 6.6). Поэтому в отношении сложности вычислений метод Верещагина имеет определенные преимущества.

$$\omega = h l,$$

$$x_{y,m} = l/2$$

$$\omega = h l / 2,$$

$$x_{y,m} = l/3$$

$$\omega = h l / 3,$$

$$x_{y,m} = l/4$$

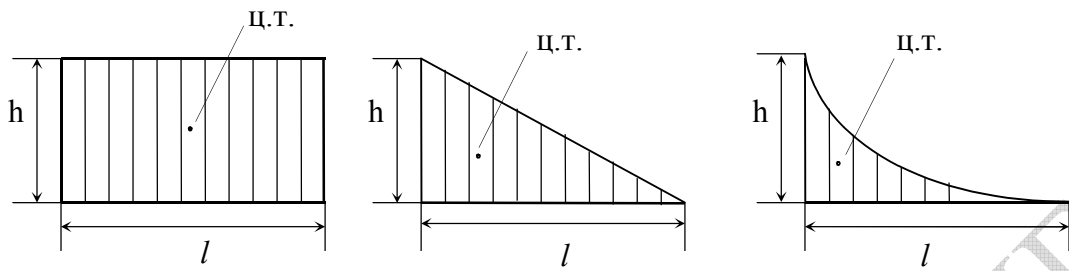


Рисунок 6.6

Решим методом Верещагина две несложных задачи. Пусть дана балка, нагруженная распределенной нагрузкой q (рис. 6.7). Длины грузовых участков также известны. Требуется найти прогиб сечения А.

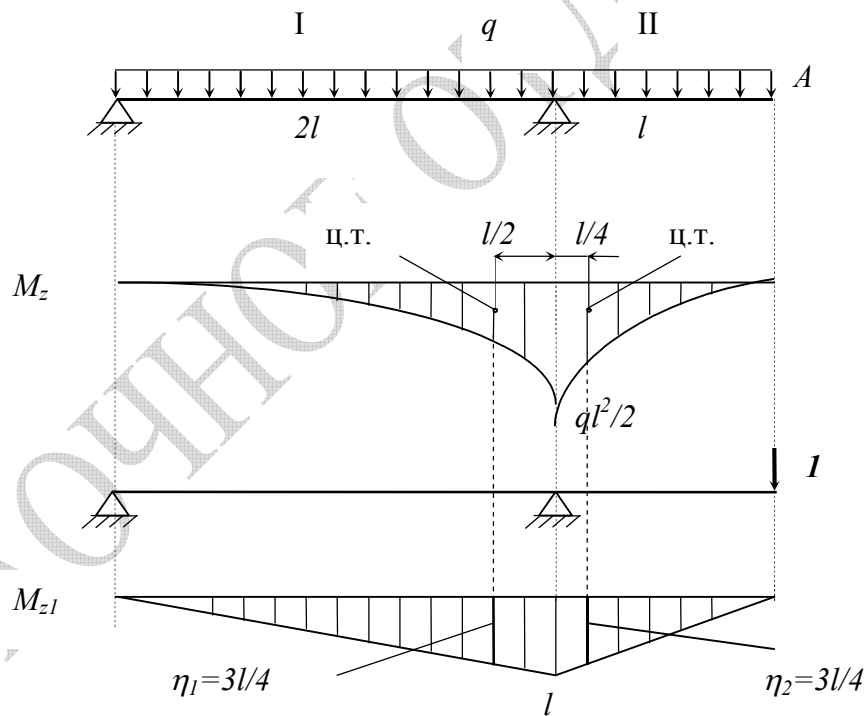


Рисунок 6.7

Под расчетной схемой балки строим эпюру изгибающего момента $M_z(x)$, обусловленного действием распределенной нагрузки. Площади фигур под этой эпюрой на грузовых участках I и II соответственно

равны: $\omega_1 = q l^3 / 3$ и $\omega_2 = q l^3 / 6$. Центры тяжести эюр лежат на расстоянии $l/2$ и $l/4$ от правой опоры балки соответственно.

Далее строим эюру изгибающего момента $M_{z1}(x)$, обусловленного действием единичной силы, приложенной в сечении A в направлении предполагаемого перемещения. Определяем ординаты этой эюры под центром тяжести первой эюры на каждом грузовом участке. Указанные ординаты равны: $\eta_1 = \eta_2 = 3l/4$. Тогда согласно методу Верещагина искомое перемещение сечения A может быть найдено в результате несложных вычислений:

$$\delta_A = \frac{1}{EI_z} (\omega_1 \eta_1 + \omega_2 \eta_2) = \frac{3ql^4}{8EI_z}.$$

Метод Мора и метод Верещагина могут быть применены для отыскания перемещений не только в балках, но и в более сложных стержневых системах. Рассмотрим раму, изображенную на рис. 6.8 и нагруженную двумя равными сосредоточенными силами. Требуется определить, на какое расстояние разойдутся точки A под действием

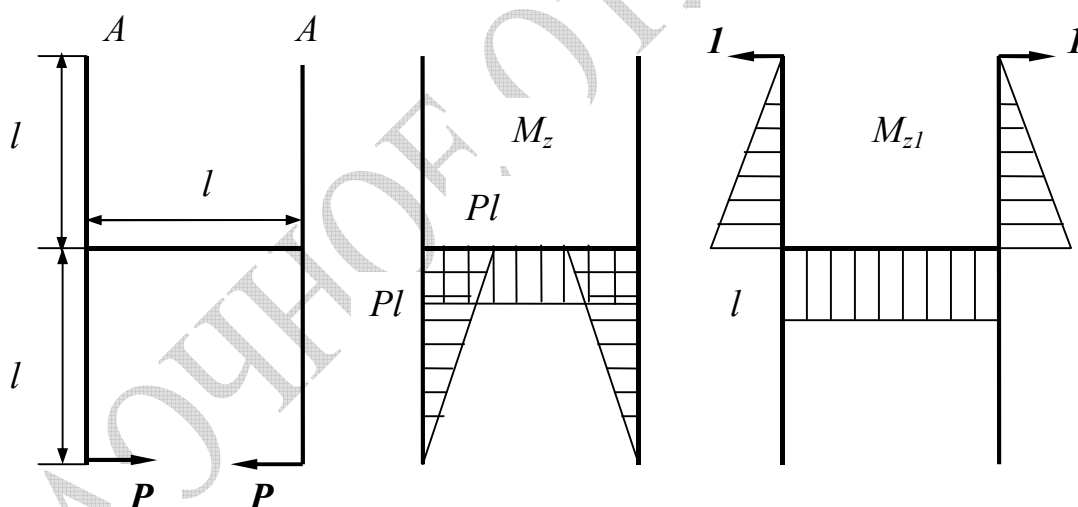


Рисунок 6.8

указанных сил. Как и в предыдущей задаче, строим две эюры M_z и M_{z1} изгибающего момента от внешних сил и от единичных сил, приложенных в точке A в направлении предполагаемого перемещения. Результат перемножения эюр на вертикальных участках рамы будет равен нулю, поскольку на этих участках один из моментов отсутствует. Для горизонтального участка $\omega = Pl^2$, а $\eta = l$. Следовательно, искомое перемещение будет равно:

$$\delta_A = \frac{PI^3}{EI_z}.$$

6.4. Контрольные вопросы

1. Что утверждает теорема Бетти о взаимности работ?
2. Что понимается под обобщенной силой и обобщенным перемещением?
3. Сформулируйте теорему Кастилиано.
4. Как вычисляется полная потенциальная энергия упругой деформации стержня? Из каких составляющих она состоит?
5. Какие виды деформаций вносят основной вклад в величину потенциальной энергии?
6. В чем состоит метод Мора при определении перемещений?
7. Какова последовательность вычислений при использовании метода Мора?
8. В чем состоит метод Верещагина при определении перемещений?
9. Каковы преимущества метода Верещагина?

Глава 7. Устойчивость упругих конструкций

7.1. Понятие об устойчивости

Понятие устойчивости широко используется при анализе поведения различных систем начиная от механических и заканчивая биологическими и социальными системами. Оно опирается на следующие представления. Пусть система, находясь в некотором состоянии равновесия, подвергается малому кратковременному внешнему воздействию (возмущению). Тогда возможны три принципиально различных схемы поведения системы. Первая: система после снятия возмущения возвращается к своему исходному состоянию. В этом случае говорят, что состояние системы является устойчивым. Такой тип поведения аналогичен поведению шарика на

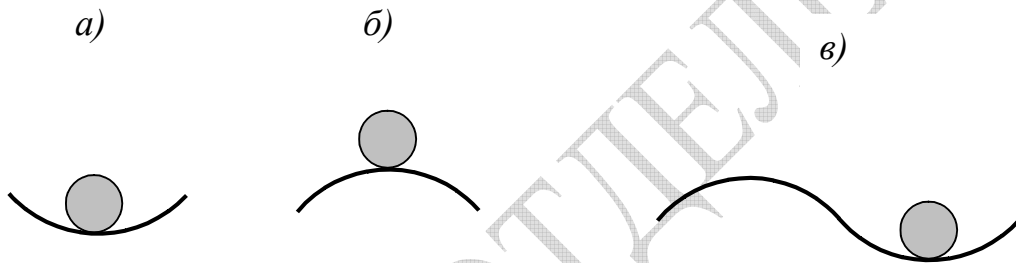


Рисунок 7.1

рис. 7.1, а. Вторая схема поведения: система после снятия возмущения к своему первоначальному состоянию не возвращается. Такое состояние называется неустойчивым. Ему отвечает рис. 7.1, б. Наконец, третья схема поведения: система покидает исходное состояние и переходит к другому состоянию, обладающему свойством устойчивости (рис. 7.1, в).

Применительно к элементам химического оборудования с точки зрения их работоспособности особый интерес представляет вопрос об устойчивости их первоначальной геометрической формы. Потеря устойчивости в этом случае приводит к большим перемещениям, вызывающим возникновение недопустимых по величине остаточных деформаций или полное разрушение. Например, тонкостенный аппарат, нагруженный наружным давлением, может потерять устойчивость. При этом круговая форма сечения сильно исказится, а корпус аппарата частично или полностью сплющится. Работоспособность аппарата нарушится, хотя величина напряжений в материале корпуса может быть намного меньше допускаемых величин.

В силу сказанного одним из основных критериев работоспособности элементов оборудования является устойчивость их первоначальной геометрической формы. Для целого ряда конструкций при их проектировании расчет на устойчивость проводится обязательно.

7.2. Устойчивость сжатых стержней

Наиболее наглядным примером понятия устойчивости может служить прямолинейный стержень, нагруженный силой F , действующей строго по оси стержня (рис. 7.2). Если сила невелика, то сжатый стержень остается прямолинейным. Более того, при малых принудительных отклонениях стержня от вертикали он возвращается к исходной геометрической форме. Говорят, что прямолинейная форма равновесия стержня в этом случае устойчива. Стержень с точки зрения устойчивости ведет себя так же, как шарик на рис. 7.1, а. С увеличением сжимающей силы свойство устойчивости будет сохраняться лишь до определенного момента. Как только сила F превзойдет некоторое значение $F_{кр}$, которое называется **критической силой**, станут возможны две формы равновесия стержня. Одна – прямолинейная – будет неустойчивой (как положение шарика на рис. 7.1, б). Малейшее внешнее воздействие приведет к резкому изгибу

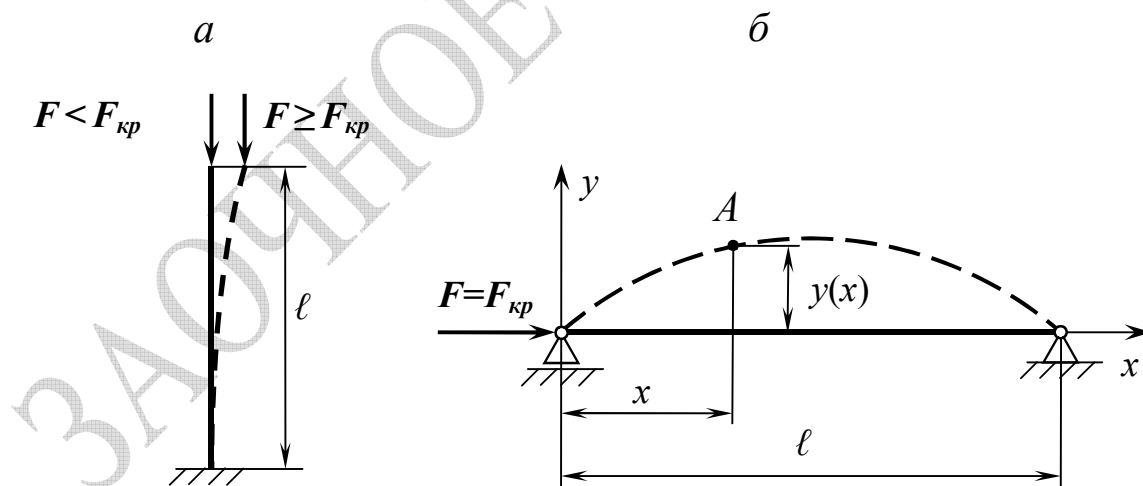


Рисунок 7.2

стержня. Вторая – искривленная – будет устойчивой. Форма стержня при этом определится условиями уравновешенности внутреннего изгибающего момента в каждом сечении и момента, вызванного действием сжимающей силы F .

В реальных конструкциях потеря устойчивости сжатых стержней может возникнуть, например, в опорах технологических аппаратов, емкостей и резервуаров, в штоках насосов и компрессоров, в колонных аппаратах большой высоты. В любом случае при расчете на устойчивость необходимо знать величину критической силы $F_{кр}$. Тогда условием работоспособности данного элемента оборудования по критерию устойчивости будет неравенство:

$$F < [F], \quad \text{где} \quad [F] = F_{кр} / n_y. \quad (7.1)$$

Здесь $[F]$ – допускаемое значение сжимающей силы, n_y – коэффициент запаса устойчивости. Величина последнего регламентируется отраслевыми стандартами.

Найдем величину критической силы $F_{кр}$ для шарнирно закрепленного стержня, сжатого продольной силой (рис. 7.2, б). Будем считать сжимающую нагрузку приложенной к центру тяжести сечения, прогибы y малыми, а возникающие при этом напряжения не превышающими предел пропорциональности $\sigma_{плц}$ (следовательно, справедлив закон Гука). Тогда прогиб и внутренний изгибающий момент, обусловленный действием силы $F_{кр}$, в каждом поперечном сечении связаны между собой дифференциальным уравнением изогнутой оси балки (5.24):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z}.$$

Изгибающий момент $M_z(x)$ равен произведению силы на плечо, которым в данном случае является величина прогиба: $M_z(x) = -F_{кр} y$. Знак минус отражает связь между знаком изгибающего момента и прогибом стержня (первый на рис. 7.2, б отрицателен, второй положителен).

Подставив выражение для изгибающего момента в дифференциальное уравнение изогнутой оси, приходим к следующему уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0, \quad (7.2)$$

где введено обозначение: $k^2 = F_{кр} / EI_z$. Здесь E – модуль продольной упругости материала стержня, I_z – момент инерции его поперечного сечения. Уравнение (7.2), как известно из курса математики, имеет общее решение следующего вида:

$$y(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \quad (7.3)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из граничных условий. В данном случае граничными условиями служат условия на опорах стержня. Если начало координат совместить с левой опорой стержня, то граничные условия могут быть представлены двумя равенствами:

$$y(0) = 0 \text{ и } y(l) = 0, \quad (7.4)$$

где l – длина стержня. Полагая в (7.3) $x = 0$, с учетом первого граничного условия получаем $C_2 = 0$. При $x = l$ с учетом второго граничного условия имеем:

$$y(l) = 0 = C_1 \sin kl.$$

Отсюда видно, что второе граничное условие будет удовлетворено в том случае, если $\sin kl = 0$. Таким образом, аргумент синуса должен быть равен $kl = \pi n$ ($n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$). Одной волне изгиба стержня (рис. 7.2, б) соответствует значение $n = 1$. Оно позволяет определить то наименьшее значение критической сжимающей силы, при которой прямолинейная форма стержня оказывается неустойчивой.

Принимая во внимание введенное ранее обозначение для величины k , для критической силы получаем:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2} \quad (7.5)$$

Полученное соотношение носит название **формулы Эйлера**. Оно показывает, что критическая сила быстро уменьшается с увеличением длины стержня и возрастает с увеличением жесткости стержня на изгиб.

На устойчивость стержней сказываются также условия их закрепления. Так, величина критической силы для стержня с шарнирно закрепленными концами должна отличаться от ее величины для стержня, оба конца которого жестко защемлены. Кроме того, в общем случае поперечное сечение может не обладать свойством симметрии. Следовательно, момент инерции относительно разных осей будет иметь различные численные значения. Указанные факторы учитывает следующая формула, обобщающая формулу Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\nu l)^2}. \quad (7.6)$$

Здесь ν – коэффициент приведения длины стержня, значения которого зависят от условий его закрепления. Для стержня, жестко заземленного с обеих сторон, $\nu = 0.5$; для стержня, один конец которого заземлен жестко, а другой шарнирно, $\nu = 0.7$; при шарнирном закреплении обоих концов $\nu = 1$; для стержня, один конец которого жестко заземлен, а другой свободен, $\nu = 2$. Момент инерции I_{min} в формуле (7.6) вычисляется относительно той оси, когда он принимает наименьшее значение.

Пусть A – площадь поперечного сечения стержня. Тогда при достижении сжимающей силы F критического значения в материале стержня действуют критические напряжения $\sigma_{кр}$ равные:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{A(\nu l)^2}. \quad (7.7)$$

Величину $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$ называют минимальным **радиусом инерции** поперечного сечения. Используя это понятие, предыдущее соотношение можно записать в виде:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E (i_{min})^2}{(\nu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\nu l}{i_{min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (7.8)$$

где комплекс $\lambda = \frac{\nu l}{i_{min}}$ носит название **гибкости стержня**.

Соотношение (7.8) позволяет определить пределы применимости формулы Эйлера (7.6). Поскольку она выведена при условии справедливости закона Гука, должно выполняться условие: $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$. С учетом соотношения (7.8) получаем, что формула Эйлера применима, если гибкость стержня не меньше предельного значения $\lambda_{пр}$, равного:

$$\lambda_{пр} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}. \quad (7.9)$$

При меньших значениях гибкости формула Эйлера становится неприменимой. С физической точки зрения это означает, что длина стержня достаточно мала, и поведение материала начинают определять напряжения сжатия, вызванные сжимающей силой F , а не свойства устойчивости. Оценим величину предельной гибкости $\lambda_{пр}$ для стали, задаваясь значениями модуля продольной упругости $E =$

$2 \cdot 10^{11}$ Па и пределом пропорциональности $\sigma_{пц} = 2 \cdot 10^8$ Па. Подставив эти значения в (7.9), получим: $\lambda_{пр} \approx 100$.

На рис. 7.3 приведена так называемая диаграмма предельных напряжений для стали, которая позволяет установить величину напряжений в сжатом стержне, приводящую к потере его работоспособности. Если стержень достаточно короткий ($\lambda < 20$), то потеря работоспособности происходит за счет необратимых изменений самого материала, поскольку предел пропорциональности

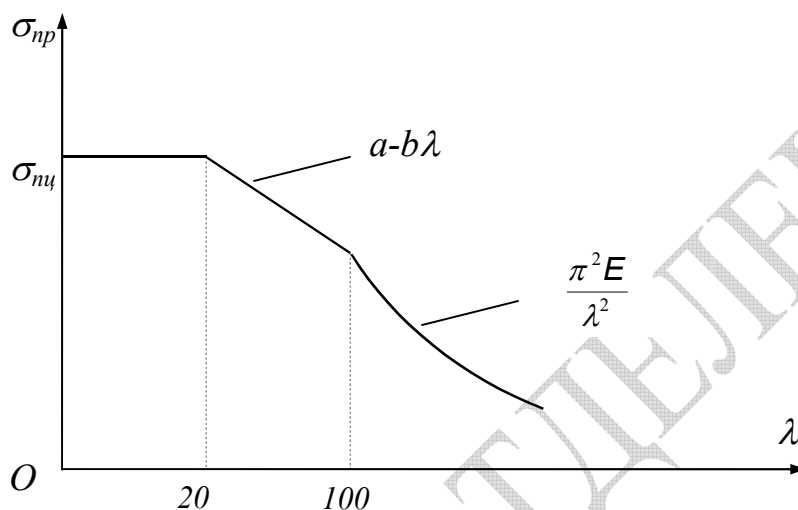


Рисунок 7.3

близок по величине к пределу текучести для пластичных материалов и пределу прочности – для хрупких. Если стержень достаточно длинный ($\lambda > 100$), то потеря работоспособности происходит вследствие потери устойчивости. Наконец, в промежуточной области ($20 < \lambda < 100$) предельные напряжения определяются эмпирической формулой Ясинского: $\sigma_{пр} = a - b\lambda$, в которой a, b – константы, зависящие от материала.

Формула Эйлера (7.6) позволяет судить о рациональной форме поперечного сечения стержней с точки зрения их устойчивости при осевом сжатии. Очевидно, что при заданной длине стержня и площади сечения более устойчивыми будут те стержни, в сечениях которых материал расположен по возможности дальше от главных центральных осей инерции и у которых моменты инерции I_x и I_y одинаковы. Действительно, в этом случае значение I_{min} будет наибольшим. Таким же будет и значение критической силы $F_{кр}$. Типовые профили стержней, удовлетворяющие этим требованиям, приведены на рис. 7.4.

Диаграмма предельных напряжений (рис. 7.3) позволяет сформулировать условие устойчивости сжатого стержня. Оно состоит

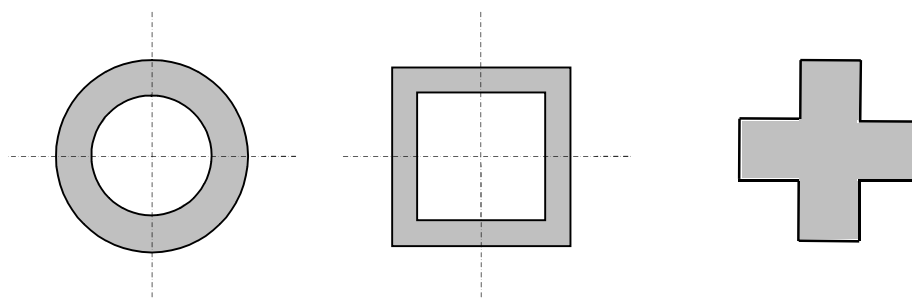


Рисунок 7.4

в требовании, чтобы максимальные напряжения в материале не превосходили предельных напряжений с определенным запасом:

$$\sigma_{\max} \leq \frac{\sigma_{\text{пр}}}{n_y} = [\sigma]_{\text{уст}} . \quad (7.10)$$

Здесь n_y – коэффициент запаса устойчивости. Его величина, как уже отмечалось, для типовых элементов оборудования стандартизована.

7.3. Устойчивость колец и тонкостенных оболочек под действием наружного давления

На устойчивость первоначальной геометрической формы рассчитываются и более сложные, чем прямолинейные стержни, элементы оборудования. Так, тонкостенные элементы корпусов аппаратов под действием внешних нагрузок, вызывающих сжатие стенок, могут потерять устойчивость (искривиться, сплющиться, образовать складки и т. п.). К нагрузкам, способным вызвать потерю устойчивости обычно относятся вес аппарата, его внутренних устройств и рабочей среды; ветровая и снеговая нагрузка, если аппарат установлен вне помещения на открытой площадке; наружное сжимающее давление, если аппарат снабжен теплообменной рубашкой с греющим паром высокого давления или работает под вакуумом (при пониженном давлении).

Нарушение работоспособности оболочек, связанное с потерей устойчивости, происходит при достижении сжимающими нагрузками (наружного давления) их некоторого **критического значения**. По своей физической природе потеря устойчивости оболочек во многом схожа с потерей устойчивости прямолинейных стержней при воздействии осевых сжимающих сил. Она выражается во внезапном скачкообразном изменении геометрической формы. Минимальное наружное давление, приводящее к потере устойчивости, называется

критическим (сравните с критической силой, вычисляемой по формуле Эйлера (7.6)).

Поскольку любую оболочку вращения можно представить как набор взаимосвязанных колец, первой стадией расчета оболочек на устойчивость является расчет на устойчивость колец. Этот вопрос представляет и самостоятельный интерес, т. к. корпуса технологических аппаратов очень часто снабжаются **кольцами жесткости** для увеличения несущей способности оболочек. Задача на устойчивость колец формулируется следующим образом. Пусть известны параметры кольца: средний радиус R , момент инерции поперечного сечения I , модуль продольной упругости материала E . Кольцо нагружено внешней обжимающей нагрузкой q , величина которой отнесена к единице длины кольца. Так что q представляет собой распределенную нагрузку с размерностью Н/м. При небольших значениях обжимающей нагрузки кольцо сохраняет свою первоначальную геометрическую форму. Однако как только величина q достигнет некоторого **критического значения** $q_{кр}$, кольцо потеряет устойчивость и приобретет форму эллипса (рис. 7.5).

Анализ внутренних усилий, возникающих в поперечных сечениях кольца при потере устойчивости приводит к следующему соотношению для критического значения $q_{кр}$:

$$q_{кр} = \frac{3EI}{R^3}. \quad (7.11)$$

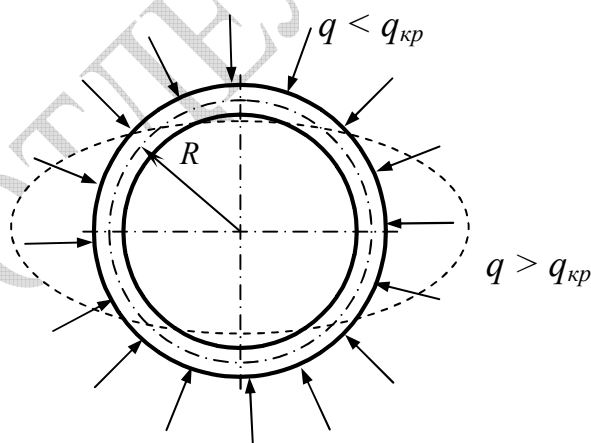


Рисунок 7.5

Полное значение обжимающей нагрузки $Q_{кр}$, приходящейся на все кольцо, может быть получено как произведение распределенной нагрузки на длину кольца:

$$Q_{кр} = q_{кр} \cdot 2\pi R = \frac{6\pi EI}{R^2}. \quad (7.12)$$

Сравнение полученной формулы с формулой Эйлера (7.6) показывает, что они совпадают с точностью до численного множителя. Роль характерного размера в одном случае играет длина стержня, а в другом – радиус кольца.

Формула (7.11), справедливая для кольца, может быть обобщена на случай тонкостенных длинных оболочек, нагруженных наружным давлением. Пусть имеется длинная цилиндрическая оболочка с

радиуса R , длиной h и толщиной стенки s . Оболочка нагружена наружным давлением p , критическое значение которого $p_{кр}$ требуется найти. Произведение давления на длину оболочки $p h$ имеет размерность Н/м, такую же, как распределенная нагрузка q . Поэтому связь между критическими значениями $p_{кр}$ и $q_{кр}$ имеет вид:

$$q_{кр} = p_{кр} h \quad \text{или} \quad p_{кр} = \frac{q_{кр}}{h}.$$

Воспользуемся формулой (7.11), выразив в последнем соотношении критическое значение распределенной нагрузки:

$$p_{кр} = \frac{q_{кр}}{h} = \frac{3EI}{hR^3}.$$

Для тонкостенной цилиндрической оболочки длиной h и толщиной стенки s жесткость EI определяется формулой:

$$EI = \frac{Es^3 h}{12(1 - \mu^2)}, \quad (7.13)$$

где коэффициент Пуассона μ отражает взаимосвязанность колец, на которые мысленно разбита цилиндрическая оболочка. Окончательно, для величины критического давления получаем соотношение:

$$p_{кр} = \frac{E}{4(1 - \mu^2)} \cdot \frac{s^3}{R^3}. \quad (7.14)$$

При расчете на устойчивость цилиндрических обечаек вводится определенный запас устойчивости. Так что допускаемое наружное давление $[p]$, входящее в условие устойчивости ($p_n \leq [p]$), связано с величиной критического давления коэффициентом запаса устойчивости $n_y = 2.4$:

$$[p] = p_{кр} / n_y. \quad (7.15)$$

Таким образом, условие устойчивости длинной цилиндрической оболочки под действием наружного давления p_n в развернутом виде может быть записано следующим образом:

$$P_n \leq \frac{E}{4(1 - \mu^2) \cdot n_y} \cdot \frac{s^3}{r_{cp}^3} . \quad (7.16)$$

7.4. Контрольные вопросы

1. Что понимается под устойчивостью некоторого состояния системы?
2. Каким образом может вести себя система при наложении на нее возмущающего воздействия?
3. Приведите примеры элементов химического оборудования, которые могут выйти из строя из-за потери устойчивости.
4. Как происходит потеря устойчивости прямолинейных стержней при их осевом сжатии?
5. Что такое критическая сила? Как вводится запас устойчивости при расчете по этому критерию работоспособности?
6. Запишите формулу Эйлера для критической силы. От чего зависит ее величина?
7. При каких допущениях справедлива формула Эйлера? Какова область ее применимости?
8. Как влияет способ закрепления стержня на величину критической силы?
9. Что такое радиус инерции поперечного сечения?
10. От чего зависит гибкость стержня?
11. Поясните смысл диаграммы предельных напряжений.
12. Что понимается под рациональной формой поперечного сечения при анализе устойчивости?
13. В чем выражается потеря устойчивости колец и тонкостенных оболочек при нагружении их внешним давлением?
14. Что такое критическое давление и от чего оно зависит при анализе устойчивости тонкостенных оболочек?

Глава 8. Внутренние силовые факторы в статически неопределимых стержневых системах

8.1. Статически неопределимые системы

Относительное положение отдельных элементов оборудования или конструкций фиксируется наложением на них определенных связей, исключающих то или иное обобщенное перемещение некоторых точек. При этом перемещения других точек возможны как за счет деформации материала, так и за счет движения элементов конструкции в целом. Если последнее невозможно, то конструкцию называют **геометрически неизменяемой**. В таких конструкциях перемещения точек обусловлены только деформацией материала под действием внешних сил.

То число связей, при котором достигается геометрическая неизменяемость конструкции, носит название **необходимого числа связей**. Например, для плоской стержневой системы необходимое число связей равно трем. В этом случае, как было показано в главе 2, реакции связей и внутренние силовые факторы могут быть найдены из уравнений статики. Подобные конструкции, в которых внутренние усилия определяются только из условий равновесия, называются **статически определимыми**.

Всякую связь, наложенную сверх необходимых, называют **дополнительной**. Если на систему или конструкцию наложены дополнительные связи, то уравнений статики недостаточно для определения реакций связей и внутренних усилий. Для их нахождения требуется привлечение некоторых дополнительных уравнений, полученных на основе определенных соображений. Любую систему с дополнительными связями называют **статически неопределимой**, а число дополнительных связей – **степенью статической неопределимости**. Из этого определения следует, что степень статической неопределимости равна разности между числом неизвестных усилий и количеством независимых уравнений статики. На практике большинство конструкций являются статически неопределимыми.

Анализ статически неопределимых систем начинается с определения степени их статической неопределимости. Число независимых уравнений статики для плоских систем, которые рассматриваются в этом пособии, равно трем. Следовательно, необходимо уметь находить число наложенных на систему связей. В общем случае они делятся на **внешние** и **внутренние**. Внешние связи накладывают ограничения на абсолютные перемещения некоторых точек конструкции. Они подробно обсуждались в разделе «Статика». Внутренние (или взаимные) связи накладывают ограничения на взаимные смещения элементов конструкции. Так, в любой точке

замкнутого контура стержневой системы (рис. 8.1) наложены три внутренних связи, исключающие горизонтальное и вертикальное смещения, а также поворот двух соседних сечений относительно друг друга. Поэтому общее число связей в системе, изображенной на рис. 8.1, а, равно девяти, а степень статической неопределимости – шести.

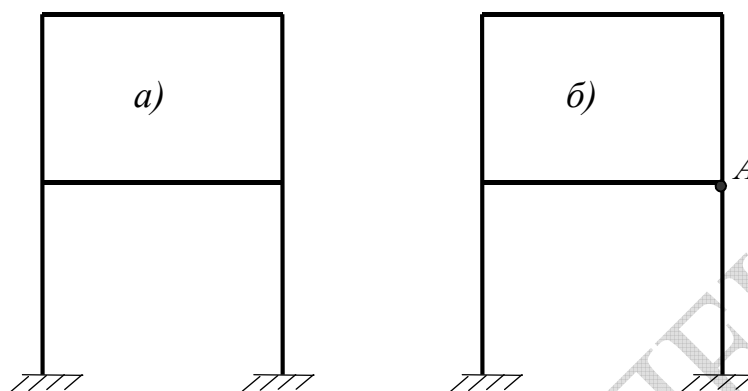


Рисунок 8.1

Шарнир в стержневой системе снимает число связей на единицу меньше, чем число сходящихся в нем стержней. Так что общее количество связей в конструкции, снабженной шарниром А, на рис. 8.1, б равно семи, а степень статической неопределимости – четырем.

Для расчета статически неопределимых конструкций необходимо к уравнениям равновесия составить дополнительные уравнения, число которых совпадает со степенью статической неопределимости конструкции. Наиболее распространенным методом раскрытия статической неопределимости конструкций является метод сил, который будет подробно рассмотрен ниже. Сейчас же на простом примере проиллюстрируем один из способов раскрытия статической неопределимости, основанный на сравнении перемещений отдельных частей конструкции. Пусть требуется определить напряжения в стержне, изображенном на рис. 8.2, и нагруженном единственной осевой силой F . Известными считаются расстояния a и b , а также площадь поперечного сечения A стержня.

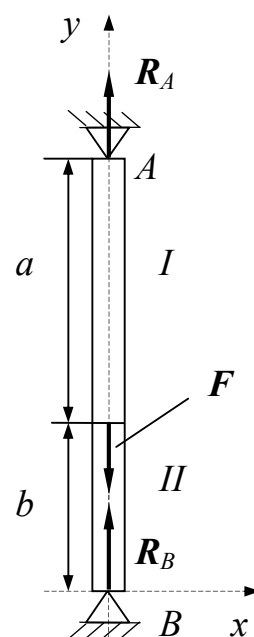


Рисунок 8.2

Поскольку линии действия всех сил совпадают, уравнений статики можно составить только одно:

$$R_A + R_B - F = 0. \quad (8.1)$$

В то же время неизвестных сил две: R_A и R_B . Поэтому степень статической неопределимости стержня равна единице. Следовательно, требуется еще одно уравнение для определения неизвестных сил. Это уравнение можно составить исходя из условия совместности перемещений нижней и верхней частей стержня. В самом деле, верхняя часть стержня под действием сил растяжения удлинится на столько же, на сколько укоротится нижняя часть стержня под действием сжимающих усилий, т. е. $\Delta l_I = \Delta l_{II}$. Предполагая, что справедлив закон Гука, для перемещений можем записать:

$$\Delta l_I = \frac{N_I a}{EA} \quad \text{и} \quad \Delta l_{II} = \frac{N_{II} b}{EA},$$

где N_I и N_{II} – продольные силы на грузовых участках I и II. Метод сечений без труда позволяет установить, что эти силы по величине совпадают с реакциями опор: $N_I = R_A$ и $N_{II} = R_B$. Таким образом, условие совместности перемещений приводит к следующему уравнению:

$$N_I a + N_{II} b = 0,$$

которое вместе с уравнением равновесия (8.1) дает замкнутую систему алгебраических уравнений для определения реакций опор. Ее решения, очевидно, суть:

$$N_I = \frac{bF}{a+b} \quad \text{и} \quad N_{II} = -\frac{bF}{a+b}.$$

Напряжения получим, разделив каждую из продольных сил на площадь поперечного сечения стержня.

8.2. Канонические уравнения метода сил

Основная идея метода сил состоит в том, что заданная статически неопределимая система мысленно освобождается от дополнительных («лишних») связей как внешних, так и внутренних. Тем самым система становится статически определимой. Она называется **основной системой**. Действие отброшенных «лишних» связей заменяется неизвестными силами и моментами (обобщенными силами). Значения этих обобщенных сил подбираются затем таким образом, чтобы перемещения системы соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на нее отброшенными связями.

Пусть на некоторую материальную систему действует набор обобщенных сил P_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Обозначим через Δ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) совокупность обобщенных перемещений (линейных и угловых) тех точек системы, где приложены силы P_i . Вследствие принципа независимости действия сил в пределах справедливости закона Гука между величинами Δ_i и P_i имеет место линейная зависимость:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} P_j . \quad (8.2)$$

Матрица, составленная из коэффициентов пропорциональности δ_{ij} , называется **матрицей податливости конструкции**. Физический смысл коэффициентов δ_{ij} легко установить, если в соотношении (8.2) принять $P_i = 1$, положив все остальные силы равными нулю. В этом случае $\delta_{ij} = \Delta_i$, т.е. величина δ_{ij} представляет собой перемещение в точке приложения и по направлению i -ой обобщенной силы под действием единичной обобщенной силы, приложенной к системе вместо силы P_i .

Линейные соотношения (8.2) лежат в основе метода сил. Допустим, что степень статической неопределимости конструкции равна m . Следовательно, для раскрытия статической неопределимости необходимо отбросить m «лишних» связей, а их действие заменить неизвестными обобщенными силами X_1, X_2, \dots, X_m . Вследствие ограничений, наложенных отброшенными связями, точки приложения сил X_i перемещений не получают. Поэтому соотношения (8.2), записанные для сечений, в которых введены силы X_i , примут вид:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1m} X_m + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2m} X_m + \Delta_{2P} &= 0, \\ \delta_{m1} X_1 + \delta_{m2} X_2 + \dots + \delta_{mm} X_m + \Delta_{mP} &= 0, \end{aligned} \quad (8.3)$$

Здесь Δ_{iP} - перемещение точки приложения обобщенной силы X_i под действием заданных внешних сил. Совокупность равенств (8.3) можно рассматривать как систему уравнений для определения неизвестных реакций отброшенных связей X_i . Эта система носит название **системы канонических уравнений метода сил**.

Рассмотрим метод сил применительно к простейшим стержневым системам – плоским рамам. При этом будем исходить из допущения, что перемещения всех сечений стержней, образующих раму, обусловлены, главным образом, действием

изгибающих моментов, так что перемещениями, вызванными продольными и поперечными силами, можно пренебречь. Как показывают численные оценки, это допущение выполняется практически всегда. Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений могут быть найдены с помощью интегралов Мора (6.6). При этом отличными от нуля будут только те слагаемые, которые отвечают изгибу стержней в плоскости рамы:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{l_k} \frac{M_{i1} M_{j1}}{EI_z} dx ; \quad \Delta_{iP} = \sum_{k=1}^N \int_{l_k} \frac{M_P M_{i1}}{EI_z} dx . \quad (8.4)$$

Здесь суммирование ведется по всем стержням, составляющим раму. Подынтегральными функциями в первом равенстве в соответствии с физическим смыслом коэффициентов δ_{ij} являются произведения двух эпюр изгибающих моментов, обусловленных действием единичных обобщенных сил, приложенных вместо сил X_i и X_j . Во втором равенстве под знаком интеграла стоят изгибающий момент, обусловленный внешними нагрузками, и изгибающий момент, обусловленный действием единичной обобщенной силы, приложенной вместо силы X_i . EI - жесткость стержней на изгиб.

После того, как все коэффициенты системы канонических уравнений метода сил будут найдены, ее решение позволяет определить значения реакций отброшенных связей X_i . Далее, из уравнений статики вычисляются опорные реакции остальных связей и строятся эпюры всех перечисленных выше внутренних силовых факторов.

8.3. Расчет статически неопределимой рамы методом сил

Проиллюстрируем метод сил на примере решения конкретной задачи. Пусть имеется рама, представленная на рис. 8.3. Длины входящих в нее стержней и внешние нагрузки заданы. Требуется построить эпюры внутренних силовых факторов.

Прежде всего, определим степень статической неопределимости. Число наложенных связей равно пяти, уравнений статики три. Следовательно, степень статической неопределимости равна двум. Это означает, что система канонических уравнений будет содержать два уравнения.

Теперь получим основную систему, сняв две «лишних» связи и заменив их силовое воздействие соответствующими неизвестными усилиями. Основных систем, как правило, можно подобрать

несколько. При этом необходимо убедиться в геометрической неизменяемости системы. В нашем примере существует три варианта основной системы. Первый: убрать правую опору полностью. Второй: заменить правую опору на шарнирно подвижную, а слева вместо жесткой заделки оставить шарнирно неподвижную опору. Наконец, третий: заменить жесткую заделку на шарнирно подвижную опору. Остановимся для определенности на втором варианте (рис. 8.4). В раме вместо удаленной связи на опоре A введена пара сил с моментом X_1 , а вместо удаленной связи на опоре B — сила X_2 . Выбранную основную систему дополним заданными внешними силами и неизвестными усилиями, заменяющими действие отброшенных «лишних» связей. Полученную систему называют **эквивалентной системой**. Все внутренние силовые факторы и все перемещения в эквивалентной системе точно такие же, как и в исходной раме. Система канонических уравнений (8.3) в данном случае примет вид:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0,$$

(8.5)

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Для нахождения коэффициентов в этом уравнении воспользуемся методом Верещагина для определения перемещений. В соответствии с формулами (8.4), чтобы вычислить коэффициенты δ_{ij} строим эпюры изгибающих моментов от единичных обобщенных сил, приложенных в направлении X_1 и X_2 . Для единичного момента на опоре A получим эпюру изгибающего момента M_{11} , представленную на рис. 8.5. Там же указаны обозначения для площадей эпюр ω_i , местоположение их центра тяжести и ординат η_i — всех величин, которые используются в методе Верещагина.

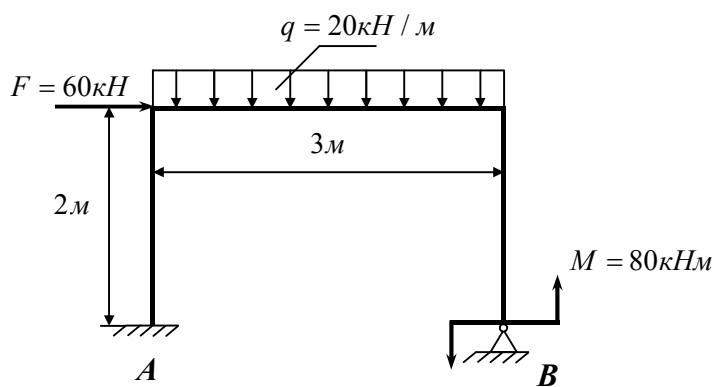


Рисунок 8.3

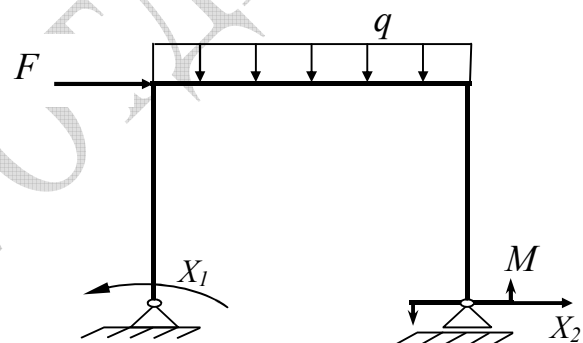


Рисунок 8.4

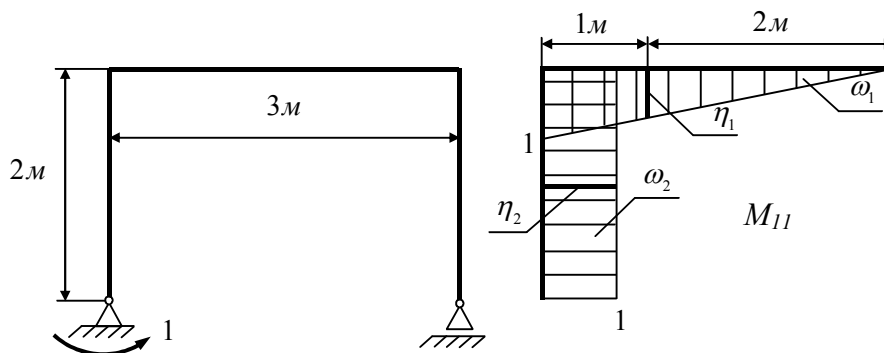


Рисунок 8.5

Находим площади ω_1 и ω_2 и ординаты η_1 и η_2 в точках с координатами центров тяжести площадей ω_1 и ω_2 . Из рис. 8.5 видно, что $\omega_1 = 1,5 \text{ м}^2$, $\omega_2 = 2 \text{ м}^2$. Ординаты η_1 и η_2 соответственно равны: $\eta_1 = 2/3 \text{ Нм}$ и $\eta_2 = 1 \text{ Нм}$. Коэффициент δ_{11} получим в результате перемножения эпюры M_{11} саму на себя:

$$\delta_{11} = \frac{\omega_1 \cdot \eta_1 + \omega_2 \eta_2}{EI} = \frac{1,5 \cdot 2/3 + 2 \cdot 1}{EI} = \frac{3}{EI}.$$

Для единичной силы на опоре B строим эпюру изгибающего момента M_{12} , обусловленного действием этой силы. Она представлена на рис. 8.6.

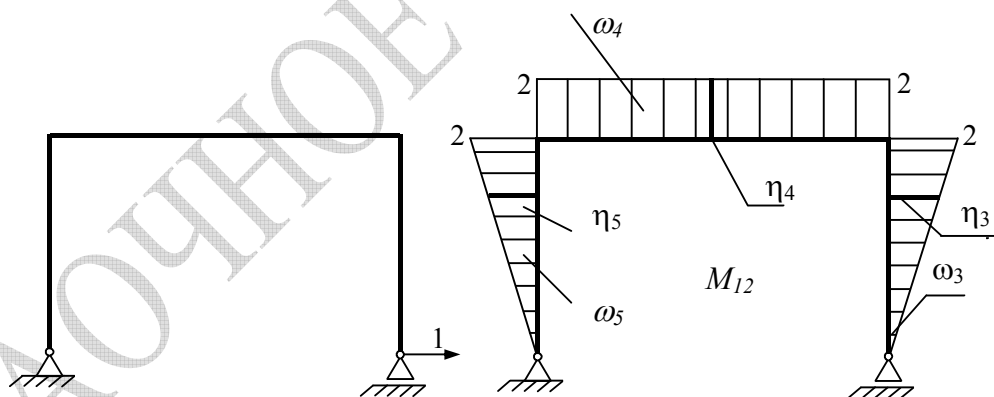


Рисунок 8.6

Находим площади и ординаты эпюры на каждом грузовом участке, а затем коэффициент δ_{22} :

$$\omega_3 = \omega_5 = 2 \text{ м}^2; \quad \eta_3 = \eta_5 = 4/3 \text{ Нм}.$$

$$\omega_4 = 6 \text{ м}^2; \quad \eta_4 = 2 \text{ Нм}.$$

$$\delta_{22} = \frac{\omega_3 \cdot \eta_3 + \omega_4 \eta_4 + \omega_5 \cdot \eta_5}{EI} = \frac{2 \cdot 4/3 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 4/3}{EI} = \frac{52}{3EI}.$$

Коэффициенты δ_{12} и δ_{21} в силу теоремы Бетти одинаковы по величине и могут быть получены в результате перемножения эпюр M_{11} и M_{12} . Для этих коэффициентов метод Верещагина дает:

$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{5}{EI}$. Таким образом, все коэффициенты при неизвестных в системе уравнений (8.5) получены.

Для нахождения свободных членов Δ_{1P} и Δ_{2P} этих уравнений необходимо построить эпюры изгибающих моментов от внешних сил и перемножить их на эпюры M_{11} и M_{12} . Эпюра от внешних усилий представлена на рис. 8.7. Перемножение этой эпюры на эпюры от единичных сил с помощью метода Верещагина – достаточно трудоемкая процедура. Удобно воспользоваться одним из методов вычислительной математики. Он основан на приближенном вычислении определенного интеграла с помощью формулы Симпсона:

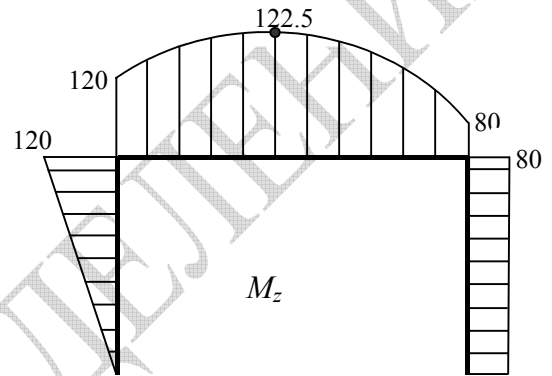


Рисунок 8.7

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (8.6)$$

Согласно этой формуле для приближенного вычисления определенного интеграла достаточно знать значения подынтегральной функции на концах и в середине промежутка интегрирования. Если подынтегральная функция является квадратичной или линейной, то формула (8.6) дает точный результат.

Чтобы воспользоваться формулой Симпсона при вычислении интеграла Мора на некотором грузовом участке нужно знать значения перемножаемых эпюр на концах этого участка и в его середине. При перемножении эпюр M_{11} (рис. 8.5) и M_z (рис. 8.7) имеем:

$$\Delta_{1P} = -\frac{3/6 \cdot (120 \cdot 1 + 4 \cdot 122,5 \cdot 0,5) - 2/6 \cdot (120 \cdot 1 + 4 \cdot 60 \cdot 1)}{EI} = -\frac{302,5}{EI}.$$

Здесь учтено, что если значения эпюр лежат по разные стороны от нулевой линии, то их произведение берется со знаком «-». При перемножении эпюр M_{12} (рис. 8.6) и M_z (рис. 8.7) получим:

$$\Delta_{2P} = \frac{3/6 \cdot (120 \cdot 2 + 4 \cdot 122,5 \cdot 2 + 80 \cdot 2) + 2/6 \cdot (80 \cdot 2 + 4 \cdot 80 \cdot 1) + 2/6 \cdot (120 \cdot 4 + 4 \cdot 60 \cdot 1)}{EI} =$$

$$= \frac{1010}{EI}.$$

Найденные значения коэффициентов δ_{ij} при неизвестных обобщенных силах, а также свободные члены уравнений Δ_{iP} подставим в систему (8.5):

$$\frac{3}{EI} X_1 - \frac{5}{EI} X_2 = \frac{302,5}{EI},$$

$$-\frac{5}{EI} X_1 + \frac{52}{3EI} X_2 = -\frac{1010}{EI}.$$

Решением системы являются значения: $X_1 = 7,16$ и $X_2 = -56,2$. Таким образом, реакция отброшенной связи на опоре А (рис. 8.3) равна 7,16 кНм, а реакция отброшенной связи на опоре В равна – 56,2 кН.

Составляя уравнения равновесия для рамы, находим остальные реакции: $X_A = -3,8$ кН, $Y_A = 19,05$ кН, $Y_B = 40,95$ кН. Все найденные реакции в дополнение к заданным внешним усилиям дают полную картину нагружения рамы (рис. 8.8).

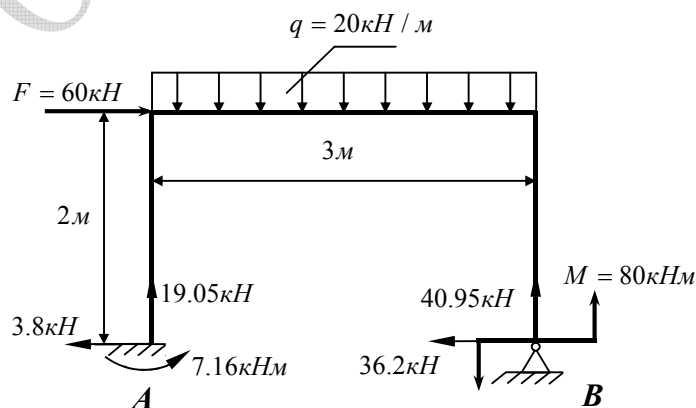


Рисунок 8.8

Поэтому с помощью методов, изложенных в параграфе 2.5, нетрудно построить эпюры внутренних силовых факторов: продольной силы, поперечной силы и изгибающего момента. Указанные эпюры приведены на рис. 8.9.

Правильность решения задачи может быть проверена с помощью так называемой **капитальной проверки**. Она состоит в вычислении тех перемещений, которые исключены «лишними» связями. Если задача решена правильно, такие перемещения должны быть равны нулю. Оба указанных перемещения могут быть получены в результате перемножения итоговой эпюры изгибающего момента (рис. 8.9) и

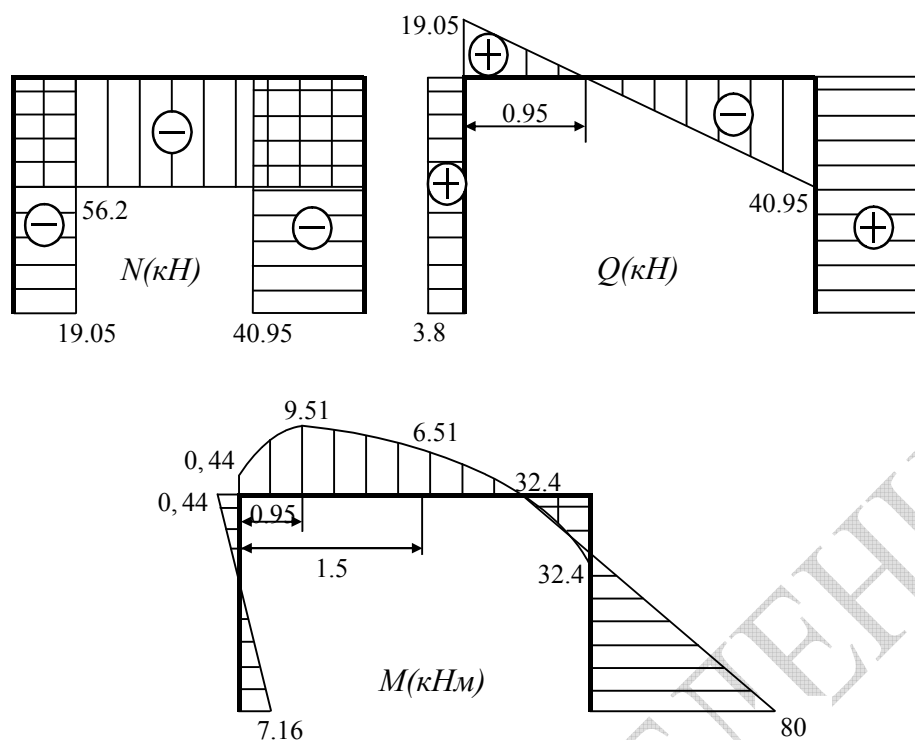


Рисунок 8.9

единичных эпюр M_{11} и M_{12} , приведенных на рис. 8.5 и рис. 8.6. При этом целесообразно воспользоваться формулой Симпсона.

8.4. Раскрытие статической неопределимости методом конечных элементов

Метод конечных элементов является в настоящее время наиболее универсальным при анализе внутренних усилий в статически неопределимых конструкциях. Он основан на следующих допущениях.

1. Любой элемент конструкции и конструкция в целом могут быть представлены в виде совокупности составных частей (конечных элементов), взаимодействующих в конечном числе точек (узлов).
2. Перемещение любой точки отдельного конечного элемента однозначно определяется перемещениями его узлов. Функция, определяющая перемещения точек конечного элемента через узловые перемещения, называется **функцией формы**.
3. Каждый конечный элемент нагружен только усилиями, передаваемыми узлами (узловыми усилиями). Все внешние силы, действующие на конструкцию, приложены в узлах.

Применительно к стержневым системам конечный элемент будет представлять собой отдельный стержень или его часть. Выделим один такой элемент (стержень) длиной a (рис. 8.10). Предположим, что стержень находится в условиях плоского изгиба. Следовательно, напряжения и перемещения, вызванные продольными силами,

пренебрежимо малы. Таким образом, обобщенными узловыми усилиями являются поперечные силы (R_1 и R_3) и изгибающие моменты (R_2 и R_4). Узловыми перемещениями являются прогибы (δ_1 и δ_3) и углы поворота узловых поперечных сечений стержня (δ_2 и δ_4).

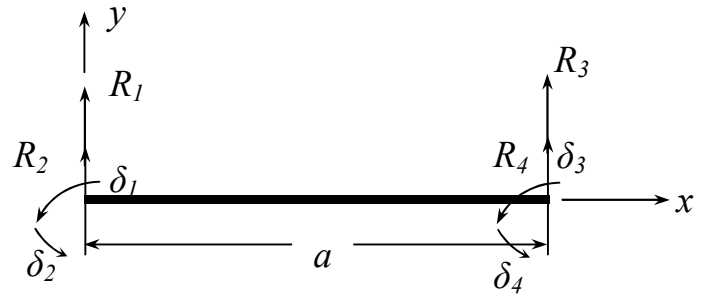


Рисунок 8.10

В пределах действия закона Гука между вектором узловых усилий $\{R\}$ и вектором узловых перемещений $\{\delta\}$ существует линейная зависимость:

$$\{R\} = \{K\} \{\delta\},$$

где $\{K\}$ – квадратная матрица размерности $[4 \times 4]$, называемая **матрицей жесткости конечного элемента**. Из материала параграфа 5.5 известно, что упругой линией стержня при нагружении его сосредоточенной силой является парабола третьей степени, а при нагружении парой сил (сосредоточенным моментом) – парабола второй степени. Поскольку рассматриваемый стержень (конечный элемент) нагружен только силами (R_1 и R_3) и парами сил (R_2 и R_4), следовательно, упругую линию можно аппроксимировать параболой третьей степени следующего вида:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3, \quad (8.7)$$

где α_i – коэффициенты, которые можно определить из граничных условий. Действительно, на левом конце элемента имеем:

$$\text{при } x = 0 \quad y = \delta_1; \quad \theta = y' = \delta_2, \quad (8.8)$$

$$\text{при } x = a \quad y = \delta_3; \quad \theta = y' = \delta_4. \quad (8.9)$$

Зависимость угла поворота сечений от координаты x получим, продифференцировав (8.7) по координате:

$$y' = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2. \quad (8.10)$$

Подставляя (8.8) и (8.9) в равенства (8.7) и (8.10) и решая полученные уравнения относительно коэффициентов α_i , приходим к следующим представлениям этих коэффициентов через узловые перемещения:

$$\alpha_0 = \delta_1; \quad \alpha_1 = \delta_2; \quad \alpha_2 = (-3\delta_1 - 2a\delta_2 + 3\delta_3 - a\delta_4) / a^2;$$

$$\alpha_3 = (2\delta_1 + a\delta_2 - 2\delta_3 + a\delta_4) / a^3.$$

Тогда зависимость (8.7) прогиба сечений конечного элемента при произвольном значении координаты x примет вид:

$$y(x) = \sum_{i=1}^4 \Theta_i(x) \delta_i, \quad (8.11)$$

где функции Θ_i зависят только от длины элемента:

$$\Theta_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x^3}{a^3}; \quad \Theta_2(x) = x - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2};$$

(8.12)

$$\Theta_3(x) = \frac{3x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3}; \quad \Theta_4(x) = -\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}.$$

Зависимость (8.10) угла поворота также выражается через функции Θ_i следующим образом:

$$y'(x) = \sum_{i=1}^4 \Theta'_i(x) \delta_i. \quad (8.13)$$

Функции (8.11) и (8.13) выражают перемещение любой точки стержня через узловые перемещения. Они являются в данном случае функциями формы. Зависимости Θ_i , которыми определяются выражения (8.11) и (8.13), называются одномерными функциями Эрмита. Физический смысл функции Эрмита с номером i можно выяснить, если положить $\delta_i = 1$, а остальные перемещения принять равными нулю. Тогда получим: $y(x) = \Theta_i(x)$, т. е. функция Эрмита определяет уравнение упругой линии стержня при единичном узловом перемещении с этим же номером.

Важную роль в методе конечных элементов играет явный вид коэффициентов матрицы жесткости, связывающей узловые усилия и узловые перемещения. Для определения этих коэффициентов предположим, что сумма работ узловых усилий на узловых перемещениях равна изменению потенциальной энергии упругой деформации стержня, т. е.

$$\sum_{i=1}^4 \frac{R_i \delta_i}{2} = U. \quad (8.14)$$

При плоском поперечном изгибе потенциальная энергия упругой деформации определяется только изгибающим моментом:

$$U = \int_0^a \frac{M^2(x)}{2EI} dx ,$$

где $M(x)$ – изгибающий момент, EI – жесткость стержня при изгибе. Изгибающий момент, стоящий под знаком интеграла, выразим с помощью дифференциального уравнения изогнутой оси стержня (5.24):

$$M(x) = Ely''(x) \quad \text{или} \quad M^2(x) = (EI)^2 [y''(x)]^2.$$

Тогда потенциальная энергия U будет выражаться только через прогиб стержня:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a EI [y''(x)]^2 dx . \quad (8.15)$$

Вторая производная от прогиба, согласно (8.13) может быть выражена через функции Эрмита:

$$y''(x) = \sum_{i=1}^4 \mathcal{H}_i''(x) \delta_i ,$$

а ее квадрат, очевидно, равен:

$$[y''(x)]^2 = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 \mathcal{H}_j''(x) \mathcal{H}_i''(x) \delta_i \delta_j .$$

Осталось подставить это выражение в (8.15), а затем приравнять его к левой части равенства (8.14):

$$\sum_{i=1}^4 R_i \delta_i = EI \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 \delta_i \delta_j \int_0^a \mathcal{H}_i''(x) \mathcal{H}_j''(x) dx .$$

В полученном соотношении коэффициенты при δ_i слева и справа должны быть одинаковы. В силу этого условия окончательно приходим к следующим соотношениям, связывающим обобщенные узловые усилия и обобщенные узловые перемещения:

$$R_i = \sum_{j=1}^4 K_{ij} \delta_j, \quad \text{где} \quad K_{ij} = EI \int_0^a \Theta_i''(x) \Theta_j''(x) dx.$$

Если в соотношения для коэффициентов K_{ij} матрицы жесткости подставить функции Эрмита (8.12) и вычислить полученные интегралы, то связь между узловыми усилиями и узловыми перемещениями будет описываться четырьмя алгебраическими соотношениями:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{12EI}{a^3} \delta_1 + \frac{6EI}{a^2} \delta_2 - \frac{12EI}{a^3} \delta_3 + \frac{6EI}{a^2} \delta_4; \\ R_2 &= \frac{6EI}{a^2} \delta_1 + \frac{4EI}{a} \delta_2 - \frac{6EI}{a^2} \delta_3 + \frac{2EI}{a} \delta_4; \\ R_3 &= -\frac{12EI}{a^3} \delta_1 - \frac{6EI}{a^2} \delta_2 + \frac{12EI}{a^3} \delta_3 - \frac{6EI}{a^2} \delta_4; \\ R_4 &= \frac{6EI}{a^2} \delta_1 + \frac{2EI}{a} \delta_2 - \frac{6EI}{a^2} \delta_3 + \frac{4EI}{a} \delta_4. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Эти соотношения дают возможность понять физический смысл коэффициентов матрицы жесткости. Если в i -ой строчке положить все коэффициенты равными нулю, а коэффициент K_{ij} равным единице, то получим $R_i = K_{ij}$, т. е. коэффициент K_{ij} представляет собой узловое усилие в i -ом направлении при единичном узловом смещении в j -ом направлении.

Для иллюстрации метода конечных элементов рассмотрим раму (рис. 8.11), нагруженную распределенной нагрузкой и сосредоточенной силой. Разобьем ее на конечные элементы (стержни) таким образом, чтобы все внешние силы были приложены в узлах. В данном случае в качестве конечных элементов удобно принять отдельные грузовые участки. Чтобы удовлетворить допущению 3, сформулированному в начале параграфа, необходимо распределенную нагрузку заменить эквивалентными узловыми усилиями. Под понятием эквивалентности здесь имеется в виду условие, при котором работа обобщенных сил P_i на узловых

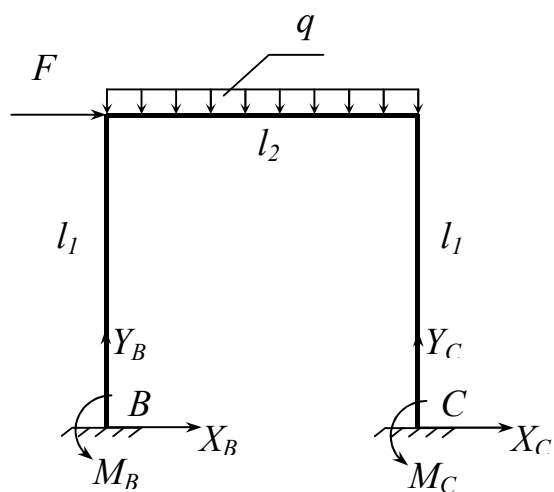


Рисунок 8.11

перемещениях δ_l равна работе нагрузки q на перемещениях стержня (рис. 8.12). Это условие выполняется, если распределенную нагрузку q заменить узловыми усилиями следующей величины:

$$P_1 = P_3 = a q / 2;$$

$$P_2 = q a^2 / 12; \quad P_4 = - q a^2 / 12;$$

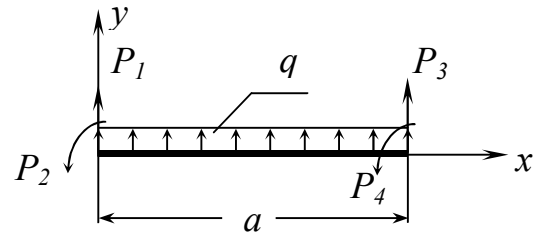


Рисунок 8.12

После замены распределенной нагрузки эквивалентными узловыми усилиями решение задачи начинается с разбиения исходной рамы на конечные элементы (рис. 8.13). При этом удобно пронумеровать конечные элементы и все возможные узловые перемещения. Далее необходимо определить число независимых перемещений, которые допускаются связями. В рассматриваемом примере перемещения $\delta_1, \delta_2, \delta_9, \delta_{10}$ связями не допускаются.

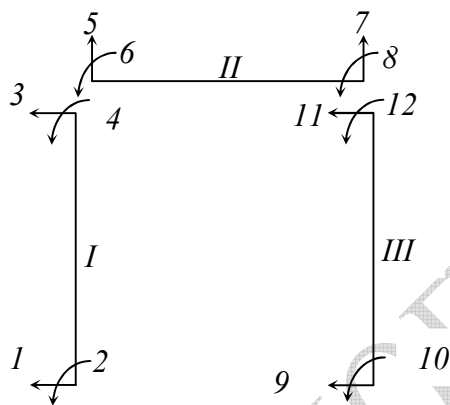


Рисунок 8.13

Перемещения δ_5 и δ_7 также равны нулю в силу допущения о том, что все перемещения могут быть обусловлены только изгибом. Перемещения $\delta_4 = \delta_6$, а $\delta_8 = \delta_{12}$, поскольку они характеризуют угол поворота одних и тех же узлов. Наконец, перемещения δ_3 и δ_{11} также одинаковы, т. к. растяжение элемента II пренебрежимо мало. Таким образом, число независимых перемещений, которые допускаются связями, равно трем. Это перемещения δ_3, δ_4 и δ_8 . Для

их определения требуется составить три уравнения. Эти уравнения можно получить из условия равновесия узлов рамы, в которые будут входить как неизвестные узловые усилия, так и заданные внешние нагрузки. Так, для левого узла рамы указанное уравнение равновесия по силам, очевидно, будет иметь вид:

$$R_3 + R_{11} + F = 0.$$

Уравнение равновесия по моментам для этого же узла с учетом замены распределенной нагрузки на эквивалентные узловые усилия запишется следующим образом:

$$R_4 + R_6 + q l_2^2 / 12 = 0.$$

Уравнение равновесия по моментам для другого узла рамы будет аналогичным:

$$R_8 + R_{12} - q l_2^2 / 12 = 0.$$

Следующий этап решения состоит в подстановке в уравнения равновесия соотношений (8.16). При этом нужно учесть, какие из перемещений равны нулю, а какие из них одинаковы. В результате получится три алгебраических уравнения для трех неизвестных перемещений. После их решения и последующей подстановки в соотношения (8.16) найдутся все неизвестные узловые усилия. Далее из условий равновесия узлов *B* и *C* находятся опорные реакции, а затем внутренние силовые факторы во всех стержнях рамы.

Предложенная схема решения применима не только для стержневых систем, но и для более сложных конструкций, что делает метод конечных элементов универсальным инструментом для анализа напряженных состояний самых сложных изделий и элементов оборудования.

8.5. Контрольные вопросы

1. Какие конструкции называют статически неопределимыми и что такое степень статической неопределимости?
2. Какие связи называют необходимыми, а какие дополнительными?
3. Как находится степень статической неопределимости конструкции?
4. Что понимается под термином «раскрытие статической неопределимости»?
5. Какие существуют методы раскрытия статической неопределимости?
6. В чем состоит основная идея метода сил?
7. Каков физический смысл коэффициентов канонических уравнений метода сил и как они вычисляются?
8. В чем смысл капитальной проверки в методе сил?
9. Назовите основные допущения метода конечных элементов.
10. Что характеризуют элементы матрицы жесткости конечного элемента?
11. Каков смысл функций Эрмита?
12. Как снимается статическая неопределимость конструкции в методе конечных элементов?

Глава 9. Напряженное состояние тонкостенных оболочек

9.1. Типовые оболочки химико-технологических аппаратов

До сих пор рассматривалось напряженное состояние материала в элементах оборудования, имеющих расчетную схему стержня. Однако во многих случаях эта расчетная схема неприменима. В первую очередь это корпуса технологических аппаратов, днища и крышки емкостей и резервуаров, перегородки и трубные решетки теплообменников, распределительные устройства скрубберов и многое другое. Перечисленные элементы оборудования приходится моделировать более сложной расчетной схемой – оболочкой. Напомним, что оболочкой называется геометрическое тело, одно из измерений которого (толщина) существенно меньше двух других его измерений. В настоящем разделе расчетная схема оболочки применена в первую очередь к элементам корпусов химико-технологических аппаратов, работающих при повышенном давлении. Правомерность такого применения оправдана только для так называемых **тонкостенных аппаратов**. Тонкостенными принято считать такие сосуды и аппараты, у которых толщина стенок, по крайней мере, на порядок меньше внутреннего диаметра.

Корпуса технологических аппаратов состоят из набора пластин и оболочек различной конфигурации, соединенных между собой как неразъемными (например, сварными), так и разъемными (например, фланцевыми) соединениями. Любая оболочка имеет две основных поверхности: внутреннюю и наружную. Условная поверхность, точки которой находятся на одинаковом расстоянии от двух основных поверхностей, называется **срединной**. Анализ и классификация оболочек определяются видом именно срединной поверхности. **Оболочкой вращения** называется такая оболочка, срединная поверхность которой образована в результате вращения плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости этой кривой. Частным случаем оболочки является пластина, срединной поверхностью которой служит часть плоскости. На рис. 9.1, а приведена схема корпуса типичного технологического аппарата. Он содержит полный перечень оболочек, которые используются при изготовлении химического оборудования. Этот перечень включает: сферическую оболочку (крышка люка 1), эллиптическую оболочку (крышка корпуса 2), пластину (фланцы отъемной крышки корпуса 3), цилиндрическую оболочку (обечайка корпуса 4, штуцера 7 и 8), торовую оболочку (переходный участок корпуса 5, плавно соединяющий коническую и цилиндрическую оболочки), коническую оболочку (днище корпуса 6). Все перечисленные оболочки являются оболочками вращения. Если такая оболочка нагружена осесимметричной внешней нагрузкой (например, давлением рабочей среды), то она называется

осесимметричной. В осесимметричных оболочках картина напряжений не зависит от полярного угла. Ниже рассматриваются

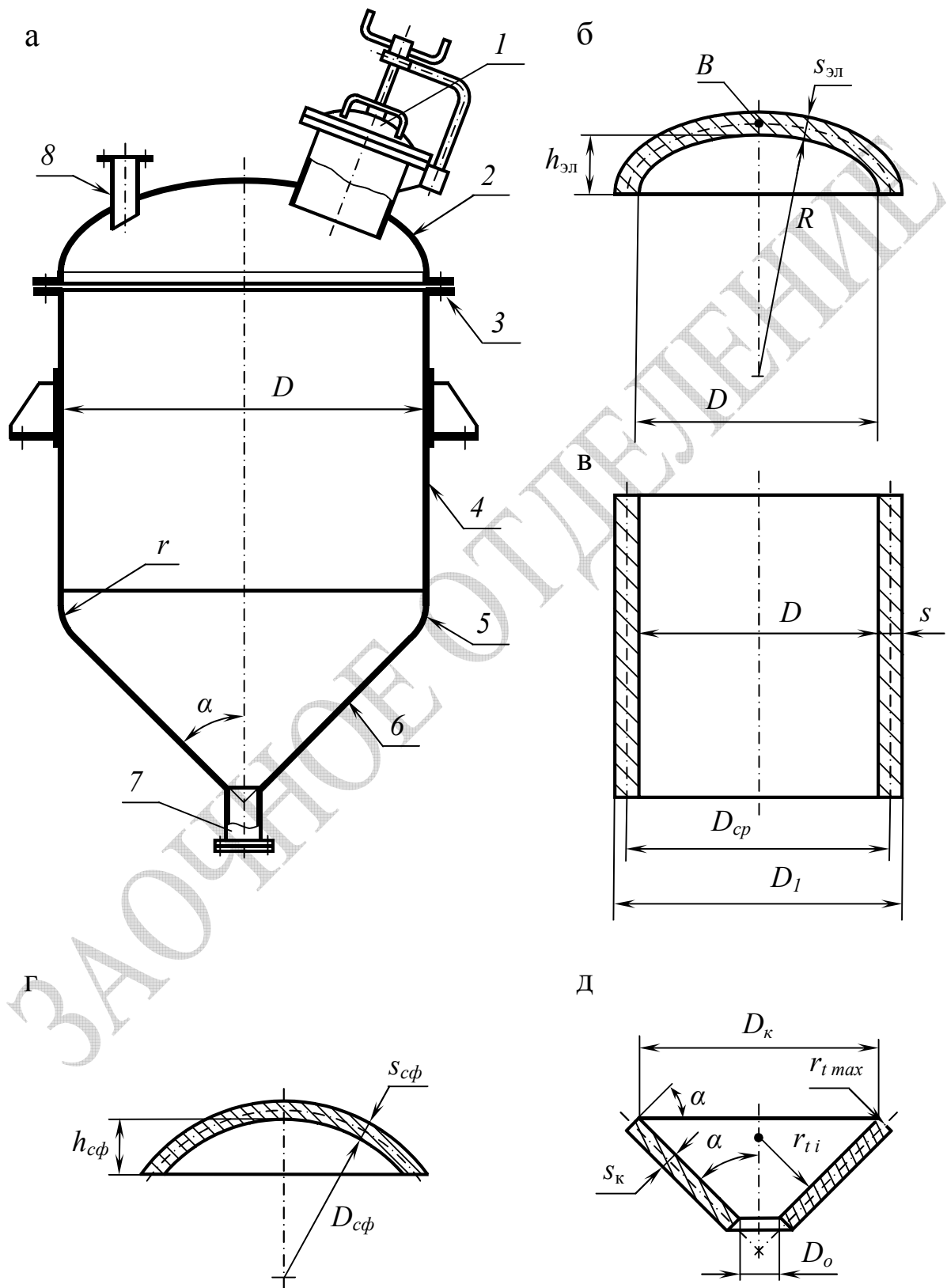


Рисунок 9.1
162

только осесимметричные оболочки.

Проведем плоскость через ось вращения оболочки. Эта плоскость пересечет срединную поверхность по некоторой плоской кривой, которую называют **образующей** или **меридианом**. Линия пересечения срединной поверхности плоскостью, перпендикулярной оси вращения, называется **параллелью** или **кольцом**. Степень кривизны оболочки в некоторой ее точке характеризуется кривизной меридиана и кольца в этой точке. Радиус кривизны меридиана называют **первым главным радиусом** кривизны оболочки в данной точке и обозначают через r_m . **Второй главный радиус** кривизны r_t численно равен длине образующей конуса с вершиной на оси вращения и боковой поверхностью, перпендикулярной срединной поверхности оболочки.

Приведем значения главных радиусов кривизны для типовых оболочек. Для конической оболочки (рис. 9.1, д), у которой меридианами являются прямые линии, $r_m = \infty$, а $r_t = D_k / 2 \cos \alpha$. Цилиндрическая оболочка (рис. 9.1, в) представляет собой частный случай конической (для нее угол конусности $\alpha = 0$). Поэтому для нее $r_m = \infty$, а $r_t = D_{cp}/2$. У сферической оболочки (рис. 9.1, г) оба главных радиуса кривизны одинаковы и равны радиусу срединной поверхности $r_m = r_t = D_{cp}/2$. У пластины кривизна отсутствует. Следовательно, $r_m = \infty$ и $r_t = \infty$. Наконец, у эллиптической (рис. 9.1, б) и торовой оболочек величина главных радиусов кривизны меняется от точки к точке.

С использованием понятия главных радиусов кривизны можно точно сформулировать условие тонкостенности элементов корпусов технологических аппаратов. Именно, если выполняется условие:

$$\frac{s}{\min(r_m, r_t)} \leq 0.05 \quad (9.1)$$

(где s – толщина стенки), то оболочка является тонкостенной.

9.2. Напряжения в осесимметричных оболочках, нагруженных внутренним давлением

Основным узлом технологического аппарата или машины является корпус, который определяет их габариты, производительность и стоимость. Корпус изолирует обрабатываемую среду, подвергаясь ее химическому воздействию и воспринимая механические и тепловые нагрузки. Следовательно, надежность работы основного химического оборудования во многом зависит от надежности его корпуса.

Под действием внешних нагрузок в материале элементов корпуса возникают напряжения, определение которых необходимо для

правильного выбора толщины стенок. Чаще всего в качестве механической нагрузки выступает внутреннее давление, при котором проводится технологический процесс. Поэтому наиболее важно проанализировать напряженное состояние корпуса, нагруженного внутренним давлением. При этом будем использовать расчетную схему оболочки, считая ее тонкостенной и осесимметричной.

Пусть заданы величина внутреннего давления p и геометрические параметры оболочки. Под последними будем понимать толщину оболочки s и значения главных радиусов кривизны r_m и r_t в каждой точке срединной поверхности. Для анализа напряженного состояния материала выделим бесконечно малый элемент оболочки со сторонами $d\ell_m$ и $d\ell_t$ (рис. 9.2). Элемент выделен двумя меридиональными сечениями с углом между ними $d\varphi$ и двумя нормальными коническими сечениями с углом между ними $d\theta$. Выделенный элемент имеет четыре сечения, в каждом из которых в общем случае действуют нормальные и поперечные внутренние усилия, а также изгибающие моменты. Опыты показывают, что поперечные силы и изгибающие моменты имеют существенную величину лишь в ограниченной области вблизи так называемых **линий искажения**, т. е. участков, где резко меняются параметры оболочки (толщина, свойства материала, форма и направление

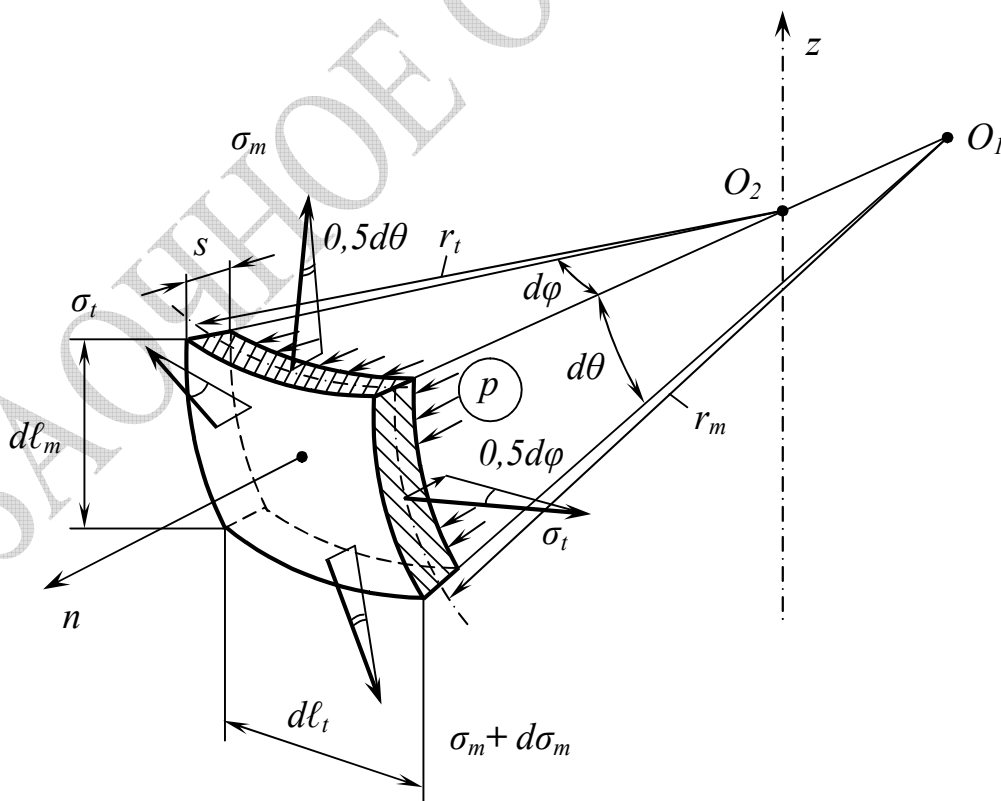


Рисунок 9.2

меридиана). Поэтому, следуя **безмоментной теории оболочек**, будем пренебрегать поперечными силами и изгибающими моментами в силу их малости.

В рамках этого допущения на верхнюю и нижнюю грань выделенного бесконечно малого элемента оболочки действуют нормальные напряжения σ_m и $\sigma_m + d\sigma_m$ соответственно. Их называют **меридиональными**, т. к. они направлены по касательной к меридиану. На боковых гранях выделенного элемента действуют напряжения σ_t (одинаковые в силу осевой симметрии), которые называют кольцевыми или тангенциальными, т. к. они направлены по касательной к кольцу (параллели). Кроме того, на выделенный элемент действует давление p .

Под действием перечисленных нагрузок элемент, как и вся оболочка в целом, находится в состоянии равновесия. Следовательно, система сил, приложенных к нему, удовлетворяет уравнениям равновесия. Спроектируем все силы на нормаль n к срединной поверхности, учитывая, что сила, обусловленная давлением, равна произведению величины давления на площадь его действия. Аналогично сила, обусловленная напряжением, равна произведению величины напряжения на площадь его действия. В результате уравнение равновесия будет иметь вид:

$$pdl_m dl_t - \sigma_m s dl_t \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - (\sigma_m + d\sigma_m) s dl_t \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - 2\sigma_t s dl_m \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 0.$$

Преобразуем это уравнение с учетом следующих соображений. В силу малости углов θ и φ значения синусов близки к значению своих аргументов:

$$\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx \frac{d\theta}{2} \quad \text{и} \quad \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \approx \frac{d\varphi}{2}.$$

Кроме того, длины дуг dl_m и dl_t связаны с углами θ и φ через соответствующие радиусы кривизны:

$$dl_m = r_m d\theta \quad \text{и} \quad dl_t = r_t d\varphi.$$

После подстановки правых частей этих соотношений в уравнение равновесия выделенного элемента оболочки последнее запишется следующим образом:

$$pr_m r_t d\theta d\varphi - \sigma_m s r_t d\theta d\varphi / 2 - (\sigma_m + d\sigma_m) s r_t d\theta d\varphi / 2 - \sigma_t s r_m d\theta d\varphi = 0.$$

Сокращая на $d\theta d\varphi$ и отбрасывая величины второго порядка малости, в итоге получим следующее уравнение:

$$\frac{p}{s} = \frac{\sigma_m}{r_m} + \frac{\sigma_t}{r_t} \quad (9.2)$$

Это уравнение носит название **уравнения Лапласа**. Оно связывает значения меридионального и тангенциального напряжений в данной точке тонкостенной оболочки с ее геометрическими параметрами и действующим внутренним давлением.

Одного уравнения Лапласа недостаточно для определения двух неизвестных функций σ_m и σ_t . Однако некоторые общие выводы уже можно сделать. В частности, если имеется оболочка переменной кривизны, то напряжения в ней будут достигать своих максимальных значений там, где главные радиусы кривизны принимают свои наибольшие значения (т. е. там, где кривизна оболочки наименьшая).

Еще одним следствием, вытекающим из вида уравнения (9.2), является равенство меридиональных и тангенциальных напряжений в тех точках оболочки, в которых радиусы кривизны r_m и r_t имеют одинаковые значения. Это имеет место, например, для сферических оболочек. В таких оболочках первый и второй главные радиусы кривизны совпадают и равны радиусу R самой оболочки. Напряжения σ_m и σ_t также одинаковы: $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$. Следовательно, для сферических оболочек уравнение Лапласа будет содержать только одну неизвестную функцию:

$$\frac{p}{s} = \frac{2\sigma}{R} \quad (9.3)$$

Отсюда нетрудно определить напряжения, возникающие в материале сферической оболочки известного диаметра, если известны также толщина стенки и величина внутреннего давления.

Пусть, например, требуется определить напряжения в сферическом резервуаре диаметром $D = 4$ м и толщиной стенки $s = 12$ мм, предназначенном для хранения сжиженного пропана. Давление в резервуаре $p = 2.0$ МПа. Выразим из формулы (7.3) напряжение σ и подставим значения всех заданных величин, переведя их в единицы измерения системы СИ:

$$\sigma = \frac{pD}{4s} = \frac{20 \cdot 10^5 \cdot 4}{4 \cdot 12 \cdot 10^{-3}} = 166.7 \text{ МПа.}$$

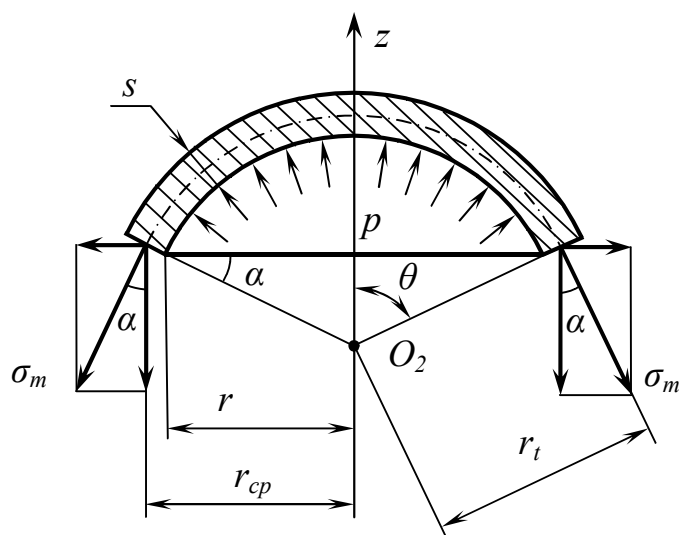


Рисунок 9.3

Таким образом, для сферических оболочек уравнения Лапласа достаточно для анализа напряженного состояния материала, из которого они изготовлены. Для оболочек другого вида в дополнение к уравнению Лапласа требуется еще одно уравнение для нахождения напряжений. Выведем его, рассмотрев равновесие верхней части оболочки (рис. 9.3), полученную в результате ее мысленного сечения нормальным коническим сечением. Она находится в равновесии под действием двух сил: силы внутреннего давления и результирующей меридиональных напряжений. Приравнявая осевые составляющие указанных сил, получим:

$$p \cdot \pi r^2 = 2 \pi r_{cp} \cdot s \sigma_m \cos \alpha .$$

Для тонкостенных оболочек значения радиуса срединной поверхности и внутреннего радиуса оболочки мало отличаются друг от друга. Поэтому $r \approx r_{cp} = r_t \cos \alpha$ и предыдущее равенство можно записать в виде:

$$\sigma_m = \frac{p r_t}{2 s} . \quad (9.4)$$

Полученное уравнение называется **дополнительным уравнением**. Вместе с уравнением Лапласа (9.2) оно позволяет получить расчетные зависимости для напряжений в типовых оболочках, а также сформулировать условия прочности для них.

9.3. Расчет на прочность типовых оболочек

Применим уравнения (9.2) и (9.4) последовательно к типовым оболочкам, рассмотренным в параграфе 9.1. Начнем с конической и цилиндрической оболочек, поскольку они имеют наиболее широкое применение. Чаще всего они используются при изготовлении **обечаек**, которыми называются цилиндрические или конические барабаны из листового материала, открытые с торцов и применяемые в качестве заготовок для сосудов, аппаратов и трубопроводов.

Исходными при анализе напряженного состояния указанных оболочек является система уравнений, выведенных в предыдущем параграфе:

$$\frac{p}{s} = \frac{\sigma_m}{r_m} + \frac{\sigma_t}{r_t}; \quad \sigma_m = \frac{pr_t}{2s}$$

Для конической оболочки $r_m = \infty$. Поэтому первое слагаемое в уравнении Лапласа обращается в нуль. Следовательно, в каждой точке конической оболочки меридиональное и тангенциальное напряжения могут быть вычислены по формулам:

$$\sigma_t = \frac{pr_t}{s}; \quad \sigma_m = \frac{pr_t}{2s} \quad (9.5)$$

Из этих соотношений видно, что тангенциальные напряжения, действующие в осевых сечениях конической оболочки, в два раза больше меридиональных напряжений, действующих в поперечных сечениях оболочки. Поэтому продольные сварные швы более нагружены, чем поперечные.

Согласно сделанным в параграфе 9.2 предположениям, поперечные силы, а, значит, и касательные напряжения в сечениях, в которых действуют σ_m и σ_t , отсутствуют. Поэтому напряжения σ_m и σ_t являются главными напряжениями. Третье главное напряжение σ_r , действующее в радиальном направлении, по порядку величины равно внутреннему давлению p : $\sigma_r \sim p$. С другой стороны, как видно из (9.5), условие тонкостенности оболочки (9.1) приводит к тому, что $\sigma_m \gg p$ и $\sigma_t \gg p$. Следовательно, допустимо считать главное напряжение σ_r пренебрежимо малым по сравнению с двумя другими.

Таким образом, материал тонкостенной конической оболочки находится в плоском напряженном состоянии. Первым (наибольшим) главным напряжением является напряжение σ_t , вторым (средним по величине) главным напряжением является напряжение σ_m и, наконец, третье (наименьшее) главное напряжение $\sigma_r \approx 0$. Для формулировки

условия прочности в зависимости от свойств применяемого материала необходимо воспользоваться одной из теорий прочности. Но прежде следует выяснить, где именно в конической оболочке напряжения достигают наибольших значений.

В формулы (9.5) для напряжений входит второй главный радиус кривизны r_t . Для конических оболочек его величина меняется, увеличиваясь по мере приближения к большему основанию конуса (рис. 9.1, д). Его максимальное значение равно $r_t = D_k / 2 \cos \alpha$, где α – угол конусности оболочки. Следовательно, максимальные значения напряжений согласно (9.5) определяются выражениями:

$$\sigma_t^{\max} = \frac{pD_k}{2s \cos \alpha} ; \quad \sigma_m^{\max} = \frac{pD_k}{4s \cos \alpha} \quad (9.6)$$

При изготовлении конических обечаек из хрупких материалов или пластичных материалов, но с хрупким покрытием их расчет выполняется по первой теории прочности. Она исходит из предположения (см. параграф 4.6), что опасное состояние наступает в тот момент, когда наибольшее нормальное напряжение достигает предельного значения. В данном случае эквивалентное напряжение, согласно соотношению (4.25), будет равно тангенциальному напряжению σ_t , а условие прочности примет вид:

$$\sigma_t^{\max} = \frac{pD_k}{2s \cos \alpha} \leq [\sigma] \quad (9.7)$$

Расчет конических оболочек из пластичных материалов выполняется по третьей гипотезе прочности. Эквивалентное напряжение по этой гипотезе определяется соотношением (4.27):

$$\sigma_{\text{эке}} = \sigma_1 - \sigma_3 .$$

В нашем случае $\sigma_3 = \sigma_r \approx 0$. Поэтому условие прочности $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ по третьей гипотезе прочности для конических оболочек будет иметь вид, совпадающий с (9.7).

Все приведенные формулы для конических оболочек справедливы при угле конусности $\alpha \leq 60^\circ$. Обечайки с большим углом конусности по своим свойствам ближе плоским оболочкам, и для их расчета требуются другие зависимости.

Цилиндрическая оболочка (рис. 9.1, в) представляет собой частный случай конической. Если во всех предыдущих формулах, начиная с формулы (9.6), положить $\alpha = 0$, то нетрудно получить условие прочности для цилиндрических оболочек:

$$\frac{pD}{2s} \leq [\sigma]. \quad (9.8)$$

Различие в напряженных состояниях цилиндрических и конических оболочек связано с тем, что в каждой точке первых напряженное состояние одинаково, тогда как в конических оболочках напряжения растут по мере возрастания диаметра.

Составим теперь условие прочности для эллиптической оболочки (рис. 9.1, б). Оболочки этого типа широко применяются в качестве крышек и днищ технологических аппаратов. Эллиптическая оболочка имеет переменную кривизну. Следовательно, величина напряжений в различных ее точках также различна. В силу замечания, сделанного после вывода уравнения Лапласа, наиболее нагруженной точкой оболочки при действии внутреннего давления является вершина (полюс) эллипсоида B . Поэтому условие прочности должно быть составлено именно для этой области.

Из математики известно, что в полюсе эллипсоида радиусы кривизны r_m и r_t одинаковы и равны отношению a^2 / b , где a и b – полуоси эллипсоида. В стандартных днищах технологических аппаратов отношение полуосей равно двум. Поэтому в полюсе эллиптической оболочки $r_m = r_t = D$ (рис. 9.1, б). Следовательно, в окрестности полюса поверхность эллипсоида можно приближенно рассматривать как поверхность сферы радиуса D . Напряжения в сферической оболочке можно получить из соотношения (9.3). Так что в наиболее нагруженной точке эллиптической оболочки тангенциальное и меридиональное напряжения вычисляются по формуле:

$$\sigma_t = \sigma_m = \frac{pD}{2s}. \quad (9.9)$$

Условие прочности для эллиптической оболочки тогда будет иметь вид:

$$\frac{pD}{2s} \leq [\sigma]. \quad (9.10)$$

9.4. Расчет на прочность плоских оболочек (пластин)

Расчетная схема плоской оболочки используется для анализа напряженного состояния плоских крышек и днищ, которые широко применяются в конструкциях машин и аппаратов, благодаря простоте

и относительно низкой стоимости их изготовления. Под действием внутреннего давления p , нормального к срединной поверхности, пластина изгибается и приобретает кривизну одновременно в двух плоскостях, образуя слабо изогнутую поверхность двойкой кривизны. Если прогиб пластины значительно меньше ее толщины (как это и бывает в технологических аппаратах), то напряжения, возникающие в материале, будут обусловлены, главным образом, изгибающими моментами.

Отличны от нуля изгибающие моменты M_t и M_r в тангенциальном и радиальном направлениях. В этих же направлениях действуют нормальные напряжения σ_t и σ_r . Связь между напряжениями и изгибающими моментами в пластинах имеет ту же физическую природу, что и в стержнях, подверженных изгибу (см. параграф 5.3).

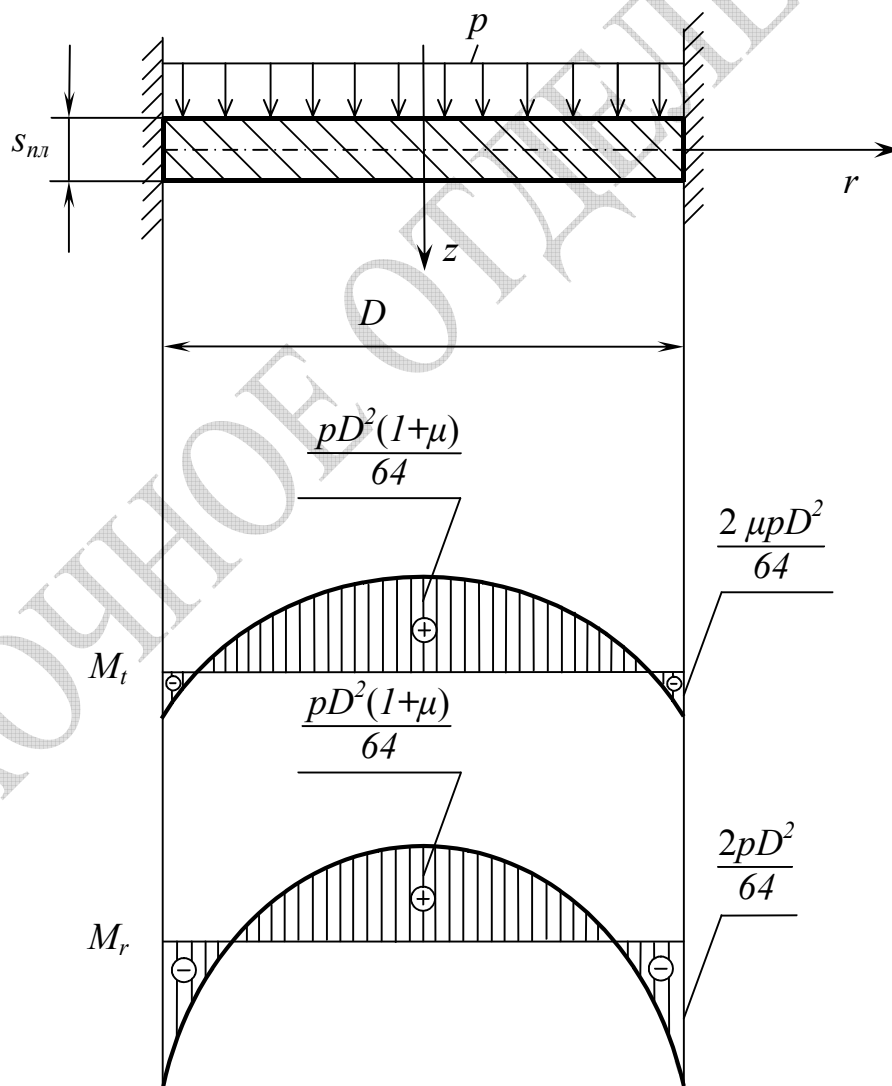


Рисунок 9.4

Зависимость изгибающих моментов M_t и M_r от радиальной координаты в жестко защемленной круглой пластине приведена на рис. 9.4 в виде соответствующих эпюр. Здесь μ – коэффициент Пуассона, который определяется соотношением (3.3) и который для сталей равен $0.25 \div 0.3$.

Несложный анализ показывает, что опасным сечением в данном случае является кольцевое сечение в заделке оболочки, поскольку в этом сечении действует максимальный по величине изгибающий момент M_r , равный $pD^2 / 32$. Размерность этой величины может быть записана следующим образом: $\text{Н м}^2/\text{м}^2 = \text{Н м} / \text{м}$. Отсюда видно, что момент M_r отнесен к единице длины кругового контура. Изгибающий момент вызывает напряжения в материале, которые определяются формулой Навье (5.18). Их максимальное значение достигается на поверхности пластины, и оно равно:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I}.$$

Здесь $y_{\max} = s/2$ – максимальное расстояние до срединной поверхности; $I = s^3/12$ – момент инерции, также отнесенный к единице длины кругового контура вдоль заделки оболочки.

Подставив значения максимального момента, момента инерции I и расстояния y_{\max} в предыдущую формулу, для максимального напряжения, действующего в опасном сечении, получаем:

$$\sigma_{r \max} = \frac{pD^2}{32} \cdot \frac{6}{s^2} \approx 0.19 \frac{pD^2}{s^2}. \quad (9.11)$$

Для составления условий прочности отметим, что пластина при действии внутреннего давления испытывает двухосное напряженное состояние. Первым главным напряжением в опасном сечении является напряжение σ_r , вторым главным напряжением – σ_t , а третье σ_m пренебрежимо мало по сравнению с первыми двумя. Первая (для хрупких материалов) и третья (для пластичных материалов) гипотезы прочности приводят, как и в отношении оболочек другого типа, к одной и той же форме условия прочности:

$$0.19 \frac{pD^2}{s^2} \leq [\sigma], \quad (9.12)$$

9.5. Контрольные вопросы

1. Какие элементы оборудования подпадают под расчетную схему оболочки?
2. Назовите основные геометрические характеристики оболочек вращения.
3. Какими параметрами характеризуется кривизна оболочки?
4. Какие типовые элементы химического оборудования изготавливаются в виде оболочек вращения?
5. В чем состоит условие тонкостенности оболочки?
6. Какие напряжения действуют в тонкостенных оболочках при нагружении их внутренним давлением?
7. Какие величины связывает уравнение Лапласа?
8. Как применить уравнение Лапласа для анализа напряженного состояния сферической оболочки?
9. Запишите дополнительное уравнение к уравнению Лапласа. Какие величины в него входят?
10. Как используются уравнение Лапласа и дополнительное уравнение для анализа напряженного состояния типовых оболочек вращения?
11. Где в конических и эллиптических оболочках напряжения достигают своих наибольших значений при нагружении оболочек внутренним давлением?
12. Сформулируйте условие прочности для типовых оболочек вращения.
13. Каков механизм возникновения напряжений в плоских оболочках при нагружении их внутренним давлением?
14. Где в плоских оболочках возникают наибольшие по величине напряжения?

Глава 10. Сложное сопротивление стержней

10.1. Сочетание изгиба с растяжением

В главах 3 и 5 настоящего пособия были подробно рассмотрены простые виды нагружения и деформации стержней. Их анализ позволил получить расчетные формулы для вычисления напряжений и перемещений, с помощью которых могут быть проведены расчеты на прочность и жесткость. Под **сложным сопротивлением** понимают наложение двух или большего числа простых видов нагружения. Анализ сложного сопротивления опирается на принцип независимости действия сил, согласно которому результат совместного действия нескольких внешних нагрузок можно рассматривать как сумму результатов действия этих нагрузок по отдельности.

На рис. 10.1 представлены наиболее распространенные на практике виды сложного сопротивления стержней. Сочетание **изгиба с растяжением или сжатием** получится в том случае, если изгибающая сила действует на балку наклонно к ее оси (рис. 10.1, а). Такая сила будет иметь ненулевые составляющие как на ось Ox (продольная ось балки), так и на ось Oy (координатная ось перпендикулярная оси балки). Первая составляющая будет вызывать деформацию растяжения (или сжатия), а вторая составляющая вызовет изгиб. Поэтому при вычислении суммарной величины напряжений в материале необходимо использовать формулы (3.1) и (5.18). Напряжение, обусловленное растяжением, будет одинаково во всех точках и равно: $\sigma_p = F \sin \alpha / A$, где A – площадь поперечного сечения балки. Напряжение, обусловленное изгибом балки, будет зависеть от координаты x и расстояния до нейтрального слоя y : $\sigma_u = F x y \cos \alpha / I_z$. Сумма этих величин даст полное напряжение материала в каждой точке. В частности, наибольшее напряжение возникнет в сечении балки в месте ее заделки в нижних слоях материала (рис. 10.1, а):

$$\sigma_{\max} = \frac{F \sin \alpha}{A} + \frac{F h \cos \alpha}{2 I_z}, \quad (10.1)$$

где h – высота поперечного сечения балки. Наименьшее значение напряжения будет достигнуто в том же сечении, но в верхнем слое материала:

$$\sigma_{\min} = \frac{F \sin \alpha}{A} - \frac{F h \cos \alpha}{2 I_z}. \quad (10.2)$$

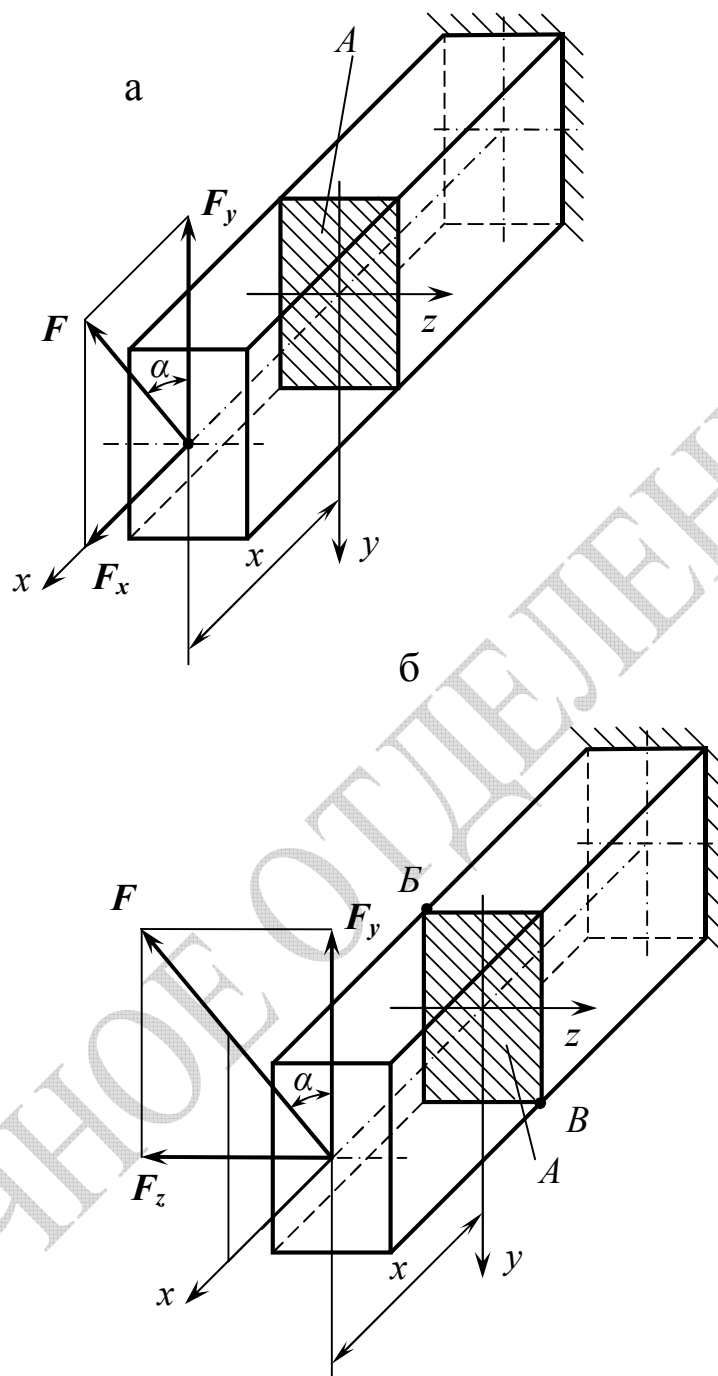


Рисунок 10.1

В зависимости от численных значений величин, входящих в это соотношение, σ_{min} может оказаться как напряжением растяжения ($\sigma_{min} > 0$), так и напряжением сжатия ($\sigma_{min} < 0$). Соотношения (10.1) и (10.2) позволяют сформулировать условие прочности при сложном сопротивлении «изгиб с растяжением (сжатием)».

10.2. Косой изгиб

Другим видом сложного сопротивления стержней является так называемый **косой изгиб**. Под этим понятием понимается такой случай изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента не совпадает с главной плоскостью стержня. Характер нагружения, приводящий к косому изгибу, изображен на рис. 10.1, б. Сила F действует в плоскости поперечного сечения стержня, составляя угол α с координатной осью Oy . Проекции силы F_y и F_z вызывают появление изгибающих моментов в координатных плоскостях Oxy и Oxz . Следовательно, при косом изгибе стержень испытывает одновременное действие двух изгибающих моментов M_y и M_z . Напряжения и прогибы от каждого из этих моментов по отдельности определяются по формулам параграфов 5.3 и 5.5.

В частности, напряжение σ_1 в некоторой точке стержня, обусловленное действием только изгибающего момента M_y , согласно формуле Навье (5.18) будет равно: $\sigma_1 = M_y z / I_y$. Напряжение σ_2 в той же точке материала, обусловленное действием изгибающего момента M_z , составит величину: $\sigma_2 = M_z y / I_z$. При этом моменты M_y и M_z должны быть вычислены при том значении координаты x , которое соответствует сечению, где лежит данная точка, т. е. $M_y = F_z x = F x \sin \alpha$ и $M_z = F_y x = F x \cos \alpha$. Полное напряжение σ будет складываться из напряжений σ_1 и σ_2 . Максимальное и минимальное значения напряжений будут достигаться в сечении в месте заделки балки и для случая, изображенного на рис. 10, б будут равны:

$$\sigma_{\max} = \frac{Flh \cos \alpha}{2I_z} + \frac{Flb \sin \alpha}{2I_y},$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{Flh \cos \alpha}{2I_z} - \frac{Flb \sin \alpha}{2I_y}.$$

Здесь b и h – ширина и высота поперечного сечения балки, l – ее длина. Первое из этих напряжений должно участвовать в условии прочности на растяжение, а второе – в условии прочности на сжатие.

Если полное напряжение в некоторой точке сечения с координатой x приравнять к нулю, то полученное уравнение

$$\sigma = \frac{zFx \sin \alpha}{I_y} + \frac{yFx \cos \alpha}{I_z} = 0$$

будет задавать прямую, в каждой точке которой напряжение отсутствует. Эта прямая, как отмечалось в главе 5, носит название

нейтральной линии поперечного сечения. Если записать последнее уравнение в координатах y, z в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом, то придем к следующему соотношению:

$$z = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{I_y}{I_z} y. \quad (10.3)$$

Оно, очевидно, задает прямую, проходящую через начало координат, которое, как отмечалось ранее, помещено в центр тяжести поперечного сечения. Тангенс угла β между нейтральной линией и положительным направлением оси y (т. е. ее угловой коэффициент k_1) определяется отношением моментов инерции сечения относительно главных осей:

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{I_y}{I_z}.$$

Если моменты инерции I_y и I_z одинаковы по величине, то нейтральная линия будет перпендикулярна к плоскости изгибающего момента. В самом деле, положение последней определяется угловым коэффициентом $k_2 = \operatorname{tg} \alpha$ линии действия силы F , и при I_y и I_z выполняется известное из аналитической геометрии условие перпендикулярности двух прямых: $k_1 k_2 = -1$. В общем случае, когда $I_y \neq I_z$, условие перпендикулярности плоскости изгиба и плоскости действия изгибающего момента не выполняется. Стержень будет изгибаться в некоторой другой плоскости, где жесткость на изгиб наименьшая.

Максимальные по абсолютной величине значения напряжения при косом изгибе возникают в точках сечения наиболее удаленных от нейтральной линии. На рис. 10.1, б это точки B и B' . В точке B будет действовать максимальное растягивающее напряжение, а в точке B' – максимальное сжимающее. Поэтому условия прочности составляются именно для этих точек в сечениях с наибольшим значением изгибающего момента.

10.3. Внецентренное растяжение (сжатие)

Этот случай сложного сопротивления стержней реализуется тогда, когда линия действия растягивающей или сжимающей силы параллельна оси стержня, но не совпадает с ней (рис. 10.2). Пусть точка приложения силы F имеет координаты y_F и z_F . Тогда относительно главных осей сила F дает моменты $M_y = Fz_F$ и $M_z = Fy_F$.

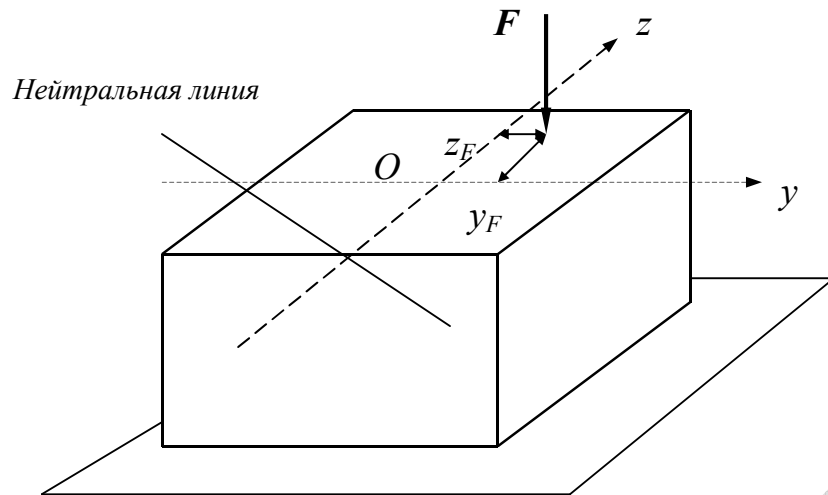


Рисунок 10.2

Следовательно, внецентренное растяжение (сжатие) сопровождается косым изгибом. При этом к косому изгибу добавляется растягивающее (сжимающее) действие силы F . Таким образом, напряжение в некоторой точке стержня складывается из трех слагаемых:

$$\sigma = -\frac{F}{A} - \frac{F y_F y}{I_z} - \frac{F z_F z}{I_y}, \quad (10.4)$$

где A – площадь поперечного сечения стержня. Первое слагаемое характеризует вклад в величину напряжения продольной силы, второе и третье слагаемые – вклад изгиба в соответствующей плоскости. Нетрудно видеть, что картина напряжений в сечении не будет зависеть от продольной координаты и по всей длине стержня будет одинаковой.

Уравнение нейтральной линии, состоящей из множества точек, в которых напряжение отсутствует, получим, приравняв правую часть соотношения (10.4) к нулю:

$$\frac{F}{A} + \frac{F y_F y}{I_z} + \frac{F z_F z}{I_y} = 0. \quad (10.5)$$

В координатах y, z это уравнение задает прямую линию, которая не проходит через центр тяжести сечения (рис. 10.2). При переходе через нейтральную линию, как известно, напряжения меняют знак. Поэтому она разделяет область поперечного сечения, где материал испытывает растяжение, от той области, где он испытывает сжатие. Положение нейтральной линии зависит от координат y_F и z_F точки

приложения силы F . Расстояние от нейтральной линии до центра сечения определяется коэффициентами уравнения (10.5). Из курса аналитической геометрии известно, что расстояние d от некоторой прямой $ax + by + c = 0$ до начала координат равно:

$$d = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

В нашем случае нейтральная линия будет расположена от центра тяжести сечения на расстоянии равном:

$$d = \frac{1}{A \sqrt{\frac{y_F^2}{I_z} + \frac{z_F^2}{I_y}}}. \quad (10.6)$$

Из этого выражения видно, что при малом удалении точки приложения силы F от центра сечения нейтральная линия проходит далеко от него и может находиться за пределами поперечного сечения. В том случае, когда $y_F = z_F = 0$, нейтральная линия уходит на бесконечность, и напряжения в сечении распределены равномерно. По мере приближения точки приложения силы к периферии сечения расстояние d уменьшается, и при некоторых значениях координат y_F и z_F нейтральная линия начинает пересекать поперечное сечение стержня, разделяя области растяжения и сжатия материала.

Из сказанного вытекает важный вывод. При внецентренном сжатии или растяжении в окрестности центра тяжести сечения существует область, которая обладает следующим свойством: если точка приложения внешней силы находится внутри этой области, то напряжения во всех точках сечения будут одного знака (либо сжимающими, либо растягивающими). Если точка приложения силы расположена вне этой области, то напряжения будут как сжимающими, так и растягивающими. Указанная область называется **ядром сечения**.

Вопрос об определении ядра сечения имеет большое значение при проектировании и эксплуатации изделий и конструкций из материалов, которые плохо сопротивляются растяжению (например, чугуна, кирпича, бетона). В этих случаях необходимо стремиться к тому, чтобы равнодействующая внешних сжимающих нагрузок была приложена внутри ядра сечения. Тогда растягивающих усилий в материале не появится.

10.4. Совместное действие изгиба и кручения

Еще одним видом сложного сопротивления стержней является совместное действие изгиба с кручением (рис. 10.3). Такие деформации испытывают, как правило, валы и оси. В каждой точке материала изгиб вызывает появление нормальных напряжений, а кручение – касательных. Величина нормальных напряжений определяется с помощью формулы Навье (5.18), а величина касательных – с помощью формулы (5.12). Из этих формул видно, что

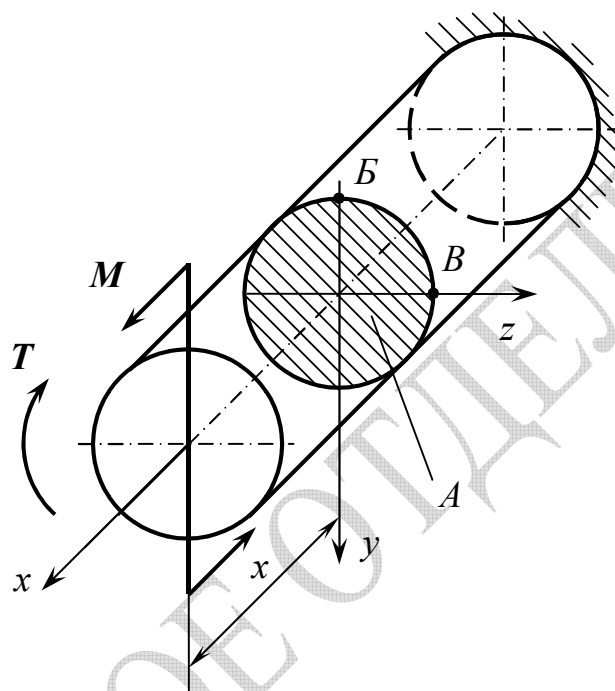


Рисунок 10.3

оба вида напряжений достигают своих наибольших значений на поверхности вала. Каждое из этих напряжений в отдельности может быть меньше соответствующего допускаемого напряжения $[\sigma]$ или $[\tau]$, но, действуя одновременно, они могут привести к потере прочности материала.

Выделим в материале элементарный параллелепипед, две грани которого параллельны поперечному сечению вала, а две других – его оси. На первой паре граней будут действовать только нормальные напряжения σ (касательные напряжения от поперечной силы, как правило, пренебрежимо малы), а на второй паре граней будут действовать только касательные напряжения τ . Напряженное состояние материала будет плоским, и величина главных напряжений, согласно (4.10), определится равенствами:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (10.7)$$

Для составления условия прочности вала при совместном действии кручения и изгиба необходимо привлечь одну из теорий прочности. В частности, по третьей гипотезе прочности (гипотезе наибольших касательных напряжений) условие прочности (4.27) применительно к совместному действию кручения и изгиба может быть записано следующим образом:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 - 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (10.8)$$

Здесь напряжения должны быть вычислены в тех точках вала, где они принимают наибольшие значения. Максимальные нормальные напряжения в поперечном сечении вала, согласно (5.19), выражаются через величину изгибающего момента M_z и момента сопротивления

W_z относительно нейтральной оси: $\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}$. Для круглого

поперечного сечения $W_z = \pi d^3 / 32$. Максимальные касательные напряжения в поперечном сечении вала выражаются в свою очередь с помощью формулы (5.15) через величину крутящего момента T и полярного момента сопротивления W_p поперечного сечения:

$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$. Полярный момент сопротивления для круглого сечения

равен: $W_p = \pi d^3 / 16 = 2W_z$.

С учетом сказанного условие прочности вала при кручении и изгибе в рамках третьей гипотезы прочности может быть записано в виде:

$$\frac{1}{W_z} \sqrt{T^2 + M_z^2} \leq [\sigma]. \quad (10.9)$$

Если используется четвертая гипотеза прочности (энергетическая гипотеза), то в условие прочности (4.28) подставляются выражения (10.7) для главных напряжений. После несложных преобразований условие прочности может быть преобразовано к виду:

$$\frac{1}{W_z} \sqrt{0,75T^2 + M_z^2} \leq [\sigma]. \quad (10.10)$$

Из неравенств (10.9) и (10.10) видно, что опасным сечением вала будет то, в котором величина $\sqrt{T^2 + M_z^2}$ достигает наибольшего значения. Эта величина называется **приведенным моментом**. При расчетах валов на первом этапе строится эпюра приведенного момента и определяется опасное сечение.

10.5. Контрольные вопросы

1. Что называется сложным сопротивлением стержней?
2. Какие виды сложного сопротивления стержней встречаются на практике особенно часто?
3. Из каких составляющих складывается напряжение в материале при сочетании изгиба с растяжением?
4. Какой вид сложного сопротивления стержней называют косым изгибом?
5. Какой физический смысл имеет нейтральная линия сечения? Каково уравнение нейтральной линии при косом изгибе?
6. Почему при косом изгибе плоскость изгиба в общем случае не совпадает с плоскостью действия внешнего изгибающего момента?
7. Какой вид сложного сопротивления стержней называют внецентренным сжатием (растяжением)?
8. Как ведет себя нейтральная линия при этом виде сложного сопротивления стержней?
9. Какая область называется ядром сечения при внецентренном сжатии? В чем заключается смысл ядра сечения?
10. Какие напряжения возникают в материале валов при кручении с изгибом?
11. Какое сечение является наиболее опасным при этом виде сложного сопротивления?
12. Сформулируйте условие прочности при кручении с изгибом.

Глава 11. Напряженное состояние при динамическом нагружении

11.1. Учет сил инерции при расчетах на прочность

В предыдущих главах при анализе напряженного состояния материала неявно предполагалось, что внешние нагрузки, действующие на тело, носят статический характер. К **статическим** относятся нагрузки, которые достигают своих конечных значений настолько медленно, что ускорения, получаемые элементами конструкций, невелики. Возникающие при этом силы инерции пренебрежимо малы по сравнению с усилиями внешними. В некоторых случаях нагрузки меняются во времени достаточно быстро, так что возникающими ускорениями пренебречь нельзя. Такие нагрузки называются **динамическими**.

Учет динамического характера нагрузок основан на известном из теоретической механики принципе Даламбера, согласно которому любое движущееся тело может рассматриваться как находящееся в состоянии мгновенного равновесия, если к числу действующих сил добавить силу инерции. Последняя равна произведению массы тела на его ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению.

Для иллюстрации влияния силы инерции на величину напряжений в материале рассмотрим простую задачу. Пусть груз весом mg поднимается вверх с ускорением W (рис. 11.1). Требуется найти напряжения в канате. Такая ситуация возникает, например, в начале движения, когда за короткий период времени скорость груза

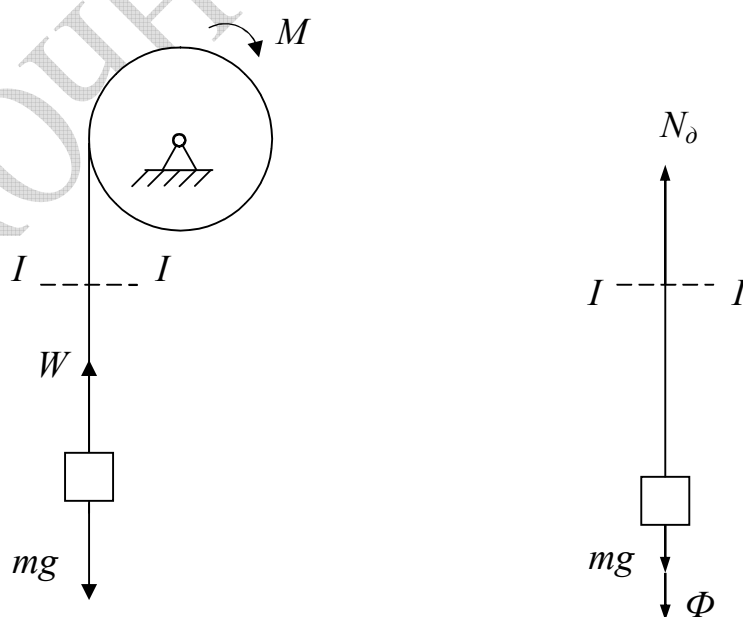


Рисунок 11.1

изменяется от нуля до некоторого конечного значения.

Применим метод сечений, обозначив через N_∂ продольную силу в канате в сечении $I-I$ (рис. 11.1) и мысленно отбросив верхнюю часть подъемного устройства. Для нижней части в соответствии с принципом Даламбера запишем условие равновесия сил, включая силу инерции:

$$N_\partial = mg + mW .$$

Разделив обе части равенства на площадь A поперечного сечения каната, получим напряжения σ_∂ в материале каната при ускоренном подъеме груза:

$$\sigma_\partial = \frac{mg}{A} \left(1 + \frac{W}{g} \right) . \quad (11.1)$$

Сомножитель перед скобкой – отношение веса груза к площади поперечного сечения каната – есть не что иное как величина напряжения σ_{cm} при статическом характере нагружения в условиях равномерного подъема груза. Так что влияние силы инерции

характеризуется коэффициентом $k_\partial = \left(1 + \frac{W}{g} \right)$, который называется

коэффициентом динамичности. Он связывает характеристики при статическом и динамическом нагружении. В данном случае он показывает во сколько раз напряжение при динамическом характере нагружения превосходит напряжение при статическом нагружении: $\sigma_\partial = k_\partial \sigma_{cm}$. Если динамические напряжения не превышают предела пропорциональности для данного материала, то динамические деформации можно определить из закона Гука:

$$\varepsilon_\partial = \frac{\sigma_\partial}{E} = \frac{\sigma_{cm} k_\partial}{E} = \varepsilon_{cm} k_\partial . \quad (11.2)$$

Полученная формула также показывает, что и деформации при динамическом нагружении в k_∂ раз превосходят деформации при статическом нагружении. Отсюда вытекает простой способ учета сил инерции при оценке величины напряжений, деформаций и перемещений при динамическом характере нагружения. Необходимо решить сначала статическую задачу без учета сил инерции, а затем определить величину коэффициента динамичности. Тогда искомые характеристики есть результат произведения соответствующих характеристик статической задачи на коэффициент динамичности.

Указанный способ, однако, не всегда применим. Например, при вращательном движении (даже равномерном) ускорение существует всегда, и, значит, статического аналога задачи подобрать невозможно. Следовательно, вращающийся элемент конструкции всегда нагружен силами инерции. Для оценки их величины рассмотрим кольцо радиуса R , вращающееся с угловой скоростью ω относительно оси, перпендикулярной плоскости симметрии кольца (рис. 11.2). Пусть ρ -

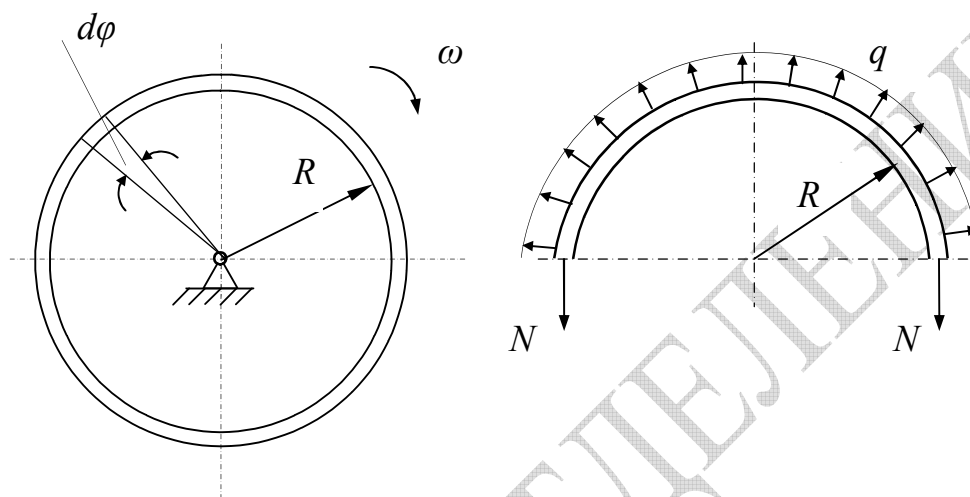


Рисунок 11.2

плотность материала кольца, A – площадь поперечного сечения.

Выделим бесконечно малый элемент кольца, ограниченный двумя радиусами с углом между ними $d\varphi$. На этот элемент действует сила инерции $d\Phi$, роль которой играет центробежная сила. Ее величина, как известно из раздела теоретической механики, равна произведению массы выделенного элемента на центростремительное ускорение:

$$d\Phi = R \omega^2 dm = \rho A R^2 \omega^2 d\varphi. \quad (11.3)$$

Величина центробежной силы, приходящаяся на единицу длины дуги кольца, может рассматриваться как распределенная нагрузка q , действующая по всей его длине. Она будет связана с заданными параметрами следующим образом:

$$q = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{R^2 \rho \omega^2 A d\varphi}{R d\varphi} = RA \rho \omega^2. \quad (11.4)$$

Для определения напряжений, действующих в поперечных сечениях кольца, вновь воспользуемся методом сечений. Рассмотрим условие равновесия полукольца, отсеченного плоскостью, перпендикулярной плоскости симметрии кольца (рис. 11.2). По всей его длине действует распределенная нагрузка q , а на торцах – растягивающая сила N . Составляя условие равновесия по силам в проекциях на вертикальную ось, получим:

$$2N = \int_0^{\pi} qR \sin \varphi d\varphi .$$

Подставляя сюда выражение (11.4) для распределенной нагрузки после несложных вычислений для продольной силы и напряжения в материале придем к следующим соотношениям:

$$N = \rho A \omega^2 R^2 \quad \text{и} \quad \sigma = \rho \omega^2 R^2 . \quad (11.5)$$

Полученные выражения могут использоваться при оценке величины напряжений, обусловленных центробежными силами, в быстровращающихся деталях. Кроме того, с их помощью можно определить предельные значения угловых скоростей вращающихся узлов машин, превышение которых может привести к появлению в материале опасных напряжений.

Любопытно, что эти соотношения позволяют легко ответить на вопрос, над которым ломали головы самые глубокие мыслители два-три века назад. Вопрос состоит в том, являются ли кольца планеты Сатурн цельными небесными телами или они состоят из множества мелких тел. В то время радиус колец R и период обращения $T = \omega^{-1}$ уже были известны. Они примерно равны: $R \approx 60000 \text{ км} = 6 \cdot 10^7 \text{ м}$ и $T \approx 10 \text{ час} = 3,6 \cdot 10^4 \text{ с}$. Приняв плотность $\rho \approx 10^3 \text{ кг/м}^3$, для величины напряжений из соотношения (11.5) получим: $\sigma \approx 3,5 \cdot 10^9 \text{ Па} = 3500 \text{ МПа}$. Такие напряжения не под силу выдержать самым прочным материалам. Поэтому кольца Сатурна неминуемо рассыпались бы на части, если первоначально они были цельными небесными объектами.

11.2. Напряжения и деформации при ударе

Особую роль среди динамических нагрузок играют ударные нагрузки. За счет больших ускорений при ударе возникают значительные силы инерции, которые, в конечном счете, и определяют воздействие удара. Однако точно определить величину

ускорения при ударе невозможно. Поэтому воспользоваться формулами типа (11.1) для оценки динамических напряжений нельзя. Анализ напряжений и деформаций при ударе основан на энергетическом подходе, который приводит к результату аналогичному формуле (11.1). Рассмотрим указанный подход на примере следующей задачи. Пусть груз весом P падает с высоты h на вертикально поставленный стержень длиной l (рис. 11.3). Энергетический подход к анализу напряжений исходит из следующих допущений.

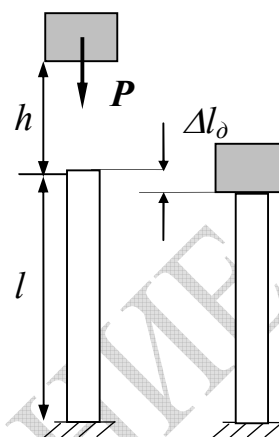


Рисунок 11.3

1. Удар считается абсолютно неупругим.
2. Потенциальная энергия груза, поднятого на высоту h , полностью переходит в кинетическую энергию, которая, в свою очередь, переходит в работу сжимающей силы на динамическом перемещении Δl_δ .
3. Динамические напряжения и динамические перемещения подчиняются закону Гука.
4. Работа сжимающего усилия при ударе на динамическом перемещении Δl_δ полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации стержня.

Потенциальная энергия падающего груза с учетом динамического перемещения, очевидно, равна $P(h + \Delta l_\delta)$. Потенциальная энергия упругой деформации при сжатии, согласно соотношению (3.16), равна:

$$U = \frac{N_\delta^2 l}{2 AE} .$$

Здесь N_δ – продольная сила в стержне, возникающая при падении на него груза, A и E – площадь поперечного сечения стержня и модуль продольной упругости соответственно. Динамическое перемещение Δl_δ и продольная сила N_δ связаны между собой законом Гука:

$$\Delta l_\delta = \frac{N_\delta l}{AE} . \tag{11.6}$$

Используя это соотношение, выразим потенциальную энергию упругой деформации через динамическое перемещение:

$$U = \frac{(\Delta l_\delta)^2 EA}{2l} .$$

В силу допущения 4 эту величину можно приравнять к потенциальной энергии падающего груза. В результате получим уравнение относительно динамического перемещения Δl_{δ} :

$$P(h + \Delta l_{\delta}) = \frac{(\Delta l_{\delta})^2 EA}{2l} \quad \text{или} \quad \frac{Pl}{EA}(h + \Delta l_{\delta}) = \frac{(\Delta l_{\delta})^2}{2}.$$

Сомножитель перед скобкой в левой части полученного уравнения представляет собой полное изменение длины стержня Δl_{cm} при его статическом сжатии, т. е. в том случае, когда груз просто лежит на торце стержня. С учетом этого уравнение относительно Δl_{δ} может быть записано в виде:

$$(\Delta l_{\delta})^2 - 2 \Delta l_{cm} \Delta l_{\delta} - 2 \Delta l_{cm} h = 0.$$

Оно имеет два корня:

$$\Delta l_{\delta} = \Delta l_{cm} \pm \sqrt{(\Delta l_{cm})^2 + 2\Delta l_{cm} h}.$$

Отрицательный корень физического смысла не имеет. Поэтому окончательно для динамического перемещения получаем:

$$\Delta l_{\delta} = \Delta l_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{cm}}} \right). \quad (11.7)$$

Полученное соотношение связывает абсолютное укорочение стержня при ударной нагрузке с аналогичной величиной при статическом

нагружении. Коэффициент $k_{\delta} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{cm}}} \right)$ учитывает ударный характер нагрузки. Он также называется коэффициентом динамичности. Таким образом, динамическое перемещение в k_{δ} раз превосходит статическое перемещение: $\Delta l_{\delta} = k_{\delta} \Delta l_{cm}$.

Из (11.6) следует, что и продольная сила при ударе будет в k_{δ} раз больше, чем при статическом сжатии. А значит, и напряжения в материале стержня при ударе в k_{δ} раз превышают напряжения при статическом нагружении. Следовательно, как и при учете сил инерции, напряжения в материале при ударной нагрузке можно найти, предварительно определив напряжения при статическом нагружении и вычислив затем значение коэффициента динамичности.

Такой подход носит достаточно универсальный характер, не ограничиваясь только простейшими видами нагружения. Убедимся в этом, рассмотрев задачу, где груз падает на горизонтальную балку (рис. 11.4). Найдем напряжения и перемещения при поперечном ударе. При этом будем исходить из тех же допущений, которые использовались при анализе продольного удара.

Потенциальная энергия падающего груза с учетом динамического перемещения в этом случае, очевидно, равна $P(h + \Delta y_\partial)$. Найдем потенциальную энергию упругой деформации балки, воспользовавшись формулой (5.36):

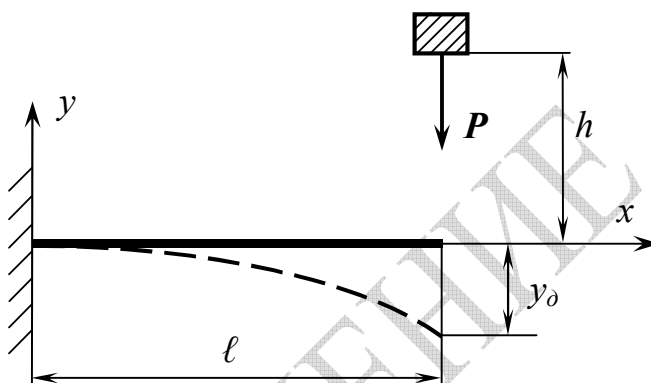


Рисунок 11.4

$$U = \int_l \frac{M^2(x) dx}{2EI}.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении балки равен: $M(x) = P_\partial(l - x)$, где P_∂ – сила давления груза на конец балки в момент удара. Следовательно, для энергии U получаем:

$$U = \int_0^l \frac{P_\partial^2(l - x)^2}{2EI} dx = \frac{P_\partial^2 l^3}{6EI}. \quad (11.8)$$

Выразим теперь потенциальную энергию упругой деформации через динамический прогиб y_∂ , применив теорему Кастилиано:

$$y_\partial = \frac{\partial U}{\partial P_\partial} = \frac{P_\partial l^3}{3EI} \quad \text{или} \quad P_\partial = \frac{3EI y_\partial}{l^3}.$$

Подстановка последнего соотношения в (11.8) дает:

$$U = \frac{3}{2} \frac{EI y_\partial^2}{l^3}.$$

Приравнявая потенциальную энергию упругой деформации и потенциальную энергию падения груза, придем к следующему уравнению относительно динамического прогиба:

$$P(h + y_{\delta}) = \frac{3}{2} \frac{EI y_{\delta}^2}{l^3}.$$

Учтем, что, согласно (5.28), величина $\frac{Pl^3}{3EI} = y_{cm}$ представляет собой прогиб конца балки при статическом нагружении ее силой P . Поэтому предыдущее уравнение может быть записано в виде:

$$(y_{\delta})^2 - 2 y_{cm} y_{\delta} - 2 y_{cm} h = 0.$$

Положительный корень этого уравнения вновь дает связь между динамическим и статическим прогибами аналогично (11.7):

$$y_{\delta} = y_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{cm}}} \right) = k_{\delta} y_{cm}. \quad (11.9)$$

Коэффициент динамичности k_{δ} отражает эффект удара. Он определяется не только высотой h , с которой падает груз, но и параметрами, входящими в y_{cm} (геометрией балки, модулем продольной упругости, весом груза).

Напряжения при ударе также выражаются через напряжения при статическом нагружении и коэффициент динамичности k_{δ} .

$$\Delta \sigma_{\delta} = \Delta \sigma_{cm} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{cm}}} \right). \quad (11.10)$$

Следовательно, для того чтобы рассчитать деталь на прочность и жесткость при ударных нагрузках, достаточно научиться рассчитывать ее при внешних усилиях, не зависящих от времени.

Из формулы (11.10) можно сделать интересный вывод. Если груз не падает с высоты, а прикладывается внезапно ($h = 0$), то $\Delta \sigma_{\delta} = 2 \Delta \sigma_{cm}$, т. е. при внезапном приложении нагрузки напряжения в два раза превышают напряжения, возникающие при статическом нагружении.

Поскольку, как уже отмечалось, поведение конструкционных материалов при ударно действующих нагрузках сильно отличается от поведения при статическом характере нагружения, их способность переносить мгновенное приложение внешних сил определяется с помощью специальных испытаний на удар. При этих испытаниях непосредственно измеряется количество работы, необходимой для ударного излома образца. Отношение затраченной работы к площади

сечения образца называется относительной вязкостью материала при ударной нагрузке. Эта величина необходима при проектировании частей машин и аппаратов, которые при эксплуатации могут подвергаться воздействию сил ударного характера.

11.3. Знакопеременные или циклические напряжения

Многие элементы химического оборудования испытывают нагрузки, периодически меняющиеся во времени. При этом в материале этих элементов возникают переменные напряжения. Характерным примером таких элементов являются вращающиеся валы, нагруженные поперечными силами. За время одного оборота каждая точка попеременно оказывается то на выпуклой, то на вогнутой стороне вала. Следовательно, в данной точке возникают то напряжения растяжения, то напряжения сжатия. Такие напряжения называют **знакопеременными** или **циклическими**. Практика показывает, что при циклических напряжениях, действующих в детали длительное время, она может разрушиться внезапно без заметных остаточных деформаций при напряжениях значительно меньше предела прочности. Это явление называют **усталостью материалов**.

Механизм усталостного разрушения материалов связан с появлением в нем микротрещин и их последующим развитием во времени, причем разрушение начинается только в том случае, если циклические напряжения превышают некоторое определенное для данного материала значение. Важно отметить, что все методы расчетов на прочность, основанные на понятии допускаемого напряжения $[\sigma]$, при действии переменных во времени напряжений оказываются неприемлемыми.

Прежде чем говорить о методике расчета на прочность при циклических напряжениях, введем некоторые понятия. При периодически меняющихся нагрузках напряжения в материале изменяются между двумя крайними значениями σ_{min} и σ_{max} (рис.11.5). Число полных циклов изменения напряжений в единицу времени называется **частотой изменения напряжений**. **Среднее напряжение цикла** равно среднему арифметическому наименьшего и наибольшего значений:

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} . \quad (11.11)$$

Амплитуда цикла определяется соотношением:

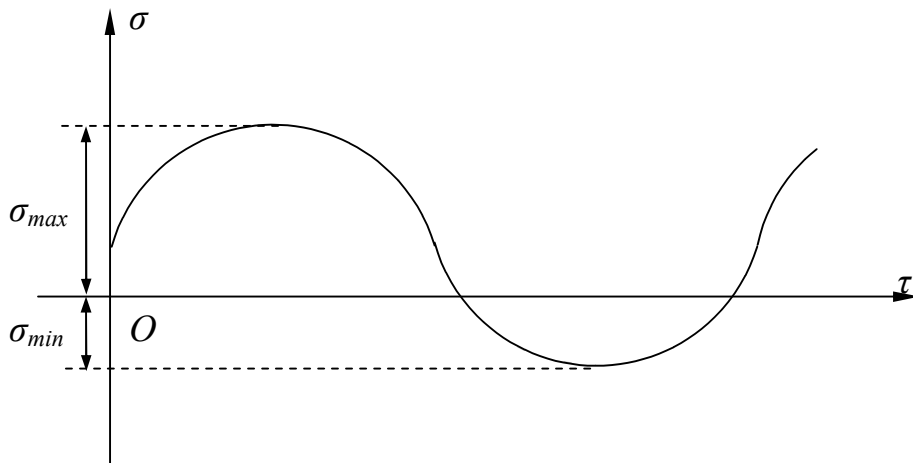


Рисунок 11.5

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (11.12)$$

Характер изменения напряжений может быть различным. Если σ_{\min} и σ_{\max} одинаковы по абсолютной величине, то цикл называется **симметричным**. Для него отношение

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{cp} - \sigma_a}{\sigma_{cp} + \sigma_a}, \quad (11.13)$$

которое называется **коэффициентом асимметрии цикла**, равно $r = -1$. Если одно из крайних значений напряжения равно нулю (либо σ_{\min} , либо σ_{\max}), то цикл называется пульсирующим. В этом случае коэффициент асимметрии $r = 0$ или $r = \infty$. Во всех других случаях говорят о несимметричном цикле. На рис. 11.5 приведен график изменения напряжения при несимметричном цикле с положительным средним значением.

При расчете элементов оборудования, на которые действуют переменные во времени напряжения, основной характеристикой прочности является **предел усталости** (или **предел выносливости**). *Пределом усталости σ_r (выносливости) называется наибольшее напряжение, которое данный материал в состоянии выдержать при данной асимметрии цикла r неограниченное число циклов.* Если при этом не указывается величина коэффициента r , то подразумевается симметричный цикл.

Предел усталости для данного материала определяется экспериментально в результате специально проводимых испытаний – испытаний на усталость. Как правило, в экспериментах реализуется симметричный цикл изменения напряжений, как наиболее опасный с

точки зрения потери прочности. Испытания проводят на испытательных машинах, позволяющих нагружать образцы переменными во времени нагрузками. Принципиальная схема простейшей испытательной машины такого рода приведена на

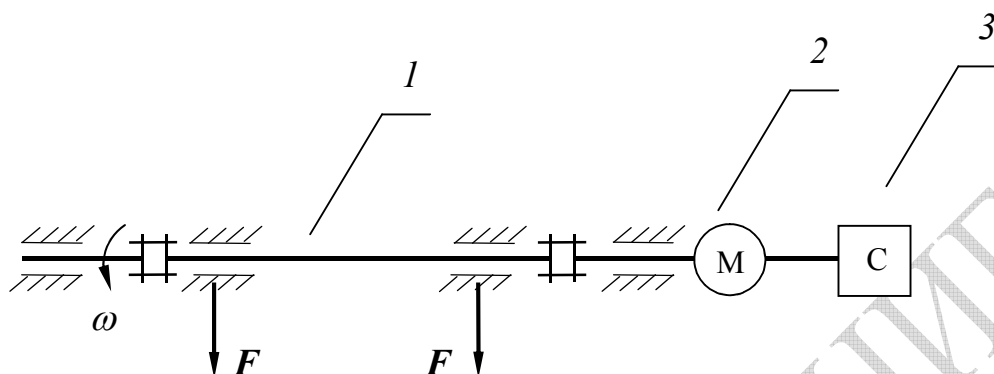


Рисунок 11.6

рис. 11.6. Испытуемый образец 1, закрепленный в неподвижных подшипниках, соединен с электродвигателем 2 и нагружен двумя равными силами F (рис. 11.6). Число оборотов отсчитывается счетчиком 3. Частота вращения вала электродвигателя в испытательных машинах обычно составляет $2000 \div 3000$ об/мин.

Образец находится в условиях чистого изгиба. При его вращении в каждой точке возникает переменное напряжение, пропорциональное силе F . Испытаниям подвергается несколько совершенно одинаковых тщательно обработанных образцов. Первый образец устанавливается на машину и нагружается такой силой F , чтобы амплитуда цикла напряжений составляла $0,5 \div 0,6$ от предела прочности $\sigma_{плч}$ данного материала. Пусть число циклов, после которых первый образец разрушается, равно N_1 . Затем устанавливают второй образец и уменьшают величину силы F . Второй образец разрушится при большем числе циклов – N_2 . Таким образом поступают со всеми отобранными образцами, последовательно уменьшая амплитуду напряжений. В результате получается последовательность возрастающих значений N_1, N_2, \dots , каждому из которых соответствует свое значение амплитуды напряжений σ_a . Испытания заканчивают, когда для некоторой амплитуды напряжений число циклов превысит 10^7 . В координатах N, σ полученные опытные данные отображаются в виде кривой (рис. 11.7). Ординаты точек этой кривой суть амплитуды напряжений, а абсциссы – соответствующие этим амплитудам количества циклов изменения напряжений, которые выдержал образец. Такие кривые называют кривыми Велера. Их

особенность состоит в том, что они имеют асимптотический характер, неограниченно приближаясь к некоторой горизонтальной прямой.

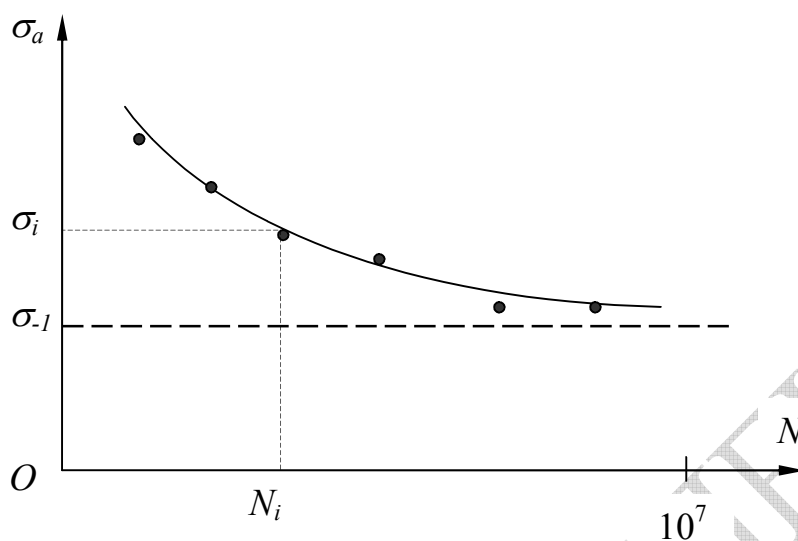


Рисунок 11.7

Ордината точек этой прямой определяет величину предела выносливости материала σ_{-1} при симметричном цикле напряжений.

Пределы усталости определяют для различных видов деформации в зависимости от того, какие нагрузки будет испытывать та или иная деталь или элемент конструкции. Интересно сопоставить пределы усталости сталей при симметричных циклах в условиях растяжения-сжатия σ_{-1p} , изгиба σ_{-1} и кручения τ_{-1} и пределом их прочности $\sigma_{пр}$. Опытами установлено, что между перечисленными величинами существует следующая приближенная связь:

$$\sigma_{-1p} = 0,28 \sigma_{пр}; \quad \sigma_{-1} = 0,4 \sigma_{пр}; \quad \tau_{-1} = 0,22 \sigma_{пр} \quad (11.14)$$

Эти количественные соотношения дают представление о том, насколько хуже конструкционные материалы сопротивляются нагрузкам, меняющимся во времени, по сравнению с постоянными.

11.4. Факторы, влияющие на предел выносливости

На величину предела выносливости оказывают влияние ряд факторов, которые приходится учитывать при расчетах на циклическую прочность деталей. Одним из них является наличие **концентраторов напряжений**. Так называют области резких изменений формы детали (сверления, пазы, отверстия, выточки и т. д.). В указанных областях возникают местные напряжения,

существенно превышающие напряжения в основной части детали. На рис.11.8 показано распределение напряжений в пластине, имеющей отверстие.

Появление местных напряжений называется **концентрацией напряжений**. Отношение максимальной величины местных напряжений к величине номинальных напряжений называется **теоретическим коэффициентом концентрации**

напряжений: $\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ном}}}$. Наличие

концентраторов напряжений существенно снижает предел выносливости материала. Для оценки влияния концентраций напряжений на предел выносливости вводится, так называемый, **эффективный коэффициент концентрации напряжений:**

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}} > 1, \quad (11.14)$$

где σ_{-1} - предел выносливости материала, определенный для стандартного образца при испытаниях на усталость; σ_{-1K} - предел выносливости при наличии концентраторов напряжений.

Другим фактором, влияющим на величину предела выносливости материала, являются размеры детали (масштабный фактор). Испытания образцов разного размера показали, что с увеличением геометрических размеров испытываемых образцов, величина предела выносливости снижается. В условиях испытаний обычно используются образцы диаметром $5 \div 12$ мм. Если испытать образец из того же материала, но диаметром уже 100 мм, то предел выносливости для него окажется на треть ниже.

Снижение предела выносливости с увеличением размера деталей носит асимптотический характер, то есть, начиная с некоторого размера (порядка $200 \div 250$ мм), снижение предела выносливости прекращается. Для количественной оценки влияния масштабного

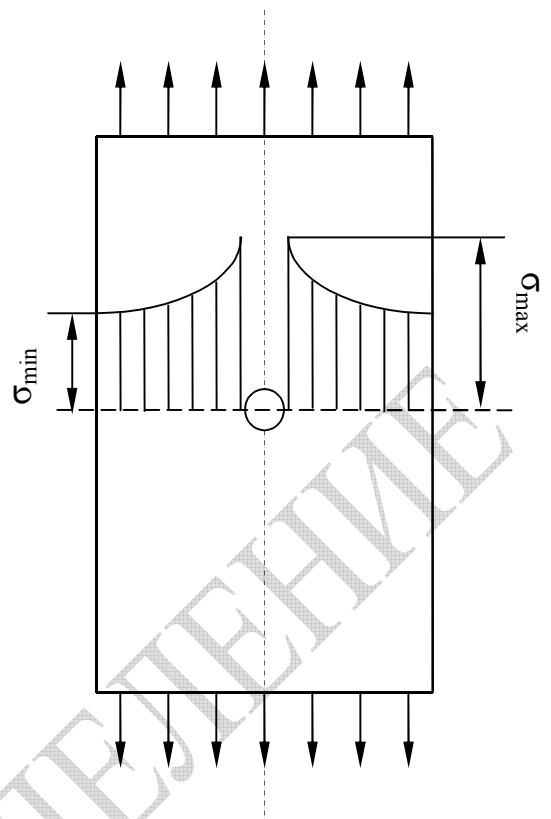


Рисунок 11.8

фактора на предел выносливости вводится коэффициент масштабного фактора:

$$K_{d\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}} < 1, \quad (11.15)$$

где σ_{-1d} - предел выносливости материала, установленный на образцах данного диаметра d ; σ_{-1} - предел выносливости, установленный на стандартных образцах диаметром $5 \div 12$ мм.

На величину предела выносливости сильное влияние оказывает качество обработки поверхности детали. Стандартные испытания по определению предела выносливости сталей проводятся на образцах, поверхность которых тщательным образом шлифуется. Опыты показывают, что предел выносливости снижается с ухудшением качества обработки поверхности детали. При определении предела выносливости качество обработки поверхности (ее шероховатость) детали учитывается еще одним коэффициентом:

$$K_F = \frac{\sigma'_{-1}}{\sigma_{-1}} < 1, \quad (11.16)$$

где σ'_{-1} - предел выносливости для образцов, имеющих шероховатость, измеряемую в микрометрах; σ_{-1} - предел выносливости для образцов с гладкой поверхностью.

Учет влияния всех факторов на предел выносливости производится введением так называемого **коэффициента запаса**:

$$K = \frac{K_\sigma}{K_{d\sigma} K_F}, \quad (11.17)$$

который затем используется для расчета допускаемого напряжения на циклическую прочность, связывая его с пределом выносливости:

$$[\sigma_{-1}] = \frac{\sigma_{-1}}{K}. \quad (11.18)$$

Таким образом, при расчете деталей, нагруженных симметричным циклом изменения напряжений, за исходное предельное напряжение принимается предел выносливости, полученный в результате испытаний стандартного образца из данного материала. Коэффициент запаса K учитывает затем отличие условий проведения испытаний от реальных условий работы детали при эксплуатации оборудования.

11.5. Определение предела выносливости при несимметричном цикле

Величина допускаемого напряжения, участвующая в расчетах на прочность, до сих пор определялась только одной механической характеристикой материала. При статическом нагружении такими характеристиками являются предел прочности $\sigma_{пч}$ для хрупких материалов и предел текучести σ_m - для пластичных материалов. При циклическом нагружении, когда напряжения меняются по симметричному циклу, роль такой характеристики играет предел выносливости σ_{-1} . При несимметричном цикле изменения напряжений одной характеристики недостаточно. Действительно, характеристиками несимметричного цикла служат две величины: среднее напряжение цикла, определяемое по формуле (11.11), и амплитуда цикла, определяемая по формуле (11.12). Третья характеристика - коэффициент асимметрии цикла - выражается через них по формуле (11.13).

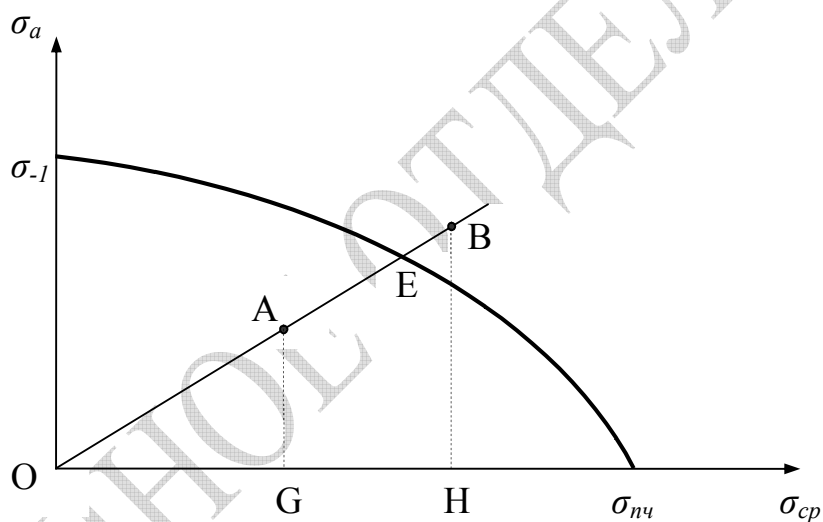


Рисунок 11.9

Рассмотрим вопрос о том, каким образом можно задать величину допускаемого напряжения, необходимую для расчета на прочность при несимметричном цикле изменения напряжений. Для этого введем систему декартовых координат с абсциссами равными среднему напряжению цикла и с ординатами равными амплитуде цикла (рис. 11.9). Каждой точке в этих координатах соответствует определенный цикл напряжений с характеристиками σ_{cp} и σ_a . В частности, точке $(0, \sigma_{-1})$ отвечает симметричный цикл с амплитудой равной пределу усталости, точке $(\sigma_{пч}, 0)$ - статическое нагружение с постоянным во времени напряжением равным пределу прочности.

Обе указанные точки соответствуют предельному состоянию материала.

При несимметричном цикле предельное состояние характеризуется двумя величинами: средним напряжением и предельной амплитудой. Этому предельному состоянию в координатах σ_{cp} и σ_a отвечает определенная точка. Совокупность таких точек при различных средних напряжениях ложится на некоторую кривую, которая называется **предельной кривой** или диаграммой усталости (рис. 11.9). Ниже этой кривой лежат точки, отвечающие безопасным циклам напряжений. На предельной кривой расположены точки, отвечающие предельным циклам.

Для определения предельного цикла при заданном коэффициенте асимметрии r важно убедиться, что точкам, лежащим на одном и том же луче, который исходит из начала координат, соответствуют циклы с одинаковым значением r . С этой целью возьмем две точки A и B на луче, исходящем из начала координат (рис. 11.9). По определению коэффициента асимметрии (11.13) имеем:

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{cp} - \sigma_a}{\sigma_{cp} + \sigma_a}.$$

Выразим коэффициент асимметрии через длины отрезков. Для точки A коэффициент r выражается следующим образом:

$$r_A = \frac{OG - AG}{OG + AG}.$$

Для точки B имеем:

$$r_B = \frac{OH - BH}{OH + BH}.$$

В силу подобия треугольников OAG и OBH между их сторонами выполняются соотношения:

$$\frac{OH}{OG} = \frac{BH}{AG} = m \quad \text{или} \quad OH = m OG, \quad BH = m AG.$$

Подставляя эти соотношения в выражение для r_B , получим:

$$r_B = \frac{OH - BH}{OH + BH} = \frac{mOH - mBH}{mOH + mBH} = r_A.$$

Таким образом, все точки, лежащие на луче OB (рис. 11.9), соответствуют циклам с одним и тем же коэффициентом асимметрии. Предельному циклу с этим же значением r соответствует точка E на предельной кривой. Поэтому пределом выносливости при данной асимметрии цикла будет напряжение равное:

$$\sigma_r = \sigma_{cpE} + \sigma_{aE} ,$$

а допускаемое напряжение для данного цикла с учетом коэффициента запаса может быть выражено следующим образом:

$$[\sigma_r] = \frac{\sigma_r}{K} . \quad (11.19)$$

11.6. Контрольные вопросы

1. Какие нагрузки относят к статическим нагрузкам? Когда нагрузки не допустимо считать статическими?
2. Как проявляется динамический характер нагрузок?
3. Что такое коэффициент динамичности и как с его помощью можно учесть силы инерции при анализе величины напряжений в материале?
4. Какие напряжения возникают при вращательном движении элементов оборудования и как оценить их величину?
5. Какой подход используется при расчете напряжений и деформаций при ударных нагрузках?
6. Перечислите допущения, которые используются при анализе напряжений в условиях ударных нагрузок. Насколько они оправданы по вашему мнению?
7. Как связаны напряжения и перемещения при ударных и при статических нагрузках?
8. От чего зависит коэффициент динамичности при поперечном ударе?
9. Какие напряжения называют циклическими?
10. Что такое усталость конструкционных материалов?
11. Назовите основные характеристики циклов изменения напряжений.
12. Какое напряжение называется пределом усталости материала?
13. Как проводят испытания на усталость?
14. Как определить предел усталости по результатам испытаний?

15. Какие факторы оказывают влияние на величину предела усталости?
16. Что такое концентраторы напряжений? С чем связано их влияние на величину предела усталости?
17. Как влияет качество обработки поверхности детали на величину предела усталости?
18. Как связаны допускаемое напряжение при расчете на циклическую прочность и предел усталости?
19. Что такое кривая усталости при несимметричном цикле изменения напряжений? Как с ее помощью можно определить величину допускаемого напряжения при заданном коэффициенте асимметрии?

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Детали машин

Глава 12. Общие сведения о проектировании деталей машин

12.1. Понятие детали, узла, механической передачи, машины

Современное технологическое оборудование включает в себя разнообразные объекты (изделия), важнейшими из которых являются машины. *Изделие* – любой продукт машиностроения. *Машина* это устройство, совершающее механические движения с целью выполнения полезной работы за счет преобразования энергии. Кинематической основой любой машины является *механизм* – устройство в виде системы твёрдых тел преобразующее движение одних тел в целесообразное движение других тел.

Простейшим элементом конструкции механизма или машины является *деталь* – элемент, изготовленный без использования сборочных операций, например, таких как сварка, пайка, запрессовка и др. По функциональному признаку детали разделяются на несколько групп:

- крепежные (болты, винты, шпильки, гайки, заклепки, штифты и т.п.);
- детали механизмов (валы, зубчатые колеса, шкивы, рычаги и т.п.);
- детали направляющих (элементы подшипников);
- детали герметизирующих устройств (фланцы, прокладки и т.п.);
- корпусные детали (станины, обечайки, днища, крышки и т.п.);
- упругие элементы (пружины, сильфоны, мембраны и т.п.);
- детали рабочих органов или исполнительных устройств (диски, лопасти, ступицы и т.п.);
- вспомогательные детали (рукоятки, петли люков и крышек, смотровые стекла и т.п.).

Детали, встречающиеся практически во всех машинах – детали общего назначения (они изучаются в курсе детали машин). Детали, встречающиеся в одном или нескольких типах машин (валки, поршни, лопасти, лопатки турбин и др.) – детали специального назначения, изучающиеся в специальных курсах.

Различные по назначению детали могут иметь одинаковую расчетную схему и рассчитываться с целью обеспечения их работоспособности по одинаковым методикам.

Конструкции механизмов машин состоят из *узлов* или *сборочных единиц*, т.е. комплекса обособленных неподвижно или подвижно соединенных между собою деталей и объединённых общим назначением. *Неподвижные* соединения, в которых детали после сборки не имеют возможности относительного перемещения, предназначены для разделения конструкции на составные части, что позволяет упростить изготовление и сборку изделия. *Подвижные*

соединения являются конструктивным исполнением кинематических пар механизмов (шарниры, винтовые пары и т.п.), обеспечивающих целенаправленные движения звеньев. Механизмы, передающие механическую энергию на расстояние – *механические передачи*.

Качество машин во многом зависит от качества входящих в их состав деталей, а также от вида и качества соединений, и механических передач.

12.2. Этапы проектирования изделий

Проектирование – это разработка общей конструкции изделия. *Конструирование* – это определение формы и размеров всех элементов общей конструкции изделия.

Проект – комплекс текстовых, расчётных и графических документов, полученных в результате проектирования и конструирования, и предназначенных для изготовления, контроля и эксплуатации изделия.

Высокое качество проектирования и конструирования обеспечивается соблюдением системы стандартов на правила проведения проектных работ и оформления конструкторской документации. Проектированию изделия предшествует сбор информации об опыте и особенностях проектирования, изготовления и эксплуатации, ранее созданных аналогичных изделий, подбор необходимой нормативно-технической литературы.

Согласно ГОСТ 2.103-68 установлены следующие этапы проектирования новых изделий: техническое задание, техническое предложение (выполняется при проектировании оборудования из нестандартных элементов), эскизный проект, технический проект, рабочая конструкторская документация.

Техническое задание на проект содержит общие сведения о назначении, рабочих параметрах агрегата, эксплуатационных требованиях, сроках проектирования.

Эскизный проект (ГОСТ 2.119-73) предусматривает обоснование выбора и разработку одного или нескольких вариантов изделия, и дает общее представление о его устройстве и принципе действия, параметрах, габаритах и стоимости.

Технический проект (ГОСТ 2.120-73) опирается на результаты эскизного проекта и более подробно охватывает расчет и конструирование большинства деталей и узлов. После технико-экономического анализа с участием заказчика окончательно отбирается оптимальный вариант изделия.

Рабочая конструкторская документация (ГОСТ 2.109-73) – заключительная стадия выполнения проекта, предусматривает разработку сборочных чертежей машины или аппарата, их сборочных единиц и деталей; спецификации на материалы, стандартные и

покупные изделия; чертежи на упаковку и транспортировку; технические условия на изготовление, приемку, транспортировку, монтаж, испытания и т.д.

На заводе изготовителе проектно-конструкторская документация изучается и используется для материальной и кадровой подготовки производства, т.е. для приобретения необходимых материалов, комплектующих, наладки технологического оборудования, и для организации изготовления спроектированного оборудования.

12.3. Надёжность и экономичность деталей машин

Сочетание рабочих параметров, экономичности и надежности машин – важнейшие составляющие *качества* этих изделий.

Экономичность определяется общими затратами средств на проектирование, изготовление, монтаж, эксплуатацию и утилизацию оборудования после истечения его срока службы.

Надежность - это свойство изделия выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в заданных пределах в течение заданного срока службы. Нарушение работоспособности называется *отказом*. Продолжительность или объем работы объекта называют *наработкой*. Надежность машин и их элементов является комплексным свойством, сочетающим *безотказность, долговечность, ремонтпригодность и сохраняемость*.

Безотказность – свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение заданного времени эксплуатации.

Долговечность – свойство объекта сохранять при установленной системе технического обслуживания и ремонта работоспособность до наступления предельного состояния, т.е. такого состояния при котором нарушается безопасность эксплуатации, или при котором рабочие параметры устройства неустранимо выходят за заданные пределы. Долговечность характеризуется ресурсом, т.е. *наработкой* от начала эксплуатации до наступления предельного состояния или отказа.

Ремонтпригодность – приспособленность объекта к восстановлению работоспособности путём проведения технического обслуживания и ремонтов. Ряд элементов, например, подшипники, герметизирующие прокладки и др. ремонтпригодностью не обладают.

Сохраняемость – свойство объекта сохранять значения показателей безотказности, долговечности и ремонтпригодности после хранения или транспортирования.

Экономичность и надежность машин обеспечивается при выполнении ряда общетехнических требований:

- простота конструкции;

- рациональный подбор конструкционных материалов;
- точность и тщательность расчета, изготовления и монтажа всех элементов;
- низкая материалоемкость;
- низкая энергоемкость, высокий КПД;
- высокий уровень стандартизации;
- грамотная эксплуатация и техническое обслуживание;
- эргономичность (удобство эксплуатации).

Одними из основных показателей надежности изделия являются *вероятность безотказной работы* в течении заданного времени t и *интенсивность отказов* $\lambda(t)$.

Для простого изделия (элемента) вероятность безотказной работы за время испытаний или наблюдений t

$$P(t) = 1 - \frac{N(t)}{N_0}, \quad (12.1)$$

где N_0 – число изделий, за которыми велось наблюдение; $N(t)$ – число изделий вышедших из строя за время t .

Если сложное изделие состоит из n последовательно связанных элементов рис.12.1, то вероятность безотказной работы может быть установлена без его испытаний по формуле

$$P(t) = P_1(t) P_2(t) \dots P_i(t) \dots P_n(t), \quad (12.2)$$

где $P_i(t)$ – уже установленная вероятность безотказной работы i -го элемента.

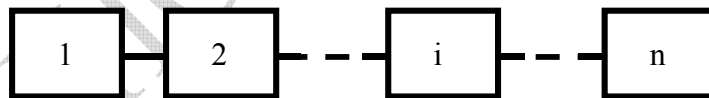


Рисунок 12.1

Из уравнения (12.2) следует, что большое количество элементов снижает общую надежность сложного изделия. Например, если вероятность безотказной работы всех элементов, входящих в изделие равно $P_i = 0,9$, а их число $n = 5$, то $P(t) = (P_i(t)^n) = 0,9^5 = 0,59$. Если же число элементов вдвое больше ($n = 10$), то $P(t) = (P_i(t)^n) = 0,9^{10} = 0,35$.

Существенно то, что вероятность безотказной работы сложного изделия с последовательно соединёнными элементами рис.1.1 всегда меньше надёжности самого слабого элемента. Например, если у одного из пяти элементов $P_k = 0,7$, а у остальных четырёх элементов $P_i = 0,9$, то $P(t) = (P_i(t)^4 P_k) = 0,9^4 \cdot 0,7 = 0,46$, что меньше $P_k = 0,7$. Таким

образом, чем выше надёжность отдельных элементов, тем выше надёжность всей системы.

Интенсивность отказов определяется по формуле

$$\lambda(t) = \frac{N(t)}{t(N_0 - N(t))}, \quad (12.3)$$

где N_0 , $N(t)$, t см. пояснения к формуле 12.1.

Практикой установлено, что интенсивность отказов со временем изменяется в соответствии с графиком, приведенным на рис. 12.2. Из приведенной зависимости следует, что время наработки можно разделить на три периода.

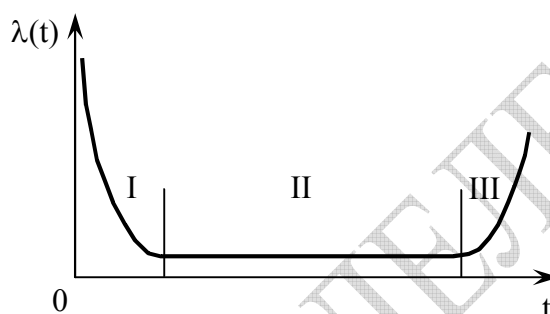


Рисунок 12.2

Период I (период приработки) характеризуется повышенной интенсивностью отказов, которые вызваны наличием скрытых дефектов в элементах устройств. С периодом приработки обычно совпадает период гарантийного обслуживания машины. Период II (период нормальной эксплуатации) характеризуется низкой интенсивностью отказов, которые происходят из-за неблагоприятного сочетания внешних факторов, или из-за ошибок обслуживающего персонала. Период III (период усиленного износа) отличается высокой интенсивностью отказов, которые вызваны усталостью и износом деталей. Ресурс изделия назначают по наработке в конце II, начале III периода.

Для повышения надежности изделия в первом периоде производят сдаточные испытания и эксплуатацию изделия в щадящем режиме – режиме обкатки. Для защиты машин от случайных перегрузок и повышения ремонтпригодности в их конструкции предусматривают предохранительные устройства.

12.4. Главные критерии работоспособности деталей машин

Основными критериями работоспособности деталей машин являются прочность, жесткость, устойчивость, износостойкость, виброустойчивость, теплостойкость, коррозионная стойкость.

Каждый критерий работоспособности количественно характеризуется некоторым параметром Π (механическим напряжением, перемещением, силой, температурой, частотой вращения и т.д.). Отношение параметра Π_{lim} , соответствующего предельному состоянию детали, т.е. состоянию при котором начинает нарушаться работоспособность, к наибольшему значению параметра в рабочих условиях Π_{max} называют коэффициентом запаса по данному критерию работоспособности

$$s = \Pi_{lim} / \Pi_{max} . \quad (12.4)$$

Условие работоспособности записывается в виде неравенства

$$\Pi \leq [\Pi] \text{ или } \Pi \leq \Pi_{lim} / [s] , \quad (12.5)$$

где $[\Pi]$ и $[s]$ – соответственно допустимые или нормативные значения параметра работоспособности и коэффициента запаса по критерию работоспособности.

Прочность – способность элемента конструкции выдерживать нагрузку, не разрушаясь, или не получая недопустимых остаточных деформаций. Наиболее распространенный метод оценки прочности деталей машин – сравнение *максимальных* расчетных (рабочих) нормальных напряжений σ (или касательных напряжений τ), возникающих при действии эксплуатационных нагрузок, с допускаемыми напряжениями $[\sigma]$ или $[\tau]$, т.е. с напряжениями при которых гарантированно обеспечивается прочность детали. *Условие прочности* выражается неравенствами

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (12.6)$$

или

$$\tau \leq [\tau]. \quad (12.7)$$

Условия прочности для простых видов деформации приведены в таблице 12.1, а формулы для определения геометрических характеристик сечений W_z , W_p деталей, имеющих расчётную схему стержня, приведены в таблице 12.2.

Прочность элемента конструкции может оцениваться путём сравнения действительного коэффициента запаса прочности s с допускаемым (нормативным) коэффициентом запаса прочности $[s]$

$$s \leq [s]. \quad (12.8)$$

Расчет по допускаемым напряжениям обычно выполняют как *проектировочный* для определения требуемых размеров детали. Если размеры детали уже назначены, то выполняют *проверочный* расчёт с использованием условий прочности (табл. 12.1), при котором выясняется соблюдение неравенств (12.6), (12.7) или (12.8). Условия

прочности, решенные относительно нагрузок называются расчётом на *допустимую нагрузку*.

Таблица 12.1 Условия прочности для простых видов деформации

Вид деформации	Условие прочности*
Растяжение (сжатие)	$\sigma_{p(сж)} = F / A_{p(сж)} \leq [\sigma]_{p(сж)}$
Смятие	$\sigma_{см} = F / A_{см} \leq [\sigma]_{см}$
Изгиб	$\sigma_{и} = M / W_z \leq [\sigma]_{и}$
Сдвиг (срез)	$\tau = Q / A_{ср} \leq [\tau]_{ср}$
Кручение	$\tau = T / W_p \leq [\tau]_{кр}$

* F – сосредоточенная сила при растяжении (сжатии); M – изгибающий момент; Q – поперечная сила при сдвиге; T – крутящий момент; A – площадь сечения; W_z – осевой момент сопротивления сечения относительно оси z; W_p – полярный момент сопротивления сечения.

Жесткость – способность элемента конструкции выдерживать нагрузку, не получая недопустимых упругих деформаций – важнейший критерий работоспособности. Лишь при условии высокой жесткости валов обеспечивается удовлетворительная работа подшипников, элементов передач; жесткость корпусных деталей, крепежных элементов и рабочих органов технологических машин обеспечивает выпуск изделий требуемой точности.

Различают *объемную* (собственную) (рис. 12.3, а, б, в) и *контактную* (рис. 12.3, г) жесткость деталей машин.

Расчеты на объемную жесткость известны из курса сопротивления материалов; при этих расчётах ограничивают перемещения, обусловленные деформациями всего материала детали.

Условия жесткости детали, имеющей расчетную схему стержня, могут иметь следующий вид: применительно к деформации изгиба (рис. 12.3, а)

$$|y| \leq [y] \text{ и } |\theta| \leq [\theta] \quad (12.9)$$

применительно к кручению (рис. 12.3, б)

$$|\varphi| \leq [\varphi], \quad (12.10)$$

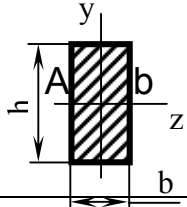
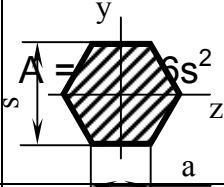
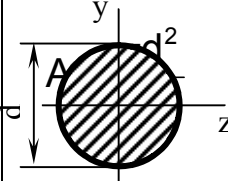
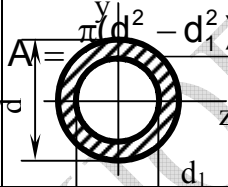
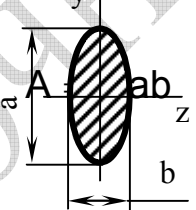
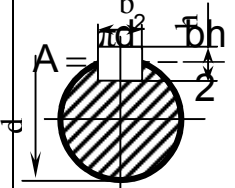
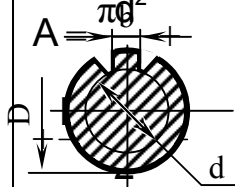
растяжению (сжатию) (рис. 12.3, в)

$$|\Delta \ell| \leq [\Delta \ell], \text{ или } |\Delta a| \leq [\Delta a], \quad (12.11)$$

где y и $[y]$ – соответственно, действительное и допустимое значения прогиба; θ и $[\theta]$ – угла поворота поперечного сечения детали; φ и $[\varphi]$ – угла закручивания поперечного сечения детали; $\Delta \ell$ и $[\Delta \ell]$ –

абсолютного удлинения (укорочения) детали; Δa и $[\Delta a]$ – абсолютных поперечных деформаций детали.

Таблица 12.2 Геометрические характеристики поперечных сечений

Форма сечения	Площадь A	Осевой момент сопротивления W	Полярный момент сопротивления W
		$W_z = \frac{bh^2}{6}$ $W_y = \frac{hb^2}{6}$	$W_k \approx \frac{b^2h^2}{3h + 1,8b}$
	$A = 6s^2$	$W_z = 0,12s^3$ $W_y = 0,54a^3$	$W_k = 0,188s^3$
		$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$	$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$
	$A = \pi(d^2 - d_1^2)$	$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right)$	$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \left(1 - \frac{d_1^4}{d^4}\right)$
		$W_z = \frac{\pi}{32} a^2 b$ $W_y = \frac{\pi}{32} a b^2$	$W_p = \frac{\pi}{16} b^2 a$
	$A = \frac{\pi d^2}{4} - bh$	$W = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bh(2d-h)^2}{16d}$ (b и h – размеры шпоночного паза)	$W_k = \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bh(2d-h)^2}{16d}$
	$A = \frac{\pi d^2}{4}$	$W = \frac{\pi d^4 + bz(D-d)(D+d)^2}{32D}$ (z – число шлицев)	$W_k = 2W$

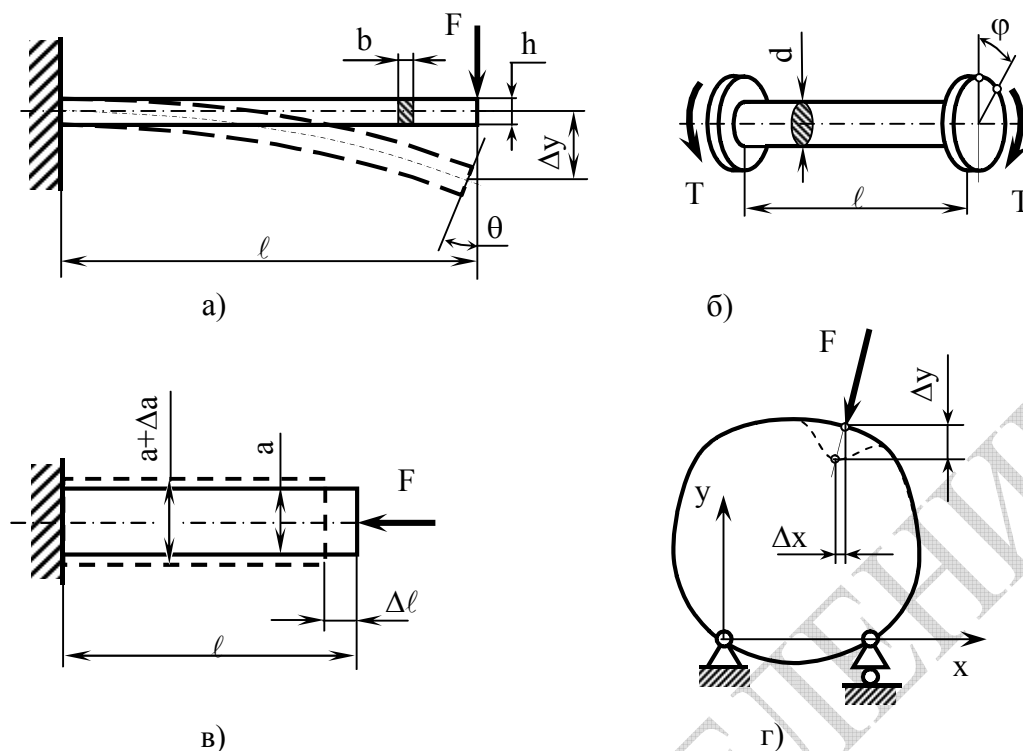


Рисунок 12.3

Расчёт на контактную жесткость деталей машин с начальным контактом в точке, например, в шарикоподшипниках, или по линии, например, в роликовых подшипниках, зубчатых и фрикционных передачах, производят по формулам теории контактных напряжений и деформаций.

Основным показателем жесткости детали является *коэффициент жесткости*, равный в общем случае отношению силы (силового фактора) к перемещению некоторой характерной точки (обычно точки приложения силы) или сечения. Величина обратная коэффициенту жесткости – *коэффициент податливости* – отношение перемещения к величине силового фактора, вызвавшего данное перемещение.

Устойчивость – способность элемента конструкции сохранять начальную форму упругого равновесия. При потере устойчивости происходит искажение формы детали – один вид деформации внезапно переходит в другой вид деформации, например, сжатие стержня переходит в сжатие с изгибом (рис. 12.4, а), изгиб стержня – в изгиб с кручением (рис. 12.4, б), кручение – в кручение с изгибом (рис. 12.4, в). При потере устойчивости напряжения внутри детали быстро нарастают, возникает угроза разрушения. Потеря устойчивости происходит при достижении силовым фактором, например, силой F (рис. 12.4, а, б) критического значения $F_{кр}$. Расчет деталей машин на устойчивость производят по формулам сопротивления материалов

(формулы Эйлера, Ясинского и др.). Условие устойчивости продольно сжатого стержня имеет вид

$$|F| \leq [F]_y, \quad (12.12)$$

где $[F]_y$ – допустимое значение сжимающей силы.

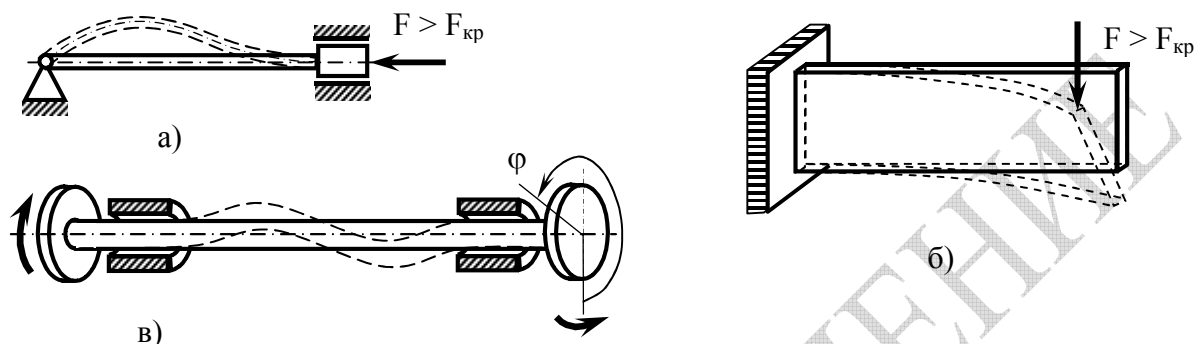


Рисунок 12.4

Виброустойчивость – способность конструкции работать в условиях переменных (динамических) нагрузок без недопустимых по амплитуде колебаний. Любая упругая система обладает собственной частотой и формой колебаний (крутильные, изгибные и др.). Резонанс наступает при совпадении собственной частоты колебаний машины или её деталей с частотой вынужденных колебаний (частотой изменения внешних периодических сил). Источником вынужденных колебаний являются внешние периодические силы, которые вызываются, как правило, движением частей машины, например, вращением вала, или воздействиями со стороны обрабатываемого (перемещаемого) материала. В области резонанса (рис. 12.5) максимальны амплитудные значения деформаций, перемещений

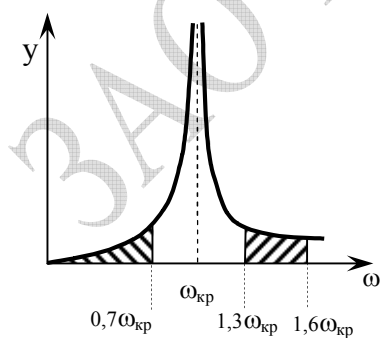


Рисунок 12.5

(например, прогибов y), сил упругости и инерции, что ведёт к разрушению элементов конструкции. Резонансы устраняют за счёт изменения собственной частоты колебаний, например, повышением жесткости или уменьшением массы конструкции, а также за счёт изменения частоты возбуждающей силы, или специальными приспособлениями – поглотителями колебаний. Условия виброустойчивости вала, вращающегося с угловой скоростью ω , в дорезонансной и зарезонансной областях, соответственно, имеют вид

$$\omega \leq 0,7\omega_{кр}, \quad (12.13)$$

$$1,3 \omega \leq \omega \leq 1,6 \omega_{кр} , \quad (12.14)$$

где $\omega_{кр}$ – критическая (резонансная) частота вращения вала.

Расчеты деталей на виброустойчивость проводят по формулам сопротивления материалов, и теории колебаний.

Теплостойкость – способность конструкции работать в пределах заданных температур в течение установленного срока. Данный критерий работоспособности важнейший для деталей и узлов, работающих в условиях большого выделения тепла, которое может быть вызвано трением или технологическим процессом (литьё, экструзия, вулканизация и т.д.). С увеличением температуры ухудшаются механические характеристики конструкционных материалов, характеристики смазочных масел, увеличивается износ, изменяются зазоры. Поэтому многие трущиеся пары (червячные передачи, подшипники и др.) рассчитывают по тепловому балансу для обеспечения нормального теплового режима. Расчеты на теплостойкость деталей работающих при повышенных температурах заключается в определении прочности по пониженным допускаемым напряжениям с учётом температуры нагрева.

Износостойкость – способность деталей сопротивляться изнашиванию. Изнашивание – процесс разрушения поверхностных слоёв при трении, приводящий к постепенному изменению размеров, формы и состояния поверхности деталей. С увеличением износа увеличиваются зазоры, т.е. снижается точность сопряжений, снижается коэффициент полезного действия, возникают дополнительные нагрузки и даже поломки деталей. До 90% деталей подвижных соединений выходят из строя из-за износа. Износ деталей значительно повышает стоимость эксплуатации машин в связи с необходимостью их периодического обслуживания и ремонта.

Существуют различные виды изнашивания: *усталостное, абразивное, коррозионно-механическое* и т.д. Интенсивность изнашивания деталей машин зависит от их формы, размеров, физико-химических свойств, условий нагружения, теплового режима, свойств смазочного материала.

Усталостное изнашивание (выкрашивание) возникает на контактирующих поверхностях при наличии смазки в зубчатых передачах, подшипниках качения при действии переменных контактных напряжений.

Абразивное изнашивание характерное для механизмов, работающих в запылённой среде при недостатке смазки, возникает в результате режущего или царапающего действия твёрдых тел и частиц.

Коррозионно-механическое изнашивание – изнашивание, при котором продукты коррозии и защитные окисные плёнки удаляются механическим воздействием. Коррозия особенно активизируется в машинах, работающих на открытом воздухе.

Для уменьшения износа деталей машин повышают износостойкость трущихся поверхностей термообработкой, нанесением защитных покрытий, увеличением толщины смазочного слоя, снижением шероховатости трущихся поверхностей, улучшением физико-химических свойств смазочного материала, установкой пылезащитных уплотнений трущихся деталей и т.д.

Расчёт деталей на износ заключается в определении условий невыдавливания смазки или же в назначении для сухих трущихся поверхностей соответствующих допускаемых давлений (удельных нагрузок).

12.5. Расчётные модели деталей машин

При проведении исследований и расчетов реальных объектов в зависимости от поставленной цели составляют определённую модель объекта. *Моделью* объекта называют совокупность представлений, зависимостей, условий и ограничений, служащих для её описания. При составлении модели учитывают лишь наиболее значимые факторы. Для одной и той же детали или узла в зависимости от исследуемого критерия работоспособности (прочность, жесткость, устойчивость, износостойкость, виброустойчивость, теплостойкость) могут быть разработаны несколько разных моделей. Разработанная модель может иметь различные уровни упрощения. Существенно то, что одну и ту же модель можно использовать для расчёта различных реальных объектов.

Описание объекта, как правило, бывает одновременно словесным, графическим, физическим, математическим.

Словесное (вербальное) описание объекта опирается на общепринятую техническую терминологию, содержит названия элементов, узлов, пояснение условий их связи и работы.

Графическое описание объекта в виде упрощенного изображения, позволяющего понять основные идеи конструкции и условия ее работы, называется *схемой*.

Физическая модель – описание, отображающее основные физические характеристики объекта, т.е. принцип действия, входные и выходные параметры физического (технологического) процесса, производительность, мощность, массу, нагрузки, скорость и т.п.

Графическая схема, дополненная необходимыми для последующих расчетов, физическими параметрами (условные изображения скоростей, сил и т.п.) представляет собой *расчетную схему*, т.е. упрощенное представление об объекте с выделением свойств, подлежащих изучению.

Математическое описание, выполненное с помощью математической символики, позволяет составить *математическую модель*

объекта. Под математической моделью понимают уравнения, неравенства и их системы, отображающие качественные и количественные соотношения переменных и постоянных физических величин, определяющих функционирование и работоспособность объекта. Математические модели обычно реализуются при помощи компьютерных программ.

Прочностная модель детали или узла имеет несколько составляющих: модель материала, модель формы, модель сопряжения, модель нагрузки, модель напряженного состояния, модель разрушения.

Модель материала. Конструкционные металлические материалы считают однородными (плотность материала одинакова в любых точках объёма) и изотропными (свойства любого объёма материала одинаковы в различных направлениях). Некоторые конструкционные материалы (композиционные материалы) являются анизотропными, т.е. обладают различными свойствами по различным направлениям.

Модель материала наделяется свойствами и характеристиками *прочности, упругости* (способность твёрдого тела полностью восстанавливать свою форму и размеры после снятия нагрузки), *пластичности* (способность получать значительную остаточную деформацию после снятия нагрузки), *теплового расширения, ползучести* (явление роста деформаций с течением времени при неизменной нагрузке) и др.

Модель формы. Сложная геометрическая форма деталей машин упрощается при составлении модели детали. Упрощенные модели формы – *стержень* (тело, одно измерение которого значительно больше двух других), *оболочка* или *пластинка* (тело, два измерения которого значительно больше третьего), *массив* (тело, все три измерения которого имеют один порядок).

Модели сопряжений. Сопряжения деталей зависят от формы деталей, конструктивных и технологических связей. Конструктивные связи реализуются в узлах посредством различных конструктивных элементов (сварных, паяных, клеевых швов, заклёпок, зубьев, шпонок и т.п.). Технологические связи обуславливаются шероховатостями поверхностей и погрешностями в форме сопрягаемых деталей.

Модель нагрузки. Характер нагрузок и воздействий, которые испытывают детали машин, обусловлен назначением, режимом и условиями работы оборудования. Для установления и количественного учета наиболее важных внешних воздействий любую деталь условно рассматривают изолированно от других деталей, заменяя при этом действие отброшенных деталей (в том числе и их связей – опорных устройств) внешними силами, которые принято называть нагрузками.

По способу приложения различают нагрузки поверхностные и объёмные (силы собственного веса, силы инерции, центробежные силы и др.). Величина нагрузки, действующая на единицу поверхности контакта, называется *интенсивностью* нагрузки или *давлением*.

Если площадь приложения нагрузки имеет малую ширину по сравнению с длиной, то поверхностную нагрузку заменяют нагрузкой *распределенной* по длине. В тех случаях, когда участок действия распределенной нагрузки мал по сравнению с размерами детали, ее рассматривают как *сосредоточенную* (приложенную в точке). Кроме сосредоточенных сил, детали оборудования бывают нагружены внешними сосредоточенными *моментами* (парами сил).

Детали машин могут находиться под воздействием тепловых нагрузок, возникающих при стесненности свободного температурного перемещения детали.

По продолжительности действия нагрузки делятся на постоянные и временные. К постоянным относят нагрузки, действующие в течение всего срока службы устройства (например, собственный вес его деталей). Временные нагрузки действуют лишь на протяжении отдельных периодов эксплуатации или монтажа объекта.

По характеру изменения во времени нагрузки бывают *статические* и *динамические*. К статическим нагрузкам относят постоянные во времени или нагрузки, изменяющиеся настолько медленно, что вызываемые ими ускорения и силы инерции пренебрежимо малы. Статические нагрузки нарастают постепенно до определенного значения и далее остаются неизменными (рис. 12.6, а). Динамические нагрузки бывают мгновенно приложенными (ударными) и повторно-переменными (циклическими), которые изменяются во времени по тому или иному закону. Процесс динамического нагружения деталей сопровождается значительными их ускорениями и силами инерции. Практика эксплуатации показывает, что почти все современные машиностроительные материалы сопротивляются динамическим нагрузкам значительно хуже, чем статическим.

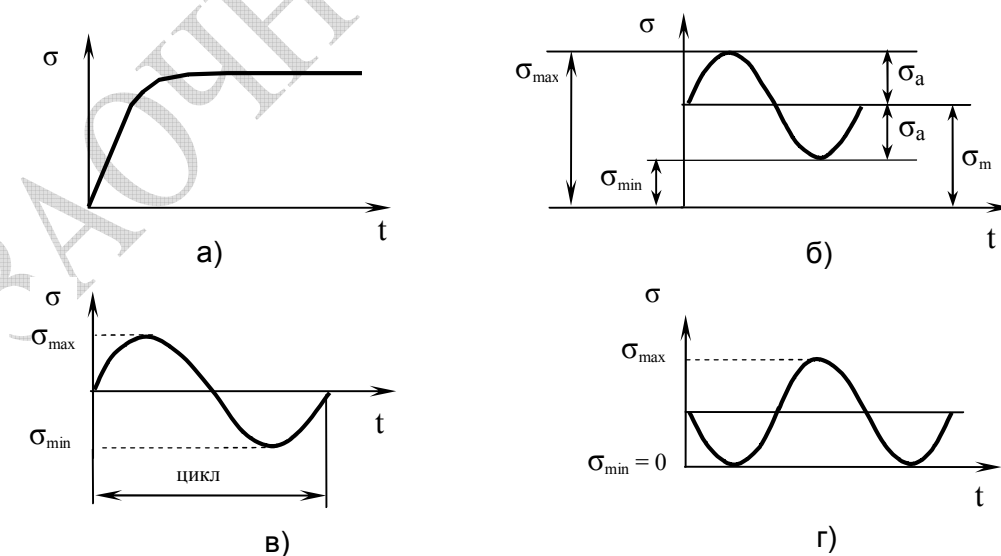


Рисунок 12.6

Циклическое нагружение характеризуют *параметрами цикла*: амплитудой напряжений σ_a , средним напряжением σ_m , частотой

нагружения f и формой цикла. Средние и амплитудные напряжения вычисляют как полусумму и полуразность максимального σ_{\max} и минимального σ_{\min} напряжений цикла

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (12.15)$$

Если параметры цикла нагружения неизменны во времени, то режим нагружения называют *постоянным* (регулярным, стационарным). В зависимости от соотношения между минимальными σ_{\min} и максимальными σ_{\max} напряжениями циклы нагружений могут быть *асимметричными* (рис. 12.6, б), *симметричными* (рис. 12.6, в) и *отнулевым* (пульсационным) (рис. 12.6, г). Для характеристики степени асимметрии постоянного режима нагружения используют коэффициент асимметрии цикла

$$R_\sigma = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}. \quad (12.16)$$

Для симметричного цикла $R_\sigma = -1$, для отнулевого цикла $R_\sigma = 0$.

Режимы нагружения, в котором параметры цикла изменяются во времени, называются *переменными* (нерегулярными, нестационарными). Если параметры режима изменяются закономерно, то переменный режим называется *систематическим*. Систематический режим может быть ступенчатым (рис. 12.7, а) и непрерывным (рис. 12.7, б). Циклическое нагружение переменного систематического режима может характеризоваться периодичностью – блочное нагружение (рис. 12.7, в). При несистематическом нагружении деталь испытывает *циклические случайные напряжения* (рис. 12.7, г), такой режим характерен, например, для элементов оборудования, испытывающих гидродинамическое воздействие.

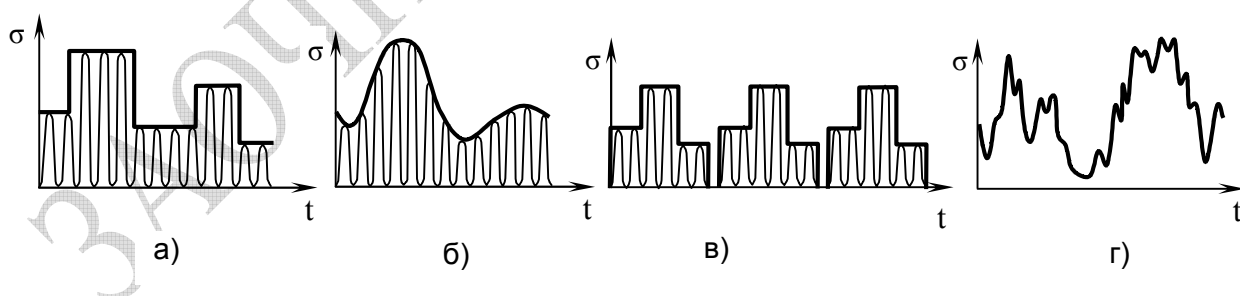


Рисунок 12.7

Если число циклов нагружения за период эксплуатации не превышает 10^5 , то такое нагружение называют *малоцикловым*. Если число циклов превышает 10^5 , то нагружение называется *многоцикловым*.

Модели разрушения. Эти модели записываются в виде условий прочности для простых видов сопротивления (табл.12.1) и сложного сопротивления (кручение с изгибом, растяжение с кручением и т.д.) с

использованием теорий прочности. В расчётах деталей машин используют три модели разрушения: *статическую, малоцикловую и усталостную*. Статическая модель разрушений используется при действии кратковременных больших сил; малоцикловая – при 10^2 – 10^5 циклов; модель усталостного разрушения – при числе циклов больше 10^5 .

12.6. Виды и этапы инженерных расчетов

Расчёт узлов и деталей машин по критериям работоспособности тесно связан с конструированием, т.е. с определением формы размеров. Для большинства типовых элементов машин существуют стандартные методики расчетов в виде ГОСТ, ОСТ, РТМ и т.д.

Как отмечалось выше, различают расчёты трёх типов: *проектные, проверочные, и расчёты на допустимую нагрузку (параметр)*.

Расчёты всех трёх типов характерны для расчётов по наиболее распространённому и важному критерию работоспособности деталей или узлов – прочности. По остальным критериям работоспособности: жесткости, устойчивости, виброустойчивости и др. чаще всего выполняются проверочные расчёты, т.е. проверяются условия, согласно которым параметр работоспособности не должен превышать допустимого значения.

При проведении проверочных расчётов размеры детали, нагрузки, свойства материала и другие параметры определены предварительно, например, из расчетов по другим критериям работоспособности, или из анализа существующих объектов.

В общем случае, проектный расчёт детали или узла из условия прочности включает следующие этапы:

- *первый этап* – анализ реальной конструкции и составление (подбор) расчетной схемы, включающей в себя геометрическую схему, силовую схему (модель), параметры предварительно подобранного конструкционного материала;

- *второй этап* – определение по правилам сопротивления материалов внутренних усилий, позволяющих найти опасные сечения детали или узла;

- *третий этап* – определение геометрических размеров опасного сечения детали из условий прочности. Такой расчёт называется расчётом по *допускаемым напряжениям*.

Поскольку при выполнении проектировочного расчёта по предварительно составленной расчётной схеме невозможно заранее точно учесть все факторы, влияющие на прочность детали, выполняют *уточненный проверочный* расчёт сконструированной детали на основе рабочего чертежа, где учитывают концентрацию напряжений (из-за резкого изменения формы детали), масштабный фактор, качество обработки поверхности и т.п. Проверочный расчет – *расчет по запа-*

сам прочности – позволяет определить действительный коэффициент запаса прочности s . Если условие (12.8) не выполняется, то в размеры и конструкцию детали вносят необходимые коррективы, или подбирают другой конструкционный материал. При действии переменных напряжений часто используется оценка прочностной надёжности по *вероятности разрушения*.

12.7. Допускаемые напряжения. Коэффициент запаса прочности

При проведении прочностных расчётов правильный выбор допускаемых напряжений конструкционного материала позволяет оптимизировать геометрические размеры детали или соединения. *Допускаемые напряжения* (т.е. напряжения, при которых гарантированно обеспечивается прочность детали) – отношение предельных напряжений материала (σ_{lim} или τ_{lim}) к допускаемому коэффициенту запаса прочности $[s]$

$$[\sigma] = \sigma_{lim} / [s] \text{ или } [\tau] = \tau_{lim} / [s]. \quad (12.17)$$

Величина предельных напряжений (σ_{lim} , τ_{lim}), при превышении которых материал теряет работоспособность, зависит от свойств материала – материалы могут быть пластичными или хрупкими, а также от характера возникающих напряжений – напряжения могут быть постоянными или переменными.

Назначение коэффициента запаса прочности может производиться различными методами: методом натуральных испытаний, табличным методом, дифференциальным методом.

Метод *натурных испытаний* предполагает назначение коэффициента запаса прочности s после натуральных испытаний опытных изделий на специальном стенде в условиях максимально приближенных к условиям эксплуатации. Коэффициент запаса принимается в пределах $[s] = 1,05 \div 1,2$.

Табличный метод выбора допускаемых напряжений и коэффициентов запаса прочности наиболее удобен в работе т.к. для отдельных деталей и узлов значения этих параметров, полученные в различных научных и конструкторских организациях, сведены в таблицы. Значения нормативного коэффициента запаса задаются в пределах $[s] = 1,4 \div 1,6$.

Дифференциальный метод выбора допускаемых коэффициентов запаса прочности заключается в том, что значение коэффициента $[s]$ определяют по формуле, которые учитывают различные факторы, влияющие на прочность рассчитываемой детали

$$[s] = [s_1] [s_2] [s_3], \quad (12.18)$$

где $[s_1]$ – коэффициент, учитывающий условия изготовления (возможные отклонения в режимах обработки, неоднородность свойств материалов, уровень технологии); $[s_2]$ – коэффициент, учитывающий условия расчёта (соответствие расчётной схемы реальной конструкции, возможность возникновения случайных нагрузок, разницу между действительным и реальным распределением напряжений по сечению детали); $[s_3]$ – коэффициент, учитывающий требования к надёжности (степень ответственности конструкции, длительность срока службы и экономические показатели).

Ориентировочные значения коэффициентов запаса прочности при дифференциальном методе приведены в таблице 12.3.

Таблица 12.3 Ориентировочные значения допускаемых коэффициентов запаса прочности $[s]$

Условия изготовления	Условия расчёта	Требования к надёжности		
		пониженные	средние	повышенные
Повышенные	Повышенные	1,0 – 1,1	1,1 – 1,2	1,2 – 1,4
	Средние	1,2 – 1,4	1,4 – 1,6	1,5 – 1,8
	Пониженные	1,4 – 1,7	1,6 – 2,0	1,8 – 2,3
Средние	Повышенные	1,6 – 2,0	1,8 – 2,4	2,1 – 2,8
	Средние	1,8 – 2,3	2,1 – 2,8	2,4 – 3,2
	Пониженные	2,0 – 2,6	2,4 – 3,2	2,6 – 3,6
Пониженные	Повышенные	2,2 – 2,9	2,6 – 3,5	3,0 – 4,0
	Средние	2,4 – 3,2	2,8 – 3,9	3,3 – 4,5
	Пониженные	2,6 – 3,5	3,1 – 4,2	3,6 – 5,0

При проведении расчётов следует принимать во внимание, что ориентация на завышенные коэффициенты запаса прочности $[s]$ приводит к понижению допускаемых напряжений $[\sigma]$, и соответственно, к увеличению размеров сечений и массы элемента конструкции, а неоправданно малые по величине коэффициенты снижают надёжность деталей и их соединений.

12.8. Предельные напряжения для материала

Для статических рабочих нагрузок предельные напряжения обычно определяются путём стандартных статических испытаний образцов материалов по диаграммам растяжения (сжатия), получаемых на разрывных машинах. Предельными напряжениями для пластических материалов является предел текучести

$$\sigma_{lim} = \sigma_T, \quad (12.18)$$

для хрупких материалов – предел прочности

$$\sigma_{lim} = \sigma_{пч}. \quad (12.19)$$

Это обстоятельство связано с тем, что деталь из пластичного материала может потерять работоспособность при достижении значительных остаточных деформаций, которые появляются при достижении напряжениями предела текучести σ_T . Деталь из хрупкого материала, который не способен получать остаточные деформации, теряет работоспособность (разрушается) после достижения напряжениями предела прочности $\sigma_{пч}$.

Опыт показывает, что при действии переменных напряжений (рис. 12.7) после некоторого числа циклов N может наступить внезапное разрушение детали, несмотря на то, что действующие напряжения меньше предела прочности $\sigma_{пч}$. Это явление называется *усталостью* материалов. Способность материала или детали противостоять действию переменных нагрузок называется *сопротивлением усталости*. Его оценивают с помощью *предела выносливости*, определяемого экспериментально на специальных стендах.

Испытуемый образец нагружают симметрично приложенными постоянными силами F (рис. 12.8, а), которые вызывают в средней части образца появление изгибающего момента M (рис. 12.8, б). Из-за вращения образца напряжения изгиба σ , возникающие в какой-либо точке (рис. 12.8, в) на поверхности детали, изменяются во времени t по *симметричному синусоидальному закону* (рис. 12.8, г)

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y = \frac{M}{I_z} OA \cdot \sin(\varphi) = \frac{M}{I_z} 0,5d \cdot \sin(\omega t) = \frac{M}{W_z} \sin(\omega t), \quad (12.20)$$

где $I_z = \pi d^4 / 64$ – осевой момент инерции круглого сечения; $W_z = \pi d^3 / 32$ – осевой момент сопротивления круглого сечения.

Чем меньше амплитудное значение напряжений, тем большее число циклов (оборотов) N может выдержать образец не разрушаясь. По результатам испытания серии одинаковых образцов, доводимых до разрушения, получают *кривую усталости* или *кривую Веллера* (рис. 12.8, д). Наибольшее значение максимального напряжения цикла, которое образец выдерживает до базового числа циклов ($N_0 = 10^7$ – для чёрных металлов; $N_0 = 10^8$ – для цветных металлов и сплавов) называется *пределом выносливости*, и обозначается $\sigma_R = \sigma_{-1}$ (при симметричном цикле нагружения коэффициент асимметрии $R = \sigma_{min} / \sigma_{max} = -1$, что и указывается в виде индекса -1). Таким образом, при действии переменных напряжений при симметричном цикле предельным напряжением является предел выносливости

$$\sigma_{lim} = \sigma_{-1} \cdot \quad (12.21)$$

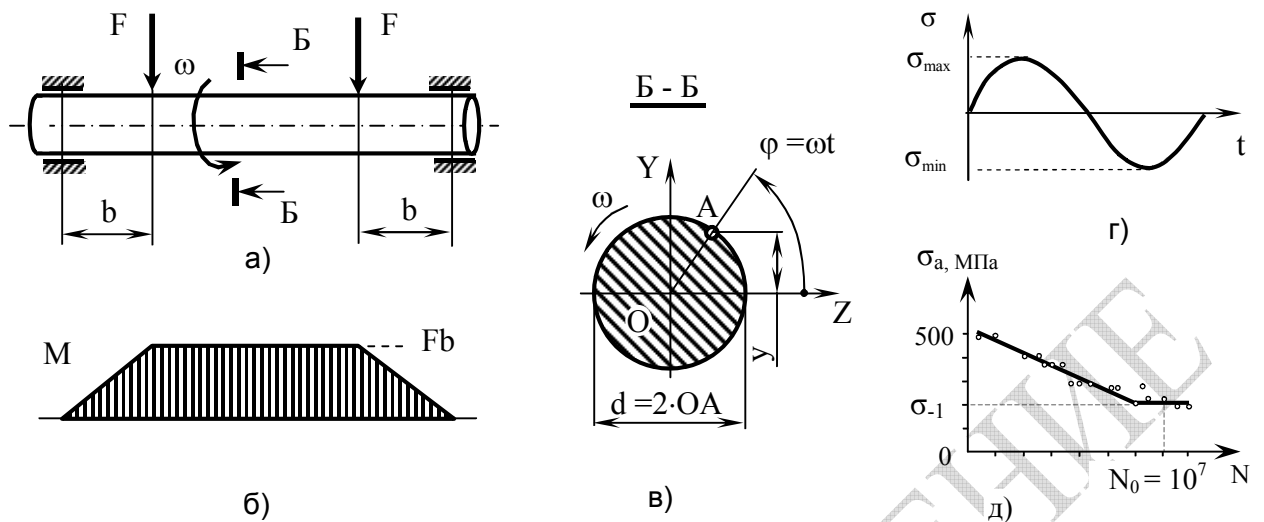


Рисунок 12.8

Аналогично испытанию на изгиб определяют пределы выносливости материала при кручении (τ_{-1}), при растяжении-сжатии (σ_{-1p}). Экспериментально установлены соотношения пределов выносливости при изгибе, кручении и растяжении-сжатии (для сталей $\tau_{-1} = 0,55 \sigma_{-1}$; $\sigma_{-1p} = (0,7 \div 0,8) \sigma_{-1}$). Предел выносливости при симметричном цикле нагружения для всех металлов, кроме очень пластичных, меньше предела упругости.

Предел выносливости σ_R зависит от асимметрии цикла напряжений, которая характеризуется коэффициентом асимметрии цикла $R = \sigma_{min} / \sigma_{max}$ (12.16). Влияние асимметрии цикла устанавливают экспериментально. Задавая различное соотношение между амплитудными $\sigma_a = 0,5(\sigma_{max} + \sigma_{min})$ и средними $\sigma_m = 0,5(\sigma_{max} - \sigma_{min})$ напряжениями, проводят испытание серии образцов. Сроят *диаграмму предельных циклов напряжений* или *диаграмму Хейя* (рис. 12.9, а). Предельными называют циклы напряжений, наибольшие напряжения которых равны пределу выносливости, или

$$\sigma_R = \sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a \cdot \quad (12.22)$$

Площадь диаграммы ОАСВ (рис. 12.9, а) определяет область безопасных с точки зрения разрушения циклов напряжений. Точка А диаграммы соответствует пределу прочности $\sigma_{пч}$ (т.е. случаю статического нагружения), точка В – пределу выносливости σ_{-1} при симметричном цикле. Если параметры σ_a и σ_m рабочего цикла нагружения соответствуют некоторой точке, расположенной под предельной кривой, то образец способен выдержать неограниченное число циклов или сохранить прочность до базового числа N_0 .

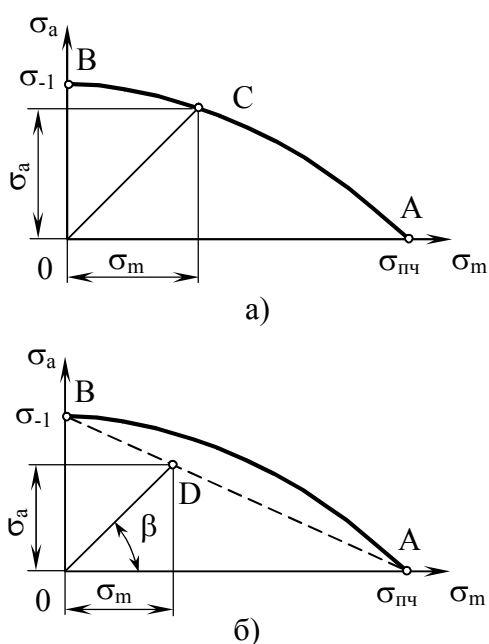


Рисунок 12.9

Для проведения инженерных расчётов экспериментальную диаграмму предельных циклов напряжений аппроксимируют одной прямой АВ (как на рис. 12.9, б) или несколькими прямыми. При этом, рабочая область безопасного нагружения в виде треугольника ОАВ сокращается, однако, полученная погрешность увеличивает запас прочности рассчитываемых элементов. Имея приближённую диаграмму предельных циклов напряжений в виде прямой АВ, можно определить предел выносливости σ_R при любом цикле нагружения, т.е. при любом коэффициенте асимметрии цикла R .

Произвольный луч OD диаграммы (рис. 12.9, б) является геометрическим местом точек, характеризующих циклы с одинаковым коэффициентом асимметрии R . Угол наклона β луча к оси σ_m связан с величиной R зависимостью

$$\operatorname{tg} \beta = \sigma_a / \sigma_m = (1 - R)/(1 + R). \quad (12.23)$$

Для практического определения по диаграмме искомого предела выносливости σ_R при заданном R по (12.23) вычисляют угол β ; из точки O проводят луч до пересечения в точке D с прямой AB ; определяют координаты точки D ; по формуле (12.22) вычисляют предел выносливости σ_R при асимметричном цикле.

Между пределами прочности и выносливости установлено экспериментальное соотношение (см. табл. 12.4)

Таблица 12.4 Зависимость между $\sigma_{пч}$ и σ_{-1}

Вид нагружения	Симметричный цикл	Пульсирующий цикл
Изгиб	$\sigma_{-1} \approx 0,43\sigma_{пч}$	$\sigma_0 \approx 0,6\sigma_{пч}$
Растяжение-сжатие	$(\sigma_{-1})_{p(cж)} \approx 0,36\sigma_{пч}$	$(\sigma_0)_{p(cж)} \approx 0,5\sigma_{пч}$
Кручение	$\tau_{-1} \approx 0,22\sigma_{пч}$	$\tau_0 \approx 0,3\sigma_{пч}$

12.9. Факторы, влияющие на статическую и усталостную прочность деталей машин

На прочность детали или элемента конструкции оказывает влияние не только режим нагружения (статическое, циклическое и др.) и механические характеристики материала, такие как предел текучести σ_T , предел прочности $\sigma_{пч}$, предел выносливости материала σ_R , но и наличие концентраторов напряжений, размеры и качество изготовления детали.

Концентрация (локальное возрастание) напряжений возникает в тех местах детали, где резко изменяется форма поверхности (рис. 12.10). Различные конструктивные элементы деталей машин в виде фасок (рис. 12.10, а), проточек (канавок) (рис. 12.10, б), галтелей (рис. 12.10, в), отверстий (рис. 12.10, г), пазов (рис. 12.10, д), резьбы (рис. 12.10, е), напрессованных деталей (рис. 12.10, ж), сварных швов и др. являются концентраторами напряжений.

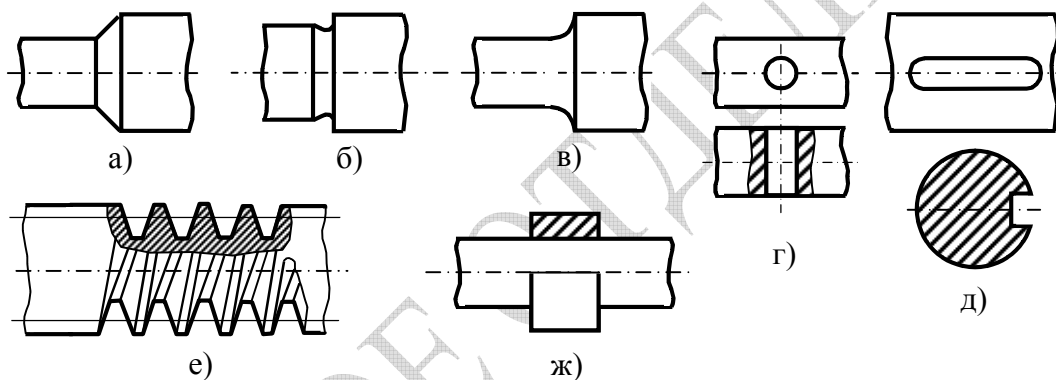


Рисунок 12.10

При *статическом нагружении* концентраторы напряжений оказывают существенное влияние на прочность детали. Экспериментальные и теоретические исследования указывают на неравномерное распределение напряжений в зоне резкого изменения формы детали (рис. 12.11). При растяжении пластинки с двухсторонним надрезом (рис. 12.11, а) или пластинки с отверстием (рис. 12.11, б) напряжения распределяются неравномерно: рассчитанные по правилам сопротивления материалов (номинальные) напряжения σ_H меньше фактических максимальных напряжений σ_{max} , определяемых экспериментально или теоретически методами теории упругости. Точки действия максимальных напряжений – точки зарождения повреждений, что особенно опасно при действии переменных напряжений. Максимальные нормальные σ_{max} или касательные τ_{max} напряжения в точке элемента конструкции находят из соотношений

$$\sigma_{max} = \alpha_{\sigma} \sigma_H ; \tau_{max} = \alpha_{\tau} \tau_H , \quad (12.24)$$

где α_σ и α_τ - теоретические коэффициенты концентрации напряжений

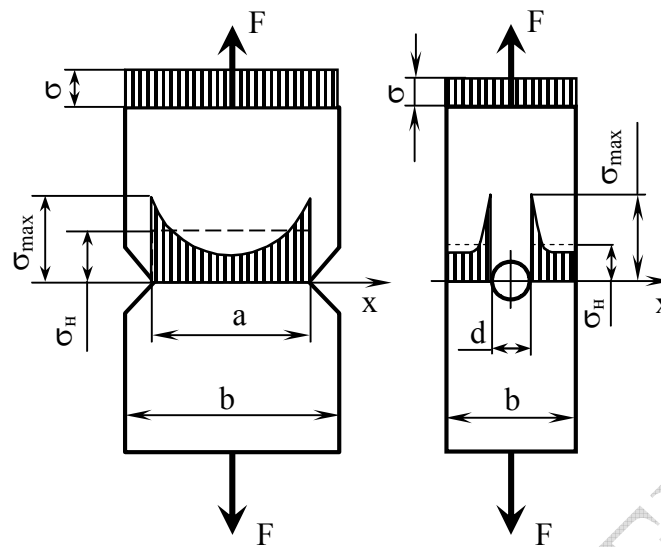


Рисунок 12.11

(приводятся в справочниках).

При действии переменных напряжений на усталостную прочность оказывают влияния концентрация напряжений, масштабный эффект, качество обработки поверхности, чувствительность материала к асимметрии цикла. Эти факторы учитываются в формулах для расчёта фактического коэффициента запаса прочности детали s .

Концентрацию напряжений в связи с реальными свойствами материала детали учитывают *эффективными коэффициентами концентрации напряжений*

$$K_\sigma = \sigma_{-1} / \sigma_{-1k}; \quad K_\tau = \tau_{-1} / \tau_{-1k}, \quad (12.25)$$

σ_{-1k} , τ_{-1k} – пределы выносливости, определённые для образцов, имеющих концентрацию напряжений и такие же размеры поперечного сечения, как и у гладкого образца.

Масштабный эффект проявляется в том, что с увеличением размеров детали уменьшается предел выносливости. Это явление объясняется тем, что при увеличении размеров детали возрастает вероятность попадания дефектных зёрен материала в зону концентрации напряжений. Масштабный эффект учитывают *коэффициентами масштабного эффекта*

$$K_{\sigma d} = \sigma_{-1d} / \sigma_{-1}; \quad K_{\tau d} = \tau_{-1d} / \tau_{-1}, \quad (12.26)$$

σ_{-1d} , τ_{-1d} – пределы выносливости образца диаметром d ; σ_{-1} , τ_{-1} – пределы выносливости стандартного образца диаметром 7,5 и 10 мм.

Качество обработки поверхности (полировка, шлифовка, тонкое или грубое точение и др.) характеризуется *шероховатостью поверхности*. Микронеровности поверхности являются микроконцент-

раторами напряжений, что сказывается на сопротивлении усталости – чем выше качество обработки поверхности, тем выше предел выносливости σ_R . Это влияние учитывается *коэффициентами качества поверхности*

$$\beta_\sigma = \sigma'_{-1} / \sigma_{-1}; \beta_\tau = \tau'_{-1} / \tau_{-1}, \quad (12.27)$$

где σ_{-1} , τ_{-1} – пределы выносливости полированных образцов; σ'_{-1} , τ'_{-1} – пределы выносливости для серии образцов, имеющих данную обработку поверхности.

Большое влияние на предел выносливости оказывает коррозия металла, т.к. она не только ухудшает шероховатость поверхности, но и изменяет структуру материала.

Чувствительность материала к асимметрии цикла связана с тем, что сжимающие постоянные напряжения затрудняют зарождение и развитие усталостной трещины и повышают предел выносливости, а постоянные растягивающие напряжения наоборот способствуют развитию усталостной трещины, и уменьшают сопротивление усталости. При расчете коэффициента запаса прочности это явление учитывается коэффициентами *чувствительности материала к асимметрии цикла* ψ_σ и ψ_τ , зависящими от величины предела прочности материала $\sigma_{пч}$.

Запасы прочности детали (s_σ , s_τ) в условиях действия переменных нормальных σ или касательных τ напряжений с учётом коэффициентов, учитывающих влияние концентрации напряжений (K_σ , K_τ), масштабного эффекта ($K_{\sigma d}$, $K_{\tau d}$), качества обработки поверхности (β_σ , β_τ) и чувствительности к асимметрии цикла (ψ_σ , ψ_τ) вычисляется по формулам

$$s_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \frac{K_\sigma}{K_{\sigma d} \beta_\sigma} + \psi_\sigma \sigma_m}, \quad (12.28)$$

$$s_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a \frac{K_\tau}{K_{\tau d} \beta_\tau} + \psi_\tau \tau_m}. \quad (12.29)$$

Приведённые в формулах (12.28), (12.29) коэффициенты определяются по справочной литературе.

При совместном действии нормальных и касательных напряжений коэффициент запаса вычисляется по формуле

$$s = \frac{s_\sigma s_\tau}{\sqrt{s_\sigma^2 + s_\tau^2}}. \quad (12.30)$$

Коэффициент запаса s сравнивается с величиной допускаемого коэффициента запаса прочности по формуле (12.8).

12.10. Чёрные металлы и сплавы.

Назначение и основные способы термообработки

Для изготовления деталей машин используются стали, чугуны, цветные металлы и сплавы, пластмассы, резины и т.д. Применимость материалов для изготовления элементов машин основывается на их механических характеристиках (прочность, пластичность, упругость), литейных качествах, пригодности для механической обработки (обработка резанием, штамповкой), свариваемости, температурной области применения, коррозионной стойкости, а также на их стоимости.

Чугуны и стали представляют собой сплавы железа с углеродом. Они относятся к черным металлам. Сталями называют сплавы, в которых содержится от 0,08 до 2,14% углерода. Как правило они имеют хорошую однородную структуру. В чугунах содержание углерода составляет от 2,14 до 6,67%. Их структура может быть неоднородна, содержит многочисленные дефекты, поры, трещины и т.п. В сплав железа с углеродом входят другие элементы в виде сопутствующих примесей (Si, Mn, S, P) или специально вводимых легируемых элементов (Cr, Ni, Ti, V, W, Al и др.). Вредными примесями, ухудшающими свойства стали, являются сера (придает хрупкость при горячей обработке материалов ковкой и прокатом) и фосфор (придает хрупкость при пониженных температурах).

В зависимости от состава чугуны делят на белые и серые (по цвету излома). *Белый чугун* применяется в химическом машиностроении для изготовления деталей подверженных износу. Детали получают литьем. Белый чугун хрупок, имеет высокую твердость, плохо обрабатывается механически.

Серый чугун – основной литейный материал в машиностроении. В химическом машиностроении он используется для изготовления станин, корпусов как наиболее дешевый материал. Серый чугун достаточно прочен, износостоек, обладает хорошими литейными качествами, поддается дополнительной механической обработке, но нестойк в агрессивных средах. Марки серого обозначают начальными буквами СЧ и значением предела прочности при растяжении в МПа, деленным на 10, например, СЧ 18 ($\sigma_{пч} = 180$ МПа).

Стали по химическому составу делят на углеродистые и легируемые, в которых содержание легирующих компонентов составляет более 1%. *Конструкционные стали делят на стали обыкновенного качества и качественные стали.*

Конструкционная сталь, общее название группы сталей, предназначенных для изготовления ответственных конструкций, в том

числе деталей машин и механизмов. Конструкционная сталь, используемая в машиностроении, по химическому составу классифицируется на углеродистую и легированную (хромистая, хромоникелевая и др.); по методу изготовления — на деформируемую и литейную; по условиям работы — на конструкционную, жаропрочную, нержавеющую (коррозионностойкую), износостойкую. В зависимости от содержания углерода различают низкоуглеродистую цементуемую сталь (0,1—0,25% С) и так называемую улучшаемую сталь (0,25—0,45% С); для некоторых деталей (например, пружин, рессор) применяется сталь с более высоким содержанием углерода (0,5—0,65% С).

Стали обыкновенного качества по ГОСТ 380 – 94 маркируются буквами Ст и номерами 0, 1, 2, ... 6. Чем больше номер, тем выше прочность и ниже пластичность. Для обозначения степени раскисления к марке добавляют индексы: кп – кипящая, сп – спокойная, пс – полуспокойная. В зависимости от нормируемых показателей по химическому составу и механическим свойствам прокат подразделяют на пять категорий. При необходимости номер категории указывают после обозначения марки стали, например, СтЗсп5.

Качественные углеродистые стали по ГОСТ 1050 – 88 маркируют двумя цифрами, обозначающими среднее содержание углерода в сотых долях процента: 05, 08, 10, 11, 15, 18, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60. В обозначениях стали с 05 до 20 могут добавляться индексы: кп, ок, пс. С повышением содержания углерода прочность стали увеличивается, а пластичность снижается.

Легированные стали в зависимости от общего содержания легирующих элементов делят на низколегированные (менее 3% добавок), среднелегированные (от 3 до 10%), высоколегированные (свыше 10%). Если сталь содержит более 50% легирующих добавок, ее называют сплавом.

Хром повышает прочность, твердость и износостойкость стали, но снижает пластичность. При введении более 12% хрома она становится нержавеющей.

Маркировка легированных сталей.

Русскими буквами в марках стали обозначают легирующие элементы: А – азот (не ставится в конце марки), Б – ниобий, В – вольфрам, Г – марганец, Д – медь, К – кобальт, М – молибден, Н – никель, С – кремний, Т – титан, Ю – алюминий, Х – хром, Ц – цирконий, Ф – ванадий, Р – бор.

Первые две цифры, стоящие в начале марки, показывают среднее содержание углерода в сотых долях процента, а цифры, следующие за буквами, среднее содержание данного элемента в целых процентах. Например, нержавеющая сталь 12Х18Н10Т содержит, % : С ≈ 0,12, Cr 18, Ni 10, Ti ≈ 1. Если содержание углерода в стали составляет 1% и более, а данного легирующего компонента меньше или около 1%, то цифра перед маркой и после буквы отсутствует.

Например, сталь ХВ5 содержит, % : С \approx 1,3, Cr 1 и W \approx 5. Буква А в конце марки означает, что сталь высококачественная, имеет гарантированный химический состав и пониженное содержание серы и фосфора (по 0,025%). Марки стали лишь примерно соответствуют составу и служат условными обозначениями, а не рецептами.

Низколегированные стали прочнее обычных малоуглеродистых. Высоколегированные кислотостойкие стали составляют особую группу среди сталей. Никель добавляют в хромистую сталь для повышения ее кислотостойкости. Однако, введение никеля существенно удорожает сталь. Поэтому часть никеля заменяют марганцем в сочетании с азотом.

Высоколегированные стали и сплавы с особыми свойствами выделены в отдельные группы с соответствующими обозначениями: Ж – хромистые нержавеющие, Я – хромоникелевые нержавеющие, Ш – шарикоподшипниковые.

Термическую и химико-термическую обработку применяют для улучшения и регулирования свойств сталей и сплавов. Термическую обработку делят на отжиг, нормализацию, закалку, отпуск.

Отжиг применяют для понижения твердости и повышения пластичности металлов и сплавов. Отжиг заключается в медленном нагреве деталей в печи, выдержке при заданной температуре и медленном охлаждении вместе с печью.

Закалка заключается в нагреве детали до 800 – 950°C и последующем быстром охлаждении на воздухе, в воде, масле, растворах солей и кислот.

Отпуск – окончательная операция термообработки закаленных сталей, алюминиевых и бериллиевых бронз. Он позволяет снизить остаточные напряжения, уменьшает хрупкость и твердость. Отпуск состоит из нагрева до 150 – 680°C, выдержки и быстрого или медленного, для разных материалов, охлаждения. Термообработка, состоящая из закалки и высокого отпуска (нагрев до 500 – 680°C), называется *улучшением*.

Цементацией называют процесс диффузионного насыщения углеродом поверхностного слоя изделий из закаливаемых сталей. Процесс ведут при температуре 900 – 970°C в течение 2 –3 часов, используя метан, пропан, бутан и др. При этом увеличивается твердость поверхности, износостойкость, вибропрочность, сопротивление ударным нагрузкам. Цементированные стали работают при 200 - 225°C.

Азотирование заключается в диффузионном насыщении поверхностных слоев азотом (используют аммиак) при 450 – 650°C в течение 20 – 50 ч. При этом материал приобретает приблизительно такие же качества, что и при цементации, но расширяется температурный диапазон (до 450 – 600°C) их применения.

Механическое упрочнение заключается в наклёпывании поверхностных слоёв металла деталей машин, следствием чего является уплотнение и упрочнение этих слоёв. Наклёпывание деталей производят накаткой гладкими роликами, дробеструйной обработкой и другими способами. В ряде случаев упрочнение деталей достигается покрытием поверхностей более прочными или более износостойкими материалами.

12.11. Цветные металлы и сплавы

Наиболее широкое распространение в машиностроении получили сплавы меди, баббиты и лёгкие сплавы.

Медь в чистом виде обладает высокой электро- и теплопроводностью, хорошей обрабатываемостью давлением, небольшой прочностью. Медь применяется для изготовления токопроводящих деталей, масло- и топливопроводов, уплотняющих шайб и прокладок, работающих в диапазоне температур от -254 до $+250^{\circ}\text{C}$ со средами средне агрессивности.

Латунь – сплав меди с цинком (цинка менее 50%). Простые латуни содержат не более 38% цинка. Они прочнее, более коррозионностойки, чем медь. Простая латунь маркируется буквами и цифрами: Л96, Л90, Л63. Буква Л означает латунь, а цифры – среднее содержание меди в процентах. В марках много компонентных латуней первые числа указывают среднее содержание меди, а последующие – легированных элементов. Например, латунь ЛКС80-3-3 содержит 80% меди, по 3% кремния и свинца, а остальное цинк.

Бронза – сплав меди с оловом и другими элементами: алюминием, бериллием, свинцом, кремнием, марганцем. Обладают хорошими антифрикционными свойствами, хорошо обрабатываются резаньем, коррозионноустойчивы. Бронзы обозначают буквами БР и условными обозначениями компонентов (помимо меди): А – алюминий, Б – бериллий, Ж – железо, К – кремний. Мц – марганец, Н – никель, О – олово, С – свинец, Ц – цинк, Ф – фосфор – и цифрами, которые выражают среднее содержание компонентов в процентах. Например, марка БрОЦС 5-5-5 указывает на то, что бронза содержит по 5% олова, цинка и свинца, остальное медь. Безоловянистые бронзы БрАЖ9-4, БрАМц9-2 обладают высокими механическими и антифрикционными свойствами, хорошо обрабатываются, и поэтому используются при изготовлении небольших зубчатых и червячных колёс, втулок подшипников скольжения, ходовых гаек в винтовых механизмах. Наилучшие антифрикционные свойства, т.е. свойства хорошего скольжения имеют оловянистые бронзы.

Лёгкие сплавы имеют алюминиевую или магниевую основу их плотность не более 3500 кг/м^3 .

Алюминий применяют в виде сплавов, которые делят на *деформируемые* и *литейные*. Алюминий и его сплавы обладают высокой коррозионной стойкостью, удельной прочностью. Деформируемые сплавы маркируют буквами и цифрами, указывающими состав или условный номер сплава. Например, АМц – алюминивно-марганцевый сплав. К упрочняемым термообработкой алюминиевым сплавам относят *дуралюмины* Д1, Д16 и другие сплавы на основе системы алюминий-медь-марганец. Алюминиевые литейные сплавы более высоко легированы, чем деформируемые, их обозначают буквами АЛ и цифрами, например, АЛ1. Механические свойства литейных алюминиевых сплавов хуже, чем деформируемых. Сплавы алюминия с кремнием называют *силуминами*.

*Магние*вые сплавы благодаря малой плотности превосходят по удельной прочности некоторые конструкционные стали и алюминиевые сплавы. При замене алюминиевых сплавов магниевыми на 25 ÷ 30 % снижается масса детали. Магние

вые сплавы хорошо поглощают вибрации, немагнитны, не вызывают искр при ударах и трении. Удельная жёсткость деталей из магниевых сплавов при изгибе и кручении выше чем деталей из сталей на 50% и выше, чем деталей из алюминиевых сплавов, на 20%. Указанные свойства магниевых сплавов наиболее существенны при создании конструкций, в которых масса является решающей. Существенным недостатком этих сплавов является то, что они быстро корродируют в местах контакта с другими металлами, поэтому требуется нанесение защитных покрытий. В состав магниевых сплавов помимо магния (плотность 1740 кг/м³, температура плавления 651°С) входят алюминий, цинк, медь и другие элементы. Различают литейные и деформируемые сплавы. Литейные сплавы маркируют буквами МЛ и цифрой, указывающей номер сплава (МЛ3, МЛ4, МЛ5, МЛ6); они применяются для получения корпусных деталей, фланцев, крышек методом литья. Деформируемые магниевые сплавы обозначаются буквами МА и цифрой, указывающей номер сплава (МА1, МА2, МА5 и др.); используют эти сплавы для получения заготовок деталей путём пластической деформации (прокатка, штамповка и т.д.).

Баббиты – сплавы цветных металлов с высокими антифрикционными свойствами, т.е. свойствами обеспечивающими хорошее скольжение. Баббиты применяют для изготовления вкладышей подшипников скольжения. Баббиты хорошо прирабатываются и обеспечивают нормальную работу подшипников скольжения при значительных скоростях и нагрузках. Различают *высокооловянистые баббиты* в виде сплава олова (70%) с сурьмой и медью; *оловянно-свинцовые баббиты* БС6, БН, Б16 (олово 5 ÷ 20%, сурьма 15%, свинец 65 ÷ 75%); *свинцовые* (более 80% свинца). Высокооловянистые баббиты (Б83 и Б88) применяют в подшипниках скольжения мощных и

ответственных машин (паровые турбины, прокатные станы, авиационные двигатели ит.п.).

Титан и его сплавы (ОТ4 - 0, ОТ4 - 1, ОТ- 4, ВТ6) отличаются от других конструкционных материалов малой плотностью ($\rho=4540 \text{ кг/м}^3$), высокой прочностью и очень высокой коррозионной стойкостью.

12.12. Неметаллические материалы и их применение в машиностроении

Неметаллические материалы (резина, кожа, графит, пластмассы и др.) нашли в машиностроении широкое распространение. Наиболее интенсивно в практику машиностроения внедряются пластмассы и композиционные конструкционные материалы. К неметаллическим *прокладочным и уплотнительным материалам* относятся технические резины, асбест, паронит, фторопласты, полиэтилен.

Пластмассы – материалы, получаемые на основе природных или синтетических смол (полимеров), которые при определённой температуре и давлении приобретают пластичность, а затем затвердевают, сохраняя форму. Кроме связующего вещества (полимера) в состав пластмасс входят наполнители (повышают прочность, теплостойкость и т.п.), пластификаторы (увеличивают текучесть, эластичность и уменьшают хрупкость), отвердители (ускоряют процесс затвердевания пластмасс), красители.

По поведению при нагреве полимеров пластмассы делят на термопластичные (термопласты) и терморезистивные (реактопласты). *Термопласты* (*полиэтилен, фторопласт, полистирол, полиамиды* и др.) обладают свойством обратимости: при повторных нагреваниях они переходят в пластичное состояние и им можно придавать необходимую форму; при охлаждении они затвердевают. *Реактопласты* не переходят в пластическое состояние при повторном нагревании. Реактопласты имеют более высокие характеристики по сравнению с термопластами по твёрдости, упругости, теплостойкости, по усталостной прочности. Механические характеристики в меньшей степени зависят от изменения температуры. В зависимости от наполнителя различают монолитные (карболит), слоистые (*текстолит, гетинакс*) и композиционные пластмассы, где в качестве наполнителя используют волокна. В реактопластах связующим являются эпоксидные и кремний-органические смолы.

Пластмассы обладают достаточно высокой прочностью, малой плотностью, электроизоляционными свойствами и антикоррозионными свойствами, фрикционными или антифрикционными свойствами. Применение пластмасс в машиностроении приносит большой технико-экономический эффект благодаря снижению веса машин, экономии цветных металлов и сталей, снижению трудоёмкости и себестоимости

изготовления машин. Недостатки пластмасс: низкая теплостойкость, старение, сопровождаемое постепенным изменением механических характеристик, цвета и даже размеров деталей.

Фторопласт – материал на основе политетрафторэтилена (фторопласт-4) и политрифторхлорэтилена (фторопласт-3). Фторопласт стоек ко всем минеральным и органическим кислотам, щелочам, органическим растворителям, окислителям. Фторопластовые пленки и пластины используется для защиты стальных изделий от коррозии.

Полиэтилен устойчив к органическим растворителям, ко многим кислотам, щелочам и растворам солей при нормальной температуре.

Паронит – композиционный материал, изготовленный из асбеста, каучука, наполнителей. Получил широкое распространение паронит общего назначения – ПОН, маслобензостойкий – ПМБ, кислотостойкий – ПК.

Техническая резина – композиция из каучука и серы. Выпускают резины (на основе каучуков СКН, СКФ, СКТФ): мягкие, средней и повышенной твердости. Техническую резину используют, не только как коррозионно-стойкие уплотнительные материалы, но и для гуммирования аппаратуры.

Асбест имеет высокую стойкость к щелочам, не горит, не стоек к кислотам. Часто применяется в комбинации с металлической оболочкой.

12.13. Смазочные материалы

Смазка подвижных соединений значительно уменьшает потери на трение, уменьшает износ трущихся поверхностей, предохраняет от коррозии, отводит теплоту, выделяющуюся при трении. Смазочные материалы делят на жидкие, консистентные и твердые.

Жидкие смазки – минеральные масла изготавливают из тяжёлых продуктов перегонки нефти. У растительных (льняное, касторовое и др) и животных масел по сравнению с минеральными более высокие смазывающие свойства, но они дороже и находят применение только в редких случаях. Основной характеристикой масел является *вязкость*, которая определяет величину внутреннего жидкостного трения. Для повышения эксплуатационных свойств в масла добавляют в небольших количествах присадки – соединения фтора и фосфора. Периодически требуется замена отработавшего масла.

Консистентные смазки – густые, пастообразные массы применяют в тех случаях, когда частая замена масла невозможна, когда смазка работает в условиях высокого давления. Такого рода смазки применяют в тяжело нагруженных узлах трения, в соединениях при действии динамических (ударных) нагрузок, для герметизации зазоров и защиты соприкасающихся поверхностей от механических и атмо-

сферных воздействий. Наибольшее распространение получили универсальные тугоплавкие консистентные смазки ЦИАТИМ-201, ЦИАТИМ-221, ЛИТОЛ-24.

Твёрдые смазки применяют в условиях вакуума, при высоких температурах, в агрессивных средах, т.е. в тех случаях, когда жидкие и консистентные масла теряют свои свойства. Наибольшее распространение из этих видов смазки получили графит и дисульфит молибдена.

12.14. Контрольные вопросы

1. Что является предметом изучения и содержанием учебной дисциплины детали машин?
2. Что называется деталью, узлом, механизмом, машиной?
3. Какие детали относятся к деталям общемашиностроительного назначения?
4. Что понимают под качеством и надёжностью детали, узла, машины?
5. По каким качественным и количественным показателям оценивают надёжность?
6. Что понимают под вероятностью безотказной работы?
7. Перечислите главные критерии работоспособности деталей машин?
8. Какими бывают модели реальных объектов?
9. Какие составляющие входят в прочностную модель детали или узла?
10. Каковы виды и этапы инженерных расчётов?
11. Что называется коэффициентом запаса по критерию работоспособности? Как назначается допускаемый коэффициент запаса прочности?
12. Что называется допускаемыми и предельными напряжениями?
13. Назовите факторы, влияющие на статическую и усталостную прочность деталей машин. Приведите примеры концентраторов напряжений.
14. Какие материалы применяются для изготовления деталей машин? Приведите примеры.
15. Назовите основные виды термообработки. Дайте их краткую характеристику.
16. Каковы области применения чёрных, цветных металлов, сплавов, неметаллических материалов?
17. Каково назначение смазочных материалов? Каковы основные виды смазок?

Глава 13. Механические передачи

13.1. Классификация и основные параметры механических передач. Законы передачи мощности и момента

Для приведения в действие машин и механизмов технологического оборудования используются устройства, которые называются *приводами*. Привод состоит из *двигателя, механической передачи* и аппаратуры управления.

Двигатель преобразует электрическую энергию в механическую энергию вращающегося вала. Скорость вращения вала электродвигателя обычно составляет 750, 1000, 1500 или 3000 р/с (соответственно 75, 1000, 1500 или 3000 об/мин). Высокие частоты вращения валов электродвигателей согласно законам электротехники позволяют обеспечить высокие КПД электродвигателей (от 60 до 95%) при их малых габаритах и малой металлоёмкости, в том числе и дорогостоящей меди.

Механическая передача передаёт энергию на расстояние и определённым образом преобразует механическое движение, например, уменьшает скорость вращения и увеличивает крутящий момент. Чаще всего механическая передача предназначена для преобразования именно вращательного движения, которое может быть практически бесконечным и равномерным.

В зависимости от способа передачи энергии различают механические, электрические, пневматические, гидравлические передачи. Наиболее распространены механические передачи, которые принято называть просто передачами.

По характеру изменения скорости от входа к выходу передачи их делят на понижающие и повышающие. Если угловая скорость при помощи передачи не изменяется, а изменяется, например, только направление вращения, то передача называется *прямой*.

По способу передачи движения различают передачи зацеплением (зубчатые, червячные, винтовые, цепные), передачи сцеплением или трением (фрикционные, ременные), передачи за счёт шарнирного и скользящего соединения звеньев (рычажные передачи).

По способу взаимодействия звеньев передачи бывают:

- с непосредственным контактом звеньев, а именно зубчатые (рис. 13.1, а, б), червячные (рис. 13.1, в), фрикционные (рис. 13.1, г, д), винт – гайка (рис. 13.1, е), рычажные;
- с гибкой связью, к которым относятся ременные (рис. 13.1, ж), ленточные (рис. 13.1, з) и цепные передачи (рис. 13.1, и).

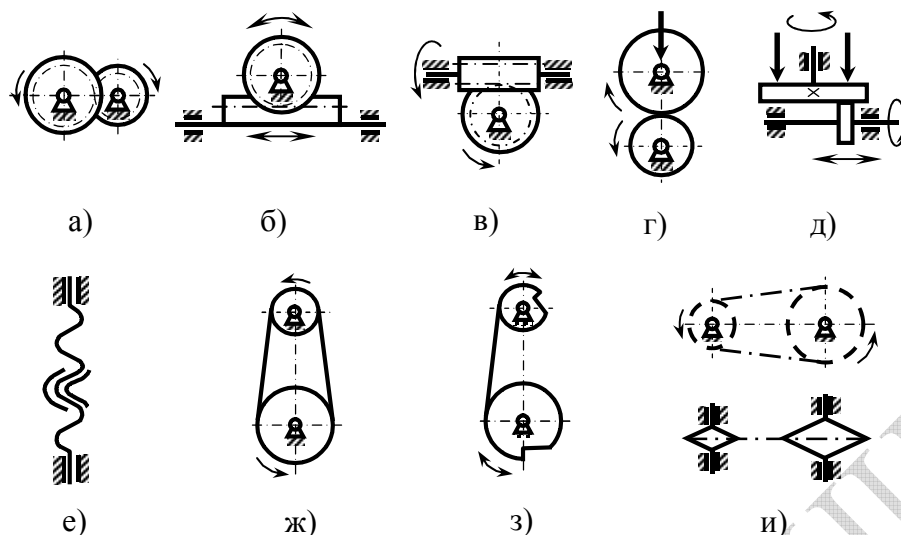


Рисунок 13.1

Звено передачи, получающее движение от двигателя, называется *ведущим*; звено, которому передается движение, называется *ведомым*. Помимо ведущего и ведомого звеньев передача может содержать и *промежуточные* звенья.

Механическая передача вращательного движения согласует параметры стандартного электродвигателя (скорость вращения ω и момент T на валу) с аналогичными параметрами рабочего органа машины (механизма) и передает движение на определенное расстояние. Скорость вращения вала рабочего органа в зависимости от назначения машины может находиться в очень широких пределах – приблизительно от 0,1 р/с до 10^4 р/с, и соответственно, не совпадать со стандартными частотами вращения вала двигателя.

Схема преобразования входных параметров передачи (кинематического $\omega_{вх}$ и силового $T_{вх}$) в соответствующие выходные ($\omega_{вых}$ и $T_{вых}$) при помощи передачи с гибкой связью и передачи с непосредственным контактом звеньев показаны на рисунках 13.2, а, и 13.2, б.

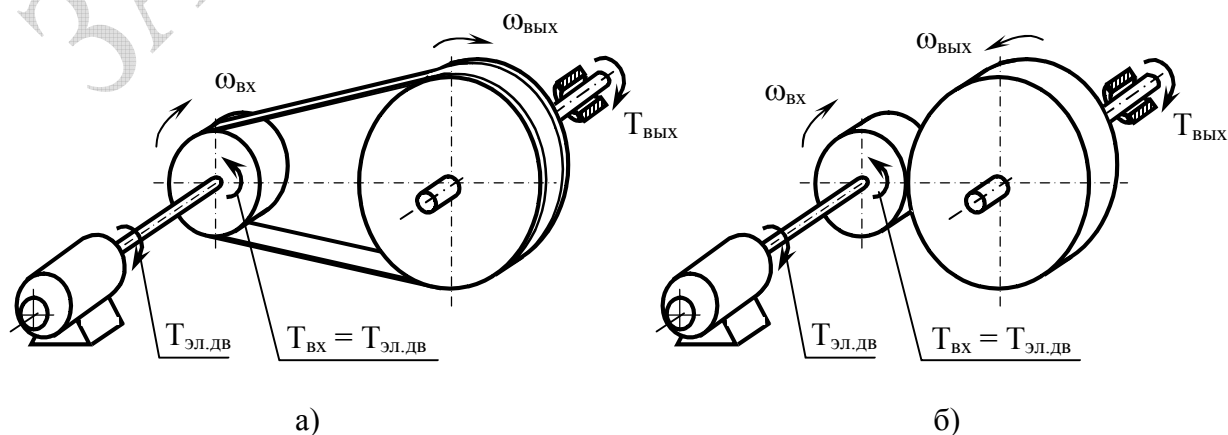


Рисунок 13.2

Передачи, т.е. механизмы, преобразующие вращательное движение, могут быть *открытыми* или *закрытыми*. *Закрытая передача* (обычно это зубчатая или червячная передача) находится в специальном корпусе, в котором обеспечивается необходимый режим смазки элементов передачи, а *открытая передача* специального герметичного корпуса не имеет. Открытыми передачами могут быть зубчатые, фрикционные, ременные, цепные передачи.

На рисунке 13.3 приведена схема привода барабанной вращающейся сушилки. Привод в данном случае состоит из электродвигателя 5, закрытой зубчатой передачи 6 (редуктора) и открытой зубчатой передачи (шестерня 7 и колесо 8 закреплённое на барабане).

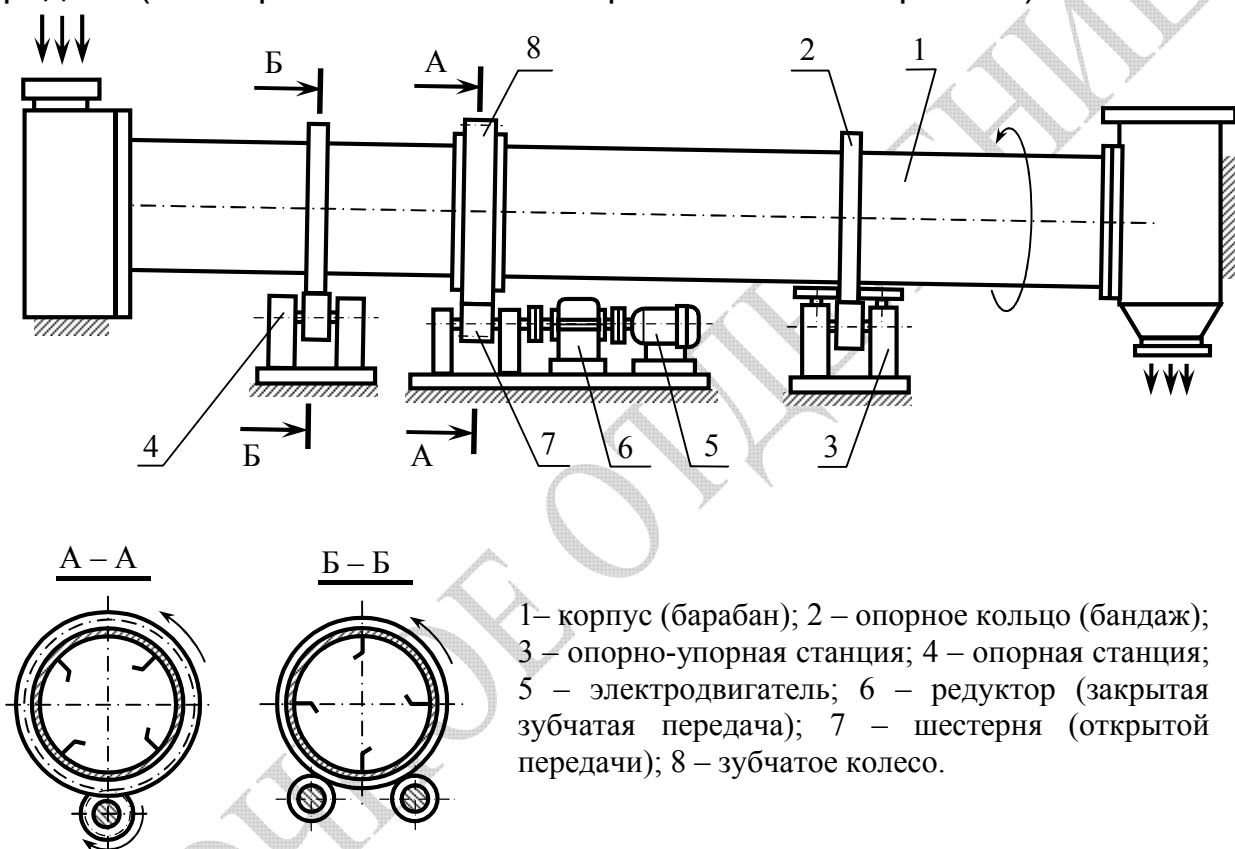


Рисунок 13.3

В зависимости от типа и назначения машины или технологического агрегата его привод может быть *простым* (рис. 13.4, а), т.е. содержать какую-либо одну механическую передачу (МП), или быть *комбинированным* (рис. 13.4, б), т.е. содержать несколько соединенных друг с другом передач, установленных на единой станине (рис. 13.3).

Основными параметрами привода являются передаваемая мощность (N), скорости вращения ($\omega_{вх}$) входного и выходного ($\omega_{вых}$) валов, коэффициент полезного действия (η), взаимное расположение валов.

Важнейший энергетический параметр любой передачи (рис. 13.4) – *коэффициент полезного действия* – отношение полезной мощности (мощности на выходе $N_{вых}$) к затраченной мощности (мощности на входе $N_{вх}$)

$$\eta = \frac{N_{\text{ВЫХ}}}{N_{\text{ВХ}}} < 1. \quad (13.1)$$

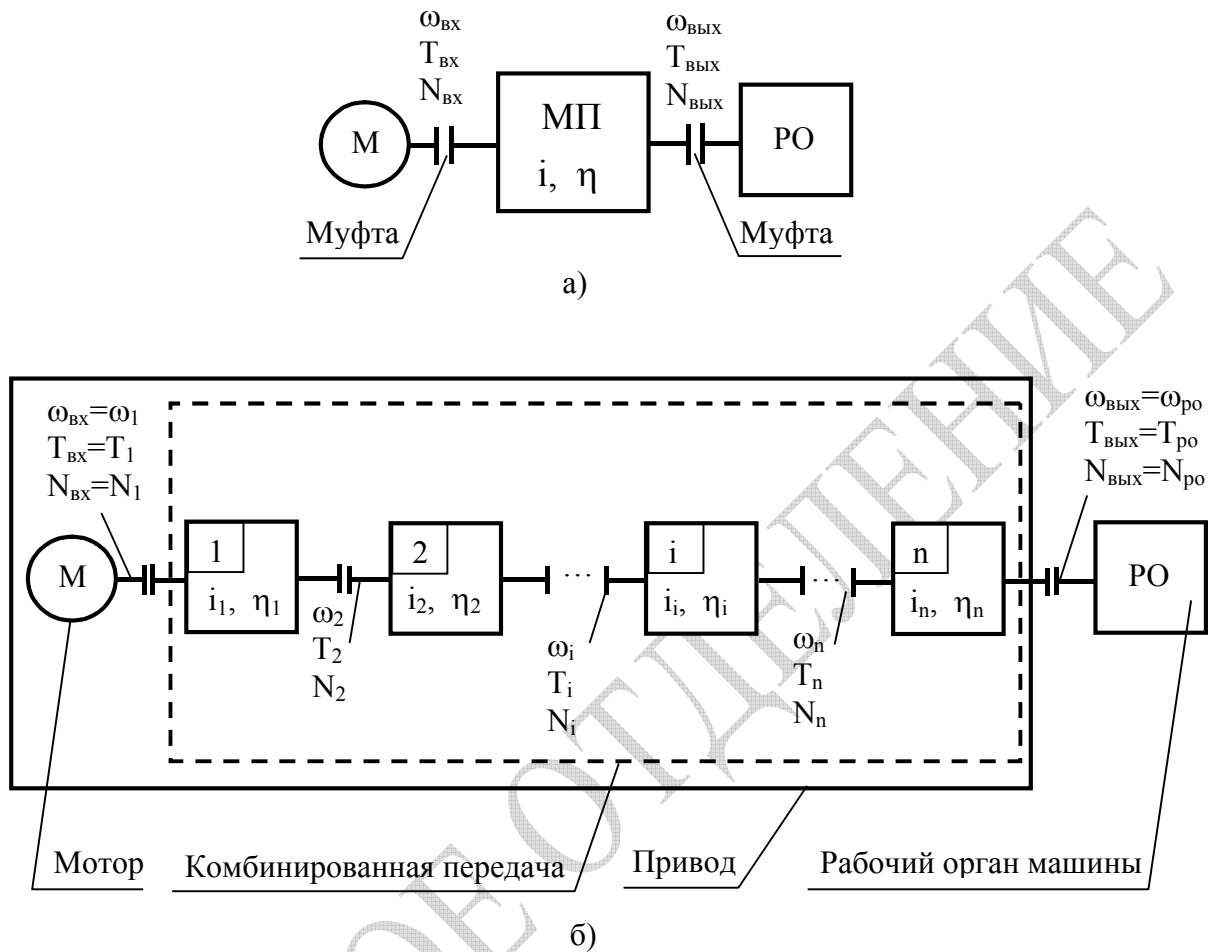


Рисунок 13.4

Выражение (13.1) может быть записано в виде *закона передачи мощности*

$$N_{\text{ВЫХ}} = N_{\text{ВХ}} \eta. \quad (13.2)$$

Для случая вращательного движения мощность выражается через момент на валу T и угловую скорость вала ω , т.е.

$$N = T \omega. \quad (13.3)$$

Комбинируя выражения (13.2) и (13.3), получим *закон передачи момента*

$$T_{\text{ВЫХ}} = T_{\text{ВХ}} \frac{\omega_{\text{ВХ}}}{\omega_{\text{ВЫХ}}} \eta = T_{\text{ВХ}} i \eta, \quad (13.4)$$

$$i = \omega_{\text{ВХ}} / \omega_{\text{ВЫХ}}, \quad (13.5)$$

где i – передаточное отношение.

Из (13.5) легко получить закон передачи угловых скоростей

$$\omega_{\text{ВЫХ}} = \omega_{\text{ВХ}} / i. \quad (13.6)$$

Общее передаточное отношение комбинированной передачи (привода) $i_{\text{пр}}$ равно произведению передаточных отношений i_i механических передач, составляющих данный привод. Например, если привод включает в себя n последовательно соединенных механических передач (рис. 13.4, б), то

$$i_1 i_2 \dots i_i \dots i_n = \frac{\omega_{\text{ВХ}} \omega_2 \dots \omega_i \dots \omega_n}{\omega_2 \omega_3 \dots \omega_{i+1} \dots \omega_{\text{ВЫХ}}} = \frac{\omega_{\text{ВХ}}}{\omega_{\text{ВЫХ}}} = \prod_{i=1}^n i_i,$$

$$i_{\text{пр}} = \frac{\omega_{\text{ВХ}}}{\omega_{\text{ВЫХ}}} = i_1 i_2 \dots i_i \dots i_n = \prod_{i=1}^n i_i. \quad (13.7)$$

Численное значение передаточного отношения привода может быть определено, если известна скорость вращения вала рабочего органа $\omega_{\text{ро}} = \omega_{\text{ВЫХ}}$ и вала электродвигателя $\omega_{\text{д}} = \omega_{\text{ВХ}}$ (электродвигатель предварительно подбирается по величине передаваемой мощности)

$$i_{\text{пр}} = \omega_{\text{д}} / \omega_{\text{ро}}. \quad (13.8)$$

Передаточные отношения механических передач, входящих в привод определяются по рекомендациям, приводимым в технической литературе. Открытые передачи, как правило, одноступенчатые, а закрытые понижающие зубчатые передачи (редукторы) могут быть одно-, двух- и трех ступенчатыми. Многоступенчатые зубчатые передачи в виде рядов зубчатых колёс позволяют получить большие передаточные отношения.

Применительно к приводу, состоящему из нескольких передач, (рис. 13.4, б) *общий коэффициент полезного действия привода – произведение КПД отдельных передач*

$$\eta_{\text{пр}} = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_i \dots \eta_n = \frac{N_2 N_3 \dots N_{i+1} \dots N_{\text{ВЫХ}}}{N_{\text{ВХ}} N_2 \dots N_i \dots N_n} = \frac{N_{\text{ВЫХ}}}{N_{\text{ВХ}}},$$

или

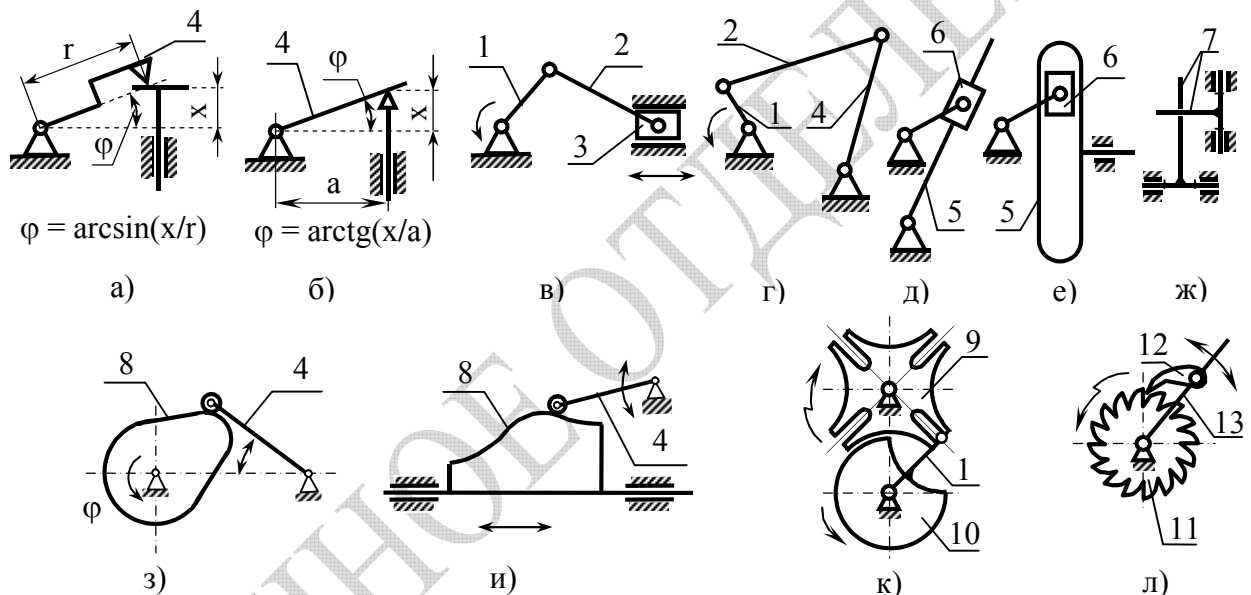
$$\eta_{\text{пр}} = \frac{N_{\text{ВЫХ}}}{N_{\text{ВХ}}} = \prod_{i=1}^n \eta_i. \quad (13.9)$$

Закон передачи момента (13.4) для комбинированной передачи (привода) имеет вид

$$T_{\text{вых}} = T_{\text{вх}} \frac{\omega_{\text{вх}}}{\omega_{\text{вых}}} \eta_{\text{пр}} = T_{\text{вх}} i_{\text{пр}} \eta. \quad (13.10)$$

13.2. Рычажные передачи

Передача, как механизм, преобразующий вращательное движение может быть реализован с использованием рычажных механизмов (рис. 13.3, а - ж), а также других механизмов, таких как кулачковые (рис. 13.3, з, и), мальтийские (рис. 13.3, к), храповые (рис. 13.3, л) (последние два типа механизмов обеспечивают прерывистые



1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – ползун; 4 – коромысло; 5 – кулиса; 6 – камень; 7 – поводок; 8 – кулачок; 9 – мальтийский крест; 10 – замыкающий сектор; 11 – храповое колесо; 12 - собачка; 13 – рычаг; 14 – шкив; 15 – ремень; 16 – лента (трос);.

Рисунок 13.4

движения рабочего органа машины).

К группе *рычажных* механизмов относятся синусные (рис. 13.3, а), тангенсные (рис. 13.3, б), кривошипно-ползунные (рис. 13.3, в), шарнирные (рис. 13.3, г), кулисные с вращающейся кулисой (рис. 13.3, д) и с поступательно движущейся кулисой (рис. 13.3, е), поводковые (рис. 13.3, ж). В комбинации эти механизмы обеспечивают необходимые движения рабочих органов технологических машин (насосов, компрессоров, грохотов, дробилок и т.д.). Кроме того, рычажные передачи используются в системах управления технологическими машинами, например, используются в тормозных

устройствах, натяжных устройствах ременных и цепных передач, устройствах управления передвижными деталями, например, для переключения блоков зубчатых колёс в коробках перемены передач.

Определённый интерес, как вид рычажной представляет кулисный механизм (рис. 13.5) с крестообразной вращающейся кулисой 2 и двухплечевым кривошипом 1. Передача отличается плавностью и бесшумностью в работе, что выгодно отличает её от зубчатой передачи. Передаточное отношение одноступенчатого механизма $i=2$. Большие передаточные отношения (кратные 2) обеспечиваются многоступенчатостью, при этом компактность удаётся сохранить.

Кинематические и силовые зависимости, необходимые для расчёта и проектирования большинства этих передач подробно рассматриваются в разделе «Теория механизмов и машин». Стержневые элементы данных передач рассчитываются по правилам сопротивления материалов, элементы кинематических пар – по правилам расчета подшипников качения и скольжения, которые рассматриваются в соответствующих главах.

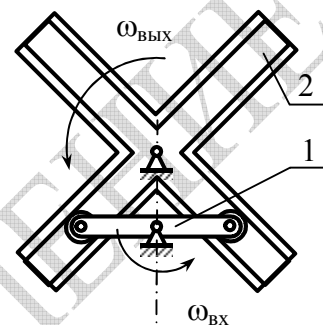


Рисунок 13.5

13.3. Контрольные вопросы

1. Что называется приводом машины? Из чего состоит привод?
2. Каково назначение двигателя и механической передачи?
3. Дайте краткую классификацию механических передач.
4. Что является основными параметрами привода?
5. Как записываются законы передачи мощности, момента и скорости?
6. Чему равно общее передаточное отношение комбинированной передачи?
7. Как определяется общий КПД комбинированной передачи?
8. Каково назначение и каковы основные типы рычажных передач?

Глава 14. Зубчатые передачи

14.1. Классификация зубчатых передач

Зубчатыми передачами называют механизмы, в которых вращательное движение между звеньями (зубчатыми колёсами) преобразуется за счет *зацепления* профилей зубьев. Рабочая часть колеса называется *зубчатым венцом*. Простейший зубчатый механизм, состоит из двух зубчатых колес, *ведущего колеса*, *ведомого колеса*, и *стойки*. В машиностроении колесо с меньшим числом зубьев называют *шестерней*. При одинаковом числе зубьев колес шестерней является ведущее колесо.

По многим параметрам зубчатые передачи превосходят фрикционные и ременные передачи. Зубчатые механизмы широко используют в машинах и приборах для преобразования механического движения в широком диапазоне мощностей (от 10 Вт до 150 тыс. кВт), скоростей (угловых 0,1÷10000 рад/с или окружных до 200 м/с) и моментов. Основное назначение зубчатых механизмов – передача мощности от ведущего вала к ведомому с преобразованием параметров движения. Передачи имеют высокие технико-экономические показатели: надёжность работы и КПД (до 0,97 – 0,98 для одной пары колёс), простоту технического обслуживания и компактность (малую массу). Передаточное отношение зубчатых передач постоянно.

Недостатки передач обусловлены сравнительно высокой трудоёмкостью изготовления колёс и нередким появлением шума в процессе их работы.

Однако указанные недостатки, к тому же в большинстве случаев устранимые с помощью целого ряда мер, отнюдь не препятствует их широкому применению.

На рис. 14.1 представлены схемы простейших зубчатых передач: цилиндрическая с внешним зацеплением (рис. 14.1, а, б), цилиндрическая с внутренним зацеплением (рис. 14.1, в), коническая (рис. 14.1, г), зубчато-реечная (рис. 14.1, д).

Подвижные звенья механизма на рис. 14.1, а – зубчатые колеса 1 и 2, образуют со стойкой кинематические пары 5-го класса O_1 и O_2 , а между собою – высшую кинематическую пару 4-го класса. Число степеней свободы этих механизмов равно единице.

Применительно к зубчатым механизмам передаточное отношение i может быть выражено, как через отношение угловой скорости ведущего звена 1 к угловой скорости ведомого колеса 2, так и через отношение числа зубьев колеса z_2 к числу зубьев шестерни z_1 . Отношение числа зубьев шестерни к числу зубьев колеса называется передаточным числом i , т.е.

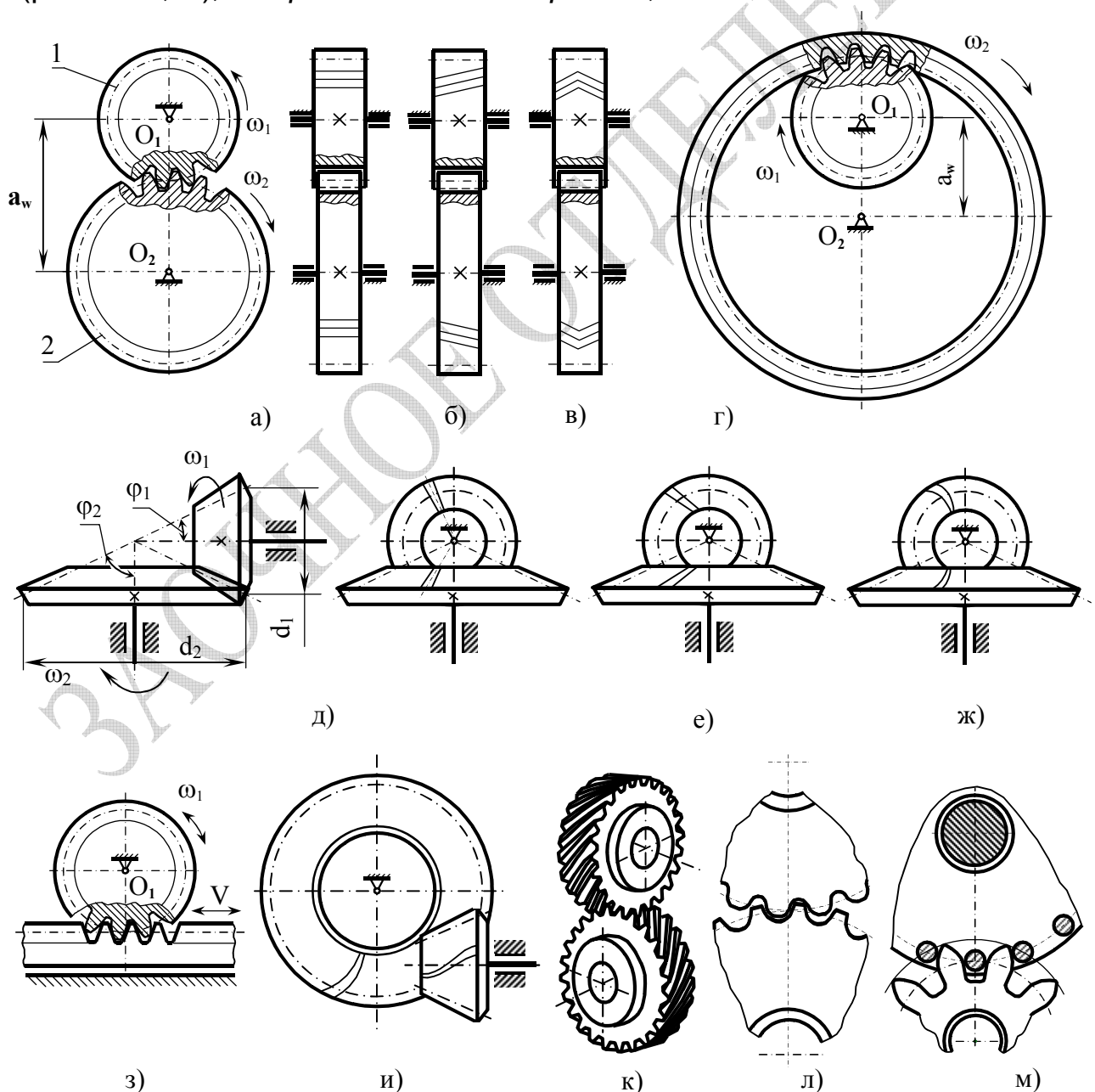
$$i = \omega_1 / \omega_2 = u = z_2 / z_1, \quad (14.1)$$

где индекс «1» здесь и далее относится к параметрам ведущего колеса (или вала), а индекс «2» – к параметрам ведомого колеса (или вала).

Передачи классифицируют по геометрическим и функциональным особенностям:

а) по расположению осей: *цилиндрические* (оси колёс параллельны) (рис. 14.1 а, б, в, г); *конические* (оси колёс пересекаются) (рис. 14.1, д, е, ж); *гипоидные* (рис. 14.1, и) и *винтовые* (рис. 14.1, к) (оси колёс скрещиваются);

б) по форме профиля рабочей поверхности зубьев зацепление колес может быть *эвольвентным*; с выпуклой поверхностью зуба одного колеса и вогнутой другого (*зацепление Новикова*) (рис. 14.1, л); *циклоидальным*, *часовым* (упрощённое циклоидальное), *цвечным* (рис. 14.1, м), *остроконечным* и *шаровым*;



в) по относительному расположению поверхностей вершин и впадин зубьев: передачи внешнего (рис. 14.1, а, б, в, д, е, ж, з) и внутреннего зацепления (рис. 14.1, г);

г) по направлению зубьев: *прямозубые* (рис. 14.1, а, д), *косозубые* (рис. 14.1, б, е), *шевронные* (рис. 14.1, в), с криволинейными зубьями (рис. 14.1, ж);

д) по преобразованию движения: вращательное во вращательное, вращательное в поступательное (поступательное во вращательное) (рис. 14.1, з);

е) по передаточному отношению: *понижающие* ($u > 1$), *повышающие* ($u < 1$) и *прямые* ($u = 1$) (понижающие зубчатые передачи называют *редукторами*, а повышающие *мультипликаторами*);

ж) по конструкции корпуса: открытые и закрытые.

Основные сравнительные параметры некоторых видов эвольвентных зубчатых передач (передаточные числа u , наибольшая окружная скорость передачи (V_{\max}), КПД передачи) приведены в таблице 14.1.

Таблица 14.1 – Основные характеристики зубчатых передач

Параметры	Виды передач			
	Цилиндрические			Коническая
	Прямозубая	Косозубая	Шевронная	
$u_{\min} \div u_{\max}$	1 ÷ 5	1 ÷ 10	1 ÷ 20	1 ÷ 8
V_{\max} , м/с	20 ÷ 100	20 ÷ 200	20 ÷ 200	5 ÷ 75
КПД (η), % закрытой передачи	97 ÷ 99,5			
КПД (η), % открытой передачи	96			95

Различают силовые и кинематические передачи. Силовые передачи используют для передачи значительных мощностей. Их габариты определяются прочностной надёжностью. Размеры кинематических передач определяются конструктивными соображениями.

Наибольшее применение имеет эвольвентное зацепление, предложенное примерно в 1765 г. профессором Петербургской академии Леонардом Эйлером. До XX века этот вид зацепления соперничал с циклоидальным зацеплением разработанным французским учёным М. Камусом в XVIII в. Широкое распространение эвольвентных передач объясняется несколькими причинами: для изготовления колёс требуется минимальное количество инструмента (в 2–3 раза меньше чем для циклоидального); зубья могут быть обработаны инструментом с прямолинейной режущей кромкой, что повышает точность изготовления; нечувствительностью передач к отклонениям межосевого расстояния (не изменяется закон движения и передаточное отношение).

14.2. Геометрические параметры и кинематика прямозубых эвольвентных передач

В эвольвентных зубчатых передачах боковая поверхность зубьев очерчена *эвольвентой* (рис. 14.2), т.е. кривой, которую описывает точка прямой линии при перекатывании этой прямой без скольжения по окружности. Прямая линия носит название *производящей прямой*, а окружность – *основной*. На рисунке 14.2 изображены основная окружность диаметром d_b и производящая прямая в начальном (штриховая линия) и произвольном ($K_y N_y$) положениях. Точка K производящей прямой при её перекатывании без скольжения по основной окружности описывает эвольвенту $K_b K_y$. Начальная точка эвольвенты лежит на основной окружности. Внутри этой окружности эвольвента точек не имеет. С увеличением диаметра основной окружности d_b кривизна эвольвенты уменьшается и при $d_b = \infty$ она преобразуется в прямую линию.

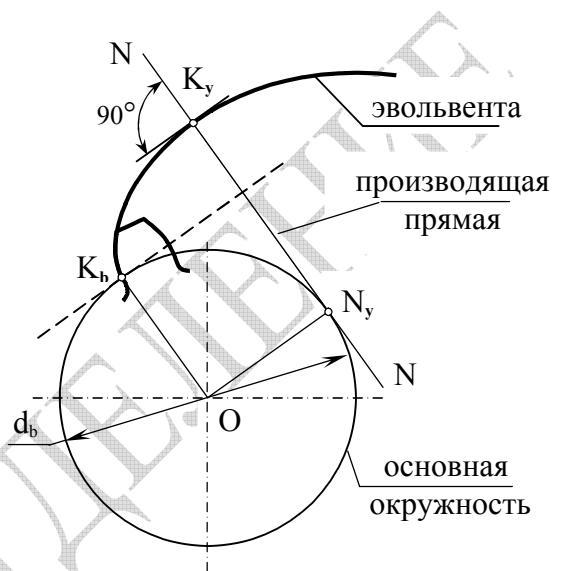


Рисунок 14.2

На рис. 14.3 приведена схема эвольвентного зацепления двух прямозубых зубчатых колес. Общая нормаль к профилям $N - N$ является линией зацепления, по которой перемещается точка контакта K . Угол α_w – *угол зацепления*. На шестерне 1 и колесе 2 радиусами отмечено по пять окружностей: делительная (r), основная (r_b), окружность вершин зубьев (r_a), окружность впадин (r_f) и начальная окружность (r_w).

Зубья колеса (шестерни) ограничиваются со стороны тела колеса *окружностью впадин* радиуса r_f , а с внешней стороны *окружностью вершин* радиуса r_a . Соответствующие этим окружностям цилиндрические поверхности называются *поверхностями впадин* и *выступов*. *Делительная окружность* делит зуб колеса (шестерни) на головку высотой h_a и ножку зуба высотой h_f .

Дуга АВ по делительной окружности равна шагу P режущего инструмента. Таким образом, длину периметра ℓ делительной окружности можно выразить как через шаг P и число зубьев, так и через диаметр делительной окружности d

$$\ell = P z = \pi d, \quad (14.2)$$

откуда можно получить выражение для диаметра делительной окружности и модуля m зубчатого колеса

$$d = (P/\pi)z = mz, \quad (14.3)$$

$$m = P/\pi. \quad (14.4)$$

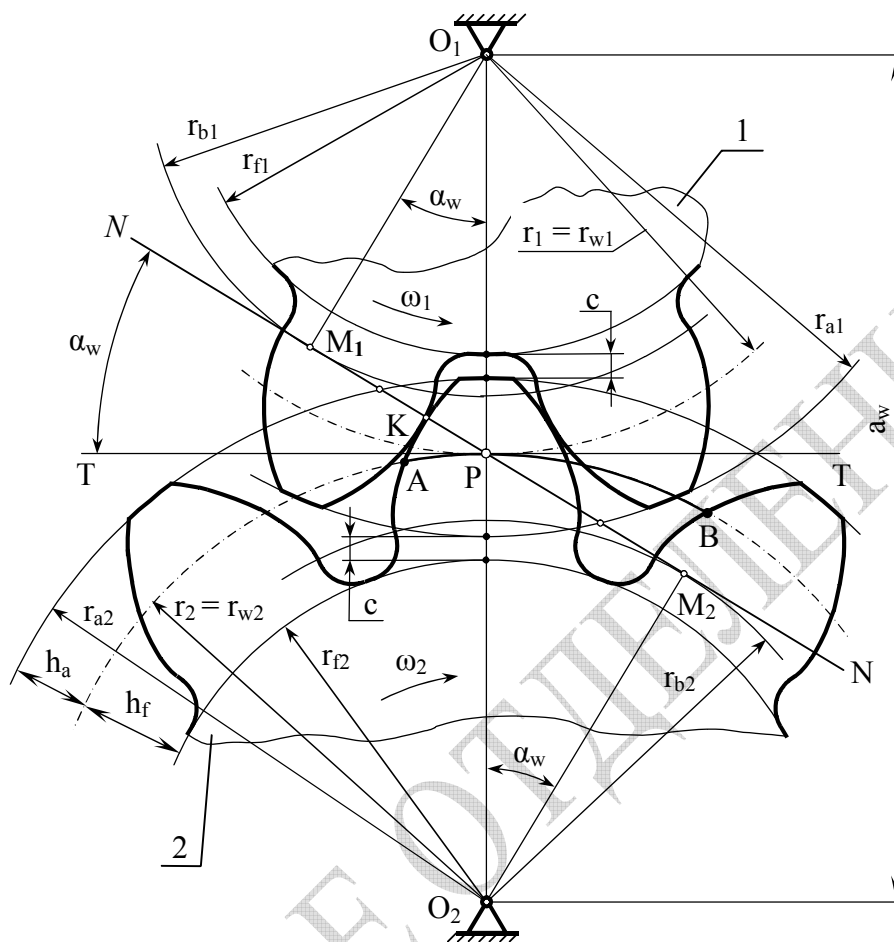


Рисунок 14.3

Модуль – это отношение шага по делительной окружности к числу π . Модуль измеряется в линейных единицах (миллиметрах) и является на делительной окружности стандартной величиной (ГОСТ 9563 – 60). Значения наиболее употребительных модулей согласно этому ГОСТ приведены ниже в таблице 14.2.

Таблица 14.2 Ряд наиболее употребительных модулей по ГОСТ 9563–60

1-й ряд *	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10	12	16	20
2-й ряд	1,7	2,2	2,7	3,5	4,5	5,5	7	9	11	14	18	22

* Первый ряд следует предпочитать второму

Различают мелко модульные ($m < 1$ мм), среднмодульные ($1 \leq m < 10$ мм) и крупномодульные ($m > 10$ мм) зубчатые передачи.

Модуль колеса на делительной окружности – важнейший параметр, через который определяются все геометрические размеры колеса и передачи.

Из данных приведенных в следующей таблице вытекает, что высота головки зуба ($h_a = m$) меньше высоты ножки зуба ($h_f = 1,25m$). Это связано с тем, что в зацеплении (рис. 14.3) предусмотрен стандартный радиальный зазор s , который необходим для размещения смазки, компенсации неточности изготовления и монтажа передачи, и для компенсации тепловых деформаций.

Начальными называются окружности, по которым зубчатые колеса при работе перекатываются без скольжения. Начальные окружности (рис. 3.3) пересекают линию центров O_1O_2 в точке P . Точка P – полюс зацепления, он делит межосевое расстояние a_w в отношении пропорциональном передаточному отношению

$$i = \omega_1 / \omega_2 = u = z_2 / z_1 = d_{w2} / d_{w1} = d_2 / d_1 . \quad (14.5)$$

При изготовлении зубчатых колес их необходимые геометрические параметры обеспечиваются стандартным режущим инструментом, например, в виде зубчатой трапецеидальной рейкой со стандартным *шагом* P между зубьями рейки (рис. 14.4). Боковые режущие кромки рейки скошены под углом $\alpha = 20^\circ$ (стандартный угол профиля). В зависимости от положения делительной прямой (ДП) рейки относительно делительной окружности (ДО) колеса-заготовки получают зубья разной формы и разной толщины s , которая может равняться ширине впадины (e) между зубьями по делительной окружности (рис. 14.4, а), или же быть больше (рис. 14.4, б), или меньше (рис. 14.4, в) ширины впадины. Смещение δ – расстояние между делительной прямой (ДП) и станочной начальной прямой (СНП), т.е. прямой касательной к делительной окружности (ДО) характеризуется коэффициентом смещения

$$x = \delta / m, \quad (14.6)$$

который может принимать значения $x=0$, $x>0$, $x<0$.

В нулевых передачах (см. рис. 14.3), т.е. передачах без смещения коэффициент смещения шестерни x_1 и колеса x_2 равны нулю, диаметры делительных и начальные окружности совпадают. Если сумма коэффициентов смещения x_1 и x_2 больше нуля, то передачу называют *положительной*, если меньше нуля – *отрицательной*.

Благодаря положительному смещению δ (рис. 14.4, б) снижают минимально допустимое число зубьев ($z_{min} = 17$) на колесе без подрезания основания ножки зуба, которое происходит при нулевом смещении (рис. 14.4, а) при числе зубьев $z < 17$. Положительное смещение увеличивает толщину зуба, а, следовательно, его прочность. Передачи с отрицательным смещением позволяют увеличить *коэффициент перекрытия* ε , который характеризует непрерывность работы передачи ($\varepsilon = 1,2 \dots 1,8$). Обычно, при работе передачи одновременно в контакте попеременно находится то одна пара зубьев (однопарное зацепление), то две пары зубьев (двухпарное зацепление). С увеличением ко-

эффициента перекрытия ε длительность однопарного зацепления сокращается, а значит большую часть времени передаваемую нагрузку воспринимает сразу две пары зубьев.

Межосевые расстояния a_w для стандартных зубчатых передач стандартизованы: 40, 50, 63, 80, 100, 125, 160, 180, 200, 225, 250, 280, 315, 355, 400, 450, 500 мм.

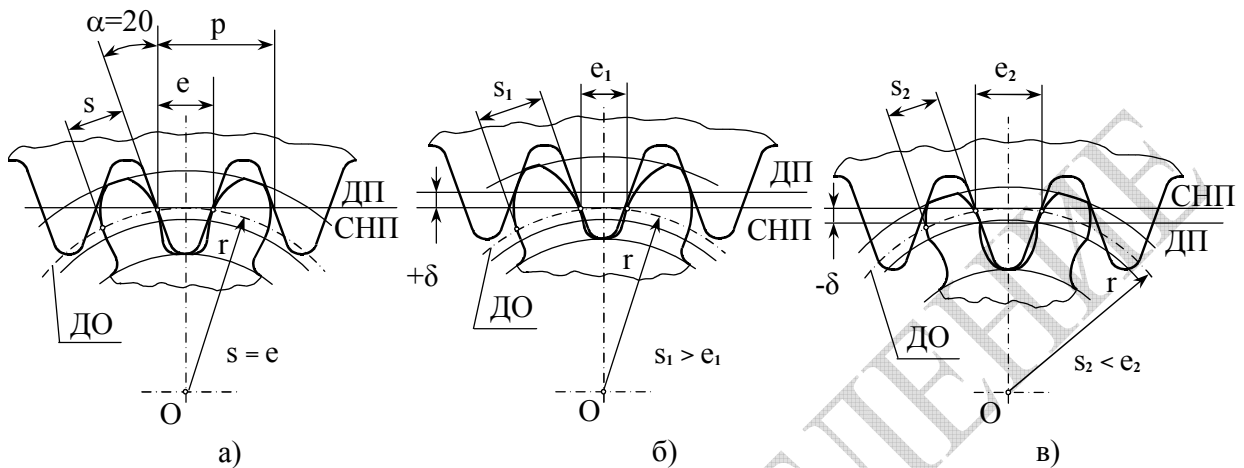


Рисунок 14.4

Основные геометрические параметры прямозубых цилиндрических колёс приведены в таблице 14.3.

Таблица 14.3 – Основные параметры прямозубых колёс и передачи

Параметры	шестерни	зубчатого колеса
Межосевое расстояние	$a_w = 0,5(d_{w1} + d_{w2})$	
Диаметр начальной окружности	$d_{w1} = 2a_w / (1 + u)$	$d_{w2} = 2a_w u / (1 + u)$
Высота головки зуба*	$h_a = h_a^* m = 1 \cdot m = m$	
Высота ножки зуба*	$h_f = h_f^* m = 1,25m$	
Радиальный зазор*	$c = c^* m = 0,25m$	
Диаметр делительной окружности	$d_1 = mz_1$	$d_2 = mz_2$
Делительное межосевое расстояние	$a = 0,5(d_1 + d_2)$	
Диаметр основной окружности	$d_{b1} = d_1 \cos \alpha$	$d_{b2} = d_2 \cos \alpha$
Угол зацепления	$\alpha_w = \arccos(a \cos \alpha / a_w)$	
Диаметр окружности впадин зубьев	$d_{f1} = d_1 - 2m(h_a^* + c^* - x_1)$	$d_{f2} = d_2 - 2m(h_a^* + c^* - x_2)$
Диаметр окружности вершин зубьев	$d_{a1} = 2a_w - d_{f2} - 2c^* m$	$d_{a2} = 2a_w - d_{f1} - 2c^* m$
Коэффициент торцового перекрытия	$\varepsilon = (0,5(d_{a1}^2 - d_{b1}^2) + 0,5(d_{a2}^2 - d_{b2}^2) - a_w \sin \alpha_w) / \pi m \cos \alpha_w$	
* h_a^* , h_f^* , c^* – соответственно коэффициенты высоты головки зуба, высоты ножки зуба, радиального зазора; $\alpha = 20^\circ$ – стандартный угол профиля.		

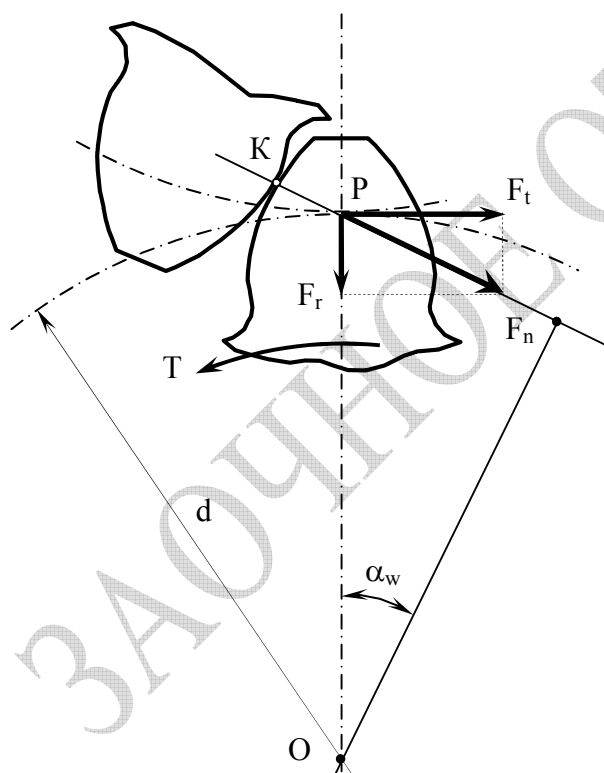
14.3. Силы, действующие в прямозубых передачах

Наибольшую нагрузку зуб колеса испытывает в начальный момент зацепления, когда точка К контакта двух зубьев находится на вершине зуба. В этот момент *угол давления*, несколько больше угла зацепления α_w . Для упрощения расчётов принимают, что контакт зубьев происходит в полюсе Р зацепления, силой трения, при этом, пренебрегают (рис. 14.5). В прямозубой передаче в точке контакта зубьев действует сила F_n , направленная вдоль линии зацепления. Силу F_n раскладывают на *окружную* F_t и *радиальную* F_r составляющие.

Окружная составляющая силы может быть определена исходя из величины передаваемой мощности N и угловой скорости ω колеса или по величине крутящего момента T на соответствующем валу

$$F_t = \frac{2T}{d} = \frac{2N}{d\omega}, \quad (14.7)$$

где d – диаметр делительной окружности.



В расчётах на прочность можно принимать $d_w \approx d$ ($d = mz$ диаметр делительной окружности); $\alpha_w \approx \alpha$. Это не вносит существенных погрешностей в расчёты колёс (в диапазоне назначаемых на практике коэффициентов смещения x), поэтому все расчёты приводятся к *делительной* окружности колеса. Точное описание геометрических параметров колёс и зацепления выполняют на чертежах.

Из силовой схемы (рис. 14.5) следует, что

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha_w, \quad (14.8)$$

$$F_n = F_t / \cos \alpha_w. \quad (14.9)$$

Рисунок 14.5

Вектор окружной силы F_t касателен к начальной (делительной) окружности. Эта сила направлена противоположно вращению шестерни. По отношению к колесу направление окружной силы F_t совпадает с направлением вращения колеса. Векторы радиальных сил F_r у колёс с внешним зацеплением направлены к центру, а у колёс с внутренним зацеплением – от центра колеса.

14.4. Геометрические параметры косозубых передач

В косозубых цилиндрических колёсах в отличие от прямозубых оси зубьев составляют некоторый угол β с осью колеса (рис. 14.6). Работать в паре могут только колёса с равными модулями, равными углами наклона, но с разным, *правым* или *левым* наклоном зуба. Оси косозубых колёс параллельны.

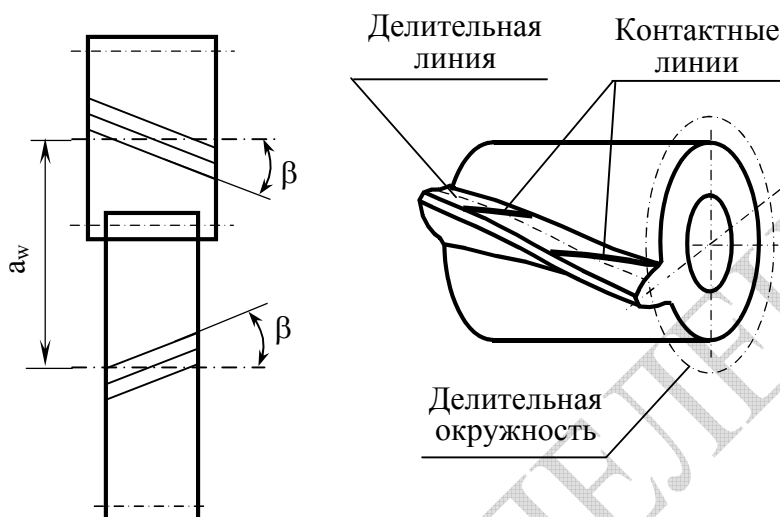


Рисунок 14.6

У косозубых колёс (рис. 14.6) теоретическая делительная линия зуба представляет собой часть винтовой линии постоянного шага (теоретической делительной линией называется линия пересечения боковой поверхности зуба с делительной цилиндрической поверхностью). Контакт между зубьями в косозубой передаче происходит по линиям, причём, контактные линии расположены наклонно по отношению к линии зуба.

Из-за наклонного расположения контактных линий по отношению к линии зуба косые зубья, в отличие от прямых, входят в зацепление не сразу по всей длине, а постепенно. Такая постепенность обеспечивает более равномерную и плавную работу, и, следовательно, снижение динамических нагрузок и шума при работе передачи. Благодаря этим преимуществам косозубые передачи являются более скоростными по сравнению с прямозубыми передачами (см. таблицу 14.1). Косозубые передачи при прочих равных условиях могут быть компактнее прямозубых, поскольку у косозубых колёс минимальное число зубьев, при котором не происходит подрезания зависит от угла наклона β ($z_{\min} = 17 \cos^3 \beta$), что меньше, чем у прямозубых ($z_{\min} = 17$).

К недостаткам косозубых передач относятся более сложное изготовление колёс по сравнению с прямозубыми, возникновение дополнительного осевого усилия, действующего на опорные узлы валов. *Шевронные колёса* (рис. 14.1, в) венцы, которых имеют участки с правым и левым направлением зубьев, не создают осевых усилий. Они

компактны, обеспечивают большие передаточные числа (таблица 14.1), но наиболее сложны в изготовлении.

Передача с косозубыми колёсами, оси которых скрещиваются (располагаются в разных плоскостях) имеет одинаковое направление зубьев и называется *винтовой зубчатой передачей* (рис. 14.1, к).

Геометрические параметры косозубых колёс определяют в плоскости торцового сечения (плоскость t-t вращения колеса) и в нормальном сечении n-n – в плоскости, перпендикулярной к направлению зуба (рис. 14.7).

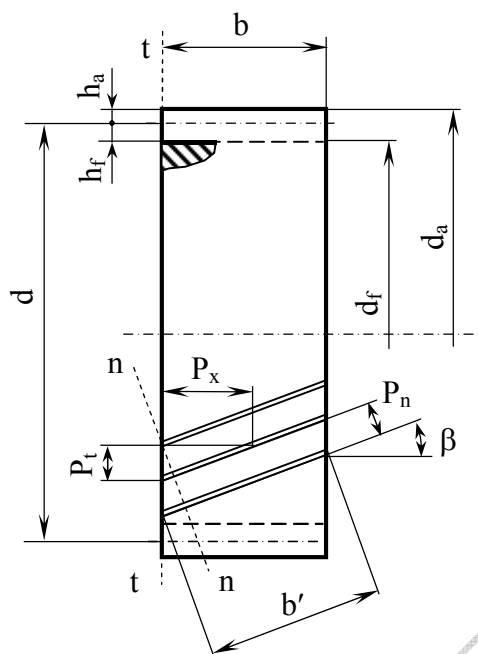


Рисунок 14.7

Окружному шагу p_t соответствует *торцовый модуль*

$$m_t = p_t / \pi, \quad (14.10)$$

шагу p_n в нормальном сечении соответствует *нормальный модуль*

$$m_n = p_n / \pi, \quad (14.11)$$

а шагу p_x в осевом направлении – *осевой модуль*

$$m_x = p_x / \pi, \quad (14.12)$$

Торцовый и нормальный модуль, как следует из рис. связаны зависимостью

$$m_t = m_n / \cos\beta. \quad (14.13)$$

Косозубые колеса обрабатываются теми же зуборезными инструментами, что и прямозубые, поэтому *стандартные параметры колёс задаются в нормальном к зубу сечении nn* (рис. 14.7). *Нормальный модуль m_n стандартизован*. Размеры косозубого колеса, выраженные через стандартный модуль, вычисляются по формулам представленным в таблице 14.4.

Угол наклона β обычно назначают в диапазоне от 8° до 15° , редко до 25° . Менее 8° угол назначать не следует, т.к. в этом случае утрачиваются преимущества косозубых передач перед прямозубыми. Увеличение угла свыше 15° ведет к увеличению габаритов опорных узлов из-за возрастания осевой составляющей силы в зацеплении. При высоких требованиях к уровню шума угол β может быть увеличен до $40 \div 45^\circ$. В шевронных передачах, которые можно рассматривать, как сдвоенные косозубые передачи с противоположным направлением зубьев, осевая сила компенсируется, и угол β принимают равным $30 \div 45^\circ$.

Таблица 14.4 – Основные параметры косозубых колес и передачи

Параметры	шестерни	зубчатого колеса
Высота головки зуба	$h_a = m_n$	
Высота ножки зуба	$h_f = 1,25m_n$	
Радиальный зазор	$c = 0,25 m_n$	
Диаметр делительной окружности	$d_1 = m_t z_1 = m_n z_1 / \cos\beta$	$d_2 = m_t z_2 = m_n z_2 / \cos\beta$
Диаметр окружности вершин зубьев	$d_{a1} = d_1 + 2h_a = d_1 + 2m_n$	$d_{a2} = d_2 + 2h_a = d_2 + 2m_n$
Диаметр окружности впадин зубьев	$d_{f1} = d_1 - 2h_f = d_1 - 2,5m_n$	$d_{f2} = d_2 - 2h_f = d_2 - 2,5m_n$
Делительное межосевое расстояние	$a = 0,5 (d_1 + d_2) = m_n (z_1 + z_2) / (2\cos\beta)$	

Длина зуба (рис. 14.7) обычно принимается равной $b' = (3 \div 15)m_n$. Ширина венца колеса $b = b' \cos\beta$. Ширина венца колеса влияет, как и угол наклона зубьев β на значение коэффициента перекрытия. Коэффициент осевого перекрытия косозубой передачи

$$\varepsilon_\beta = b / p_x, \quad (14.14)$$

где b – ширина венца; p_x – осевой шаг.

Если ε_β - целое число, то суммарная длина контактных линий всё время будет оставаться постоянной, что благоприятно для работы передачи, так как нагрузка на зубья в процессе зацепления будет оставаться постоянной.

14.5. Силы, действующие в косозубых передачах

В зацеплении косозубых колёс силу нормального давления F_n раскладывают на три взаимно перпендикулярных составляющие (рис. 14.8): окружную силу F_t , радиальную силу F_r и осевую силу F_a

$$F_n = F_t / (\cos\alpha_n \cos\beta), \quad (14.15)$$

$$F_t = 2N / (d \omega) = 2T / d, \quad (14.16)$$

$$F_r = F_t \operatorname{tg}\alpha_n / \cos\beta, \quad (14.17)$$

$$F_a = F_t \operatorname{tg}\beta, \quad (14.18)$$

где T – передаваемый вращающий момент; N – мощность; d – диаметр делительной окружности ($d \approx d_w$); α_n – угол зацепления косозубой передачи в нормальном сечении; β – угол наклона линии зуба.

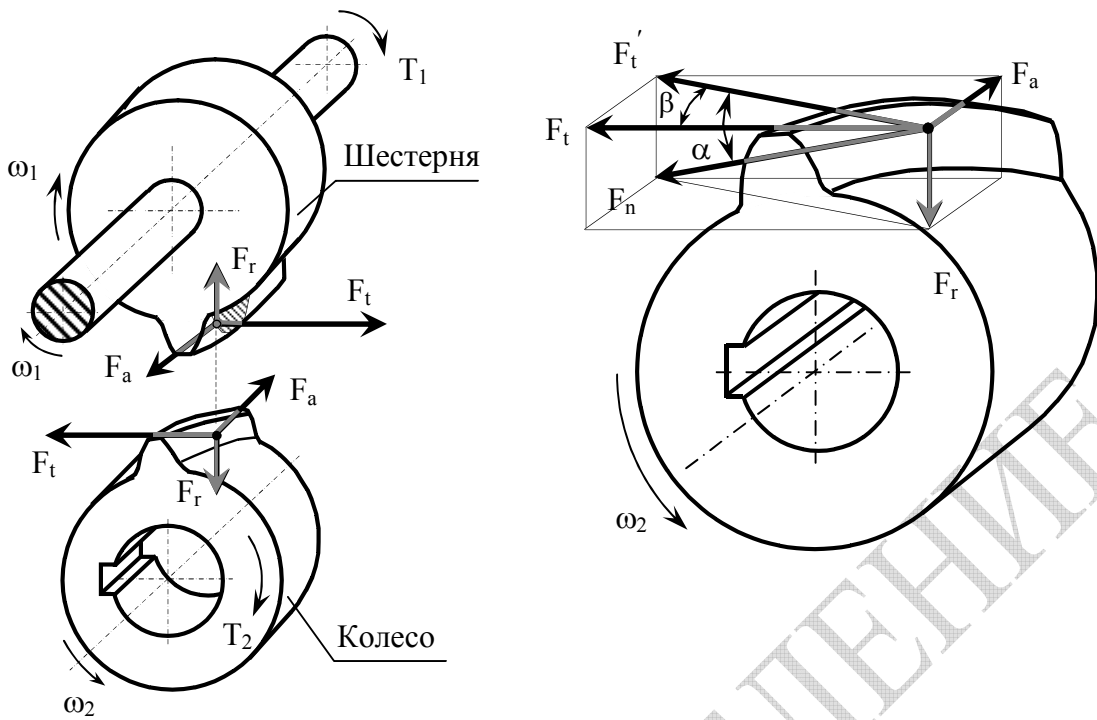


Рисунок 14.8

Окружная сила F_t направлена по касательной к делительной (начальной) окружности, радиальная сила F_r направлена вдоль радиуса колеса, а осевая сила F_a направлена вдоль оси колеса. Составляющие силы нормального давления, действующие на шестерню, т.е. ведущее колесо и на ведомое колесо попарно равны и направлены противоположно друг другу (рис. 14.8).

Направление векторов окружных и осевых сил зависит от направления вращения колеса и от направления линии зуба (рис.

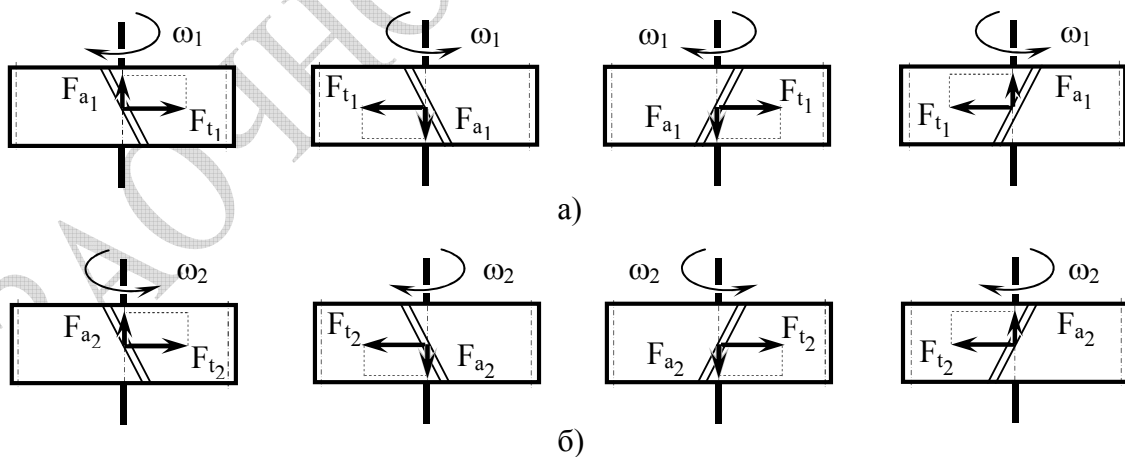


Рисунок 14.9

14.9). Направление действия окружной силы для шестерни (рис. 14.9, а) противоположно направлению её вращения, а для колеса совпадает с направлением его вращения (рис. 14.9, б).

Прочность зуба косозубого колеса определяется его формой и размерами в нормальном сечении и длиной зуба. Для унификации ме-

тодики расчётов прямых и косых зубьев в практику введено понятие эквивалентного колеса. *Эквивалентным прямозубым колесом* называется такое колесо, размеры и форма зубьев которого приближенно совпадают с размерами и формой зуба косозубого колеса в нормальном сечении.

На рисунке 14.10 изображено косозубое колесо, пересечённое плоскостью np . Нормальное сечение делительной цилиндрической поверхности (делительный диаметр d) этого колеса представляет собой эллипс с полуосями $c = 0,5d$ и $e = 0,5d / \cos\beta$. Максимальный радиус кривизны этого эллипса

$$r_v = e^2 / c = 0,5d / \cos^2\beta. \quad (14.19)$$

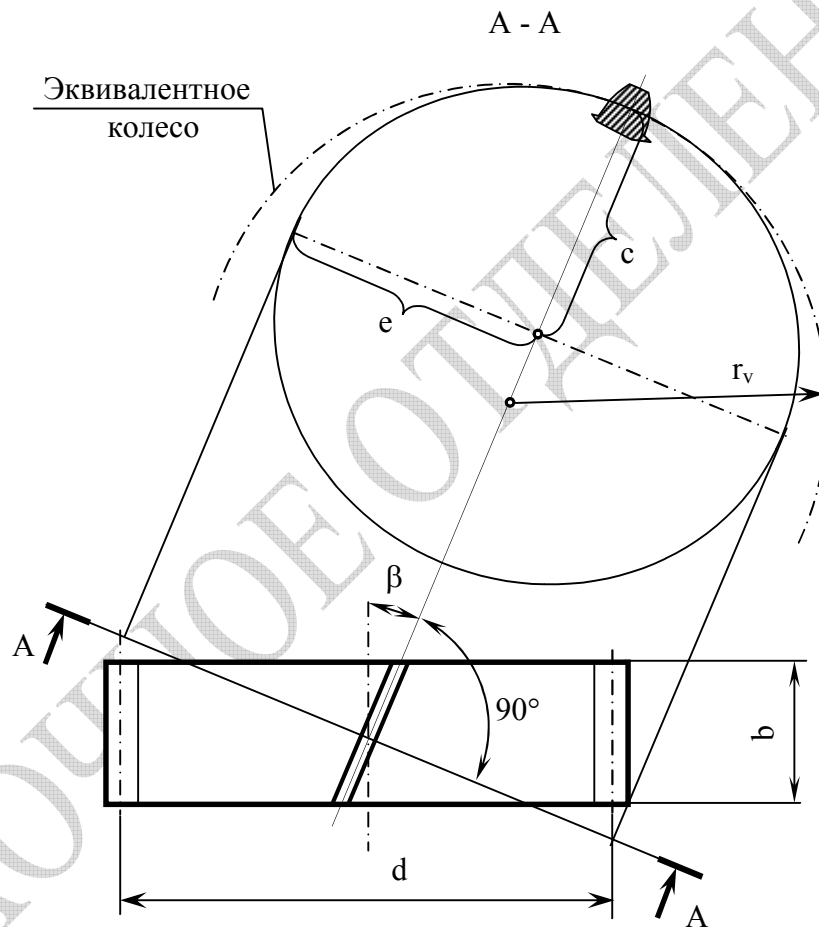


Рисунок 14.10

Этот радиус кривизны принимается за радиус делительного цилиндра эквивалентного колеса, соответственно, диаметр делительной окружности эквивалентного колеса равен

$$d_v = d / \cos^2\beta. \quad (14.20)$$

Число зубьев в таком эквивалентном колесе с учётом выражения для d (см. табл. 14.3)

$$z_v = d_v / m = d / (m \cos^2 \beta) = z / \cos^3 \beta. \quad (14.21)$$

Из формул (14.29, 14.21) следует, что с увеличением угла β возрастают параметры d_v и z_v эквивалентного колеса, что приводит к повышению прочности, а значит и нагрузочной способности косозубых клёс по сравнению с прямозубыми и даёт возможность при одинаковой нагрузке иметь передачу с меньшими габаритами.

14.6. Материалы цилиндрических колёс

Зубчатые колёса изготавливают из сталей, чугуна и неметаллических материалов, например, пластмасс. Выбор материала определяется назначением передачи, условиями работы, габаритами колёс, типом производства (единичное, серийное или массовое), технологическими, а также экономическими соображениями.

Колёса из пластмасс имеют небольшую массу, не корродируют, передачи из таких колёс бесшумны в работе, в ряде случаев обладают свойством самосмазываемости. В некоторых станках специальные легко заменяемые пластмассовые зубчатые колёса используются в качестве предохранительного элемента коробки передач, разрушающегося при перегрузках. Применение колёс из неметаллических материалов ограничено в силовых передачах из-за невысокой прочности материалов и, как следствие, больших габаритов передач. Для изготовления неметаллических колёс используют текстолит, слоистые пластики, капрон, нейлон и др. В приборостроении зубчатые колёса изготавливают также из латуни, бронзы, алюминиевых сплавов.

Выбор материала определяется назначением передачи, условиями работы, габаритами колёс, типом производства (единичное, серийное или массовое), технологическими, а также экономическими соображениями.

Чугунные зубчатые колёса дешевле стальных, их применяют в малонагруженных открытых передачах, работающих со скоростью до 3 м/с. Применяют серые, модифицированные и высокопрочные чугуны, обладающие хорошими литейными свойствами. Они имеют малую склонность к заеданию, хорошо работают при бедной смазке, но не выдерживают ударных нагрузок.

Основные материалы для изготовления зубчатых колёс – термообработанные углеродистые и легированные стали, обеспечивающие высокую объёмную прочность зубьев, твёрдость и износостойкость их активных поверхностей. Наибольшее распространение в силовых передачах имеют колёса из сталей 35, 35Л, 45, 40Л и др. (см. табл. 14.5).

В зависимости от твёрдости активных поверхностей зубьев стальные колёса делятся на две группы:

а – колёса с твёрдостью ≤ 350 НВ (число твёрдости по Бринеллю), зубья которых хорошо прирабатываются;

б – колёса с твёрдостью > 350 НВ, зубья которых прирабатываются плохо, а при твёрдости активных поверхностей обоих колёс ≥ 45 HRC (число твёрдости по Роквеллу, шкала твёрдости С) являются неприрабатываемыми.

Кроме способности к приработке колёса этих групп различаются технологиями механической обработки и нагрузочной способностью.

Таблица 14.5 Свойства некоторых сталей, применяемых для изготовления зубчатых колёс

Марка стали	Размеры, мм		НВ (сердцевины)	HRC (поверхности)	σ_B , МПа	σ_T , МПа	Виды термической обработки
	D*	S*					
35	Любые		163 ÷ 192	-	550	270	Нормализация
45	Любые		179 ÷ 207	-	600	320	Улучшение
	125	80	235 ÷ 262	-	780	540	
	80	50	269 ÷ 302	-	890	650	
40X	200	125	235 ÷ 262	-	790	640	Улучшение+закалкаТВЧ
	125	80	269 ÷ 302	-	900	750	
	125	80	269 ÷ 302	45 ÷ 50	900	750	
35XM	315	200	235 ÷ 262	-	800	670	Улучшение
	200	125	269 ÷ 302	-	920	790	
	200	125	269 ÷ 302	48 ÷ 53	920	790	
40XH	315	200	235 ÷ 262	-	800	630	Улучшение
	200	125	269 ÷ 302	-	920	750	
	200	125	269 ÷ 302	48 ÷ 53	920	750	
20XHM	200	125	300 ÷ 400	56 ÷ 63	1000	800	Улучшение+цементация+закалка
18XГТ	200	125	300 ÷ 400	56 ÷ 63	1000	800	
12XН3А	200	125	300 ÷ 400	56 ÷ 63	1000	800	
25XГМ	200	125	300 ÷ 400	56 ÷ 63	1000	800	
40XНМА	125	80	269 ÷ 302	58 ÷ 65	980	780	Улучшение+азотирование
35Л	Любые		163 ÷ 207	-	550	270	Нормализация
45Л	315	200	207 ÷ 235	-	680	440	Улучшение
Примечание. D* и S* – максимально допустимые по условиям термообработки диаметр шестерни и толщина стенок колеса							

Колёса первой группы, изготавливаются из средне- и высокоуглеродистых сталей, подвергнутых термообработке – нормализации или улучшению (закалка и высокий отпуск). При диаметре колёс до 150 мм обеспечивают твёрдость 300 – 350 НВ. Колёса диаметром свыше 150 мм имеют твёрдость не менее 200 НВ. Зубья колёс, подвергнутых такой обработке, имеют приблизительно одинаковую твёр-

дость по всему сечению и могут быть нарезаны после термообработки, отделочные операции, при этом, не требуются. *Эти технологические преимущества обеспечивают широкое применение колёс первой группы при единичном или мелкосерийном производстве мало- и средненагруженных передач, а также передач с крупногабаритными колёсами.*

Для предотвращения заедания рабочих поверхностей нижний предел твёрдости шестерни (меньшего колеса) должен быть на 30 – 50 единиц выше верхнего предела твёрдости колеса. Для изготовления шестерни и колеса первой группы целесообразно использовать сталь одной марки, а разность твёрдости обеспечивать термообработкой.

Колёса второй группы изготавливают из легированных сталей, подвергаемых различным видам термической и химико-термической обработки (цементация, объемная или поверхностная закалка, азотирование, цианирование, нитроцементация) и применяют для быстроходных и высоконагруженных передач. Наиболее производительна закалка токами высокой частоты (ТВЧ) по контуру зубьев колёс из сталей с содержанием углерода 0,3–0,5%. Толщина закалённого слоя при этом достигает 3,5–4 мм и имеет твёрдость поверхности 45–55 HRC.

Закалка ТВЧ широко применяется для обработки зубьев с модулем не менее 5 мм. При меньших значениях реализовать поверхностную закалку технологически сложно, а при модуле менее 2,5 мм – невозможно. В этом случае используют цементацию, т.е. насыщение поверхностных слоёв зубчатых колёс из малоуглеродистых сталей (содержание углерода 0,12 – 0,3%) углеродом с последующей закалкой. Глубина цементированного слоя не превышает 2 мм, твёрдость поверхностей зубьев 50 – 62 HRC.

Зубья колёс второй группы нарезают до термической обработки, при которой происходит коробление зубьев и снижение точности колеса. Требуется последующая доводка изделия. Обычные методы нарезания зубьев для их доводки неприемлемы из-за высокой твёрдости поверхностей. Для исправления формы зубьев требуются дорогостоящие отделочные операции (шлифовка, хонингование или обкатка и др.) поэтому *колёса с зубьями высокой твёрдости применяют при крупносерийном и массовом производстве, а также в высоконагруженных и малогабаритных передачах.* При прочих равных условиях масса колёс второй группы в 3 – 4 раза меньше чем первой. В крупносерийном и массовом производстве заготовки колёс диаметром свыше 600 мм изготавливают литьём из сталей, а при малых диаметрах - штамповкой. В последнем случае используют стали с высокой пластичностью (12Х2Н4А, 20Х, 20Х2Н3А и др.).

Для колёс с неприрабатывающимися зубьями не требуется обеспечивать разность твёрдостей зубьев шестерни и колеса.

14.7. Конструкции цилиндрических колёс

Конструкция цилиндрических колёс зависит от их материала, размеров (преимущественно от диаметра), от вида производства (единичное, массовое, серийное и др.), от способа соединения с валом (насадные колёса; шестерни, изготовленные как одно целое с валом) и способа изготовления.

Стальные шестерни с диаметром вершин зубьев $d_a \leq 2d_{\text{вал}}$ ($d_{\text{вал}}$ – диаметр вала шестерни) чаще всего изготавливаются непосредственно на валу в виде вала-шестерни (рис. 14.11) из кованных заготовок или из проката (пруток, круг). Качество (жесткость, точность и т.д.) вала-шестерни оказывается выше, а стоимость изготовления ниже, чем вала и насадной шестерни (рис. 14.12), поэтому все шестерни редукто-

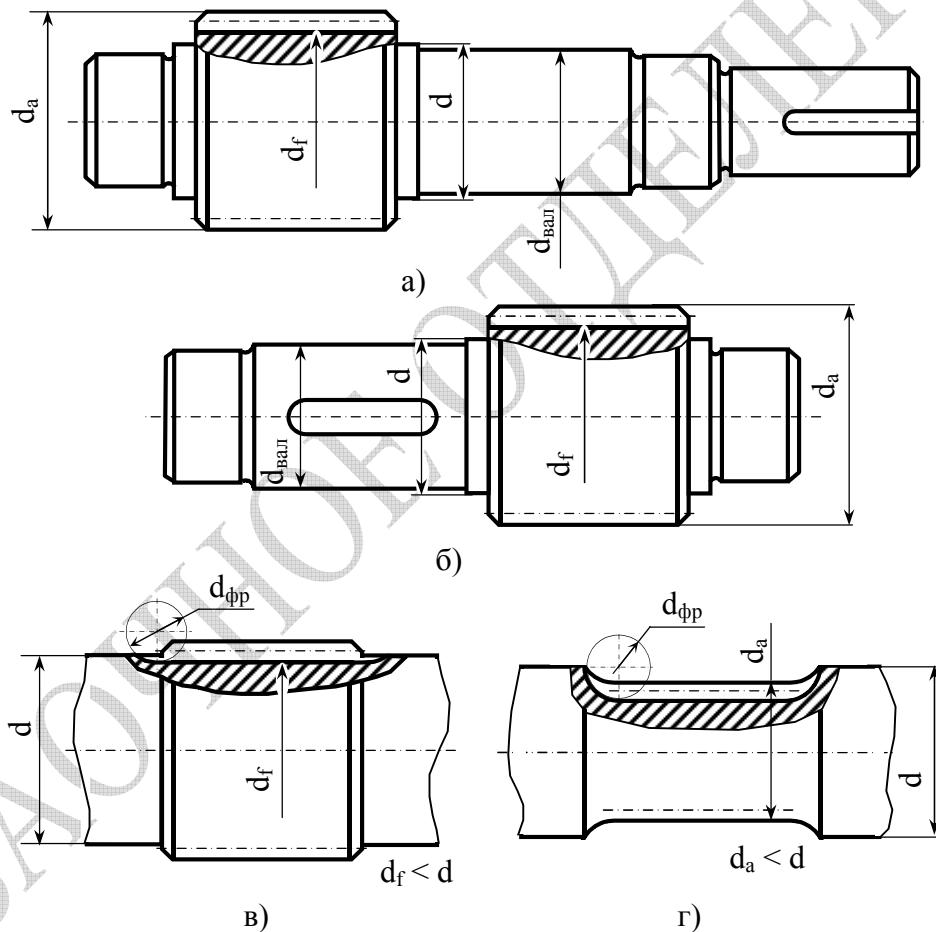


Рисунок 14.11

ров, обычно, выполняют за одно целое с валом. Насадные шестерни применяют в тех случаях, когда они должны быть подвижными вдоль оси вала, например, в коробках перемены передач.

На рисунке 14.11 показаны конструкции вала-шестерни быстроходной (рис. 14.11, а) и тихоходной (промежуточной) (рис. 14.11, б) передачи. Конструкция вала-шестерни с учётом особенностей нарезания зубьев и размеров режущего инструмента (диаметр фрезы $d_{\text{фр}}$)

зависит от соотношения диаметра вала и диаметров зубчатого колеса: диаметр участка вала d меньше диаметра впадин d_f (рис. 14.11, а, б); диаметр вала d больше диаметра впадин d_f (рис. 14.11, в); диаметр вала d больше диаметра вершин d_a (рис. 14.11, г).

Зубчатые колёса небольшого диаметра ($d_a \leq 200$ мм) выполняют сплошными дисками без ступицы (рис. 14.12, а) или со ступицей (рис. 14.12, б, в). Стальные зубчатые колёса такой конструкции изготавливают из проката ($d_a \leq 150$ мм), штампованных заготовок без углублений ($d_a < 80$ мм) или поковкой. Кованые колёса диаметром $d_a \leq 200$ мм могут иметь отверстия облегчения (рис. 14.12, г).

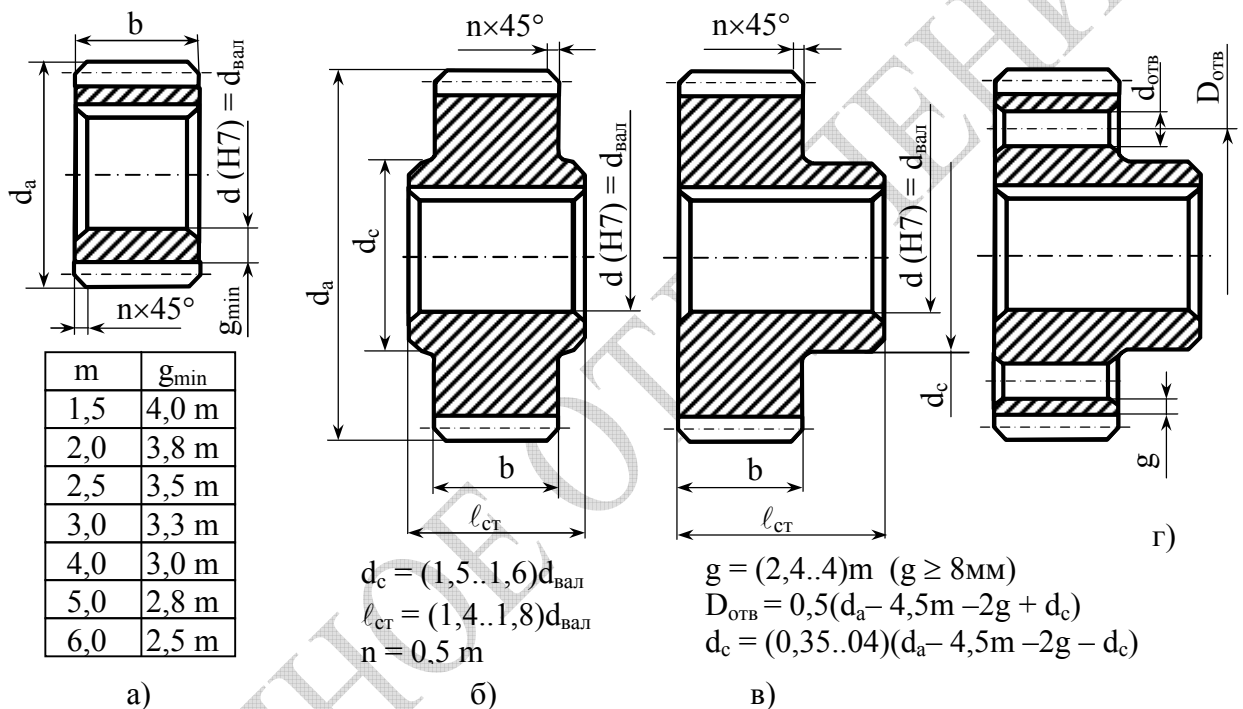


Рисунок 14.12

Колёса большего диаметра ($200 \text{ мм} < d_a \leq 500 \text{ мм}$) для уменьшения веса выполняют с отверстиями и углублениями (рис. 14.13), толщина диска значительно меньше ширины обода. В единичном и мелкосерийном производстве заготовки таких колёс получают из сортового проката (рис. 14.13, а) или поковок (рис. 14.13, б) в односторонних штампах, а в крупносерийном производстве поковкой в двусторонних штампах (штамповкой) (рис. 14.13, а, в). Для свободной выемки заготовок из штампа предусматриваются штамповочные уклоны $\gamma \geq 7^\circ$ и радиусы закруглений $R \geq 6$ мм (рис. 14.13, в), которые после обработки резанием могут быть частично или полностью удалены (см. вариант рис. 14.13, а). В зависимости от соотношения размеров колёс выемки в дисках могут быть выполнены

по одной дуге (рис. 14.13, г) или двум дугам (рис. 14.13, д) радиуса R, с толщиной диска C $\approx 0,5 b$.

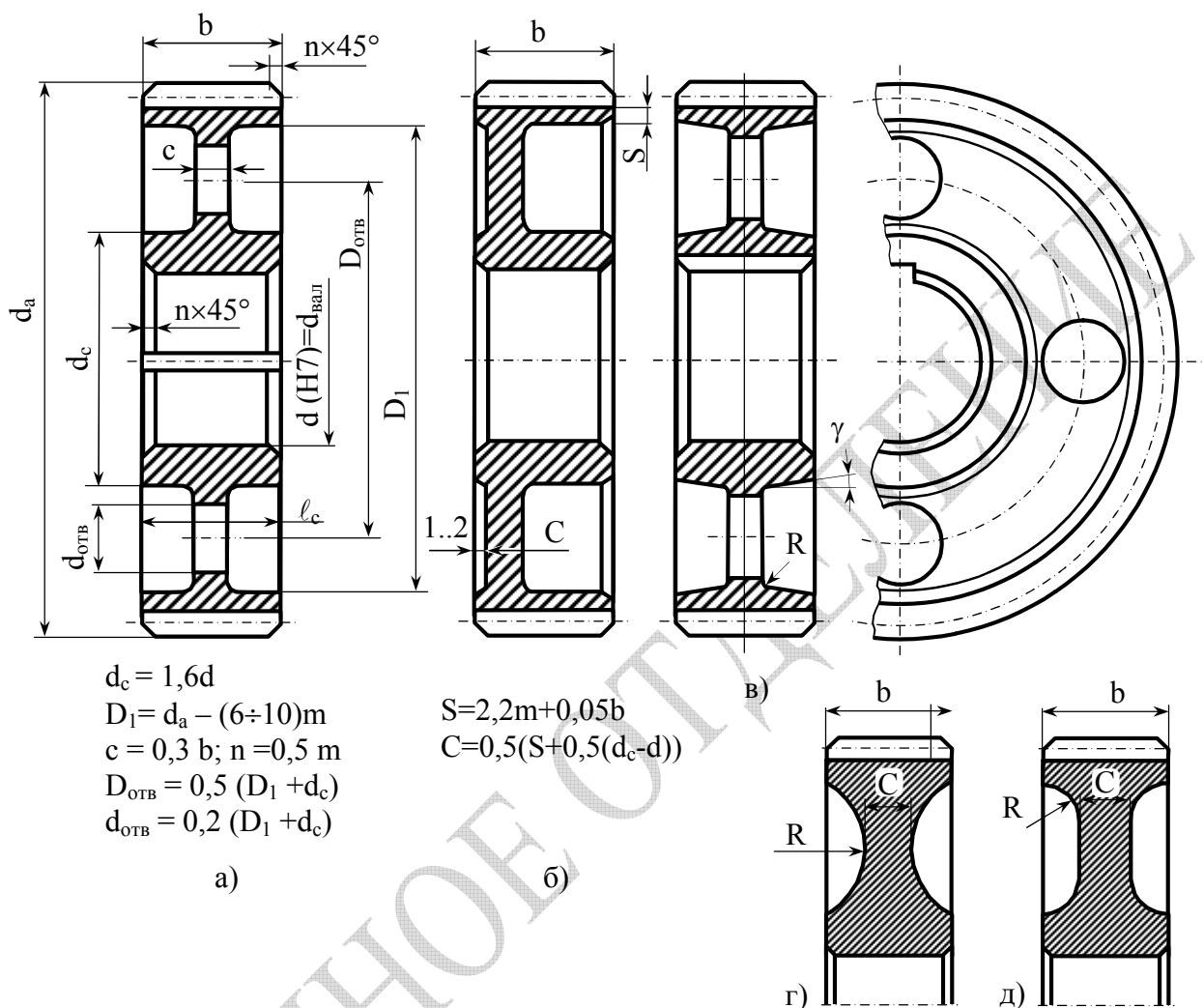


Рисунок 14.13

Колёса больших диаметров ($d_a > 500$ мм) в единичном и мелкосерийном производстве изготавливают сварными (рис. 14.14). Помимо зубчатого венца, ступицы и диска в конструкции таких колёс предусматривают и рёбра жесткости толщиной s .

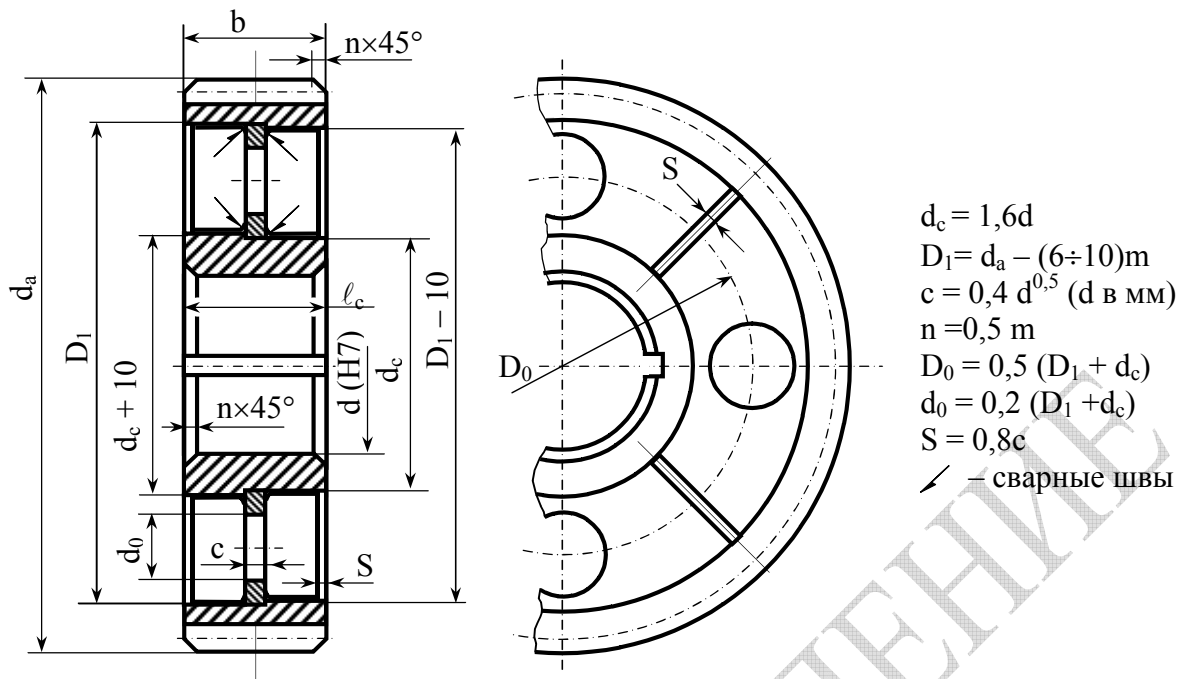


Рисунок 14.14

В крупносерийном и массовом производстве колёса больших диаметров изготавливают литьём с последующей механической обработкой с одним или двумя дисками облегчённой формы, со спицами крестобразного (рис. 14.15, а) или двутаврового сечения. В целях экономии высококачественной стали колёса больших диаметров могут делать бандажированными, т.е. составными (рис. 14.15, б). Стальной обод (зубчатый венец) из легированной стали насаживается с натягом на чугунный (реже стальной) диск до упора в кольцевую высту-

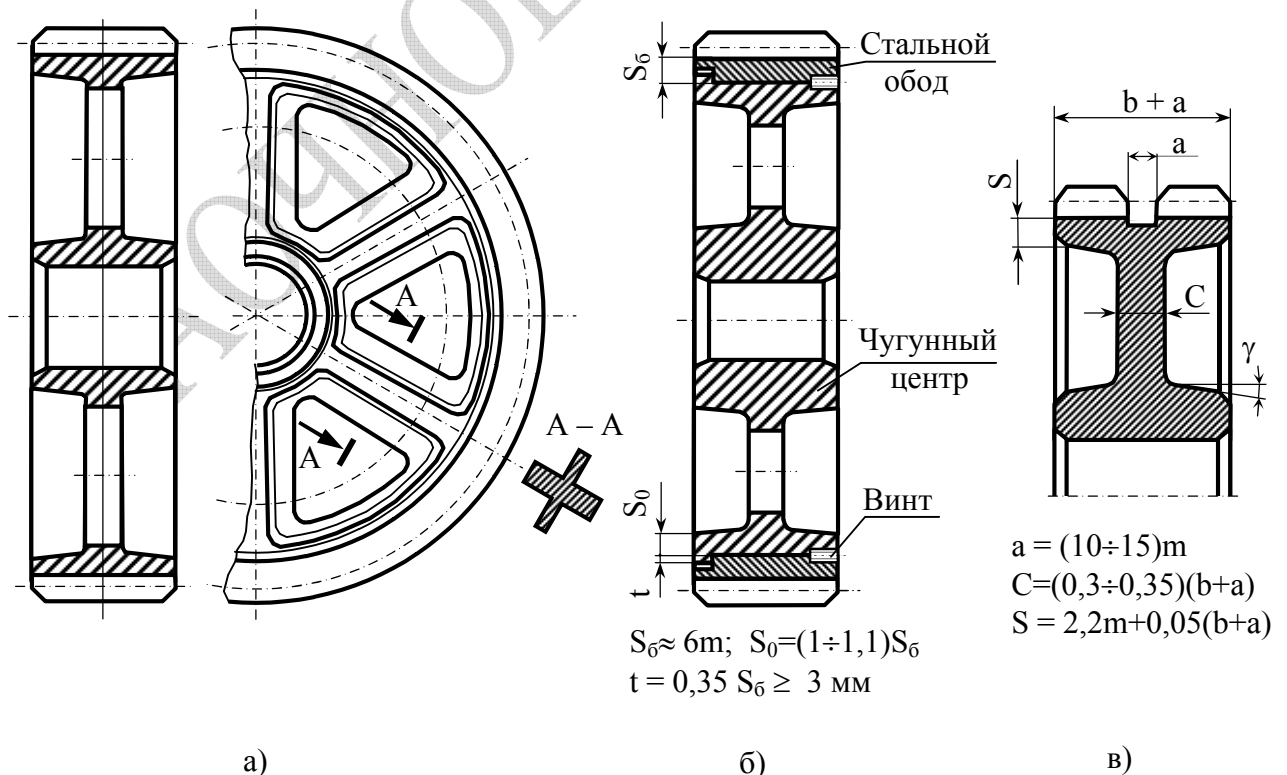


Рисунок 14.15

той t , который предотвращает осевые смещения обода. От проворачивания обода относительно центра колеса предохраняют винты, ввинчиваемые в резьбовые отверстия на стыке сопряжённых деталей; головки винтов срезают.

Шевронные зубчатые колёса (рис. 14.15, в) отличаются от других цилиндрических колёс увеличенной шириной. Наиболее часто шевронные колёса изготавливают с канавкой по середине. Канавка предназначена для выхода червячной фрезы, нарезающей зубья.

Конструктивное оформление зубчатых колёс из полимерных материалов зависит от передаваемой нагрузки, требуемой точности, серийности производства. В некоторых случаях, например, для смазки рабочих колёс редукторов используются вспомогательные колёса погружённые в масло; они могут изготавливаться целиком из полимерного материала (рис. 14.16, а). Полимерные колёса повышенной прочности и точности изготавливают армированными – металлическая ступица и пластмассовый зубчатый венец (рис. 14.16, б). Такие конструкции обеспечивают жесткость и точность соединения с валом. Зубчатые колёса таких конструкций получают литьём под давлением, литьевым прессованием, а также полимеризацией в форме.

При использовании слоистых пластиков заготовка венца изготавливается отдельно от ступицы и соединяется с ней резьбовыми деталями (рис. 14.16, в), нарезание зубьев производится после сборки заготовки. На рисунке 14.16, г показана конструкция составного зубчатого колеса из склеенных листов текстолита, надетых на металлическую ступицу и скреплённых дисками с помощью шпилек.

При конструировании зубчатых передач с применением полимерных материалов необходимо учитывать особенности физико-химических процессов в контакте полимер-металл – например, полиамиды в определённых условиях могут изнашивать стальное контртело.

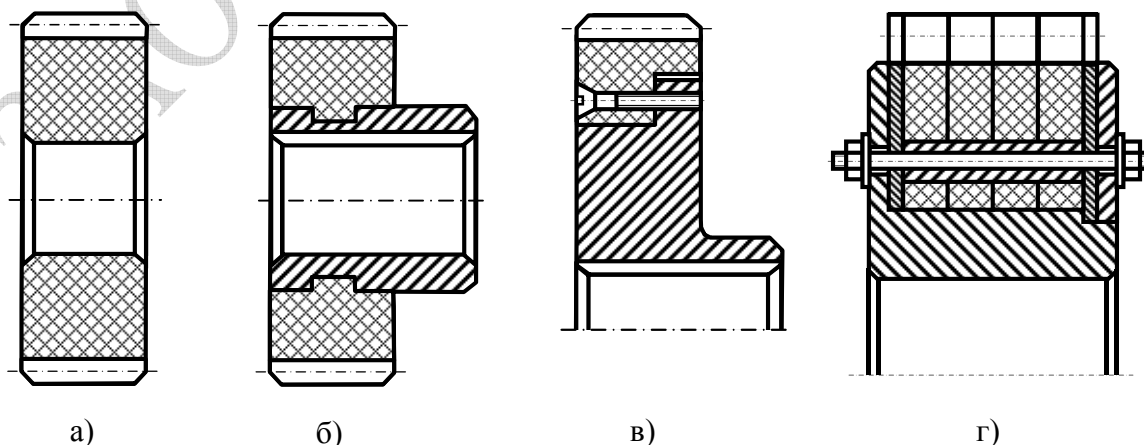


Рисунок 14.16

14.8. Точность зубчатых передач

Работоспособность и качество зубчатых передач зависит от точности изготовления зубчатых колёс. Основными погрешностями изготовления зубчатых колёс являются ошибки шага и формы профиля зубьев, ошибки в направлении зубьев.

Ошибки шага и профиля зубьев нарушают кинематическую точность работы передачи: при постоянном среднем передаточном отношении i , мгновенные значения i в процессе вращения колёс периодически изменяются. Эти отклонения отрицательно сказываются на качестве работы высокоточного оборудования и механических измерительных систем (станков, приборов и др.). В силовых передачах ошибки этого рода вызывают дополнительные динамические нагрузки, удары и шум.

Ошибки в направлении зубьев в сочетании с перекосом валов приводят к неравномерному распределению нагрузки по длине зуба. Стандарты устанавливают 12 степеней точности зубчатых передач (1-я наиболее точная, 12-я самая грубая). При определении параметров точности для цилиндрических колёс используется ГОСТ 1643 – 81, для конических колёс – ГОСТ 1758 – 81, для червяков и червячных колёс – ГОСТ 3675 – 81.

Для каждой степени точности стандарты регламентируют три независимые нормы допускаемых отклонений параметров, а также виды сопряжения зубчатых колёс в передаче.

Нормами точности являются:

1. Норма кинематической точности характеризуется кинематической погрешностью передачи (т.е. разность между действительным и расчётным углами поворота ведомого зубчатого колеса) и кинематической погрешностью зубчатого колеса (разность между действительным φ_d и расчётным φ_n углами поворота зубчатого колеса на его рабочей оси вращаемого измерительным зубчатым колесом). Кинематическая погрешность зубчатого колеса выражается длиной дуги $F_{кпк}$ на делительной окружности колеса (рис. 14.17). Кинематическую точность колеса определяет диапазон изменения $F_{кпк}$ в пределах одного оборота.

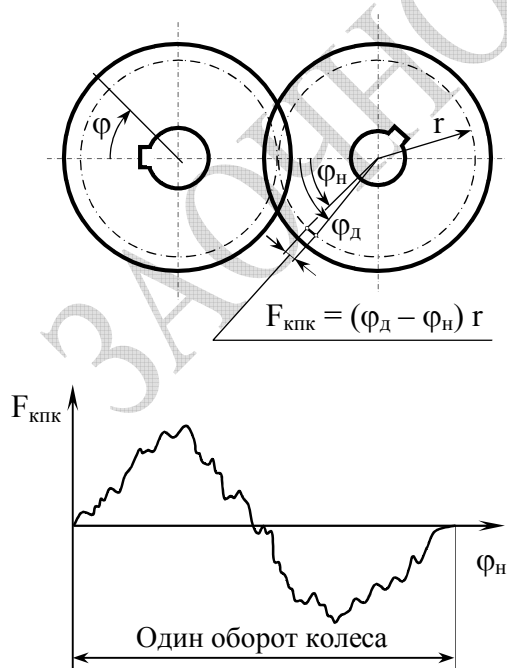


Рисунок 14.17

2. *Норма плавности работы* характеризуется циклически повторяющимися за один оборот колеса кинематическими погрешностями (рис. 14.17).

3. *Норма контакта зубьев* характеризуется суммарным пятном контакта. Его определяют как часть активной боковой поверхности зуба, на которой располагаются следы прилегания зуба парного колеса, покрытого красителем, после вращения колеса под нагрузкой. Суммарное пятно контакта (в %) оценивают по длине (по стандартам от 40 до 70%) и высоте (от 30 до 50%) зуба:

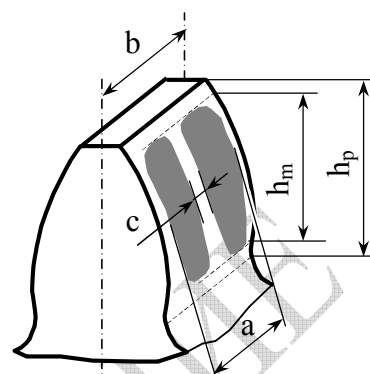


Рисунок 14.18

$$\frac{a - c}{b} 100\%; \quad \frac{h_m}{h_p} 100\%,$$

где c – длина разрыва пятна, превосходящая модуль; h_p – высота активной боковой поверхности зуба (рис. 14.18).

Виды сопряжений определяют боковой зазор между неработающими профилями зубьев сопряжённых колёс. *Нормальным боковым зазором* j_n называют наименьшее расстояние между боковыми поверхностями зубьев, измеряемое по общей нормали к эвольвентным поверхностям зубьев (рис. 14.19). Он определяет свободный поворот одного зубчатого колеса относительно другого неподвижного. Боковой зазор назначают с учётом обеспечения смазывания зубьев, компенсации погрешностей изготовления, монтажа и температурных деформаций элементов передачи.

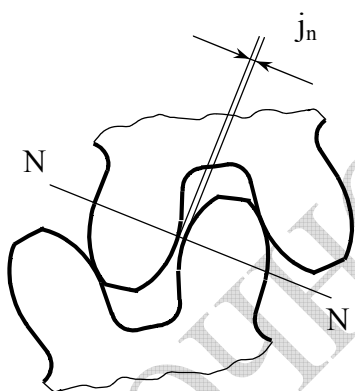


Рисунок 14.19

Стандартом предусмотрено шесть видов сопряжения: Н – нулевой зазор; Е – малый зазор; С и D – уменьшенный зазор; В – нормальный зазор; А – увеличенный зазор.

Вид сопряжения выбирают независимо от степени точности передачи по расчётному значению бокового зазора (в мкм)

$$j_p = j_T - j_c.$$

Боковой зазор j_T , необходимый для компенсации температурных деформаций деталей, зависит от межосевого расстояния передачи a_w , коэффициентов температурного расширения материалов зубчатых

колёс α_1 и корпусных деталей α_2 , предельных температур колёс t_1 и корпусных деталей t_2 :

$$j_T = 0,684 a_w [\alpha_1(t_1 - 20^\circ) - \alpha_2(t_2 - 20^\circ)].$$

Боковой зазор j_c (в мкм), необходимый для размещения слоя смазочного материала, находят приближённо с учётом модуля m (в мм):

$$j_c = (10 \div 30)m;$$

при этом для тихоходных передач рекомендуется принимать $j_c \approx 10m$, а для высокоскоростных – $j_c \approx 30m$.

Если для расчёта j_p данных недостаточно, то для зубчатых передач с $m \geq 1$ мм применяют вид сопряжения В.

По величине расчётного бокового зазора j_p определяют вид сопряжения по условию

$$j_p \geq j_{n \min},$$

где $j_{n \min}$ – гарантированный боковой зазор, указанный в стандарте (номера соответствующих ГОСТ приведены в начале данного раздела).

Степень точности выбирают в зависимости от назначения и условий работы передачи. В машиностроении наибольшее распространение получили 6, 7 и 8 степени точности (табл. 14.6). Часто степени точности по нормам контакта и нормам плавности совпадают, а в силовых механизмах нормы контакта могут быть установлены на одну степень точнее чем, чем нормы плавности.

В таблице параметров на чертеже зубчатого колеса после указания номера стандарта, по которому определяется точность колеса, последовательно приводятся три цифры: первая – степень точности по нормам кинематической точности, вторая – степень точности по нормам плавности работы, третья – степень по нормам контакта зубьев; после трёх цифр указывается буква – вид сопряжения.

Например,

ГОСТ 1643–81 8 – 7 – 6 – В.

Если степени точности по всем трём нормам одинаковы (8), то точность передачи обозначают одной цифрой и буквой указывают вид сопряжения:

ГОСТ 1643–81 8 – В.

Таблица 14.6 Рекомендации по назначению степеней точности зубчатых передач

Типы зубчатых механизмов	Окружная скорость, м/с (не более)		Степень точности
	прямозубая	косозубая	
Механизмы с плавной работой и высоким КПД; передачи высокоточных приборов контроля и управления	15	25	6 (высокоточная)
Механизмы подачи металлорежущих станков; передачи при повышенных скоростях и умеренных нагрузках или при повышенных нагрузках и умеренных скоростях; редукторы авиа- и автостроения	10	17	7 (точная)
Передачи общего машиностроения, не требующие особой точности; механизмы грузоподъемных устройств и станков	6	10	8 (средней точности)
Тихоходные передачи с пониженными требованиями; механизмы с ручным приводом	2	3,5	9 (пониженной точности)

14.9. Виды повреждения зубьев и критерии работоспособности зубчатых передач

При передаче движения в зацеплении зубчатых колёс помимо силы нормального давления F_n действует сила трения $F_{тр} = f F_n$ (f – коэффициент трения скольжения.), вызванная относительным скольжением профилей зубьев. Под действием сил нормального давления, распределённых по линии контакта (рис. 14.20, а), и сил трения зуб колеса испытывает сложное напряжённое состояние. Однако, решающее влияние на его работоспособность оказывают два фактора: *контактные напряжения σ_H и напряжения изгиба σ_F* , которые дейст-

вуют на зуб только во время нахождения его в зацеплении и являются, по этой причине, *повторно-переменными*.

Переменные напряжения изгиба вызывают появление усталостных трещин у растянутых слоёв основания зуба, что со временем приводит к поломке зуба (рис. 14.20, а, б). Основной мерой предупреждения излома зубьев является увеличение модуля.

Переменные контактные напряжения и силы трения приводят к усталостному изнашиванию активных поверхностей зубьев, причём, как следует из установленной в теории механизмов и машин закономерности, износ ножек зубьев выше, чем головок зубьев (рис. 14.20, в). На ножках зуба в первую очередь начинается отслаивание и выкрашивание частиц материала.

В открытых передачах и в передачах с некачественной смазкой усталостное изнашивание опережается абразивным износом активных поверхностей зубьев (рис. 14.20, г).

В тяжело нагруженных и высокоскоростных передачах в зоне контакта зубьев из-за трения температура повышенная, что может привести к разрыву масляной плёнки и последующему заеданию зубьев (рис. 14.20, д). При этом частицы материала отрываются от рабочей поверхности зубьев одного из колёс и привариваются к рабочей поверхности зубьев другого зубчатого колеса с образованием наростов, которые задирают сопряжённые зубья, оставляя на них глубокие борозды. Подобные разрушения происходят также при отсутствии в передаче смазки (например, при утечке масла из картера редуктора). Заедание зубьев может привести к полной остановке передачи.

Общими мерами предупреждения разрушения активных поверхностей зубьев являются повышение твёрдости, повышение точности (особенно по норме контакта), применение смазочных материалов с повышенной вязкостью.

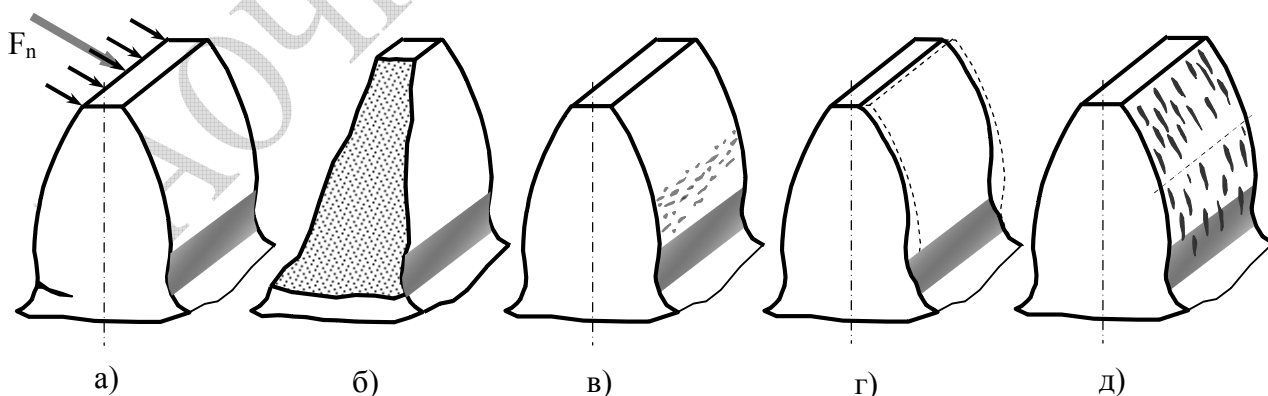


Рисунок 14.20

Таким образом, *критериями работоспособности зубчатых передач является износостойкость активных поверхностей зубьев и их изгибная прочность. Расчёт на контактную прочность активных*

поверхностей зубьев является основным для закрытых (работающих в условиях смазки) передач. Расчёт зубьев открытых передач обычно ограничивается расчётом на изгиб.

Расчёты на прочность металлических цилиндрических эвольвентных средне- и крупномодульных зубчатых передач (т.е. передач с модулем $m > 1$ мм) внешнего зацепления регламентированы (ГОСТ 21354-87 «Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные. Расчёт на прочность»). Расчётные зависимости содержат значительное количество различных коэффициентов и параметров, учитывающих влияние конструктивных особенностей передач, механических свойств материалов, точности передач, условий их работы на работоспособность зубчатых передач, и имеют вполне определённые буквенные обозначения (см. таблицу 14.7).

Таблица 14.7 – Основные буквенные обозначения в формулах для расчета зубчатых передач по ГОСТ 21354 – 75

Коэффициенты	
K	коэффициенты, учитывающие влияние отдельных факторов на расчётную нагрузку
Z	специфические коэффициенты для расчётов на контактную прочность
Y	специфические коэффициенты для расчётов на изгиб
S	коэффициент запаса прочности
Основные индексы	
H	Для величин, учитываемых при расчёте на контактную прочность
F	Для величин, учитываемых при расчёте на изгиб

Приведённая в данном пособии методика расчёта эвольвентных зубчатых передач в основном соответствует стандарту, но содержит некоторые упрощения, не оказывающие существенного влияния на результаты расчётов, выполняемых для учебных целей.

14.10. Особенности распределение нагрузки в зубчатом зацеплении

Для работы зубчатой передачи наиболее характерны такие явления, как:

- *неравномерность распределения нагрузки между зубьями;*
- *неравномерность распределения нагрузки по длине контактных линий;*
- *возникновение внутренних динамических нагрузок при вхождении зубьев в зацепление и т.д.*

При расчёте передач эти явления учитываются при помощи соответствующих коэффициентов.

Распределение нагрузки между зубьями (коэффициент K_α)

В косозубой передаче зубья входят в зацепление не по всей длине, а постепенно. В зацеплении при этом одновременно находится несколько пар зубьев, что приводит к уменьшению нагрузки на один зуб. Нагрузка между зубьями пропорциональна длинам контактных линий 1, 2, 3 (рис. 14.21). При движении зуба линия контакта перемещается от линии 1 к линии 3. При этом опасным может оказаться первое положение, при котором у зуба отламывается угол (рис. 14.21).

Общая длина контактных линий l_Σ зависит от ширины b венца колеса, угла β наклона линии зуба и коэффициента перекрытия ε_α . Значение l_Σ не остаётся постоянным в различные фазы зацепления, т.к. в контакте может находиться как одна, так и несколько пар контактирующих зубьев. Поэтому в расчётах используют минимальное значение длины контактных линий; для однопарного зацепления $l_\Sigma = b$. В случае многопарного зацепления, когда в контакте одновременно находится одна, две или три пары зубьев, что характеризуется коэффициентом торцового перекрытия ε_α (характеристика непрерывности работы передачи), суммарная длина контактных линий равна

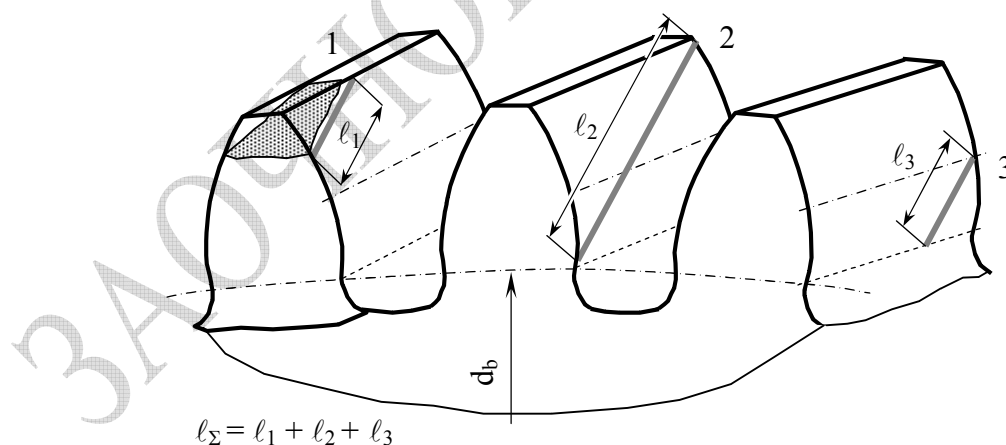


Рисунок 14.21

$$l_\Sigma = \varepsilon_\alpha b / \cos\beta. \quad (14.22)$$

Приближённо коэффициент торцового перекрытия

$$\varepsilon_\alpha = (1,88 - 3,2(1/z_1 + 1/z_2))\cos\beta. \quad (14.23)$$

При приближённом расчёте прямозубой передачи можно принимать $\varepsilon_\alpha = 1,6$.

При коэффициенте торцового перекрытия ε_α равном целому числу суммарная длина контактных линий l_Σ при движении остаётся постоянной. В противном случае величина l_Σ периодически будет изменяться при движении. Минимальное значение l_Σ вычисляют по формуле

$$l_{\Sigma\min} = K_\varepsilon \varepsilon_\alpha b / \cos\beta = b / K_\alpha \cos\beta, \quad (14.24)$$

где K_ε - коэффициент, учитывающий непостоянство суммарной длины контактных линий (можно принимать $K_\varepsilon = 0,95$; для прямозубых передач при однопарном зацеплении $l_\Sigma = b$, т.е. $K_\varepsilon \varepsilon_\alpha = 1$); $K_\alpha = (K_\varepsilon \varepsilon_\alpha)^{-1}$ - коэффициент, учитывающий одновременное участие в передаче нагрузки нескольких пар зубьев.

Для косозубых передач значения коэффициента $K_\alpha = (K_\varepsilon \varepsilon_\alpha)^{-1}$, учитывающего одновременное участие в передаче нагрузки нескольких пар зубьев принимают по рис. 14.22 в зависимости от окружной скорости V передачи ($V = \omega d/2$ или $V = (2\pi a_w n_1)/((u+1)60)$, здесь n_1 - частота вращения шестерни, об/мин) и степени точности (кривые с цифрами). Для прямозубых передач $K_\alpha = 1$.

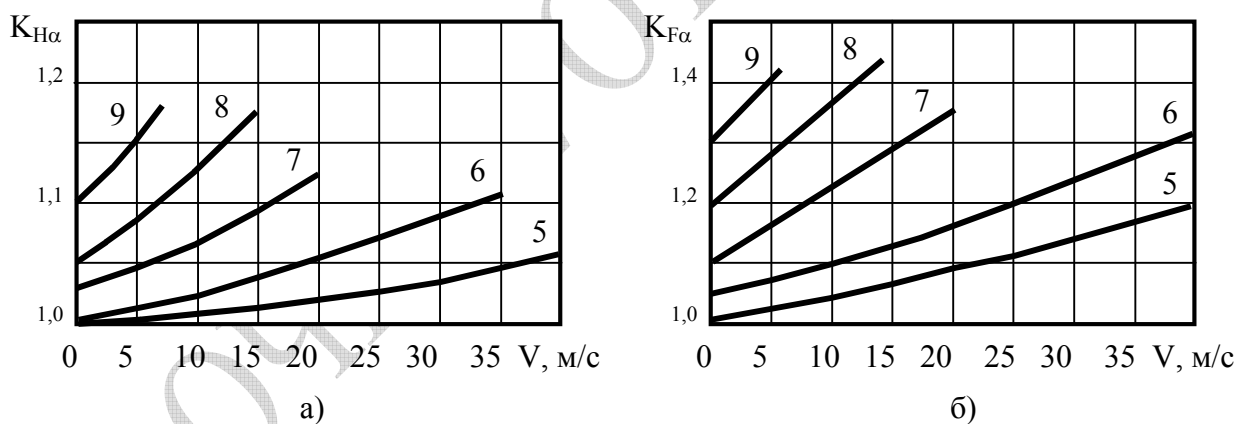


Рисунок 14.22

Неравномерность распределения нагрузки по ширине зуба (коэффициент K_β)

Нагрузка распределяется по длине зуба неравномерно, что связано с несколькими причинами:

- непараллельность и перекос осей валов за счёт неточностей изготовления корпусных деталей и неточности сборки;
- погрешностей при изготовлении зубчатых колёс и валов;
- деформации валов (изгиб (рис. 14.23, а, б, в) и кручение) под нагрузкой.

При симметричном расположении колёс относительно опор вала (рис. 14.23, а) перекося не возникает, а некоторое изменение межосевого расстояния для эвольвентной передачи, как отмечалось выше, значения не имеет (это самый благоприятный случай). При несимметричном (рис. 14.23, б) и консольном расположении колёс (особенно неблагоприятный случай) (рис. 14.23, в) их оси перекашиваются, что приводит к нарушению правильного касания зубьев. Однако из-за деформации диска колеса и самих зубьев соприкосновение сохраняется, как правило, по всей линии контакта, но *нагрузка при этом перераспределяется неравномерно по линии контакта*. Характер распределения нагрузки по линии контакта зависит не только от положения колеса относительно вала, но также от конструкции колеса (прямозубое (рис. 14.23, г), косозубое (рис. 14.23, д), сплошное, штампованное на ободе и др.), от конструкции передачи, от места приложения крутящего момента. Неравномерность распределения нагрузки возрастает с увеличением ширины венца b , поэтому её ограничивают. Неравномерность распределения нагрузки у прирабатывающихся зубьев (твёрдость не менее 350 НВ) с течением времени уменьшается.

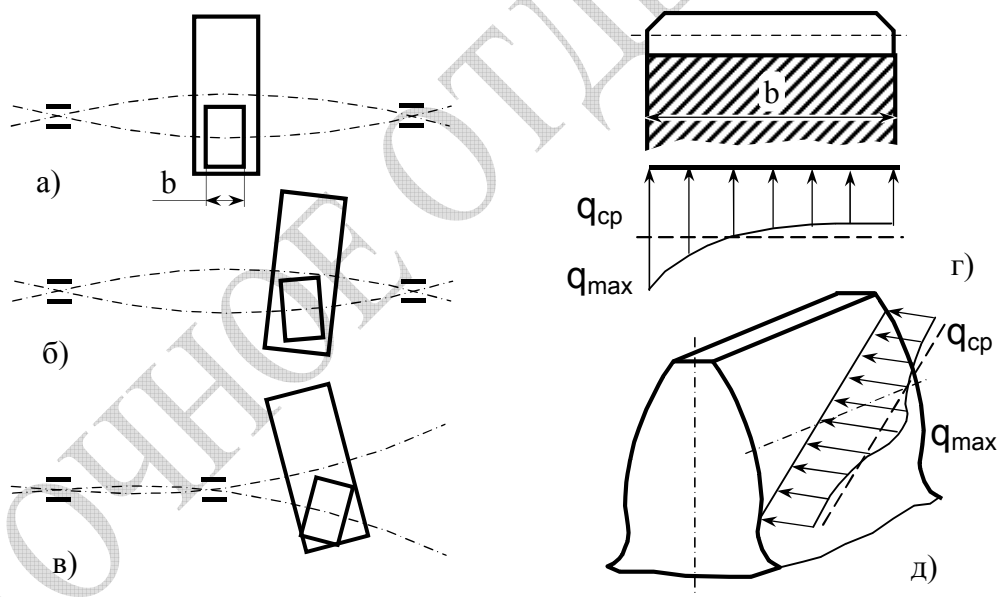
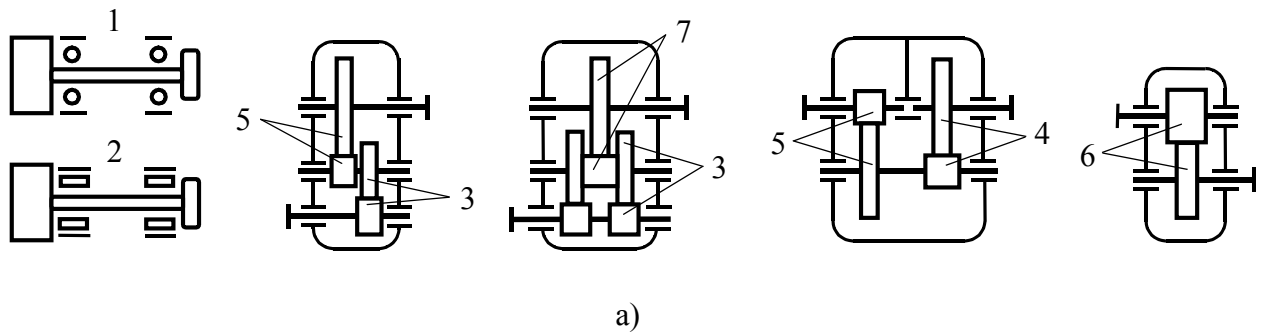
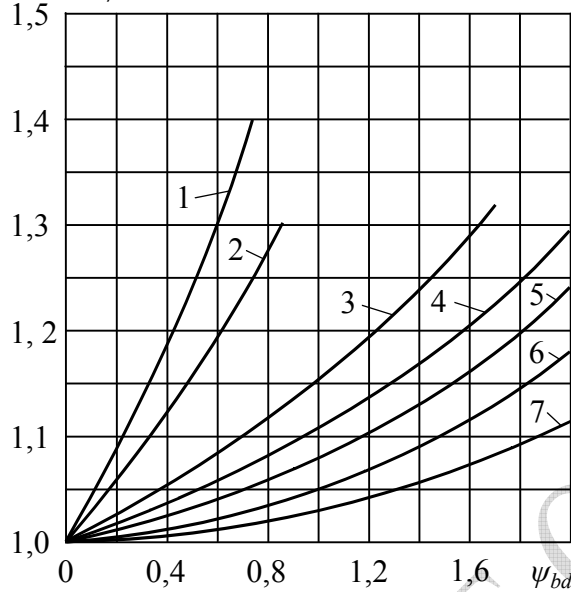


Рисунок 14.23

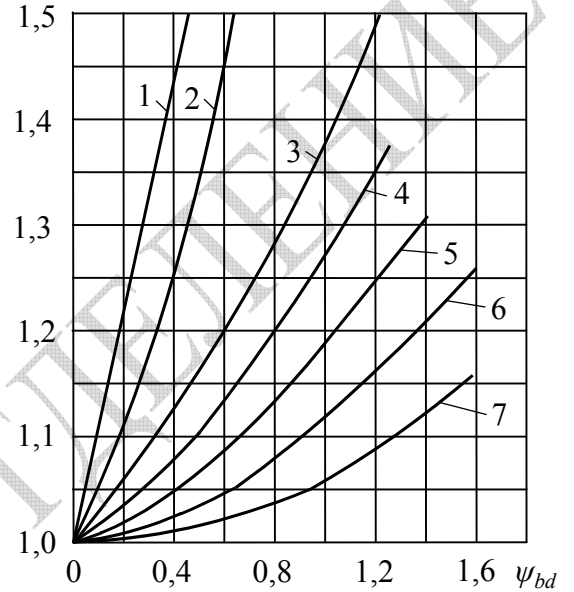
Концентрация нагрузки оценивается отношением q_{\max} / q_{cp} . Для определения ориентировочных значений K_{β} , *коэффициента концентрации нагрузки, учитывающего неравномерность распределения нагрузки по длине зуба* пользуются графиками (рис. 14.24). На этих графиках $K_{H\beta}$ – коэффициент неравномерности при расчёте на контактную выносливость; $K_{F\beta}$ – коэффициент неравномерности при расчёте изгиб; ψ_{bd} – коэффициент ширины венца колеса по диаметру делительной окружности шестерни.



$K_{H\beta}$ при $H_1 \leq 350 \text{ НВ}$ или $H_2 \leq 350 \text{ НВ}$

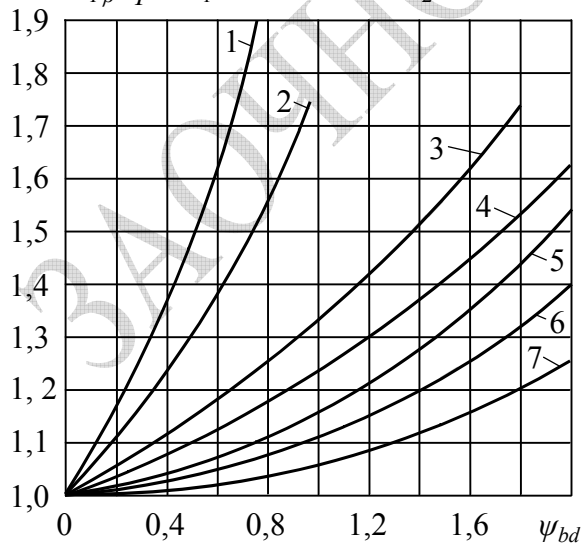


$K_{H\beta}$ при $H_1 > 350 \text{ НВ}$ и $H_2 > 350 \text{ НВ}$

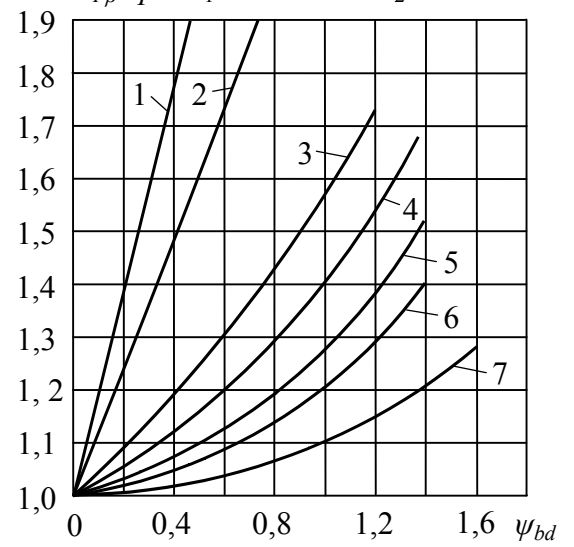


б)

$K_{F\beta}$ при $H_1 \leq 350 \text{ НВ}$ или $H_2 \leq 350 \text{ НВ}$



$K_{F\beta}$ при $H_1 > 350 \text{ НВ}$ и $H_2 > 350 \text{ НВ}$



в)

Рисунок 14.24

Каждая кривая графиков соответствует передачам, указанным на схемах; кривые 1 и 2 для случаев консольного расположения колёс на валах, опирающихся соответственно на шариковые и роликовые подшипники качения.

Графики приведены для наиболее распространённого на практике режима работы с переменной нагрузкой и окружной скоростью $v < 15$ м/с. При постоянной нагрузке и твёрдости хотя бы одного из колёс меньше 350 НВ и скорости $v < 15$ м/с происходит полная приработка зубьев; при этих условиях принимают $K_\beta = 1$.

Динамические усилия на зубьях (коэффициент K_v)

Деформации зубьев (с изменением шага), а также погрешности в шаге и профиле зубьев вызывают в моменты входа или выхода из зацепления (процесс, так называемого, пересопряжения) их колебания и появление дополнительных динамических нагрузок. По этой причине удельная нагрузка w (нагрузка, приходящаяся на единицу длины контакта) оказывается больше расчётной статической нагрузки $w_{ст}$ на некоторую динамическую составляющую w_v . Динамическую составляющую w_v ещё называют «силой удара». Таким образом,

$$w = w_{ст} + w_v .$$

Это соотношение принято записывать в виде

$$w = w_{ст} K_v ,$$

где $K_v = 1 + (w_v / w_{ст})$ – коэффициент динамичности (динамической нагрузки).

Величина K_v зависит от степени точности изготовления колёс, вида передачи (прямозубая или косозубая), твёрдости активных поверхностей зубьев и окружной скорости колёс. Для статически нагруженных зубьев $K_v = 1$ и $w = w_{ст}$. Значения K_v для цилиндрических передач, работающих с окружными скоростями до 10 м/с, приведены в таблице 14.8 и 14.9, причем в числителе даны значения для прямозубых, а в знаменателе для косозубых колёс.

Основными методами снижения динамических нагрузок в передачах являются:

- повышение точности изготовления и сборки;
- увеличение коэффициента перекрытия ε и, как следствие реализация удара на нескольких парах зубьев;
- снижение масс вращающихся колёс.

Таблица 14.8 Значения коэффициентов динамической нагрузки $K_{H\beta}$

Степень точности	Твёрдость	Окружная скорость v , м/с					
		1	2	4	6	8	10
6-я	а	1,03/1,01	1,06/1,02	1,12/1,03	1,17/1,04	1,23/1,06	1,28/1,07
	б	1,02/1,00	1,04/1,00	1,07/1,02	1,1/1,02	1,15/1,03	1,18/1,04
7-я	а	1,04/1,02	1,07/1,03	1,14/1,05	1,21/1,06	1,29/1,07	1,36/1,08
	б	1,03/1,00	1,05/1,01	1,09/1,02	1,14/1,03	1,19/1,03	1,24/1,04
8-я	а	1,04/1,01	1,08/1,02	1,16/1,04	1,24/1,06	1,32/1,07	1,40/1,08
	б	1,03/1,01	1,06/1,01	1,1/1,02	1,16/1,03	1,22/1,04	1,26/1,05
9-я	а	1,05/1,01	1,1/1,03	1,2/1,05	1,3/1,07	1,4/1,09	1,5/1,12
	б	1,04/1,01	1,07/1,01	1,13/1,02	1,2/1,03	1,26/1,04	1,32/1,05

Примечания: 1. В числителе – значения для прямозубых колёс, а в знаменателе – для косозубых. 2. Твёрдость поверхности зубьев «а» - не более 350 НВ, «б» - больше 350 НВ

Таблица 14.9 Значения коэффициентов динамической нагрузки K_{Fv}

Степень точности	Твёрдость	Окружная скорость v , м/с					
		1	2	4	6	8	10
6-я	а	1,06/1,02	1,13/1,05	1,26/1,10	1,40/1,15	1,58/1,20	1,67/1,25
	б	1,02/1,01	1,04/1,02	1,08/1,03	1,11/1,04	1,14/1,06	1,17/1,07
7-я	а	1,08/1,03	1,16/1,06	1,33/1,11	1,50/1,16	1,67/1,22	1,80/1,27
	б	1,03/1,01	1,05/1,02	1,09/1,03	1,13/1,05	1,17/1,07	1,22/1,08
8-я	а	1,10/1,03	1,20/1,06	1,38/1,11	1,58/1,17	1,78/1,23	1,96/1,29
	б	1,04/1,01	1,06/1,02	1,12/1,03	1,16/1,05	1,21/1,07	1,26/1,08
9-я	а	1,13/1,04	1,28/1,07	1,50/1,14	1,77/1,21	1,98/1,28	2,25/1,35
	б	1,04/1,01	1,07/1,02	1,14/1,04	1,21/1,06	1,27/1,08	1,34/1,09

Примечания: 1. В числителе – значения для прямозубых колёс, а в знаменателе – для косозубых. 2. Твёрдость поверхности зубьев «а» - не более 350 НВ, «б» - больше 350 НВ

14.11. Расчётная нагрузка

Зубья зубчатых передач рассчитываются по контактным напряжениям и по напряжениям изгиба.

При расчёте зубьев *на контактную усталость* следует учитывать тот факт, что зацепление зубьев представляет собой высшую кинематическую пару, в которой контакт осуществляется по линии. Поэтому в качестве нагрузки, действующей в зацеплении принимают не сосредоточенную силу F_n , направленную по нормали к поверхности зуба (рис. 14.5, 14.20, а), а нагрузку, распределённую по общей длине линий контакта зубьев (рис. 14.21)

$$q = \frac{F_n}{l_\Sigma}, \quad (14.25)$$

где q – удельная номинальная нагрузка в зацеплении; l_{Σ} – общая длина контактных линий.

Учитывая связь между нормальной силой F_n в зацеплении и её окружной составляющей F_t (14.9), выражение (14.25) представляют в виде

$$q = \frac{F_n}{l_{\Sigma}} = \frac{F_t}{l_{\Sigma} \cos \alpha_w \cos \beta}, \quad (14.26)$$

где α_w – угол зацепления.

По формуле (14.26) можно рассчитать распределённую нагрузку только для идеального случая зацепления. В действительности с учётом ранее рассмотренных особенностей, таких, как:

- *неравномерность распределения нагрузки между зубьями по минимальной суммарной длине контактных линий $l_{\Sigma} = l_{\Sigma \min}$ (14.24);*

- *неравномерность распределения нагрузки по ширине зуба; внутренних динамических нагрузок при вхождении зубьев в зацепление номинальную удельную нагрузку (14.26) при расчётах на контактную усталость увеличивают в K_H раз, принимая, таким образом, в качестве расчётной максимальную удельную нагрузку q_p*

$$q_p = \frac{F_t}{b \cos \alpha_w} K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv} = q K_H, \quad (14.27)$$

$$K_H = K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv}, \quad (14.28)$$

где K_H – коэффициент нагрузки в расчётах на контактную усталость; $K_{H\alpha}$ – коэффициент, учитывающий одновременное участие в передаче нагрузки нескольких пар зубьев (коэффициент распределения нагрузки между зубьями), см. выше;

$K_{H\beta}$ – коэффициент неравномерности распределения нагрузки по ширине зуба (коэффициент концентрации нагрузки), см. выше;

K_{Hv} – коэффициент динамичности нагрузки, см. выше.

Расчётную распределённую нагрузку q_p удобно выражать через расчётную удельную окружную нагрузку w_{Ht} :

$$q_p = \frac{F_t}{b \cos \alpha_w} K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv} = \frac{w_{Ht}}{\cos \alpha_w}, \quad (14.29)$$

где

$$w_{Ht} = \frac{F_t}{b} K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv} = \frac{2T}{bd} K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv}. \quad (14.30)$$

В расчётах зубьев на изгиб по аналогии с расчётом на контактную усталость коэффициент нагрузки определяется по формуле

$$K_F = K_{F\alpha} K_{F\beta} K_{Fv}, \quad (14.31)$$

где $K_{F\alpha}$ – коэффициент, учитывающий одновременное участие в передаче нагрузки нескольких пар зубьев (коэффициент распределения нагрузки между зубьями), см. выше;

$K_{F\beta}$ – коэффициент неравномерности распределения нагрузки по ширине зуба (коэффициент концентрации нагрузки), см. выше;

K_{Fv} – коэффициент динамичности нагрузки.

14.12. Расчёт цилиндрических зубчатых передач на контактную усталость активных поверхностей зубьев

Этот расчёт является основным для закрытых (работающих в условиях обильного смазывания) передач. Расчёт зубьев на контактную прочность выполняют для фазы зацепления в полюсе (рис. 14.25), так как положение полюса заранее известно. Условие прочности при расчёте по допускаемым напряжениям имеет вид

$$\sigma_H \leq [\sigma_H], \quad (14.32)$$

где σ_H – максимальное контактное напряжение на активной поверхности зубьев; $[\sigma_H]$ – допускаемое контактное напряжение.

Допускаемое контактное напряжение $[\sigma_H]$ вычисляется по специальной методике (см. раздел 14.14).

Контактные напряжения σ_H одинаковы для обоих колёс, поэтому расчёт выполняют для того колеса, у которого допускаемое напряжение $[\sigma_H]$ меньше.

Для определения максимальных контактных напряжений при расчёте зубчатых передач на контактную усталость пользуются формулой Герца

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{q_p E_{пр}}{2\pi(1-\mu^2)\rho_{пр}}}, \quad (14.33)$$

где q_p – расчётная распределённая нагрузка (14.29); $E_{пр} = 2E_1E_2/(E_1+E_2)$ – приведённый модуль упругости материалов зубчатых колёс; μ – коэффициент Пуассона; $\rho_{пр}$ – приведённый радиус кривизны зубьев (эвольвентного профиля).

Из свойств эвольвенты известно, что центры её кривизны лежат на основной окружности (см. рис. 14.3), следовательно, для пары зубьев (рис. 14.25) радиусы кривизны зубьев в точке касания прямозубой передачи будут

$$\rho_1 = 0,5 d_{w1} \sin(\alpha_w)$$

$$\rho_2 = 0,5 d_{w2} \sin(\alpha_w).$$

Радиусы кривизны эвольвент для косозубого зацепления в точке контакта определяются по размерам эквивалентных колёс (рис. 14.10)

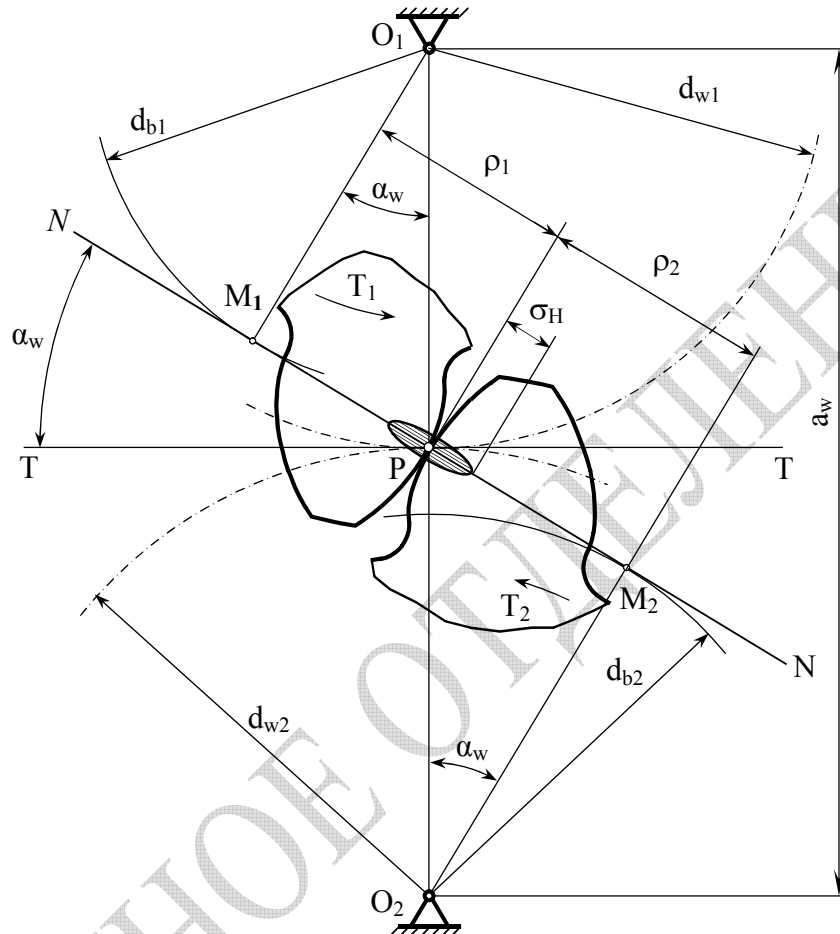


Рисунок 3.25

(принимается, что в (14.20) $d \approx d_w$)

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= 0,5d_{v1} \sin(\alpha_w) = (0,5d_{w1} \sin(\alpha_w)) / \cos^2 \beta \\ \rho_2 &= 0,5d_{v2} \sin(\alpha_w) = (0,5d_{w2} \sin(\alpha_w)) / \cos^2 \beta \end{aligned} \right\} \quad (14.34)$$

Учитывая, соотношение между диаметрами начальных окружностей колеса и шестерни: $d_{w2} = d_{w1}u$, где u – передаточное число

$$\frac{1}{\rho_{пр}} = \frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2} = \frac{2 \cos^2 \beta}{d_{w1} \sin \alpha_w} \pm \frac{2 \cos^2 \beta}{d_{w1} u \sin \alpha_w} = \frac{2(u \pm 1) \cos^2 \beta}{d_{w1} u \sin \alpha_w}, \quad (14.35)$$

здесь знак «+» для наружного, а «-» для внутреннего зацепления.

Формула для контактных напряжений с учётом выражения (14.29) для расчётной распределённой нагрузки q_p и приведённой кривизны (кривизна – величина обратная радиусу кривизны ρ) (14.35) приобретает вид

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{w_{Ht} 2(u \pm 1) \cos^2 \beta}{d_{w1} u \sin \alpha_w \cos \alpha_w} \cdot \frac{E_{np}}{2\pi(1-\mu^2)}},$$

или

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{w_{Ht} 2(u \pm 1) \cos^2 \beta}{d_{w1} u \sin 2\alpha_w} \cdot \frac{E_{np}}{2\pi(1-\mu^2)}}. \quad (14.36)$$

Полученное для контактных напряжений выражение после введения нескольких коэффициентов представляют в следующем виде:

$$\sigma_H = Z_H Z_M Z_\varepsilon \sqrt{\frac{w_{Ht}}{d_{w1}} \cdot \frac{(u \pm 1)}{u}} = Z_H Z_M Z_\varepsilon \sqrt{\frac{F_t K_H}{b d_{w1}} \cdot \frac{(u \pm 1)}{u}}, \quad (14.37)$$

где $Z_H = \sqrt{(2 \cos^2 \beta) / \sin 2\alpha_w}$ – коэффициент, учитывающий форму сопряжённых поверхностей ($Z_H = 1,77 \cos \beta$ при суммарном коэффициенте смещения $x_\Sigma = 0$ и $\alpha_w = \alpha = 20^\circ$);

$Z_M = \sqrt{E_{np} / (\pi(1-\mu^2))}$ – коэффициент, учитывающий механические свойства материалов зубчатых колёс (E_{np} в МПа, для стальных колёс $Z_M = 275 \text{ МПа}^{1/2}$);

Z_ε – коэффициент, учитывающий суммарную длину контактных линий (для прямозубых передач $Z_\varepsilon = \sqrt{(4 - \varepsilon_\alpha) / 3}$; для косозубых передач $Z_\varepsilon = \sqrt{1 / \varepsilon_\alpha}$).

Для уменьшения параметров проектирования ширину колеса b ($b_1 \approx 1,12 b_2$) выражают через коэффициент ширины венца $\psi_{bd} = b / d_w$, а расчётную удельную окружную нагрузку w_{Ht} (или окружную силу F_t) через вращающий момент T_1 на шестерне (3.30); получают формулу для проверочного расчёта на контактную усталость

$$\sigma_H = Z_H Z_M Z_\varepsilon \sqrt{\frac{T_1 K_H}{\psi_{bd} d_{w1}^3} \cdot \frac{(u \pm 1)}{u}} \leq [\sigma_H]. \quad (14.38)$$

Уравнение (14.38) позволяет получить зависимость расчёта диаметра шестерни (т.е. для проектного расчёта), обеспечивающего контактную прочность передачи

$$d_{w1} = K_d \sqrt[3]{\frac{T_1 K_H}{\psi_{bd} [\sigma_H]^2} \cdot \frac{(u \pm 1)}{u}}, \quad (14.39)$$

где $K_d = \sqrt[3]{2(Z_H Z_M Z_\epsilon)^2}$ - коэффициент диаметра (в предварительных расчётах для стальных прямозубых колёс можно принимать $K_d = 770$, для косозубых колёс $K_d = 675$).

Значение коэффициента ширины венца ψ_{bd} в (14.39) принимают в зависимости от положения колёс относительно опор вала по таблице 14.10.

Таблица 14.10 Значения коэффициентов ширины венца ψ_{bd}

Расположение опор относительно колеса	Твёрдость рабочих поверхностей зубьев шестерни (H_1) и колеса (H_2)	
	$H_2 \leq 350$ HB или H_1 и $H_2 \leq 350$ HB	H_1 и $H_2 > 350$ HB
	ψ_{bd}	
Симметричное	0,8÷1,4	0,4÷0,9
Несимметричное	0,6÷1,2	0,3÷0,5
Консольное	0,3÷0,4	0,2÷0,25

Предварительный проектный расчёт зубчатых передач удобно вести в форме определения межосевого расстояния. Учитывая, что начальный диаметр $d_{w1} = 2a_w / (u \pm 1)$ (см. табл. 14.3), вращающий момент на ведомом колесе $T_2 = uT_1$, а также вводя коэффициент ширины колеса относительно межосевого расстояния $\psi_{ba} = b / a_w$ (несложно показать, что $\psi_{bd} = \psi_{ba} (u \pm 1) / 2$), после преобразования формулы (14.38) и объединения нескольких коэффициентов получаем зависимость для расчёта межосевого расстояния

$$a_w = K_a (u \pm 1) \sqrt[3]{\frac{K_H T_2}{\psi_{ba} u^2 [\sigma_H]^2}}, \quad (14.40)$$

где K_a – коэффициент межосевого расстояния, для прямозубой передачи $K_a = 495$; для косозубой и шевронной передачи $K_a = 430$.

Значение коэффициента ширины колеса относительно межосевого расстояния ψ_{ba} в (14.40) вычисляют (в соответствии с ранее выбранными по таблице 14.9 коэффициентами ширины венца ψ_{bd}) по формуле

$$\psi_{ba} = 2\psi_{bd} / (u \pm 1). \quad (14.41)$$

Для колёс шевронных передач $\psi_{ba} = 0,4 \div 0,63$.

Вычисленное значение межосевого расстояния a_w округляют до ближайшего значения (в миллиметрах) из ряда Ra40 по ГОСТ 6636-69. Для стандартных редукторов a_w округляют до ближайшего значения по ГОСТ 2185-66 (см. раздел 14.2).

По величине межосевого расстояния a_w и частоте вращения шестерни n_1 (об/мин) вычисляют окружную скорость V , необходимую для подбора коэффициентов при проведении проверочных расчётов

$$V = \frac{2\pi a_w n_1}{(u+1)60} .$$

При проведении проектных расчётов после первоначального определения межосевого расстояния a_w вычисляют модуль по эмпирическому соотношению и округляют его значение до стандартного. При твёрдости рабочих поверхностей зубьев шестерни и колеса ≤ 350 НВ

$$m = (0,01 \div 0,02) a_w , \quad (14.42)$$

при твёрдости зубьев шестерни > 45 HRC и колеса ≤ 350 НВ

$$m = (0,0125 \div 0,025) a_w , \quad (14.43)$$

при твёрдости зубьев шестерни и колеса ≥ 45 HRC принимают

$$m = (0,016 \div 0,0315) a_w , \quad (14.44)$$

Из формул (14.38, 14.39, 14.40) следует, что размеры колёс по условию контактной прочности не зависят от модуля (размеров зуба), это связано с тем, что размеры площадки контакта малы в сравнении с размерами зуба. При необходимости уменьшения габаритов передачи это можно сделать за счёт увеличения допускаемых напряжений $[\sigma_H]$, а также за счёт изготовления колёс с положительным смещением (коэффициент смещения $x > 0$), при котором увеличивается диаметр начальной окружности d_w , и соответственно приведённый радиус кривизны зубьев.

14.13. Расчёт зубьев цилиндрических передач на прочность при изгибе

Проверочный расчёт зубьев на сопротивление усталости при изгибе выполняется по формуле

$$\sigma_F \leq [\sigma_F], \quad (14.45)$$

где σ_F – расчётное напряжение в опасных точках на боковой поверхности зуба; $[\sigma_F]$ – допускаемое напряжение (см. раздел 14.14).

Зуб *прямозубой цилиндрической передачи* рассматривают как консольную балку (рис.14.36) с нагрузкой распределённой по линии контакта зубьев. Силами трения пренебрегают. Распределённую нагрузку заменяют силой F_n направленной по линии зацепления. Наибольшую нагрузку зуб колеса испытывает в начальный момент зацепления, когда точка контакта двух зубьев находится на вершине зуба (рис. 3.26), угол $\alpha'_w \approx 20^\circ \div 25^\circ$ – *угол давления*, несколько больше угла зацепления α_w . В прямозубой передаче в точке контакта зубьев действует сила F_n , направленная вдоль линии зацепления. Силу F_n раскладывают на *окружную* и *радиальную* составляющие (см. раздел 14.3, 14.5).

Радиальная составляющая сила $F_n \sin \alpha'_w$ вызывает сжатие зуба в сечении BC, имеющее форму прямоугольной площадки, а момент M от действия окружной составляющей $F_n \cos \alpha'_w$ – изгиб. Напряжений сжатия и изгиба, возникающие в крайних волокнах сечения вычисляются по следующим формулам

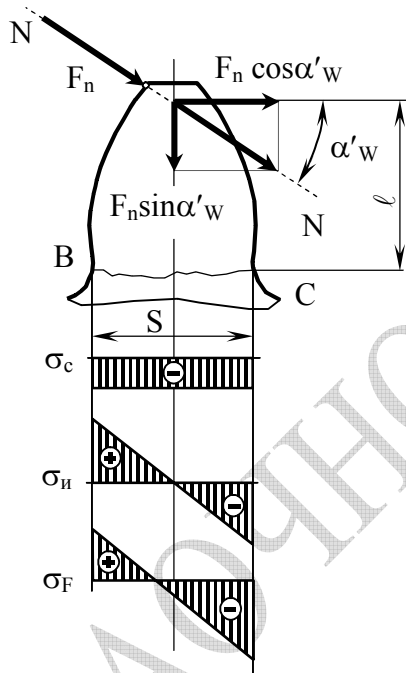


Рисунок 14.26

$$\sigma_c = \frac{F_n \sin \alpha'_w}{A} = \frac{F_n \sin \alpha'_w}{bS}, \quad (14.46)$$

$$\sigma_и = \frac{M}{W_z} = \frac{F_n \cos \alpha'_w l}{W_z} = \frac{6F_n l \cos \alpha'_w}{bS^2}, \quad (14.47)$$

где b – ширина зуба (ширина венца колеса); S – толщина основания ножки зуба в опасном сечении (вблизи хорды основной окружности); M – изгибающий момент; W_z – осевой момент сопротивления корневого сечения B–C. Расчет зуба на изгиб проводят по величине суммарных напряжений на растянутой стороне зуба в точке В

$$\sigma_F = \sigma_и - \sigma_c. \quad (14.48)$$

Суммарные абсолютные напряжения σ_F на растянутой стороне зуба (рис. 14.26) меньше, чем на сжатой, в точке С. Однако поверхностные слои материала хуже сопротивляются переменным растягивающим напряжениям, чем сжимающим напряжениям, поэтому точка В считается опасной – в ней наиболее вероятно появление усталостной трещины (рис. 14.20, а).

Выражая силу F_n , действующую на зуб прямозубой передачи через окружную составляющую F_t (14.9), и учитывая коэффициент нагрузки $K_F = K_{F\alpha} K_{F\beta} K_{Fv}$ (14.31) (для прямозубой передачи коэффициент распределения нагрузки между зубьями $K_{F\alpha} = 1$) получим

$$F_n = K_F F_t / \cos\alpha_w = K_{F\beta} K_{Fv} F_t / \cos\alpha_w. \quad (14.49)$$

Поделив и умножив напряжения σ_n (14.47) и σ_c (14.46) на модуль m , после подстановки выражения для силы нормального давления F_n выражение (14.48) для суммарных напряжений σ_F приобретает вид

$$\sigma_F = (\sigma_n - \sigma_c) \frac{m}{m} = \frac{K_F F_t}{mb} \left[\left(\frac{6lm \cos\alpha'_w}{S^2} - \frac{m \sin\alpha'_w}{S} \right) \frac{K_T}{\cos\alpha_w} \right].$$

где K_T , – теоретический коэффициент концентрации напряжений в корне зуба (определяется методами теории упругости).

После замены выражения в скобках коэффициентом формы зуба окончательно для условия прочности в опасной точке прямого зуба имеем

$$\sigma_F = Y_F \frac{K_F F_t}{mb} \leq [\sigma_F], \quad (14.50)$$

где Y_F – коэффициент формы зуба (изменяется с изменением коэффициента смещения x исходного контура и эквивалентного числа зубьев z_v), см. рис. 14.27.

Для *косозубых* и *шевронных* колёс условие прочности имеют вид

$$\sigma_F = Y_F Y_\varepsilon Y_\beta \frac{K_F F_t}{mb} \leq [\sigma_F], \quad (14.51)$$

где K_F – коэффициент нагрузки (14.31); Y_F – коэффициент формы зуба (см. рис. 14.27); $Y_\varepsilon = 1/\varepsilon_\alpha$ – коэффициент, учитывающий влияние многопарности зацепления (ε_α – коэффициент торцового перекрытия); Y_β коэффициент, учитывающий влияние наклона зуба ($Y_\beta \approx 1 - \beta^\circ/140$, при $\beta > 42^\circ$ $Y_\beta \approx 0,7$).

Формула (14.51) используется для проверочного расчёта как косозубых, так и прямозубых передач (для прямозубых передач $Y_\varepsilon = 1$, $Y_\beta = 1$).

Прочность зубьев при однократной перегрузке проверяют по условию

$$\sigma_{Fmax} = \sigma_F \frac{T_{1max}}{T_1} \leq [\sigma_{Fmax}], \quad (14.52)$$

где σ_F , T_1 – напряжения и вращающий момент на шестерне при расчёте на сопротивление усталости при изгибе; $[\sigma_{Fmax}]$ – максимальное допускаемое напряжение; T_{1max} – максимальный момент на шестерне.

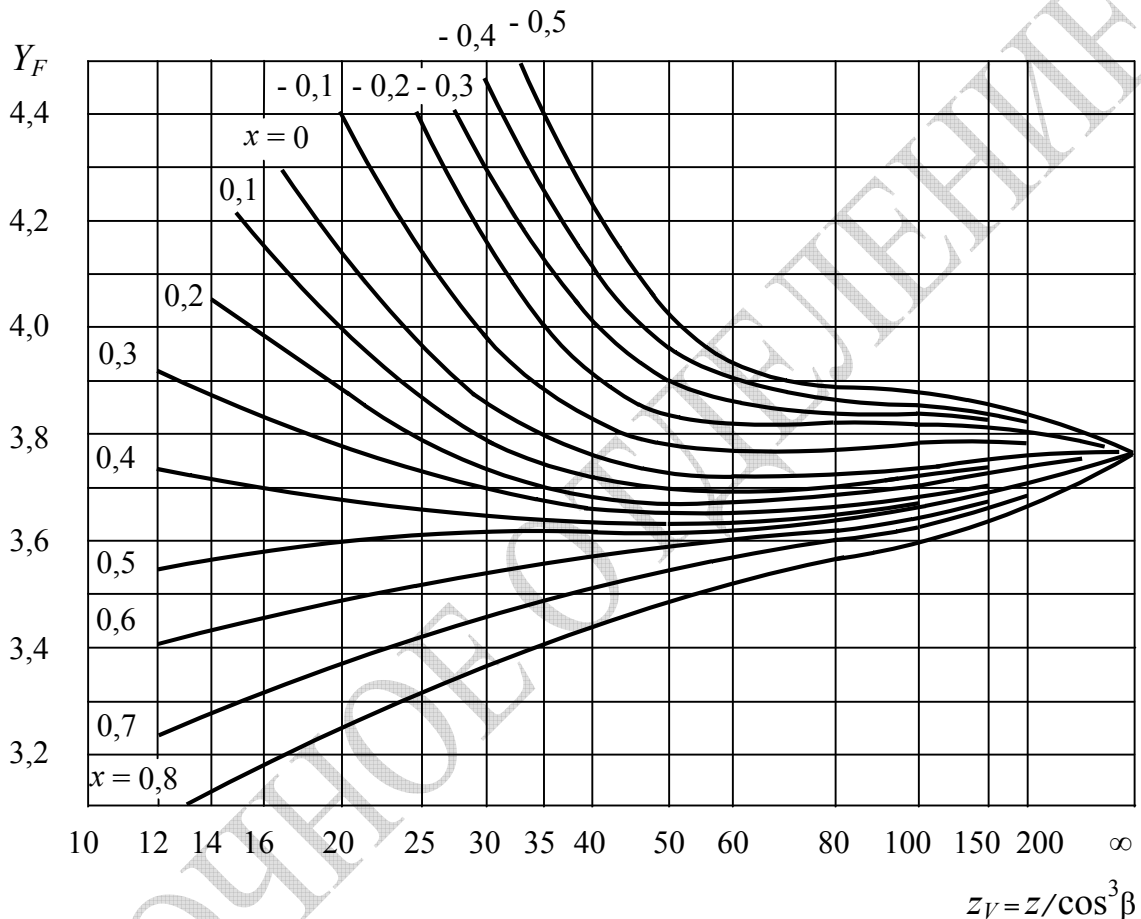


Рисунок 14.27

Для проектных расчётов по напряжениям изгиба формулы (14.50) и (14.51) решают относительно модуля, заменяя в этих формулах ширину зуба выражением $b = \psi_{bd} d_{w1}$ (значения коэффициентов ширины венца ψ_{bd} см. таблицу 14.10), окружную силу, представляя через вращающий момент и диаметр начальной окружности: $F_t = 2T_1 / d_{w1}$, в результате получим

$$m \geq K_T \sqrt[3]{\frac{T_1 K_{F\beta} Y_{F1}}{z_1^2 \psi_{bd} [\sigma_{F1}]}} \quad (14.53)$$

K_T – коэффициент, который при средних значениях ε_α , $K_{F\alpha}$, $K_{F\beta}$, Y_β можно принимать равным 14 – для прямозубых передач, 11,2 – для косозубых и шевронных передач; Y_{F1} – коэффициент формы зуба шестерни (принимается для числа зубьев z_{v1} эквивалентного прямозубого колеса (см. рис. 14.27).

Значение модуля округляется до ближайшего стандартного значения (ГОСТ 9563-60) и по принятому значению модуля находят размеры колёс (см. таблицы 14.3 и 14.4).

14.14. Допускаемые напряжения при расчёте зубчатых передач

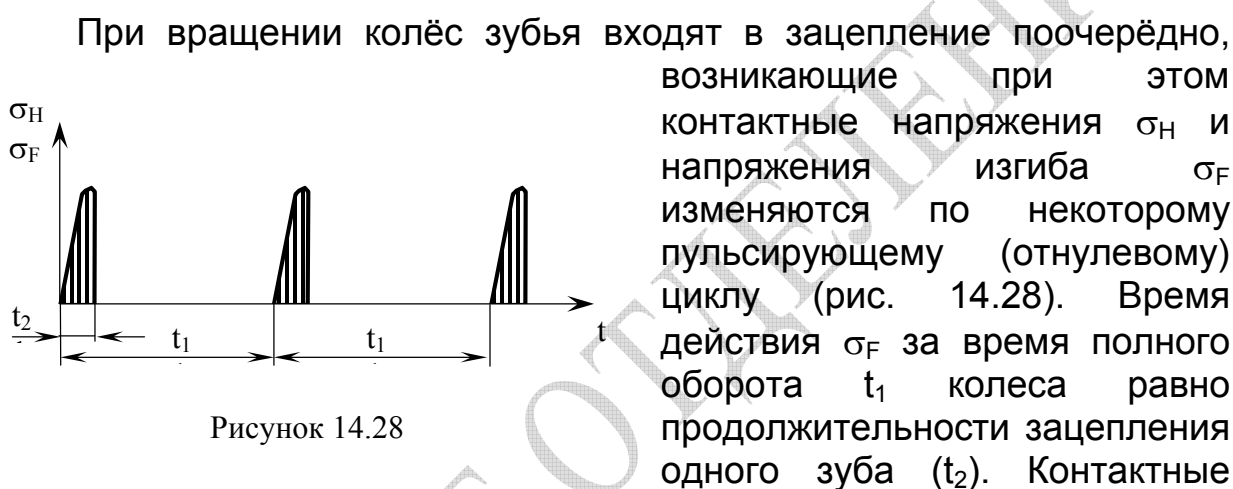


Рисунок 14.28

напряжения σ_H действуют ещё меньшее время. Выбор допускаемых напряжений базируется на кривых усталости, полученных при испытании образцов – аналогов зубчатых колёс.

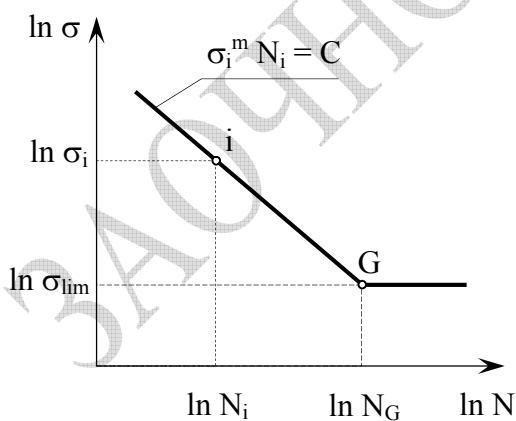


Рисунок 14.29

На рисунке 14.29 показана кривая усталости, построенная в логарифмической системе координат $\sigma - N$ (амплитуда напряжений цикла – число циклов нагружения до разрушения образца). Число циклов N_G соответствует точке G (абсциссе точки перегиба кривой усталости). Напряжение σ_{lim} , соответствующее N_G – *предел выносливости, т.е. это такое максимальное амплитудное напряжение, которое образец может выдержать без разрушения*

бесконечное число циклов. Для контактных напряжений предел выносливости – σ_{Hlim} , для напряжений изгиба – σ_{Flim} .

При напряжениях $\sigma \leq \sigma_{lim}$ передача может работать практически неограниченное время, при $\sigma > \sigma_{lim}$ – ограниченное время. Если при

расчёте передачи суммарное число циклов N_i будет принято меньше N_G , то напряжения в изделии можно повысить до σ_i (рис. 14.29). Наклонный участок кривой усталости описывается степенной функцией. Для точек i и G функция имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_i^m N_i &= C \\ \sigma_{lim}^m N_G &= C,\end{aligned}$$

где m – экспериментально определяемый показатель степени уравнения кривой усталости, C – константа, зависящая от свойств материала и размеров образца, также определяемая экспериментально.

Поскольку правые части уравнений одинаковы, то

$$\sigma_i = \sigma_{lim} \sqrt[m]{\frac{N_G}{N_i}}. \quad (14.54)$$

Полученную зависимость используют для определения допускаемых контактных напряжений $[\sigma_H]$ и напряжений изгиба $[\sigma_F]$. Разделив обе части уравнения (14.54) на коэффициент безопасности S , получают допускаемые напряжения для числа циклов N_i .

Соотношение

$$\sqrt[m]{\frac{N_G}{N_i}},$$

входящее, в формулу (14.54) называют *коэффициентом долговечности*, который при расчётах на контактную усталость обозначается

$$Z_N = \sqrt[m]{\frac{N_{GH}}{N_i}},$$

а при расчётах зубьев на изгиб как

$$Y_N = \sqrt[m]{\frac{N_{GF}}{N_i}}.$$

Коэффициент долговечности учитывает возможность повышения допускаемых напряжений для кратковременно работающих передач (при $N_i < N_G$).

Допускаемые контактные напряжения зубьев цилиндрических колёс

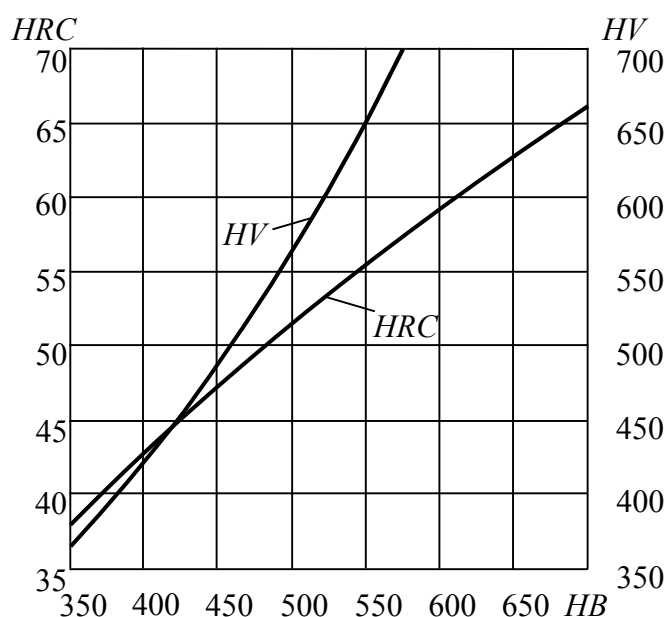


Рисунок 14.30

Исследованиями установлено, что контактная прочность определяется в основном *твёрдостью* (H) рабочих поверхностей зубьев, которая определяется чаще всего по методу Бринелля (число твёрдости HB), Роквелла (число твёрдости при испытании алмазным конусом или HRC, стальным шариком HRB) или Виккерса (испытание алмазной пирамидой – число твёрдости HV). Между единицами твёрдости существует взаимосвязь (рис. 14.30).

Для зубьев колеса или шестерни допускаемые напряжения при расчёте на контактную выносливость $[\sigma_H]$ определяются по формуле

$$[\sigma_H] = \frac{\sigma_{Hlim}}{S_H} Z_N Z_R Z_v, \quad (14.55)$$

где σ_{Hlim} – предел контактной выносливости поверхности зубьев зависит от средней твёрдости поверхности зуба (табл. 14.11); S_H – коэффициент безопасности (допускаемый запас прочности), который равен 1,2 для зубьев с поверхностным упрочнением (химико-термической обработкой и др.), 1,1 – для колёс без поверхностного упрочнения; Z_N – коэффициент долговечности (14.56); Z_R, Z_v – коэффициенты, учитывающие соответственно влияние шероховатости поверхности и окружной скорости (значения коэффициентов в среднем составляют: 0,95; 1,1).

В предварительных расчётах можно принимать произведение $Z_R Z_v = 1$.

Z_N – коэффициент долговечности для контактных напряжений (при $m = 6$), учитывающий влияние на предел контактной выносливости фактического числа циклов нагружений

$$Z_N = \sqrt[6]{\frac{N_{GH}}{N_i}} \quad \text{при условии} \quad 1 \leq Z_N \leq Z_{Nmax}, \quad (14.56)$$

где $Z_{N_{max}} = 2,6$ для материала колес с однородной структурой (нормализация, улучшение, объёмная закалка), $Z_{N_{max}} = 1,8$ – при поверхностном упрочнении.

Ограничение по максимальному коэффициенту долговечности $Z_{N_{max}}$ в (14.56) – ограничение напряжений по отсутствию пластических деформаций на поверхностях зубьев.

При расчёте коэффициента долговечности (14.56) абсцисса точки перегиба кривой усталости для контактных напряжений зависит от твёрдости материала

$$N_{GH} = 30 (HV)^{2,4}. \quad (14.57)$$

При твёрдости $H \geq 560$ НВ принимают $N_{GH} = 12 \cdot 10^7$.

При определении коэффициента долговечности Z_N при постоянном режиме нагрузки принимают N_i равным N_K – расчётному числу циклов нагружений за весь срок службы при работе неревверсивной передачи

$$N_K = 60 \text{ нст}, \quad (14.58)$$

где n – частота вращения (шестерни или колеса), мин^{-1} ; s – число зацеплений зуба за один оборот колеса (s равно числу колёс находящихся в зацеплении с рассчитываемым); t – число часов работы передачи за расчётный срок службы $t = L \cdot 365 \cdot K_{год} \cdot K_{сут}$ (L – число лет работы; $K_{год}, K_{сут}$ – коэффициенты годового и суточного использования).

Таблица 14.11 Значения пределов контактной выносливости

Термическая или химико-термическая обработка	Твёрдость поверхностей	Материал	σ_{Hlim} , МПа
Улучшение, нормализация	≤ 350 НВ	Углеродистые и легированные стали	$2 \text{ НВ} + 70$
Объёмная закалка	$30 \div 50$ HRC		$17 \text{ HRC} + 100$
Поверхностная закалка	$40 \div 56$ HRC		$17 \text{ HRC} + 200$
Цементация, нитроцементация и	$56 \div 65$ HRC	Легированные стали	23 HRC
Азотирование	$550 \div 750$ HV		1050
Без термической обработки	–	Чугун серый	2 НВ

Постоянный режим нагрузки является наиболее тяжёлым для передачи. Этот худший случай нагрузки принимают за расчётный также для неопределённых режимов нагрузки. К режимам с постоянной нагрузкой относят режимы с отклонениями 20%. При этом за расчётную нагрузку, обычно принимают нагрузку, соответствующую номинальной мощности двигателя. При переменных режимах нагрузки (рис. 14.31) расчёт коэффициента долговечности Z_N выполняют по эквивалентному числу циклов N_E (вместо N_i в формулу (14.56) подставляют N_E). Закон нагружения передачи задают графиком в координатах нагрузка – число циклов нагружения (или время работы). На рисунке 14.31, а показана циклограмма при действии постоянной внешней нагрузки, на рисунке 14.31, б – с переменной внешней нагрузкой. В качестве обобщённой нагрузки принят вращающий момент T . При переменном режиме нагрузка (момент) периодически или случайным образом меняется во времени (рис. 14.31, б). Циклограмму для её математической обработки составляют путём упорядочения нагрузок, начиная с максимальной (рис. 14.31, в).

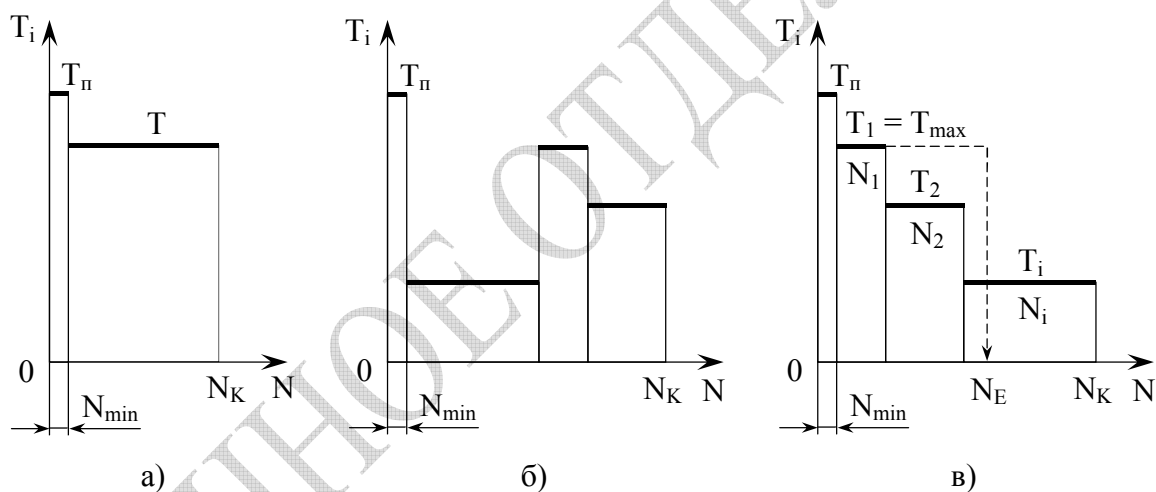


Рисунок 14.31

Кратковременные перегрузки (T_p) используют в расчётах для проверки отсутствия остаточных деформаций или хрупкого разрушения зубьев. К этим кратковременным нагрузкам приближённо относятся такие, которые за срок службы действуют относительно небольшое число циклов нагружения: при расчёте по контактным напряжениям принимают $N_{Hmin} \leq 0,03 N_{GH}$; при расчёте по изгибным напряжениям – $N_{Fmin} \leq 10^3$.

Эквивалентное число циклов – это число циклов нагрузки на зуб до его разрушения при условии действия комплекса реальных нагрузок различного уровня. Методика определения эквивалентного числа циклов N_E базируется на эмпирическом условии суммирования повреждений. Для вычисления эквивалентного числа циклов при расчётах

по контактным напряжениям (N_{HE}) и при расчётах на изгиб (N_{FE}) пользуются приведёнными ниже зависимостями

$$N_{HE} = 60c \sum (T_i / T_1)^3 n_i t_i ,$$

$$N_{FE} = 60c \sum (T_i / T_1)^m n_i t_i ,$$

где T_i – один из числа крутящих моментов, которые учитывают при расчёте на выносливость; T_1 – максимальный из моментов, учитываемых при расчёте на выносливость; n_i , t_i – соответствующие этим моментам частота вращения и время работы.

Для типовых режимов нагружения машин (рис. 14.32) эквивалентное число циклов нагрузки на зуб при расчетах по контактным напряжениям N_{HE} и на изгиб N_{FE} приближённо определяют по простым формулам:

$$N_{HE} = \mu_H N_K; \quad N_{FE} = \mu_F N_K, \quad (14.59)$$

где N_K – число циклов нагружения за весь срок службы (3.58); μ_H , μ_F – коэффициенты, зависящие от типового режима нагружения (см. табл. 14.12).

Таблица 14.12 Коэффициенты для вычисления эквивалентного числа циклов

Номер режима (рис. 2.26)	μ_H	μ_F^*
0	1	1
1	0,500	0,300 / 0,200
2	0,250	0,143 / 0,100
3	0,179	0,064 / 0,034
4	0,127	0,038 / 0,016
5	0,062	0,013 / 0,004

* Числитель – для зубчатых колёс с однородной структурой, включая сквозную закалку ТВЧ (для зубьев малого модуля). Знаменатель – для зубчатых колёс азотированных, цементированных и нитроцементированных

Типовые режимы нагружения (рис. 14.32) построены в относительных координатах T_i/T_{max} и N_i/N_K (T_{max} – момент принятый при расчёте на сопротивление усталости; N_i – число циклов нагружений зуба до его разрушения при действии вращающего момента T_i). Ступенчатые циклограммы приближённо заменяют кривыми линиями (согласно приложению к ГОСТ 21354-87, принято шесть типовых режимов нагружения.

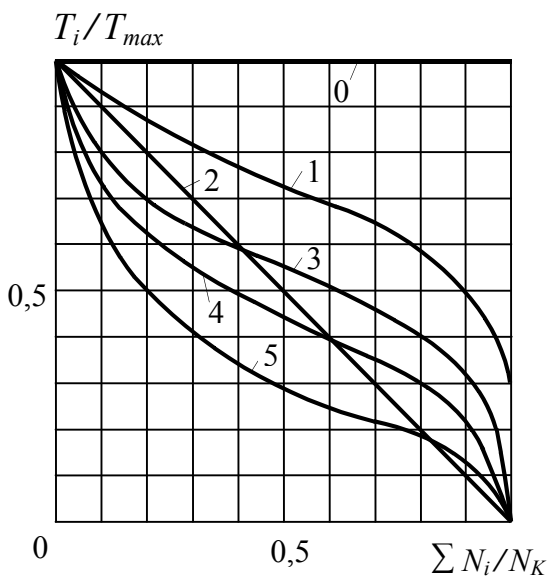


Рисунок 14.32

Постоянный режим 0 (работа с нагрузками отличающимися друг от друга не более чем на 20%) – на практике за расчётную нагрузку принимают нагрузку, соответствующую номинальной мощности двигателя.

Тяжёлый режим 1 (работа большую часть времени с нагрузками близкими к номинальной) характерен для горных машин;

средний режим 2 (одинаковое время со всеми значениями нагрузки) – для многих интенсивно работающих машин;

нормальный режим 3 (работа большую часть времени с

ниже средних) – для большинства универсальных машин, в том числе транспортных;

лёгкий режим 4 (работа большую часть времени с нагрузкой ниже средних) – для широкоуниверсальных станков с большим диапазоном регулирования скоростей;

особо лёгкий режим 5 (работа большую часть времени с малыми нагрузками).

Определение допускаемых контактных напряжений при расчёте цилиндрической передачи на усталость. При расчёте передачи первоначально рассчитывают напряжения для шестерни $[\sigma_{H1}]$ и колеса $[\sigma_{H2}]$. Для прямозубых цилиндрических передач в качестве допускаемого напряжения выбирают меньшее значение из двух:

$$[\sigma_H] = \min \{[\sigma_{H1}], [\sigma_{H2}]\} . \quad (14.60)$$

Для косозубых и шевронных колёс в качестве допускаемого принимают меньшее из двух значений:

$$[\sigma_H] = 0,45([\sigma_{H1}] + [\sigma_{H2}]); \quad [\sigma_H] = 1,23 [\sigma_{H2}]. \quad (14.61)$$

Максимальные допускаемые контактные напряжения (при однократной нагрузке) используют в расчётах для исключения остаточных (пластических) деформаций или хрупкого разрушения упрочнённого поверхностного слоя. Допускаемые напряжения для зубьев из улучшенных сталей $[\sigma_{Hmax}] = 2,8\sigma_T$, где σ_T – предел текучести, МПа; для зубьев подвергнутых цементации или закалке токами высокой частоты (ТВЧ), $[\sigma_{Hmax}] = 44 \text{ HRC}$.

Допускаемые напряжения изгиба

Допускаемые напряжения изгиба вычисляют отдельно для колеса и шестерни по зависимостям, аналогичным формулам для определения контактных напряжений:

$$[\sigma_F] = \frac{\sigma_{Flim}}{S_F} Y_N Y_R Y_A Y_Z, \quad (14.62)$$

где σ_{Flim} – предел выносливости при изгибе соответствует абсциссе точки перегиба (для стали $N_{GF} = 4 \cdot 10^6$) кривой усталости (рис. 3.29), и зависит от термической и химико-термической обработки материала (таблица 14.13); Y_N – коэффициент долговечности; Y_R – коэффициент, учитывающий влияние шероховатости; Y_A – коэффициент, учитывающий влияние двустороннего приложения нагрузки; Y_Z – коэффициент, учитывающий способ получения заготовки.

Коэффициент долговечности равен

$$Y_N = \sqrt[m]{\frac{N_{GF}}{N_K}} \quad \text{при условии } 1 \leq Y_N \leq Y_{Nmax}, \quad (14.63)$$

где $m = 9$, $Y_{Nmax} = 2,5$ – для колёс азотированных, цементированных и нитроцементированных с нешлифованной переходной поверхностью; во всех остальных случаях $m = 6$, $Y_{Nmax} = 4$. При переменном режиме нагружения N_K заменяют эквивалентным числом циклов N_E .

Коэффициент, учитывающий влияние шероховатости поверхности $Y_R = 1$ при зубофрезеровании и шлифовании; для полированной поверхности впадины $Y_R = 1,05 \div 1,2$ (меньшие значение для цементированного и азотированного зуба, большие – для улучшенного и закалённого).

Коэффициент, учитывающий влияние двустороннего приложения нагрузки $Y_A = 1$ при одностороннем приложении нагрузки; при реверсивном (т.е. с изменением направления) нагружения предел выносливости меньше, поэтому $Y_A = 0,65$ для улучшенных сталей; $Y_A = 0,75$ –

для цементированных, закалённых ТВЧ; $Y_A = 0,9$ – для азотированных сталей.

Коэффициент, учитывающий способ получения заготовки $Y_Z = 1$ для поковки и штамповки, для проката $Y_Z = 0,9$, для литых заготовок $Y_Z = 0,8$.

При однократной перегрузке максимальные допускаемые напряжения изгиба определяют отдельно для колеса и шестерни:

$$[\sigma_{Fmax}] = \sigma_{Flim} Y_{Nmax} K_{st} / S_{Fst}, \quad (14.64)$$

где σ_{Flim} определяют по таблице 14.13; $Y_{Nmax} = 2,5 \div 4$ (см. комментарии к (3.63)); K_{st} – коэффициент, учитывающий повышение предельных напряжений при однократном ударе ($K_{st} = 1,2$ при $m = 9$, $K_{st} = 1,3$ при $m = 6$, см. комментарии к формуле(14.63)); $S_{Fst} = 1,75$ – коэффициент безопасности.

Таблица 14.13 Пределы изгибной выносливости σ_{Flim} и коэффициенты безопасности S_F для зубьев при работе одной стороной

Термическая обработка	Твёрдость зубьев		Марки сталей	σ_{Flim} , Мпа	S_F
	на поверхности	в сердцевине			
Нормализация, улучшение	180 ÷ 350 HB		40, 45, 40X, 40XH, 40XC, 35XM	1,75HB	1,7
Объёмная закалка	45 ÷ 55 HRC		40X, 40XH, 40XФА	500÷550	1,7
Закалка ТВЧ сквозная с охватом впадин	48 ÷ 52 HRC		40X, 35XM, 40XH	500÷600	1,7
Закалка ТВЧ повторяет контур впадины	56÷62 HRC	27÷35 HRC	60X, 60XH, У6	900	1,7
	48÷52 HRC		40X,35XM, 40XH	600÷700	
Азотирование	700÷960 HV	24÷40 HRC	38X2Ю, 38X2МЮА	12HRC ^{серц} +290	1,7
	550÷750 HV		40X, 40XФА, 40X2HMA		
Цементация с автоматическим регулированием процесса	57÷63 HRC	30÷40 HRC	18ХГТ, 20ХГР, 20ХН, 12ХН3А	850÷950	1,55
Цементация	57÷62 HRC		Легированные	750÷800	1,65
Нитроцементация с автоматическим регулированием процесса	56÷63 HRC		25ХГМ	1000	1,55
		25ХГТ, 30ХГТ, 35Х	750		

Примечание. В расчёт принимают среднее значение твёрдости

параллельно осям колёс и полюсной линии PP' (рис. 14.33, а). В процессе работы перекачивание зубьев происходит не по их высоте как в эвольвентных передачах, а по длине. Точка контакта K_0 перемещается по линии зацепления KK' , а не по общей нормали NN , как в эвольвентном зацеплении (в эвольвентных передачах линия зацепления касательная к основным окружностям и лежит в плоскости вращения колёс). Профили зубьев, очерченные дугами окружностей, *не являются сопряжёнными*, так как они не удовлетворяют требованиям основной теоремы зацепления (*общая нормаль не будет всё время проходить через полюс P*).

Таким образом, теоретически поля зацепления в круговом зацеплении отсутствуют. Поскольку контакт начальный контакт зубьев осуществляется в одной точке (коэффициент торцового перекрытия $\varepsilon_\alpha = 0$), то для обеспечения непрерывности зацепления, данные передачи выполняются только косозубыми (для косозубых передач угол наклона зубьев $\beta = 8 \div 22^\circ$, в шевронных передачах $\beta = 20 \div 30^\circ$) с коэффициентом осевого перекрытия $\varepsilon_\beta > 1$.

Скорость перемещения точки начального контакта K_0 (на рисунке 14.33, а направление перемещения точки контакта K_0 показано стрелкой) в $4 \div 10$ раз больше окружной скорости, что способствует образованию значительного слоя смазки, а, следовательно, снижению потерь на трение и уменьшению износа.

Под воздействием нагрузки зубья получают упругую контактную деформацию – взаимодействие между зубьями происходит по площадке размеры, которой в процессе приработки быстро увеличиваются (площадка контакта на рис. 14.33, а заштрихована). Появление значительной площадки контакта приводит к повышению контактной прочности по сравнению с эвольвентной передачей в $1,4 \div 1,5$ раза.

На практике применяют два вида зацепления с круговыми зубьями: с одной линией зацепления (ОЛЗ) и с двумя линиями зацепления (ДЛЗ).

В передачах с ОЛЗ профили зубьев колёс разные: у шестерни – выпуклый, у колеса вогнутый (рис. 14.33, а). Линия зацепления KK' параллельна начальной прямой PP' проходящей через полюс зацепления, и смещена в сторону с колеса с вогнутым профилем. Существенным недостатком является то, что для изготовления колёс требуется два различных режущих инструмента.

Наибольшее распространение получили передачи Новикова с двумя линиями зацепления. В передачах с ДЛЗ (рис. 14.33, б) профили зубьев колёс одинаковые – для изготовления зубьев колёс требуется один инструмент. Профили головок зубьев образуют контакт в двух точках: K_0 и K_0' , но на разных зубьях. Нагрузка распределяется между двумя зубьями, что повышает нагрузочную способность не только по контактными напряжениям, но и по напряжениям изгиба в $1,5$

÷ 1,7 раза по сравнению с эвольвентным. Линии зацепления $K_1 K_1'$ и $K_2 K_2'$ параллельны осям вращения колёс и полюсной линии PP' , расположены с двух сторон от полюсной прямой PP' . В окрестностях каждой из точек контакта (K_0 и K_0') под нагрузкой формируется площадки контакта (см. штриховка на рис. 14.33, б). Передачи Новикова благодаря компактности и хорошей приработке зубьев нашли применение главным образом при передаче больших постоянных нагрузок.

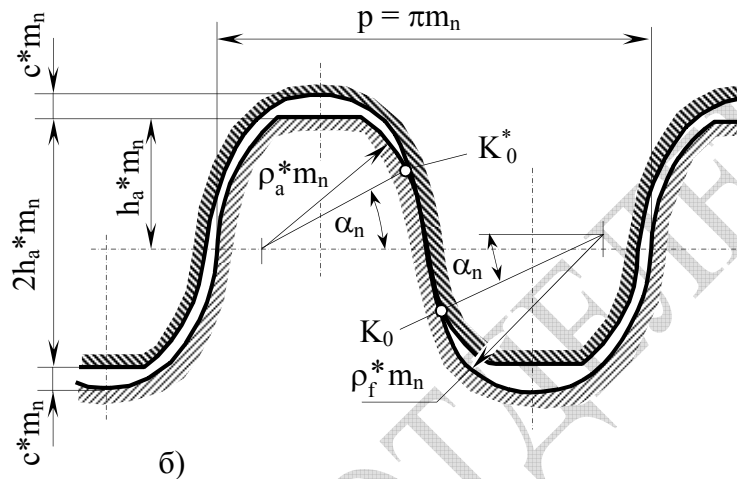
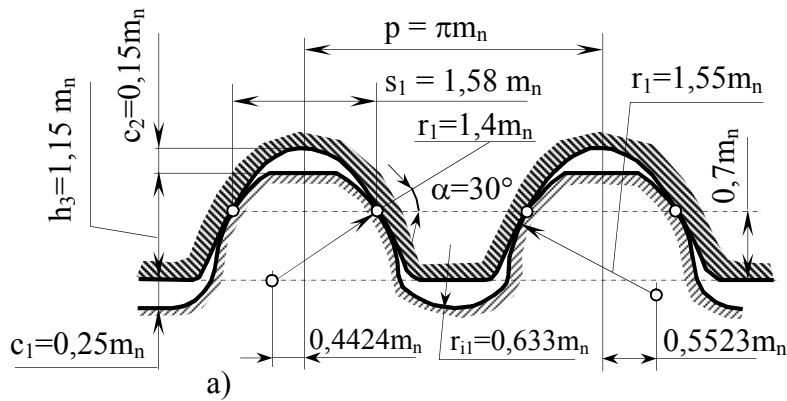
Передачи с зацеплением Новикова чувствительны к изменению межосевого расстояния, что диктует повышенные требования к точности изготовления (7 или 8 степени точности), а также к жесткости валов и опор.

Исходный контур и параметры такой передачи стандартизованы. Исходные контуры для передач Новикова с одной линией зацепления приведён на рисунке 3.34, а (МН 4229 – 63); с двумя линиями зацепления – на рисунке 3.34, б (ГОСТ 15023 – 76). Формулы для определения основных размеров цилиндрических передач Новикова (см. таблицу 14.14) и эвольвентных передач совпадают. Данные параметры рекомендуются для передач с твёрдостью материала $H \leq 320$ HB, $m \leq 16$ мм, окружной скоростью $V \leq 20$ м/с.

Таблица 14.14 Формулы для определения основных размеров цилиндрических передач Новикова с двумя линиями зацепления

Параметры	Шестерни	Зубчатого колеса
Нормальный модуль, m_n	ГОСТ 14186-69	
Окружной модуль, m_t	$m_t = 2 a_w / (z_1 + z_2) = m_n / \cos\beta$	
Осевой шаг	$p_x = \pi m_n / \sin\beta$	
Коэффициент осевого перекрытия*	$\varepsilon_\beta = b/p_x = b \sin\beta / (\pi m_n)$ $\varepsilon_\beta = (1 \div 1,2; 2 \div 2,2; 3 \div 3,3; 4 \div 4,4)$	
Делительное межосевое расстояние	$a_w = 0,5 m_n (z_1 + z_2) / \cos\beta$	
Диаметр делительной окружности	$d_1 = m z_1 / \cos\beta$	$d_2 = m z_2 / \cos\beta$
Диаметр окружности вершин	$d_{a1} = d_1 + 2 h_a^* m$	$d_{a2} = d_2 + 2 h_a^* m$
Диаметр окружности впадин	$d_{f1} = d_1 - 2 (h_a^* + c^*) m$	$d_{f2} = d_2 - 2 (h_a^* + c^*) m$
* b – ширина зубчатого колеса; при указанных отношениях обеспечивается максимальная нагрузочная способность передач		

В передачах с постоянной многочасовой работой число зубьев шестерни рекомендуется принимать $z_1 = 14 \div 22$, при кратковременной работе – $z_1 = 10 \div 15$ (подрезание отсутствует).



$$h_a^* = 0,9; \quad c^* = 0,15; \quad \alpha_n = 27^\circ; \quad \rho_a^* = 1,147 \div 1,150; \quad \rho_f^* = 1,307 \div 1,250$$

Рисунок 14.34

Условия контакта зубьев в передачах Новикова существенно отличаются от условий контакта по Герцу (малая разность r_1 и r_2). Размеры площадки контакта соизмеримы с размерами зубьев, а контактные напряжения приближаются к напряжениям смятия.

Проверочный расчёт по контактным напряжениям выполняют по формуле

$$\sigma_H = 3750 \sqrt{\frac{T_1 z_1^{1,5} K_{H\beta} K_{HV} K_{\beta\text{ви}}}{d_1^3 K_\epsilon}} \leq [\sigma_H], \quad (14.65)$$

где T_1 – расчётный момент на шестерне, Н·м, равный максимальному по циклограмме, при котором $N > 0,02 N_{HG}$; d_1 , z_1 – соответственно делительный диаметр (мм) и число зубьев шестерни; $K_{H\beta}$ – коэффициент концентрации нагрузки (ориентировочно определяют также как и для эвольвентных передач); K_{HV} – коэффициент динамичности нагрузки (при проектировочном расчёте определяется также как и для эвольвентных передач); $K_{\beta\text{ви}} = [(u+1)/(\cos^3 \beta)]^{0,5} \text{tg} \beta$; K_ϵ – коэффициент, учиты-

вающий осевое перекрытие (при $\varepsilon_\beta \approx 1,15; 2,15; 3,2$ коэффициент соответственно принимает значения $K_\varepsilon = 2; 4; 6$); $[\sigma_H]$ – допускаемое напряжение (МПа) определяют по формуле для эвольвентных передач ($H \leq 320$ НВ).

При проектном расчёте формулу (14.65) решают относительно диаметра делительной окружности, последовательно принимая несколько значений z_1 .

14.16. Геометрические параметры и кинематика прямозубых конических передач

Конические зубчатые колёса применяют в передачах, оси валов которых расположены в одной плоскости, и пересекаются под некоторым углом (рис. 14.1, д, е, ж). Такие виды передач встречаются достаточно часто в самых различных механических устройствах. Наиболее распространены передачи с углом пересечения осей колёс $\Sigma = 90^\circ$ (ортогональные передачи), хотя, *межосевой угол передачи* Σ теоретически может быть в диапазоне $10^\circ < \Sigma < 170^\circ$. Конические колёса сложнее цилиндрических, как в изготовлении, так и при монтаже самих передач. Для нарезания конических колёс требуются специальные станки и инструмент.

Пересечение осей валов затрудняет размещение опор (подшипников) валов, поскольку одно из колёс, как правило, располагается консольно. Такая установка колёс вызывает в процессе работы их перекося и увеличивает неравномерность распределения нагрузки по длине зуба. В коническом зацеплении помимо окружной и радиальной сил действует осевая сила, что усложняет конструкцию опоры вала. Всё это приводит к тому, что нагрузочная способность конической передачи составляет около 85% от цилиндрической. Основные параметры конических передач – диапазон передаточных чисел, окружных скоростей, КПД приведены в таблице 14.1.

В зависимости от направления оси зуба различают передачи с прямыми (рис. 14.1, д), косыми (тангенциальными) (рис. 14.1, е), и круговыми зубьями (рис. 14.1, ж). Величина угла наклона косоугольного зуба к радиусу колеса не превышает 30° . Круговой зуб располагается по дуге окружности, по которой движется инструмент при нарезании зубьев.

Применяют, как правило, передачи с прямыми или круговыми зубьями. Прямозубые передачи используют при скоростях до 3 м/с ($u = 1 \div 3$), а при более высоких скоростях – передачи с круговыми зубьями. Передачи с круговыми зубьями сложнее в изготовлении, но имеют повышенную нагрузочную способность, работают плавно и бесшумно вследствие большого перекрытия зубьев в зацеплении.

Конические колёса с косыми зубьями применяют достаточно редко из-за сложности их точного изготовления.

Нарезание зубьев прямозубых колёс осуществляют двумя резцами, имеющими профиль впадины исходного контура. Каждый резец обрабатывает одну сторону зуба и движется в противофазе с другим резцом.

Элементами конического колеса, определяющими его форму, являются три конуса: *вершин*, *делительный*, *впадин* (рис. 14.35). С внешней стороны колесо ограничивается *внешним дополнительным конусом*, а с внутренней – *внутренним дополнительным конусом* (рис. 14.35). *Образующие дополнительных конусов перпендикулярны образующей делительного конуса*. Ширина венца зубчатого колеса b ограничена двумя дополнительными конусами – внешним и внутренним.

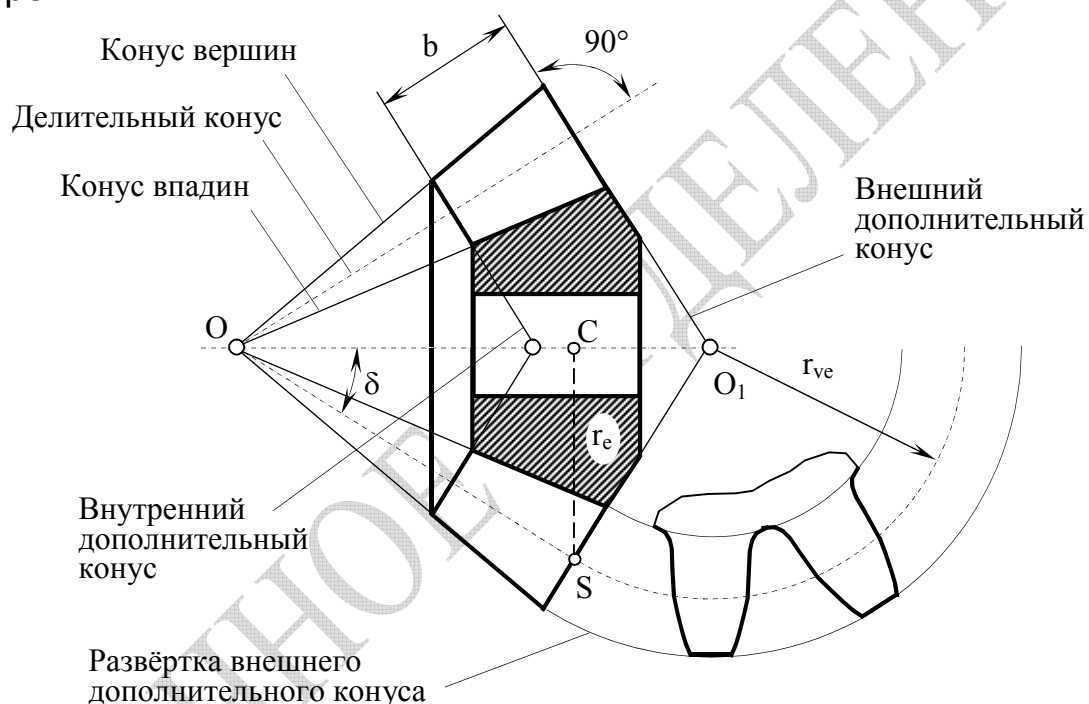


Рисунок 14.35

Зубья конических колёс в продольном сечении могут иметь различную форму (рис. 14.36). Продольную форму зубьев характеризуют относительным положением образующих конусов вершин, делительного конуса и конуса впадин.

Основной формой продольного сечения зубьев для прямозубых и косозубых конических передач являются *пропорционально понижающиеся зубья* (рис. 14.36, а) – вершины конусов делительного и впадин совпадают, а высота ножки зубьев пропорциональна конусному расстоянию.

Понижающиеся зубья (рис. 14.36, б, в) характеризуются несовпадением вершин конусов делительного и впадин. У таких зубьев ширина дна впадины постоянна, а толщина зуба по делительному конусу

растёт пропорционально расстоянию от вершины. Эта форма позволяет обрабатывать одним инструментом сразу обе поверхности зубьев. Эта форма является основной для колёс с круговыми зубьями.

Равновысокие зубья (рис. 14.36, г) отличаются параллельностью образующих конусов делительного, вершин и впадин. Эту форму применяют для круговых зубьев при суммарном числе зубьев более

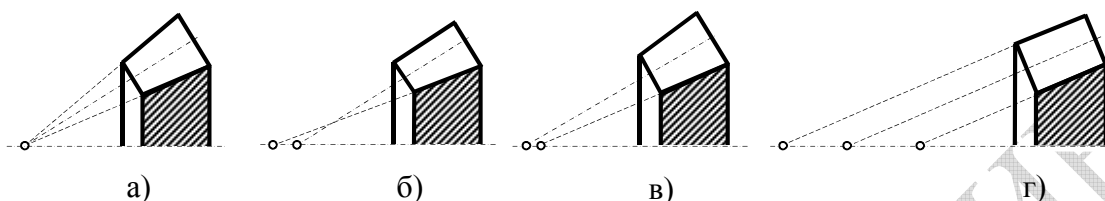


Рисунок 14.36

40.

Коническую передачу условно можно представить в виде двух конусов: конусы, перекатывающиеся друг по другу без скольжения, называются начальными (рис. 14.37). В конических передачах начальные конусы всегда совпадают с делительными (при нарезании колёс со смещением применяют равносмещённые колёса: шестерню нарезают с положительным смещением ($x_1 > 1$), а колесо с отрицательным смещением ($x_2 = x_1$).

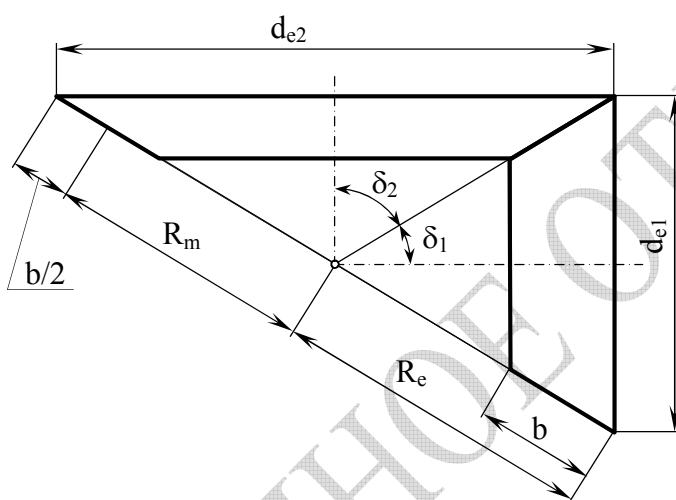


Рисунок 14.37

Углы делительных конусов обозначают соответственно δ_1 и δ_2 . Углы между осями, таким образом, составляют $\Sigma = \delta_1 + \delta_2$. Передаточное число конической передачи определяется точно так же, как и для цилиндрической, т.е. через отношение числа зубьев z_2 колеса (ведомое звено) к числу зубьев z_1 шестерни (ведущее звено), т.е. $u = z_2 / z_1$. Углы начальных конусов определяют по зависимостям

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\sin \Sigma}{u + \cos \Sigma}; \quad \delta_2 = \Sigma - \delta_1.$$

Для ортогональных передач ($\Sigma = 90^\circ$)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_1 &= 1/u = z_1/z_2 \\ \operatorname{tg} \delta_2 &= u = z_2/z_1 \\ \cos \delta_1 &= 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \delta_1} = u/\sqrt{u^2+1} \\ \cos \delta_2 &= 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \delta_2} = 1/\sqrt{u^2+1} \end{aligned} \right\} \quad (14.66)$$

Для удобства измерений размеры конических колёс принято измерять по внешнему торцу зуба, образованному внешним дополнительным конусом. Форма зуба конического колеса в нормальном сечении дополнительным конусом такая же, как у цилиндрического колеса, образованного развёрткой дополнительного конуса (рис. 14.35).

Геометрические параметры конических прямозубых передач регламентированы ГОСТ 19624 – 74. Основные геометрические параметры прямозубого конического колеса приведены на рисунке 14.38 и в таблице 14.15.

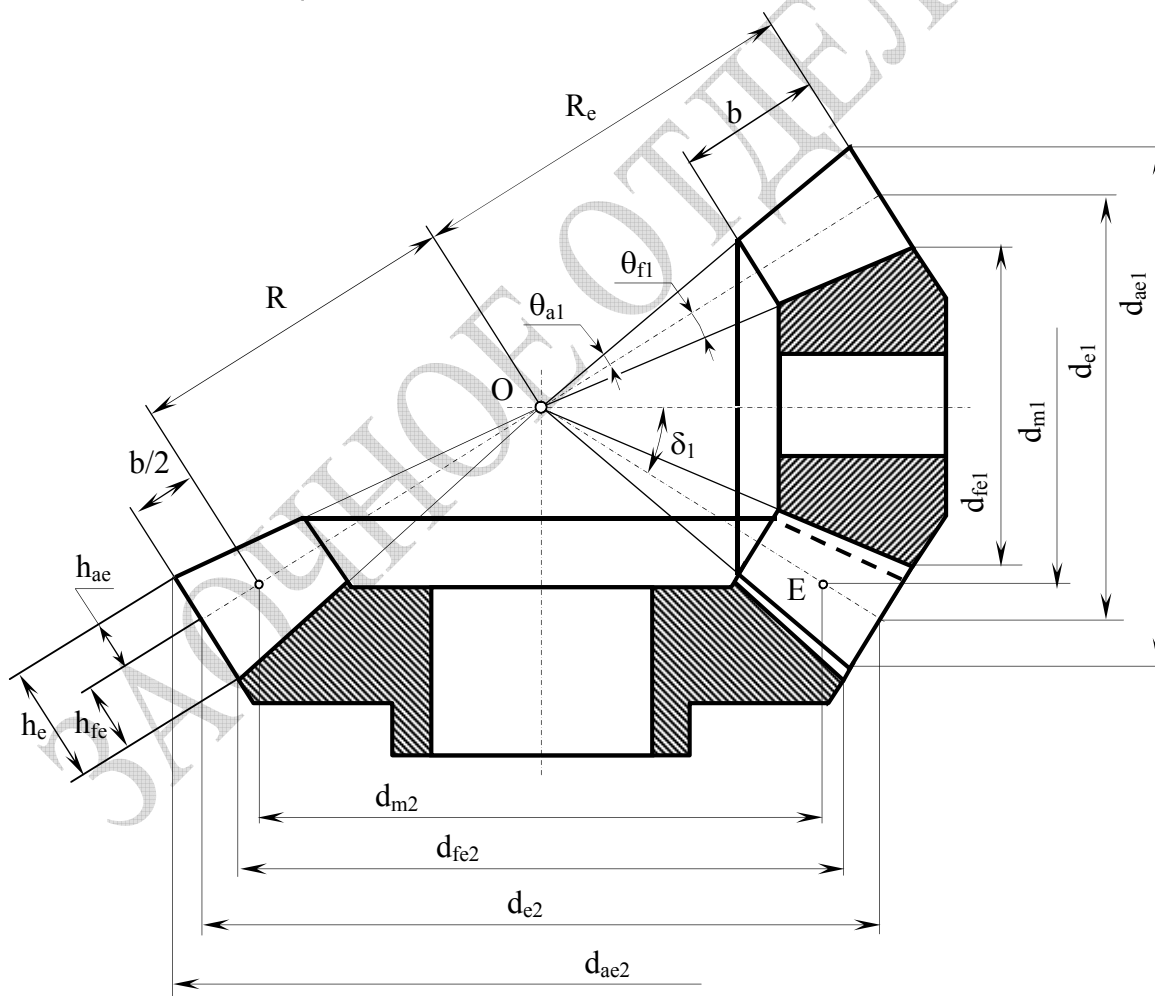


Рисунок 14.38

Модуль конического колеса меняется по длине зуба, поэтому различают два окружных модуля: m – средний делительный окружной

модуль, причём $d_m = mz$; m_{te} – *внешний делительный окружной модуль*, причём $d_e = m_{te} z$. Внешний и средний модули пропорциональны соответствующим конусным расстояниям

$$m_{te} = m R_e/R.$$

За основной принимают окружной модуль на внешнем торце m_{te} , который иногда называют *производственным модулем*. Его обычно (но не обязательно) округляют до стандартного значения (ГОСТ 9563–60). Исходный контур для прямозубых конических колёс аналогичен исходному контуру для цилиндрических колёс, за исключением радиального зазора (см. табл. 14.15).

Таблица 14.15 – Основные параметры прямозубых конических колёс и конической передачи

Параметры	шестерни	зубчатого колеса
Передаточное число	$u = z_2 / z_1 = \operatorname{tg} \delta_2 = \operatorname{ctg} \delta_1$	
Внешняя высота головки зуба	$h_{ae} = m_{te}$	
Внешняя высота ножки зуба	$h_{fe} = 1,2m_{te}$	
Внешняя высота зуба	$h_e = 2,2m_{te}$	
Радиальный зазор	$c = 0,2 m_{te}$	
Внешний делительный диаметр	$d_{e1} = m_{te} z_1$	$d_{e2} = m_{te} z_2$
Внешний диаметр вершин зубьев	$d_{ae1} = m_{te} (z_1 + 2\cos \delta_1)$	$d_{ae2} = m_{te} (z_2 + 2\cos \delta_2)$
Внешнее конусное расстояние	$R_e = 0,5[(d_{e1})^2 + (d_{e2})^2]^{0,5}$	
Ширина венца	$b \leq 0,3 R_e$ (или $b \leq 10 m_{te}$)	
Среднее конусное расстояние	$R = R_e - b$	
Средний делительный диаметр	$d_{m1} = d_{e1}(1 - 0,5(b/R_e))$	$d_{m2} = d_{e2}(1 - 0,5(b/R_e))$
Угол ножки зуба	$\theta_{f1} = \operatorname{arctg}(h_{fe1}/R_e)$	$\theta_{f2} = \operatorname{arctg}(h_{fe2}/R_e)$
Угол головки зуба	$\theta_{a1} = \theta_{f2}$	$\theta_{a2} = \theta_{f1}$
Угол конуса вершин	$\delta_{a1} = \delta_1 + \theta_{a1}$	$\delta_{a2} = \delta_2 + \theta_{a2}$
Угол конуса впадин	$\delta_{f1} = \delta_1 - \theta_{f1}$	$\delta_{f2} = \delta_2 - \theta_{f2}$

Поскольку профили зубьев конического колеса, построенные на развёртке дополнительного конуса (рис. 14.35), весьма близки к профилям зубьев цилиндрического колеса, то *при расчёте на прочность конические колёса заменяют эквивалентными прямозубыми цилиндрическими колёсами.*

Из треугольника O_1CS следует, что радиус и диаметр делительной окружности эквивалентного колеса равны, соответственно

$$r_{vei} = r_{ei} / \cos\delta_i ; d_{vei} = d_{ei} / \cos\delta_i.$$

Выражая диаметры через модули m_{te} и число зубьев z , т.е. $d_{ei} = m_{te} z_i$ и $d_{vei} = m_{te} z_{vi}$, получим выражение, по которому определяют *число зубьев эквивалентных колёс*

$$z_{vi} = z_i / \cos\delta_i. \quad (14.67)$$

14.17. Силы в зацеплении прямозубой конической передачи

В зацеплении конической передачи на шестерню действует *результатирующая сила* $F_n = F_{n1}$ которую раскладывают на три составляющих: *окружную* F_t , *радиальную* $F_r = F_{r1}$ и *осевую* $F_a = F_{a1}$ (рис. 14.39). Условной точкой приложения сил является точка, лежащая на начальном конусе посередине зуба, т.е. на среднем диаметре d_m .

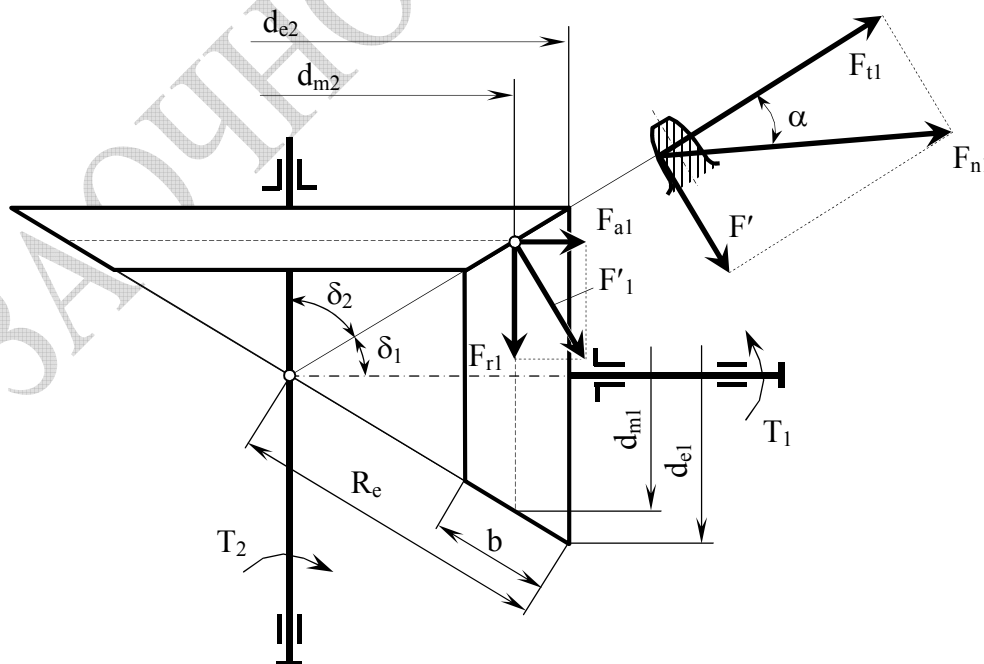


Рисунок 14.39

Из силовой схемы (рис. 14.39) следует, что

$$\left. \begin{aligned} F_{t1} &= 2T_1 / d_{m1} \\ F_{n1} &= F_{t1} / \cos \alpha \\ F'_1 &= F_{t1} \operatorname{tg} \alpha \\ F_{r1} &= F'_1 \cos \delta_1 = F_{t1} \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_1 \\ F_{a1} &= F'_1 \sin \delta_1 = F_{t1} \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_1 \end{aligned} \right\} \quad (14.68)$$

Для шестерни (индекс 1) и колеса (индекс 2) силы в зацеплении попарно равны: $F_{t2} = -F_{t1}$; $F_{r2} = -F_{a1}$; $F_{a2} = -F_{r1}$.

14.18. Расчёт зубьев прямозубой конической передачи на контактную и изгибную усталость

Критерии работоспособности и методики расчётов на прочность конических и цилиндрических передач практически совпадают. *Допускаемые напряжения $[\sigma]$ для расчётов конических передач определяются так же, как и для цилиндрических.*

Расчёт зубьев конической передачи – по сути, расчёт зубьев эквивалентной цилиндрической передачи с учётом установленного экспериментально коэффициента понижения нагрузочной способности конической передачи, равного 0,85. Модуль зубьев эквивалентного цилиндрического колеса для прочностных расчётов принимается равным модулю m в среднем сечении зуба, а диаметр делительной окружности шестерни принимают равным среднему делительному диаметру d_{m1} , который определяют из соотношения (рис. 14.39) с учётом (14.66)

$$d_{v1} = \frac{d_{m1}}{\cos \delta_1} = \frac{d_{m1} \sqrt{u^2 + 1}}{u}; \quad (14.69)$$

передаточное число эквивалентных колёс для ортогональных передач ($\Sigma = 90^\circ$) с учётом (14.66) равно

$$u_v = \frac{z_{v2}}{z_{v1}} = \frac{z_2 \cos \delta_1}{z_1 \cos \delta_2} = u \operatorname{tg} \delta_2 = u^2. \quad (14.70)$$

Подставив, в формулу (14.37) для проверочного расчёта цилиндрических (прямозубых) колёс по контактным напряжениям параметры эквивалентного цилиндрического колеса (d_{v1} и u_v) получим выражение

$$\sigma_H = Z_H Z_M \sqrt{\frac{F_{t1} K_H}{0,85 b d_{v1}} \cdot \frac{(u_v + 1)}{u_v}} \leq [\sigma_H],$$

которое после подстановки выражений для d_{v1} (14.69) и u_v (14.70) преобразуется в формулу для проверочного расчёта стальных прямозубых колёс на контактную выносливость

$$\sigma_H = Z_H Z_M \sqrt{\frac{F_{t1} K_H}{0,85 b d_{m1}} \cdot \frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u}} \leq [\sigma_H], \quad (14.71)$$

где $Z_H = 1,76$; $Z_M = 275 \text{ МПа}^{1/2}$ – соответственно, коэффициенты, учитывающий форму сопряжённых поверхностей, а также механические свойства материалов зубчатых колёс; $K_H = K_{H\beta} K_{Hv}$ – коэффициент нагрузки (см. рис. 14.24 и табл. 14.8).

Формула для проектного расчёта прямозубых конических передач на контактную усталость имеет следующий вид:

$$d_{m1} = K_d^3 \sqrt{\frac{T_2 K_{H\beta}}{0,85 \psi_{bd} [\sigma_H]^2} \cdot \frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u^2}}, \quad (14.72)$$

где для предварительных расчётов стальных колёс $K_d = 7700 \text{ Па}^{1/3}$; $K_{H\beta} \approx 1,3$; $\psi_{bd} \approx 0,166(u^2 + 1)^{0,5}$ – коэффициент ширины колеса относительно среднего диаметра шестерни (для $b/R_e = 0,285$).

По величине d_{m1} определяют внешний делительный диаметр d_{e1} , внешний делительный окружной модуль m_{te} и другие размеры колеса.

Расчёт зубьев прямозубой конической передачи на усталость при изгибе применяется как проверочный по отношению к расчёту контактную усталость. Формула проверочного расчёта на изгиб прямозубых конических передач имеет вид

$$\sigma_F = \frac{2 Y_F T_1 K_{F\beta} K_{Fv}}{0,85 d_{m1} b m} \leq [\sigma_F], \quad (14.73)$$

где Y_F – коэффициент формы зуба, определяемый по эквивалентному числу зубьев; m – средний делительный окружной модуль; $K_{F\beta}$ – коэффициент неравномерности нагрузки (см. рис. 14.24); K_{Fv} – коэффициент динамичности нагрузки (см. табл. 14.9).

Формула для проектного расчёта на изгиб прямозубых конических передач имеет вид

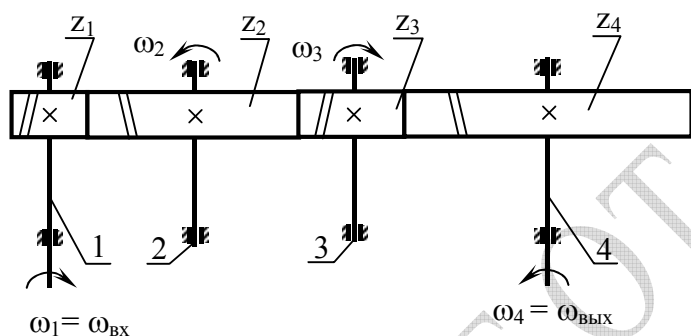
$$m = K_m \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{F\beta} Y_{F1}}{0,85 u z_1^2 \psi_{bd} [\sigma_{F1}]}} \quad (14.74)$$

где K_m – вспомогательный коэффициент, для стальных прямозубых колёс $K_m = 1,45$; z_1 – число зубьев шестерни (обычно задаются $z_1 = 18 \div 30$).

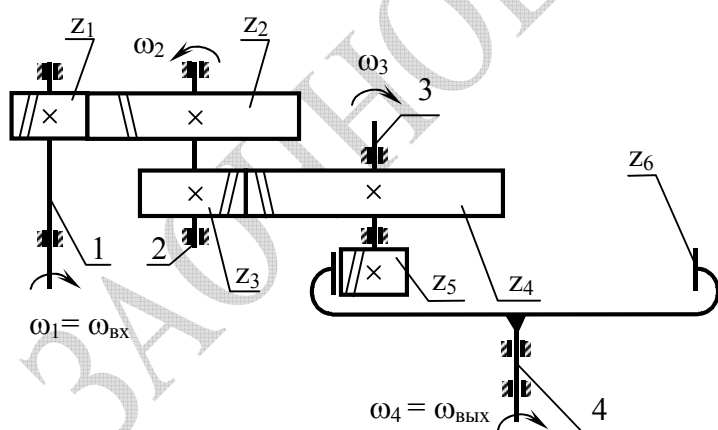
По средней величине модуля определяется производственный модуль m_e , который обычно округляют стандартного значения.

14.19. Ряды зубчатых колёс

Для получения больших передаточных отношений, для изменения направления вращения, для передачи движения между параллельными валами, находящимися на сравнительно больших



а)



б)

Рисунок 14.40

расстояниях применяют зубчатые передачи называемые *рядовыми (составными)*.

Ряды зубчатых колёс могут быть образованы как последовательным (рис. 14.40, а), так и

параллельным зацеплением зубчатых колёс (рис. 14.40, б). В первом случае на валах устанавливают одиночные, а во втором – сдвоенные колёса.

Наиболее широко применяются многоступенчатые передачи в виде рядов сдвоенных зубчатых колёс (рис. 14.40, б).

Механизмы, служащие для уменьшения частоты вращения и увеличения вращающего момента

называются *редукторами*. Механизмы, совершающие обратные преобразования, называются *мультипликаторами*.

Если передача понижающая ($\omega_{вх} > \omega_{вых}$), в данном случае, например, трёхступенчатый редуктор, то *входной* вал 1 называется *быстроходным*, *выходной* вал 4 – *тихоходным*, валы 2 и 3 –

промежуточными. Первые два зубчатых колеса (число зубьев z_1 и z_2) составляют *быстроходную ступень*; следующие два колеса (z_3 и z_4) – *промежуточную ступень*; последние два колеса (z_5 и z_6) – *тихоходную ступень* редуктора. В примере (рис. 14.40, б) последняя ступень с *внутренним зацеплением*.

Общее передаточное отношение редуктора $i_{ред}$ равно передаточному числу $u_{ред}$ и рассчитывается по известной формуле

$$i_{ред} = \pm \frac{\omega_{вх}}{\omega_{вых}} = u_{ред}, \quad (14.75)$$

где знак «+» указывает на совпадение направлений вращения входного и выходного валов, а знак «-» на их противоположное направление.

Передаточные отношения отдельных ступеней и передаточные числа ступеней трёхступенчатой передачи (рис. 14.37, б) определяются по формулам:

$$i_6 = \frac{-\omega_1}{\omega_2} = u_6 = \frac{-z_2}{z_1}; \quad i_n = \frac{-\omega_2}{\omega_3} = u_n = \frac{-z_4}{z_3}; \quad i_7 = \frac{\omega_3}{\omega_4} = u_7 = \frac{z_6}{z_5}.$$

При перемножении левых и правых частей уравнений получим:

$$i_6 i_n i_7 = (-1)^2 \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{\omega_2 \omega_3 \omega_4} = u_6 u_n u_7 = (-1)^2 \frac{z_2 z_4 z_6}{z_1 z_3 z_5}.$$

Поскольку угловые скорости ω_2 и ω_3 сокращаются, то видно, что *общее передаточное число многоступенчатой передачи (редуктора) равно произведению передаточных отношений (чисел) отдельных ступеней*

$$i_{ред} = u_{ред} = (-1)^k \prod_{i=1}^n u_i, \quad (14.76)$$

где k – количество внешних зацеплений; n – количество ступеней; u_i – передаточное число i -ой ступени.

При проектировании передачи передаточные отношения быстроходной (i_6), промежуточной (i_n) и тихоходной (i_7) ступени подбираются по условию минимума габаритов и массы редуктора, зависящих от общего передаточного числа ($i_{ред}$).

Из закона передачи момента с учетом КПД цилиндрической передачи ($\eta_{цп}$) и пары подшипников ($\eta_{пп}$) следует, что моменты на втором (промежуточном), третьем (промежуточном) и четвертом (тихоходном) валах соответственно равны

$$T_2 = T_1 u_6 \eta_{цп} \eta_{пп}, \quad T_3 = T_2 u_n \eta_{цп} \eta_{пп}, \quad T_4 = T_3 u_7 \eta_{цп} \eta_{пп},$$

где T_1 – момент на первом (входном) валу.

Знание величины крутящего момента позволяет выполнить предварительный расчет вала – определить из условия прочности на кручение диаметр вала.

Для многоступенчатой передачи с последовательным зацеплением пар колёс (рис. 14.40, а) формула (14.76) справедлива, однако, получая выражения для $i_{ред}$ и $u_{ред}$, несложно показать, что *промежуточные колеса (числа зубьев z_2 и z_3) не оказывают влияния на величину передаточного числа*. Эти колёса часто называют *паразитными* шестернями. Паразитные шестерни влияют лишь на направление вращения и на расстояние между входным и выходным валами. По этой причине многоступенчатые передачи с последовательным зацеплением пар колёс применяются достаточно редко, в маломощных редукторах, например в лентопротяжных устройствах приборов.

14.20. Контрольные вопросы

1. Какая передача называется зубчатой? Из каких элементов она состоит? В чём достоинства и недостатки зубчатых передач?
2. Дайте классификацию зубчатых передач.
3. Что называется передаточным числом зубчатой передачи?
4. Назовите сравнительные характеристики основных типов зубчатых передач?
5. В чём преимущества и недостатки косозубой передачи по сравнению с прямозубой?
6. Как связаны между собой торцовый и нормальный модуль косозубой передачи?
7. Какие силы действуют в зацеплении прямозубой и косозубой передачи? Напишите формулы этих сил.
8. Какие материалы применяются для изготовления зубчатых колёс?
9. На какие две группы подразделяются зубчатые колёса в зависимости от твёрдости активных поверхностей зубьев? Каковы особенности изготовления и области применения колёс этих двух групп?
10. Каковы способы изготовления зубчатых колёс в зависимости от их размеров?
11. Какими нормами характеризуется точность зубчатых передач? Какими бывают виды сопряжения?
12. Каковы виды повреждения зубьев и критерии работоспособности зубчатых передач?
13. От чего зависит неравномерность распределения нагрузки между зубьями передачи? Как называется и как выбирается коэффициент K_α ?

14. Чем вызвана неравномерность распределения нагрузки по длине контактных линий зубьев? Как называется и как выбирается коэффициент K_β ?
15. Чем обусловлено возникновение внутренних динамических нагрузок при зацеплении колёс? Как называется и как выбирается коэффициент K_v ?
16. Каковы выражения для коэффициентов нагрузки при расчёте зубьев на контактную усталость и изгиб?
17. По какому критерию работоспособности, и в какой форме выполняют предварительный проектный расчёт зубчатых передач? Как на этом этапе расчёта определяют модуль передачи?
18. Какова расчётная схема зуба при расчётах на изгиб? Где находится опасная точка?
19. В какой форме выполняется проектный расчёт колеса на изгиб?
20. Изобразите кривую усталости, используемую для определения предела выносливости? Что называется пределом выносливости?
21. Приведите формулы для допускаемых напряжений при расчётах на контактную выносливость и изгиб. Прокомментируйте параметры, входящие в данные формулы.
22. Что называется коэффициентом долговечности, как он определяется?
23. Как преобразуют циклограмму нагружения для её математической обработки?
24. Назовите и охарактеризуйте типовые режимы нагружения.
24. В чём отличие зацепления Новикова от эвольвентного? Какова область применения этого вида зацепления? Достоинства и недостатки зацепления Новикова.
25. Чем геометрически отличаются профили зубьев передач Новикова с одной и с двумя линиями зацепления?
26. Какова область применения конических зубчатых передач? Какими бывают конические зубчатые передачи?
27. Основные геометрические и кинематические соотношения для конической передачи.
28. Для чего коническое колесо заменяют на эквивалентное цилиндрическое колесо?
29. Силы, действующие в зацеплении конической передачи.
30. Основные принципы расчёта конических зубчатых передач.
31. Каково назначение и виды рядов зубчатых колёс?
32. Какая передача называется редуктором, а какая мультипликатором?
33. Как определить передаточное отношение и КПД многоступенчатой передачи, а также моменты на её валах?

Глава 15. Планетарные и волновые передачи

15.1. Планетарные передачи

Многоступенчатые зубчатые передачи в виде рядов зубчатых колёс могут иметь как неподвижные оси зубчатых колёс, так и оси, которые перемещающиеся в пространстве. *Зубчатые передачи, у которых оси зубчатых колёс подвижны, называются эпициклическими или планетарными.* Эти передачи при одном ведущем звене называют планетарными (имеют одну степень свободы), а при двух ведущих звеньях – *дифференциальными* (имеют две степени свободы). Частные виды планетарных передач это – волновые и прецессирующие передачи.

Планетарные механизмы получили свое название из-за того, что движение звеньев механизма напоминает движение планет (спутников от лат. *satelles*) вокруг солнца. Отличительными звеньями любого планетарного механизма (рис. 15.1, а, б, в) являются *неподвижное опорное зубчатое колесо 0, центральное (солнечное) колесо 1, водило Н, сателлит 2-2'*. Сателлиты бывают одиночными или сдвоенными 2-2' зубчатыми колёсами (рис. 15.1). Водило имеет два – три симметрично расположенных сателлита, что не сказывается на кинематике, а лишь обеспечивает симметричность и уменьшение нагрузок действующих на зубья, габариты передачи при этом сокращаются.

Ведущим (входным) звеном обычно является центральное колесо 1, а выходным – водило Н. Сателлит 2-2' совершает сложное движение: переносное вращение вместе с водилом Н, несущим ось сателлита, и вращение на этой оси относительно водила.

Дифференциальный механизм (дифференциал) (рис. 15.1, г, д, е) легко получить из планетарного, сделав подвижным относительно станины С опорное колесо, и превратив его во второе центральное колесо 3. Дифференциальные механизмы позволяют осуществить сложение (или вычитание) скоростей, идущих от разных источников. В дифференциальных передачах, общем случае, из трех звеньев 1, 0, Н любые два являются входными, а одно из них выходным.

Планетарные передачи конструктивно существенно сложнее обычных рядовых передач, однако они очень компактны, обладают малой массой (в 2 ÷ 4 и более раз), передаточные числа достигают 1000. Существует большое количество различных типов планетарных механизмов: они могут быть одно-, двух- и даже трёхступенчатыми. В планетарных передачах находят применение не только цилиндрические и конические колёса, но даже червячные колёса. Зубья могут быть прямые, косые, с коррекцией и без неё.

Достоинства планетарных передач объясняется тем, что мощность передаётся по нескольким потокам, число которых равно числу сателлитов. При этом нагрузка на зубья в каждом зацеплении умень-

шается в несколько раз. К недостаткам планетарных передач относятся повышенные требования к точности изготовления и монтажа.

Кинематика эпициклических передач отличается от кинематики рядовых передач. Известно, что общее передаточное отношение (число) для ступенчатого ряда зубчатых колес с неподвижными осями равно произведению передаточных чисел отдельных ступеней (14.76).

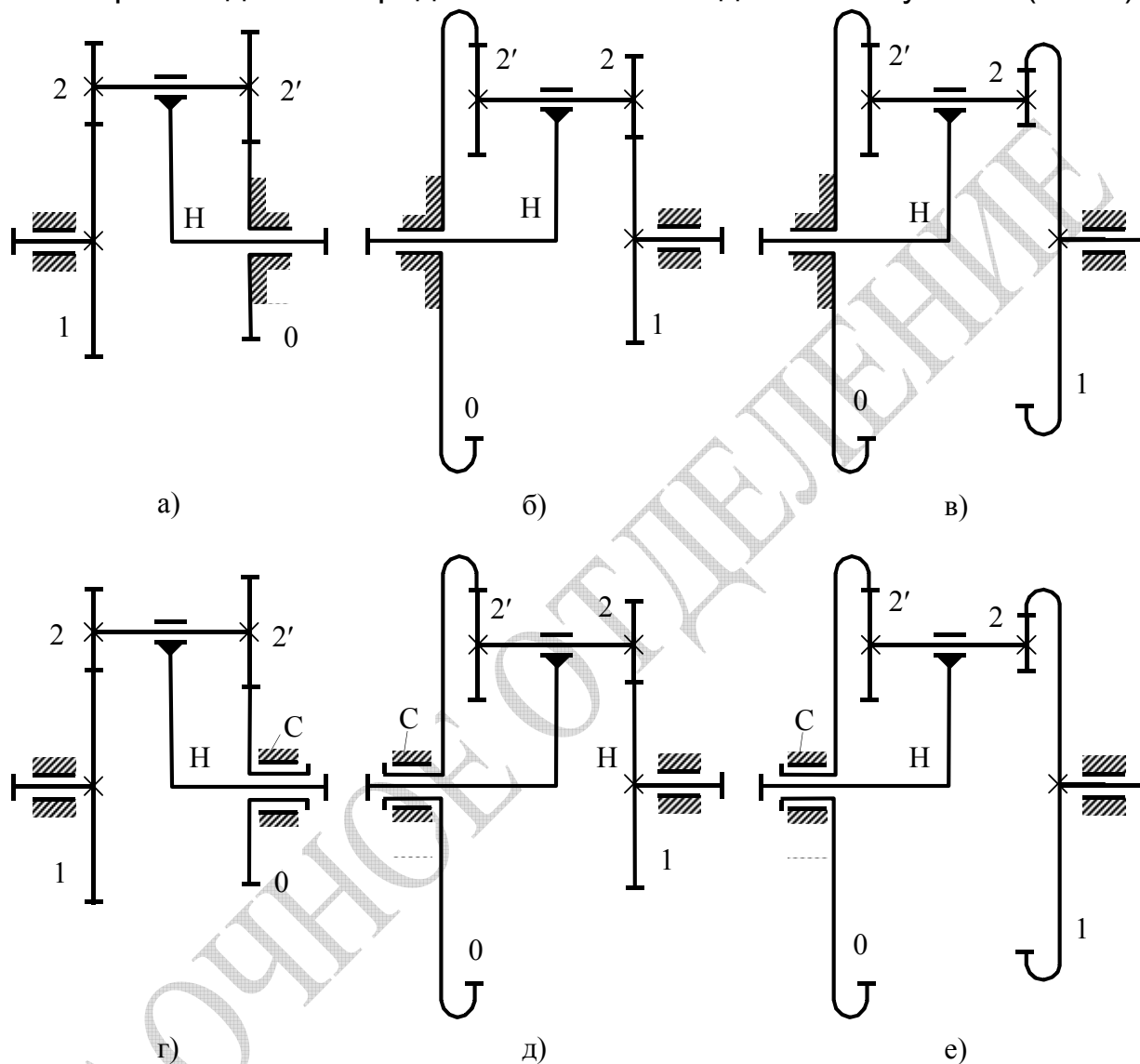


Рисунок 15.1

Для получения общего выражения для передаточных отношений (чисел) простых эпициклических передач рассмотрим простейший планетарный механизм – редуктор Джемса (рис. 15.2, а). Ведущим звеном является центральное колесо 1, выходным – водило Н, опорным – колесо 0 (неподвижное). Передаточное отношение (число) от колеса 1 к водилу Н при неподвижном опорном 0 (неподвижное звено указано в скобках) имеет вид

$$i_{1-H}^{(0)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = u_{1-H}^{(0)}.$$

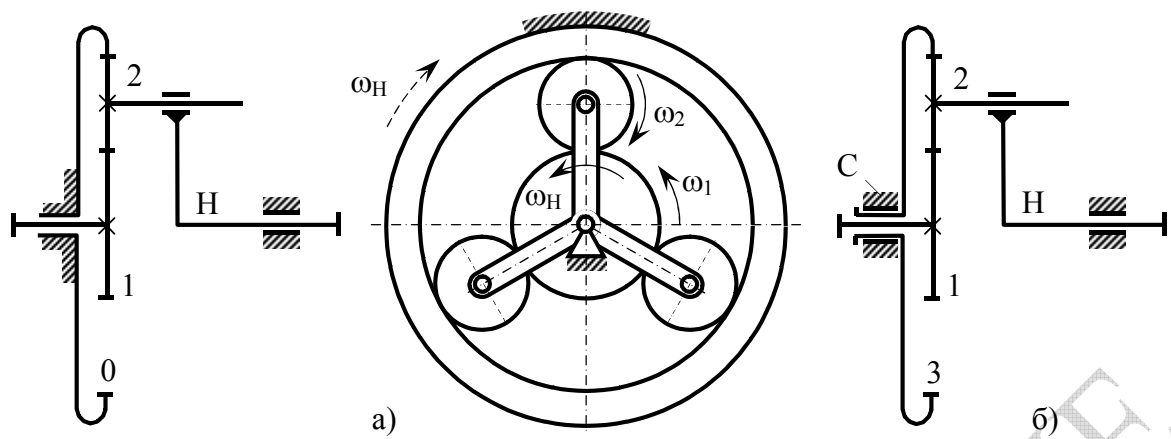


Рисунок 15.2

Воспользуемся методом обращения движений (метод Виллиса): всем звеньям механизма придадим дополнительное вращение с угловой скоростью водила ω_H , но в сторону противоположную вращению последнего, т.е. с отрицательным знаком (рис. 15.2, а; табл. 15.1):

Таблица 15.1 Скорости в исходном и преобразованном механизмах

Звено	Угловая скорость	
	В исходном механизме	В преобразованном механизме
0	0	$-\omega_H$
1	ω_1	$\omega_1 - \omega_H$
2	ω_1	$\omega_1 - \omega_H$
H	ω_H	0
любое колесо m	ω_m	$\omega_m - \omega_H$

Таким образом, водило становится неподвижным и планетарный механизм превращается в рядовой зубчатый механизм с неподвижными осями. Передаточное отношение в преобразованном механизме от колеса 1 к колесу 0 при неподвижном водиле H

$$i_{1-H}^{(0)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1-H}^{(H)}.$$

Из данного уравнения получаем зависимость для определения передаточного отношения i (числа u) планетарного механизма: *передаточное отношение от любого колеса m к водилу H при неподвижном опорном колесе равно единице минус передаточное отношения от этого колеса m к опорному при неподвижном водиле H*

$$i_{m-H}^{(0)} = 1 - i_{m-0}^{(H)}, \text{ или } u_{m-H}^{(0)} = 1 - u_{m-0}^{(H)}. \quad (15.1)$$

Для редуктора Джемса (рис. 15.2, а) искомое передаточное число $u_{ред}$ может быть выражены через число зубьев z колес следующим образом

$$u_{1-H}^{(0)} = 1 - \frac{-z_2}{z_1} \cdot \frac{z_0}{z_2} = 1 + \frac{z_0}{z_1} = u_{ред}. \quad (15.2)$$

Для получения соотношения между угловыми скоростями звеньев *дифференциальной передачи* также пользуются методом обращения движений. Для дифференциала (на рис. 15.2, б) "остановка" водила позволяет получить следующее выражение, которое связывает угловые скорости всех звеньев с числами зубьев колес

$$u_{1-3}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{-z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = -\frac{z_3}{z_1}.$$

Из силовой схемы (рис. 15.3) планетарного механизма следует, что вращающий момент T , приложенный к центральному колесу 1 вызывает появление окружных сил в точках контакта сателлита 2 с центральным колесом 1 и с опорным колесом 0. Поскольку нагрузка между отдельными сателлитами, установленными на водиле H , распределяется неравномерно, то в расчёты вводят специальный коэффициент. Из условия равновесия сателлита следует, что

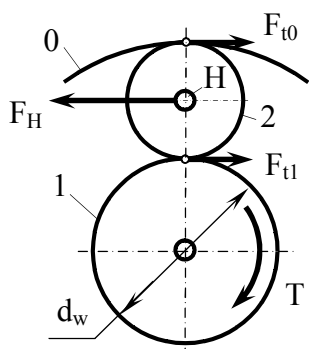


Рисунок 15.3

$$\left. \begin{aligned} F_{t1} &= F_{t0} \\ F_H &= -2F_{t0} \\ F_{t1} &= 2TK_w / (d_w c) \end{aligned} \right\}, \quad (15.3)$$

где c – число сателлитов; K_w – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки между сателлитами.

Радиальные и осевые нагрузки в зацеплении определяют так же, как и в простых передачах при известной окружной силе $F_{t1} = F_{t0}$.

Величина K_w зависит от точности изготовления и числа сателлитов. Выравнивание нагрузки между сателлитами можно осуществить, если исключить жесткие опоры центрального колеса. При наличии механизма выравнивания нагрузки, например, установке «плавающих» центральных колёс при числе сателлитов ($c = 3$) можно принимать $K_w = 1,1 \div 1,2$; при отсутствии механизма выравнивания нагрузки $K_w = 1,5 \div 2$.

Особенностью проектирования планетарной передачи является то, что её расчёт начинается с выбора числа зубьев при выполнении

трёх следующих условий сборки: *соосности, симметричного размещения сателлитов, соседства.*

Например, для редуктора Джемса (рис. 4.2, а) при заданном передаточном числе ($u_{ред} = 1,3 \div 12$), задавшись предварительно z_1 (рекомендуется $z_1 = 21 \div 24$ для колёс с $H \leq 350$ HB; $z_1 = 18 \div 21$ для колёс с $H = (35 \div 52)$ HRC; $z_1 < 18$ для колёс с $H > 52$ HRC) из (4.2) определяют z_0 .

Полученные значения z_1 и z_0 уточняют по условиям сборки.

Условие соосности

$$\frac{d_1}{2} + d_2 = \frac{d_0}{2} \text{ или } z_2 = (z_0 - z_1)/2. \quad (15.4)$$

Условие симметричного размещения сателлитов (как одинарных, так и сдвоенных) требует, что бы z_1 и z_0 были кратны числу сателлитов c ; доказано, также что

$$(z_1 + z_2)/c - \text{целое число}. \quad (15.5)$$

Условие соседства предусматривает наличие гарантированного зазора между сателлитами

$$2\left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}\right) \sin(\pi/c) > 2\left(\frac{d_2}{2} + m\right), \text{ или } (z_1 + z_2) \sin \frac{\pi}{c} > (z_2 + 2). \quad (15.6)$$

Для расчёта прочности зубьев планетарных передач используются те же зависимости, что и при расчёте простых передач. Расчёт выполняют для каждого зацепления, однако поскольку модули для всех зацеплений одинаковы, а внутреннее зацепление прочнее наружного, то для случая, приведённого на рис. 15.2, а, достаточно рассчитать только зацепление центрального колеса 1 и сателлита 2. Зависимость (14.39) для расчёта диаметра шестерни, обеспечивающего контактную прочность передачи применительно к планетарным передачам дополнительно учитывает число сателлитов c и коэффициент K_w

$$d_{w1} = K_d \sqrt[3]{\frac{T_1 K_H}{\psi_{bd} [\sigma_H]^2} \cdot \frac{K_w \cdot (u \pm 1)}{c \cdot u}}, \quad (15.7)$$

где для планетарных передач $\psi_{bd} \leq 0,75$; $[\sigma_H]$ – допускаемые контактные напряжения определяются также как и для цилиндрических передач, но при определении эквивалентного числа циклов нагружения по формулам (14.58, 14.59) частоту вращения принимают относительно водила $n = |n_i - n_H|$.

Расчёт зубьев на выносливость при изгибе проводят по формулам (14.50, 14.51).

15.2. Волновые зубчатые передачи

Волновая передача действует по принципу преобразования движения за счёт волнового деформирования одного из звеньев механизма – гибкого звена, при помощи специального устройства – *генератора волн*. Этот принцип преобразования движения впервые был предложен инженером А.И. Москвитиным в 1944 г для варианта фрикционной передачи с электромагнитным генератором волн и затем В. Массером в 1959 г для зубчатой передачи с механическим генератором. Разработано много разновидностей волновых передач, зубчатых, фрикционных, винтовых, в том числе и многоступенчатых. Волновые передачи можно применять как редуктор, мультипликатор, дифференциальный механизм и как вариатор скорости. Наибольшее распространение получили зубчатые волновые передачи.

Основными элементами волновой зубчатой передачи (рис. 15.3) являются гибкое колесо 1, зубья которого нарезаны на упругой тонкостенной оболочке (из полимера или из металла), жёсткое опорное колесо 0, *генератор волн*, состоящий из водила Н и нескольких симметрично расположенных роликов. Число зубьев гибкого колеса z_1 обычно на 2÷3 меньше, чем число зубьев z_0 на опорном колесе.

Ведущее звено водило, вращаясь, создает волнообразную деформацию гибкого колеса 1, причем зона зацепления колес 1 и 0 перемещается и сменяется зазором Δ . Волнообразная деформацией обеспечивает передачу и преобразование вращательного движения.

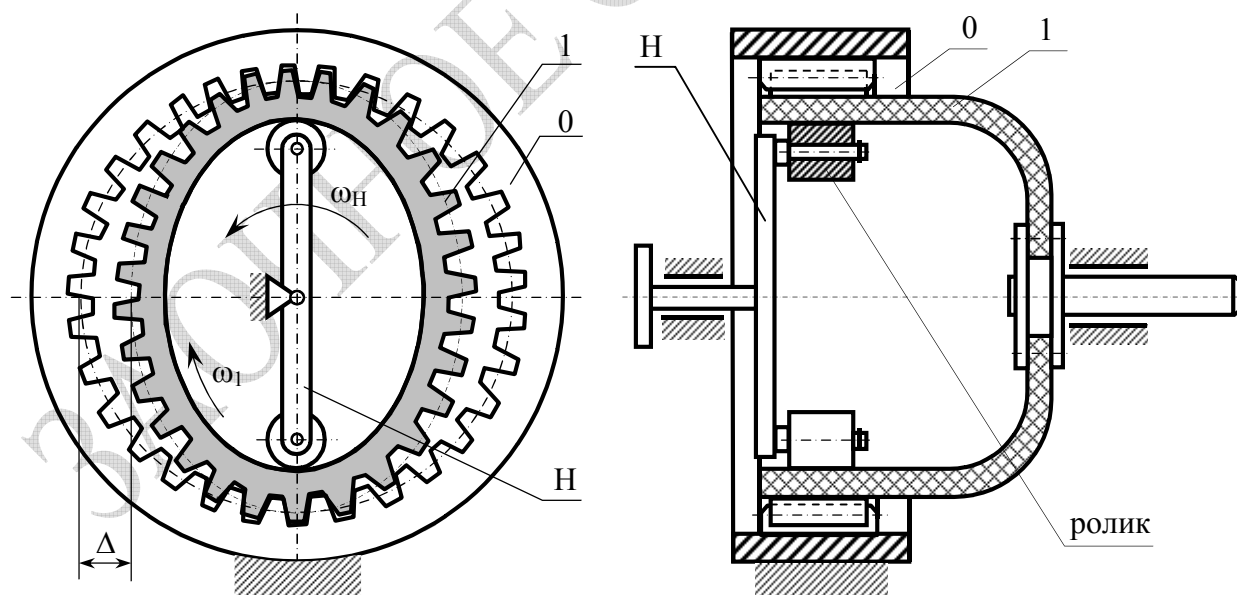


Рисунок 15.3

На приведённой схеме (рис. 15.3) выходное звено – гибкое звено 1 (при неподвижном опорном колесе 0).

Тонкостенная оболочка гибкого звена может быть выполнена в виде цилиндра, усечённого конуса, колокола, узкого кольца или трубы. Зу-

бья, нарезаемые на гибком звене, имеют эвольвентный профиль с уменьшенной высотой и широкой впадиной. При большом числе зубьев ($z > 100$) форма профиля зуба близка к трапецеидальному. Зубья жёсткого колеса нарезаются стандартным инструментом, а зубья гибкого колеса – модифицированным инструментом, отличающимся от стандартного только высотой головки зуба.

Генератор волн может быть исполнен в виде водила с двумя (см. рис. 15.3), тремя, четырьмя роликами, однако чаще используются кулачковые генераторы волн (см. рис. 15.4). Кулачки выполняют по форме деформирования гибких звеньев. Для уменьшения трения между кулачком и гибким звеном помещают тела качения. Кулачковый генератор лучше других сохраняет заданную форму деформирования.

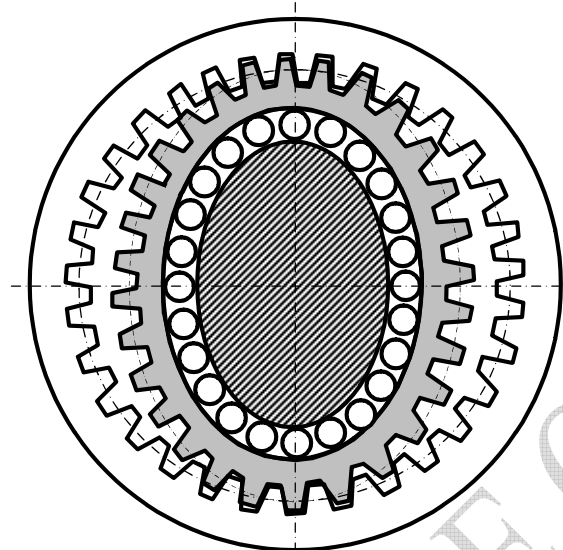


Рисунок 2.46

Для обеспечения работоспособности механизма (рис. 15.3) необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\Delta > h,$$

где h – высота зуба.

Волновые зубчатые передачи имеют ряд достоинств: возможность обеспечения больших передаточных отношений, которые в одноступенчатых передачах достигают 250, а в двухступенчатых 50000 и более; высокий КПД (70÷90%); широкий диапазон передаваемых мощностей от 0.02 до 3000 кВт; большой коэффициент

перекрытия; повышенная кинематическая точность при средней точности изготовления звеньев; низкий уровень контактных напряжений (зубья рассчитываются только на выносливость при изгибе); малый шум при работе.

Перечисленные преимущества волновой передачи – следствие того, что в зацеплении одновременно находится 10÷50% зубьев.

К недостаткам волновых передач относятся сложная технология изготовления деталей, ограничение частоты вращения генератора волн из-за возникновения вибраций, а также отсутствие конструкций, у которых оси валов пересекаются или скрещиваются.

Важнейшее принципиальное отличие волновых передач от других заключается в возможности передачи вращательного движения в герметически замкнутый объём (или из герметически замкнутого объёма) без использования подвижных уплотнений, например, сальниковых или торцевых, что очень важно для повышения надёжности оборудования опасных производств. В подобных конструкциях (рис. 15.5)

гибкое колесо 1 закрепляется неподвижно, а вращательное движение от генератора волн Н передаётся на подвижное колесо 0 посредством волнообразной деформации колеса-оболочки.

Поскольку волновая передача – разновидность планетарной передачи, то для получения выражения для передаточного числа можно воспользоваться формулой (15.1). Например, применительно к механизму с подвижным гибким звеном (рис. 15.3) согласно формуле (15.1), с учётом того, что передаточное отношение (число) от входного звена к выходному и от выходного к входному обратно пропорциональны, получим выражение для передаточного числа

$$u_{H-1}^{(0)} = \frac{1}{u_{1-H}^{(0)}} = \frac{1}{1 - u_{H-1}^{(0)}} = \frac{1}{1 - \frac{z_0}{z_1}} = \frac{z_1}{z_1 - z_0},$$

где z_1, z_0 – соответственно число зубьев на гибком звене и на опорном колесе.

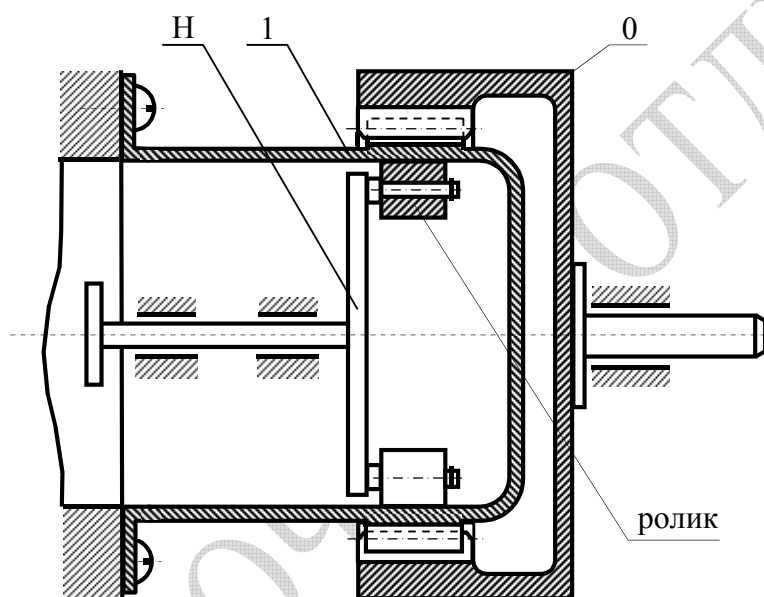


Рисунок 15.5

Если, например, принять $z_1=300$, а $z_0=303$, то получим, $u_{H-1}^0 = -100$, что является очень большой величиной для одноступенчатой передачи. Знак «-» указывает на противоположное вращение выходного вала гибкого колеса по отношению к водилу.

Основными критериями работоспособности волновых передач являются:

прочность гибкого колеса, прочность подшипников генератора, жёсткость генератора и опорного колеса, износ зубьев.

Основные параметры одноступенчатых волновых зубчатых редукторов общего назначения с вращающимися моментами на тихоходном валу от 22,4 до 6300 Нм и передаточными отношениями от 80 до 315 стандартизованы (ГОСТ 23108-78). Технический ресурс волновых зубчатых редукторов составляет 10^4 часов.

15.3. Контрольные вопросы

1. Какие передачи называются планетарными? В чём их отличие от обычных зубчатых передач?
2. Чем планетарная передача отличается от дифференциальной?
3. Из каких основных звеньев состоит планетарная передача?
4. В чём достоинства и недостатки планетарных передач?
5. Какой метод используется для получения выражения для передаточного числа планетарной передачи? Напишите формулу для передаточного числа одноступенчатой планетарной передачи.
6. Какова схема сил, действующих в планетарных передачах? Каково условие равновесия сателлита?
7. В чём заключаются условия соосности, симметричного размещения сателлитов, соседства, т.е. условия сборки планетарной передачи?
8. Какие зависимости используются для расчёта колёс планетарной передачи?
9. Из каких элементов состоит волновая передача? Каков принцип работы этой передачи?
10. В чём достоинства и недостатки волновых передач?
11. Как определяется передаточное число волновой передачи?
12. Какие виды генераторов волн используются в волновых передачах?
13. Какой профиль имеют зубья волновой передачи?
14. Каковы основные критерии работоспособности элементов волновых передач?

Глава 16. Червячные передачи

16.1. Классификация червячных передач

Распространенной передачей зацеплением является *червячная передача*, которую образуют *червяк* (звено в виде винта) и *червячное колесо* (звено в виде разновидности косозубого колеса) (рис. 16.1).

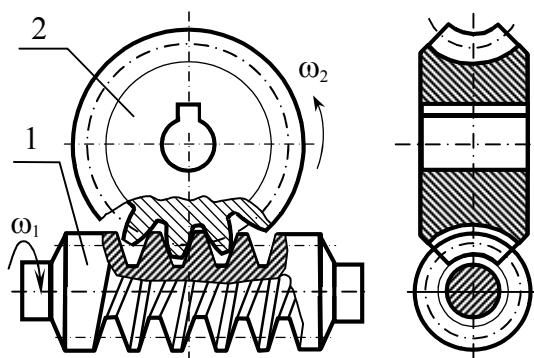


Рисунок 16.1

Червячные передачи отличаются от зубчатых передач принципом работы – движение в червячной передаче преобразуется по принципу наклонной плоскости (т.е. клина в виде винта), тогда как в зубчатых – по принципу рычага.

В отличие от косозубого колеса цилиндрической передачи зубчатый венец (обод) червячного колеса имеет вогнутую форму. Оси валов червяка и червячного колеса располагаются в разных плоскостях, и скрещиваются в пространстве обычно под углом 90° . Чаще всего ведущее звено червячной передачи червяк, но в некоторых случаях используются механизмы, в которых ведущим звеном является червячное колесо.

В отличие от косозубого колеса цилиндрической передачи зубчатый венец (обод) червячного колеса имеет вогнутую форму. Оси валов червяка и червячного колеса располагаются в разных плоскостях, и скрещиваются в пространстве обычно под углом 90° . Чаще всего ведущее звено червячной передачи червяк, но в некоторых случаях используются механизмы, в которых ведущим звеном является червячное колесо.

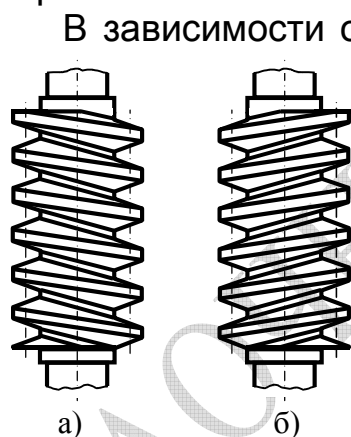


Рисунок 16.2

В зависимости от направления резьбы червяка («снизу вверх налево» или «снизу вверх направо») различают левозаходные червяки (рис. 16.2, а) и правозаходные червяк (рис. 16.2, б). По направлению резьбы червяка именуются и сами червячные передачи: *левозаходные* и *правозаходные*. Червяки могут иметь от одного до четырех заходов z_1 .

Передаточное отношение (число) червячной передачи, как это будет показано ниже, равно отношению числа зубьев колеса z_2 к числу заходов червяка z_1 , т.е. $i = \omega_1 / \omega_2 = u = z_2 / z_1$.

Червячные передачи обеспечивают большие значения передаточных отношений по сравнению с зубчатыми передачами: в специальных установках оно доходит до $u = 1000$ и более. Некоторые параметры червячных передач (u , наибольшая окружная скорость (V_{\max}), КПД передачи) приведены в таблице 16.1.

Основные достоинства червячных передач это – большие передаточные числа, компактность, плавность, бесшумность, надёжность и простота эксплуатации, а также свойство самоторможения. Самоторможение заключается в невозможности передачи вращения от колеса к червяку, что позволяет исключить из привода тормозные устройства.

Таблица 16.1 – Основные характеристики червячных передач

Параметры	
Передаточные числа $u_{\min} \div u_{\max}$	3 ÷ 100
Окружная скорость передачи V_{\max} , м/с	25 ÷ 50
Коэффициент полезного действия (η), %	50 ÷ 90

Основные недостатки передачи вызваны большим относительным скольжением сопряженных поверхностей в зацеплении. Высокая скорость скольжения $V_{ск}$ в зацеплении приводит к значительным потерям на трение, следствием чего является низкий КПД, склонность витков червяка и зубьев к заеданию и необходимость применения для венцов колёс дорогих антифрикционных материалов, т.е. материалов обеспечивающих малые потери на трение. Из-за этих недостатков червячные передачи применяют реже зубчатых и для передачи относительно небольших и средних мощностей, обычно до 50 кВт.

Основными видами червячных передач являются: цилиндрическая червячная передача, у которой делительные и начальные поверхности цилиндрические (рис. 16.3, а); глобоидная передача, у которой делительная поверхность червяка торообразная, а колеса цилиндрическая (рис. 16.3, б); червячно-реечная передача (рис. 16.3, в).

Цилиндрические червячные передачи или просто червячные пе-

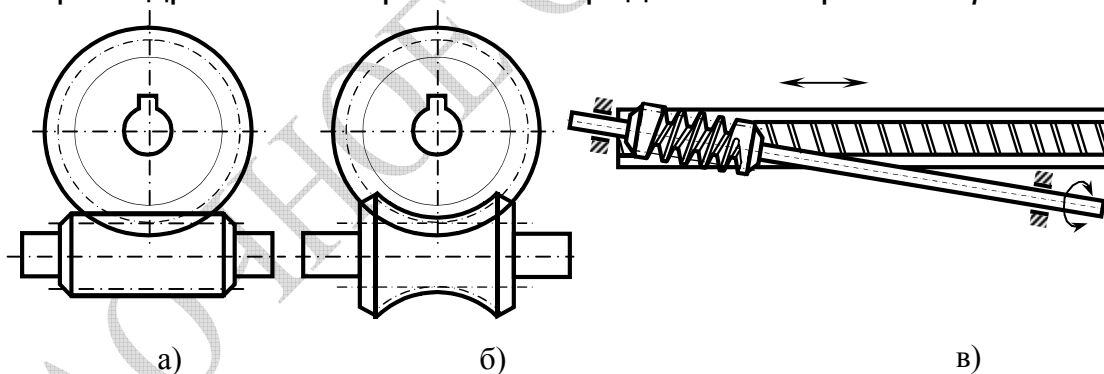


Рисунок 16.3

редачи наиболее распространены. Глобоидные червячные передачи способны передавать нагрузку больше чем цилиндрические – в 1,5 – 4 раза. Повышенная нагрузочная способность объясняется тем, что в глобоидной передаче в зацеплении находится большее число витков червяка и зубьев колеса. Существенным недостатком глобоидных передач является то, что они требуют повышенной точности изготовления и монтажа, а так же усиленного охлаждения. Червячно-реечные передачи по сравнению с зубчато-реечными обеспечивают большую плавность работы и имеют большую жесткость; оси червяка и рейки могут располагаться под углом или быть параллельны.

В зависимости от профиля витков цилиндрических червяков различают червяки: *архимедовы, конволютные, эвольвентные и с вогнутым профилем витков*. *Архимедов червяк* (в соответствии с ГОСТ 18298-73 обозначение червяка – *ЗА*) в продольном (осевом) сечении имеет трапецеидальный профиль витков (рис. 16.4, а), а в поперечном (торцевом) сечении витки очерчены архимедовой спиралью. *Конволютный червяк* (червяк *ZN*) в плоскости нормальной к поверхности витков имеет трапецеидальный профиль, в осевом сечении – выпуклый профиль, а в поперечном сечении профиль в виде конволюты (удлинённой или укороченной эвольвенты). *Эвольвентный червяк* (червяк *ZI*) в осевом сечении имеет выпуклый профиль, в торцевом сечении имеет эвольвентный профиль витков (рис. 16.4, б). *Червяки с вогнутым профилем витков* имеют большую поверхность контакта с зубьями червячных колёс (рис. 16.4, в). Поскольку в передачах с архимедовыми, конволютными и эвольвентными червяками профиль

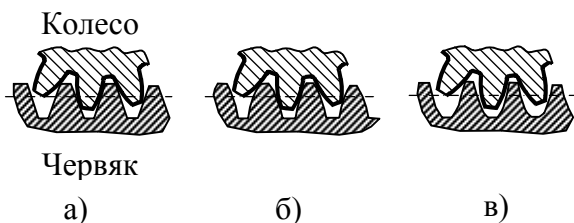


Рисунок 5.4

зубьев червячных колёс эвольвентный (рис. 16.4, а, б), то, следовательно, в сечении, проходящем через ось червяка и среднюю плоскость колеса, зацепление червячной передачи соответствует зацеплению зубчатого колеса с зубчатой рейкой.

В глобоидных червячных передачах в продольном (осевом) сечении червяки имеют обычно трапецеидальный профиль витков, профиль зубьев колеса тоже трапецеидальный.

Конструктивно червячные передачи чаще всего делают в закрытом исполнении, т.е. в виде червячных редукторов: с верхним расположением червяка (рис. 16.5, а), с боковым расположением червяка (рис. 16.5, б), с нижним расположением червяка (рис. 16.5, в).

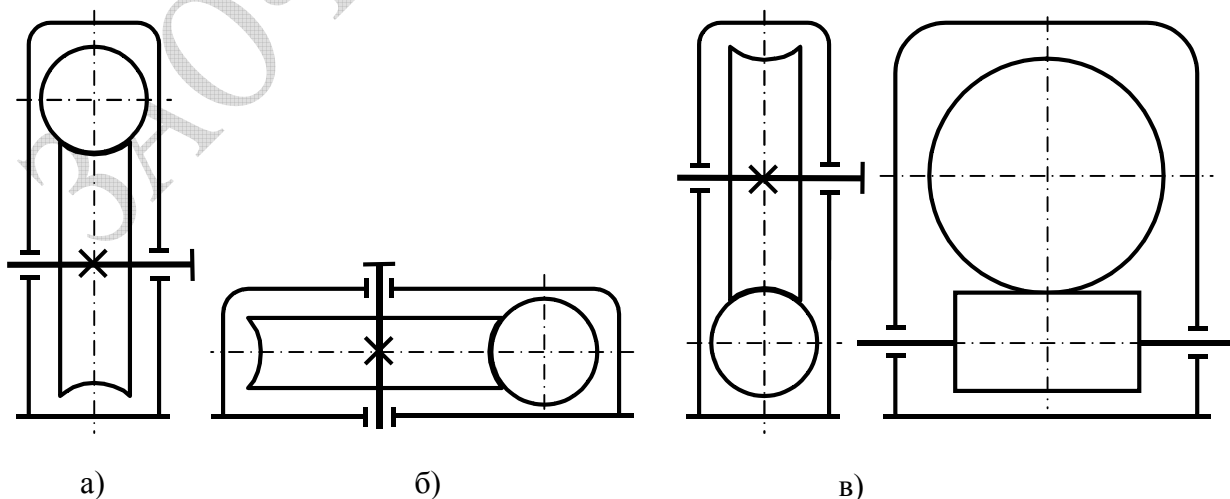


Рисунок 16.5

16.2. Материалы червяка и червячного колеса

Червяки изготавливают из стали. Архимедовы и конволютные червяки не шлифуют, и для передач с мощностью до 2÷3 кВт чаще всего изготавливают из термически улучшенных сталей (35, 45, 50, 35ХМ и др.) с твёрдостью поверхности не менее 350 НВ.

В передачах средней и высокой мощности применяют эвольвентные червяки изготовленные из стали 40ХН, 12ХН3А, 20ХН3А, 30ХГСА, 30ХГСА, 20Х и др. с твёрдостью поверхностей витков 45÷50 HRC. Червячные валы серийных редукторов изготавливают: из сталей 18ХГТ, 20Х с цементацией рабочих поверхностей витков и участков вала под уплотнительные манжеты (56÷62 HRC); твёрдость остальных участков вала 229÷269 НВ); из стали 40Х с закалкой до твёрдости рабочих поверхностей 50÷55 HRC, остальных 229-269 НВ. После термообработки рабочие поверхности витков шлифуют и полируют.

Материалы зубчатых венцов червячных колёс, составляя с материалом червяков *пару трения* с низким коэффициентом трения, по мере убывания антизадирных и антифрикционных свойств и в зависимости от рекомендуемых скоростей скольжения условно делятся на три группы (табл. 16.2).

Таблица 16.2 Материалы червячных колёс

Группа	Материал и скорость скольжения	Способ отливки	$\sigma_{\text{в}}$, МПа	$\sigma_{\text{т}}$, МПа
I Оловянистые бронзы	БрО10Н1Ф1 $V_{\text{ск}} \leq 25$ м/с	ц	285	165
	БрО10Ф1 $V_{\text{ск}} \leq 12$ м/с	к	245	195
		п	215	135
II Безоловянистые бронзы и латуни	БрА10Ж4Н4 $V_{\text{ск}} \leq 5$ м/с	ц	700	460
		к	650	430
	БрА10Ж3Мц1,5 $V_{\text{ск}} \leq 5$ м/с	к	550	360
		п	450	300
	БрА9Ж3Л $V_{\text{ск}} \leq 5$ м/с	ц	500	200
		к	490	195
	ЛАЖМц66–6–3–2 $V_{\text{ск}} \leq 4$ м/с	п	390	195
		ц	500	330
III Мягкие серые чугуны	СЧ15, СЧ20 $V_{\text{ск}} \leq 2$ м/с	к	450	295
		п	400	260
		п	$\sigma_{\text{ви}} = 320$ МПа	
		п	$\sigma_{\text{ви}} = 360$ МПа	

Примечание. Способы отливки: ц – центробежный; к - в кокиль; п – в песок (при единичном производстве)

Червячные колёса открытых передач и передач небольшой мощности с ручным приводом изготавливают из чугунов. Червячные колёса в передачах малой мощности могут изготавливаться из капрона и других неметаллических материалов.

Предварительное значение скорости скольжения в червячном зацеплении $V_{ск}$ (м/с), необходимое для выбора материала колёс, определяют по формуле

$$V_{ск} = 0,45 \cdot 10^{-3} n_2 u \sqrt[3]{T_2} , \quad (16.1)$$

где n_2 – частота вращения колеса, мин^{-1} ; u – передаточное число; T_2 – вращающий момент на валу колеса, Нм.

16.3. Геометрические параметры червячных передач

Геометрические параметры червячных передач регламентированы ГОСТ 19650-74. На рисунке 16.6 показана схема расположения винтовых линий двухзаходного правого червяка. Расстояние вдоль оси червяка между одноименными точками боковых поверхностей смежных витков червяка называется *шагом червяка* P (рис. 16.6). Как и в зубчатых передачах отношение $P/\pi = m$ – *модуль*. *Ход червяка* P_z – это расстояние между одноименными точками одной и той же винтовой линии вдоль оси червяка (рис. 16.6). Угол подъёма винтовой линии γ (обычно $5 \div 20^\circ$) может быть определён на развёртке винтовой линии (рис. 16.6)

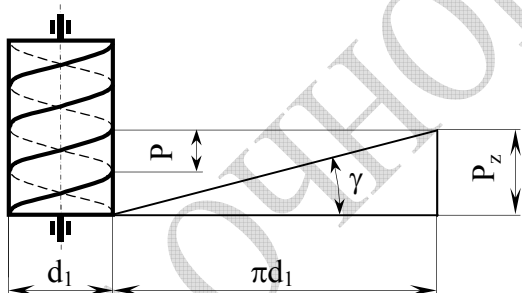


Рисунок 16.6

$$\text{tg} \gamma = \frac{P_z}{\pi d_1} = \frac{P z_1}{\pi d_1} , \quad (16.2)$$

где d_1 – диаметр делительной окружности червяка; $z_1 = 1; 2; 4$ – число витков (заходов) червяка.

Выражая шаг P через модуль, из (16.2) получим

$$d_1 = m z_1 / \text{tg} \gamma . \quad (16.3)$$

Для изготовления червячных колёс применяют метод копирования – колёса нарезают фрезами, режущие кромки которых при вращении образуют поверхности, идентичные поверхности витков червяка, а наружный диаметр инструмента принимается больше на двойную величину радиального зазора. Для сокращения ассортимента режущего инструмента введён *коэффициент диаметра червяка*

$$q = d_1 / m . \quad (16.4)$$

Наиболее употребительные значения модулей m и коэффициентов диаметра червяка q (ГОСТ 2144 – 76) приведены в таблице 16.3.

Таблица 16.3 Модули m и коэффициенты диаметра червяка q

m	q	m	q	m	q
1,6	10; 12,5; 16; 20	3,15	8; 10; 12,5; 16; 20	6,3; 8; 10; 12,5	8; 10; 12,5; 14; 16; 20
2	8	4	8; 10; 12,5; 16; 20	16	8; 10; 12,5; 16
2,5	8; 10; 12,5; 16; 20	5	8; 10; 12,5; 16; 20	20	8; 10

Примечание. Приведённым сочетаниям m и q соответствуют значения $z_1=1, 2$ и 4

Для червячных передач с архимедовыми червяками (рис. 16.7, а) в осевом сечении угол профиля $\alpha = 20^\circ$; коэффициент высоты головки зуба $h_a^* = 1$; коэффициент высоты ножки зуба $h_f^* = 1,2$; коэффициент радиального зазора $c^* = 0,2$. Размеры червячного колеса (рис. 16.7, б) контролируются в среднем сечении колеса.

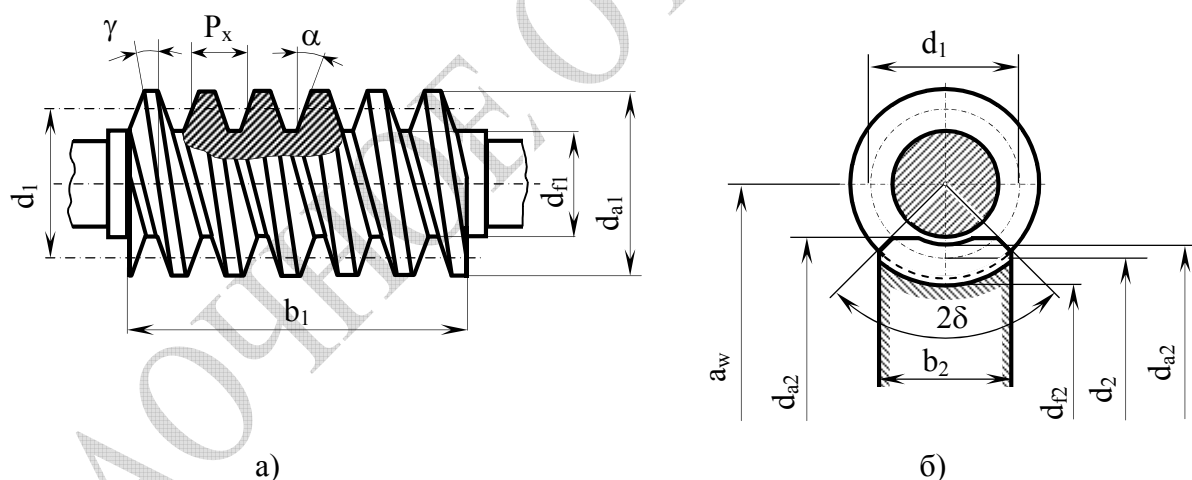


Рисунок 16.7

Число зубьев червячных колёс z_2 для кинематических передач принимается не менее 17, а для силовых передач не менее $28 \div 30$.

Геометрические параметры архимедова червяка и червячного колеса представлены в таблице 16.4.

Червячные передачи со смещением изготавливают для обеспечения заданного или стандартного межосевого расстояния a_w (40, 50, 63, 80, 100, 125, 160, 180, 200, 225, 250, 280, 315, 355, 400, 450, 500 мм), при этом червяк (копия инструмента) всегда нарезают без смещения, т.е. изменяются только размеры колеса. Коэффициент смеще-

ния x рекомендуется принимать в интервале от 0 до 1 (допускается в пределах ± 1).

Таблица 16.4 Геометрические параметры червячной передачи

Параметры	Червяк	Червячное колесо
Высота головки зуба	$h_a = h_a^* m = 1 \cdot m$	
Высота ножки зуба	$h_f = h_f^* m = 1,2m$	
Делительное межосевое расстояние	$a = 0,5m(q+z_2)$	
Межосевое расстояние	$a_w = a + mx = 0,5m(q+z_2+2x)$	
Коэффициент смещения*	$x = a_w / m - 0,5(q+z_2)$	
Диаметр начальной окружности	$d_{w1} = m(q+2x)$	$d_{w2} = mz_2$
Диаметр делительной окружности	$d_1 = mq$	$d_2 = mz_2$
Диаметр окружности вершин зубьев	$d_{a1} = m(q + 2)$	$d_{a2} = m(z_2 + 2 + 2x)$
Диаметр окружности впадин	$d_{f1} = m(q - 2,4)$	$d_{f2} = m(z_2 - 2,4 + 2x)$
Угол обхвата червяка колесом**	$2\delta = 2\arcsin[b_2 / (d_{a1} - 0,5m)]$	
*при заданном межосевом расстоянии a_w ; ** 2δ принимается в пределах $60 \div 110^\circ$		

Длину нарезной части червяка b_1 (рис. 16.7, а) назначают по условию одновременного использования в зацеплении наибольшего числа зубьев колеса (см. табл. 16.5). Для шлифуемых и фрезеруемых червяков по технологическим особенностям изготовления длину нарезной части увеличивают на $3m$, т.е. принимают $b_1^* = b_1 + 3m$. Ширина колеса b_2 (см. табл. 16.5) назначается из условия получения угла обхвата червяка колесом 2δ (см. табл. 16.4).

Таблица 16.5 Длина b_1 нарезной части червяка и ширина b_2 колеса

Коэффициент смещения x	$z_1 = 1$		$z_1 = 2 - 4$	
	b_1/m не свыше	b_2/m не свыше	b_1/m не свыше	b_2/m не свыше
0	$10,5 + 0,06z_2$	$0,75d_{a1}$	$10,5 + 0,09z_2$	$0,67d_{a1}$
- 0,5	$8 + 0,06z_2$		$9,5 + 0,09z_2$	
- 1,0	$11 + 0,06z_2$		$12,5 + 0,09z_2$	
0,5	$11 + 0,1z_2$		$12,5 + 0,1z_2$	
1,5	$12 + 0,1z_2$		$13 + 0,1z_2$	

Точность изготовления червячных цилиндрических передач с модулем от 1 до 25 мм регламентированы ГОСТ 3675– 81. Предусмотрено 12 степеней точности, для каждой из которых установлены нормы кинематической точности, плавности работы и контакта зубьев и витков. Основы стандарта на точность червячных передач такие же, как и для зубчатых.

Степени точности 3 ÷ 6 рекомендуют использовать для передач с высокой кинематической точностью, а 7 ÷ 9 – для силовых передач (табл. 16.6). Червячные передачи чувствительнее зубчатых к погрешностям монтажа, поэтому допуски на межосевые расстояния и положение средней плоскости колеса относительно червяка более жёсткие. В конструкциях предусматривают возможность регулировки положения средней плоскости колеса относительно червяка, а при монтаже это положение контролируют по окрашенному пятну контакта.

Таблица 16.6 Допустимые скорости и области применения червячных передач

Степень точности	Скорость скольжения	Обработка	Области применения
7 (точная)	10	Червяк закалён, шлифован и полирован. Колесо нарезается шлифованными червячными фрезами. Обкатка под нагрузкой	Передачи с повышенными требованиями к габаритам и повышенными скоростями
8 (средней точности)	5	То же, но допускается нешлифованный червяк при твёрдости не более 350 НВ	Среднескоростные передачи со средними требованиями к габаритам, шуму и точности
9 (пониженной точности)	2	Червяк не шлифуется, колесо нарезается любым способом	Передачи низкоскоростные и с ручным приводом

16.4. Кинематика червячных передач. КПД передачи

Для червячных передач, у которых оси червяка и червячного колеса перекрещиваются под углом 90° , векторы окружных скоростей червяка V_1 и червячного колеса V_2 в точке контакта перпендикулярны друг к другу (рис. 16.8, а, б).

По кинематической схеме передачи (рис. 16.8, б) в соответствии с правилами теоретической механики может быть составлено векторное уравнение скоростей

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_{\text{ск}},$$

где $V_1 = 0,5\omega_1 d_1$ – окружная скорость червяка; $V_2 = 0,5\omega_2 d_2$ – окружная скорость червячного колеса; $V_{\text{ск}}$ – скорость скольжения зубьев колеса относительно витков червяка (вектор скорости скольжения $\mathbf{V}_{\text{ск}}$ направлен вдоль витка червяка, т.е. касателен к линии витка червяка).

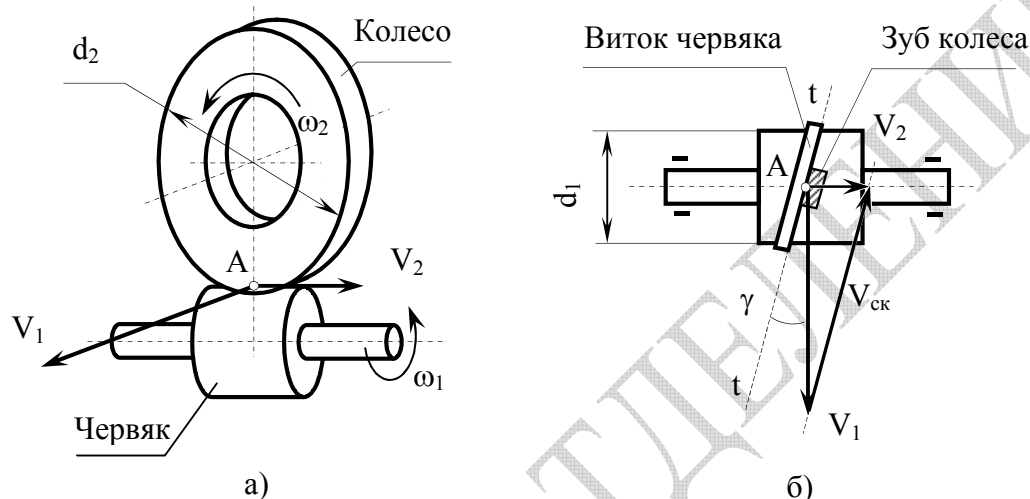


Рисунок 16.8

Из векторного треугольника (рис. 16.8, б) и формулы (16.2) очевидны соотношения, из которых можно получить выражения для передаточного отношения i (передаточного числа u) червячной передачи и скорости скольжения $V_{\text{ск}}$ в зацеплении

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{V_2}{V_1} = \frac{d_2 \omega_2}{d_1 \omega_1} = \frac{m z_2 \omega_2 \operatorname{tg} \gamma}{m z_1 \omega_1} = \frac{z_2 \omega_2 \operatorname{tg} \gamma}{z_1 \omega_1} \\ i &= \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = u \\ V_{\text{ск}} &= \frac{V_1}{\cos \gamma} \end{aligned} \right\}, \quad (16.5)$$

где z_1 – число заходов червяка, z_2 – число зубьев червячного колеса; γ – угол подъёма винтовой линии червяка (на практике $\gamma < 30^\circ$).

Из приведённых соотношений (16.5) следует, что в червячной передаче V_2 всегда значительно меньше V_1 , а $V_{\text{ск}}$ больше V_1 .

Большие скорости скольжения и неблагоприятное направление скольжения относительно линий контакта вызывает повышенный износ и заедание червячных передач.

Условием отсутствия заедания и интенсивного износа является жидкостное трение между трущимися телами – витками червяка и зубьями колеса. Наиболее благоприятным условием для существования жидкостного трения является перпендикулярное направление скорости скольжения $V_{ск}$ к линии контакта (рис. 16.9, б), при этом образуется клиновидный зазор (с минимальной величиной δ), в который затягивается смазка. Чем меньше угол между линией контакта и направлением скольжения, тем меньше возможность возникновения жидкостного трения.

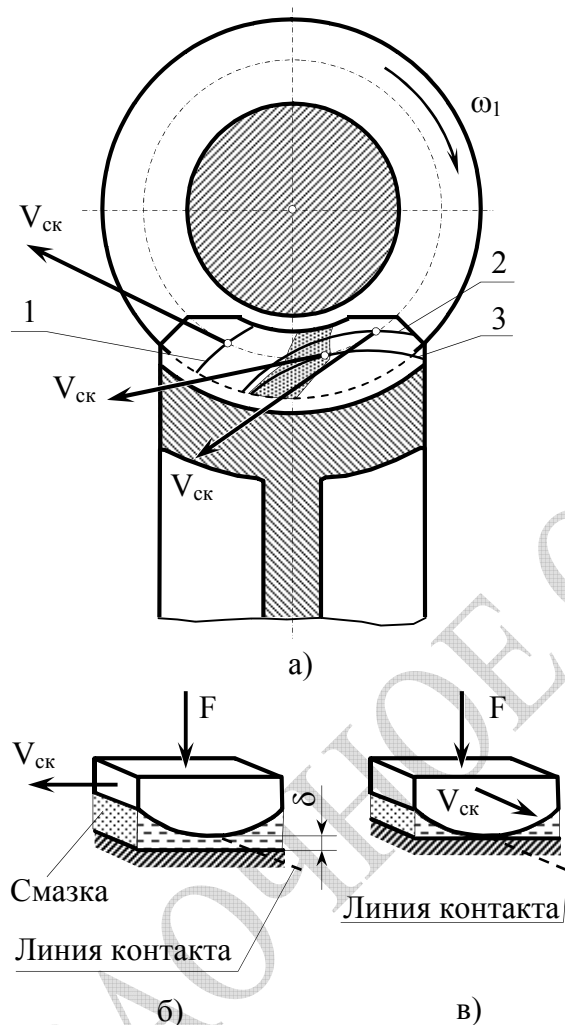


Рисунок 16.9

Если скорость скольжения направлена вдоль линии контакта (рис. 16.9, в), то масляный слой в контактной зоне образоваться не может.

В отличие от зубчатых в червячных передачах часть поверхности зуба колеса имеет зону, в которой скольжение происходит вдоль контактных линий. На схеме (рис. 16.9, а) показано положение некоторых контактных линий (1, 2, 3) и векторы скоростей скольжения $V_{ск}$, направление, которых близко к направлению окружной скорости червяка. В заштрихованной области, где направление $V_{ск}$ практически совпадает с направлением контактных линий, условия смазки затруднены. При больших нагрузках в этой зоне начинается заедание, которое затем распространяется на всю рабочую поверхность зуба.

Интенсивность износа зависит так же от величины контактных напряжений. В связи с этим расчёт по контактным

напряжениям для средне- и крупномодульных червячных передач является основным.

Неблагоприятное направление вектора скорости скольжения относительно контактных линий является причиной низкого КПД червячного зацепления η_3 . Поскольку червячная передача по кинематическим свойствам аналогична резьбовой паре, то и формула для расчёта КПД червячного зацепления аналогична формуле для резьбовой пары (см. раздел «Передача винт-гайка»)

$$\eta_3 = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}(\gamma + \varphi_1)}, \quad (16.6)$$

где φ_1 – приведённый угол трения ($\varphi_1 = \operatorname{arctg} f_1$, где f_1 – приведённый коэффициент трения), уменьшающийся с увеличением скорости скольжения.

Если ведущим звеном является червячное колесо, то вследствие изменения направления сил получают

$$\eta_3 = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}(\gamma - \varphi_1)}. \quad (16.7)$$

Из формулы (16.7) следует, что при $\gamma \leq \varphi_1$ КПД $\eta_3 = 0$, т.е. имеет место самоторможение и передача движения от колеса к червяку становится невозможной.

Ориентировочные значения приведённого угла трения для червячных пар сталь – оловянистая бронза даны в таблице 16.7 (меньшие значения для шлифованных червяков; для колёс из безоловянистых бронз значения увеличивают примерно на 40%).

Таблица 16.7 Значения приведённых углов трения

$V_{\text{ск}}, \text{ м/с}$	φ_1	$V_{\text{ск}}, \text{ м/с}$	φ_1
0,01	5°40' – 6°50'	2,5	1°40' – 2°20'
0,10	4°30' – 5°10'	3,0	1°30' – 2°00'
0,50	3°10' – 3°40'	4,0	1°20' – 1°40'
1,00	2°30' – 3°10'	7,0	1°00' – 1°30'
1,50	2°20' – 2°50'	10,0	0°55' – 1°20'
2,00	2°00' – 2°30'	15,0	0°48' – 1°00'

КПД червячной передачи увеличивается с увеличением числа заходов (витков) червяка z_1 поскольку увеличивается угол подъёма винтовой линии γ . Для предварительных расчётов значения η_3 можно принимать ориентировочно (табл. 16.8).

Таблица 16.8 Средние значения КПД червячной передачи

z_1	1	2	3	4
η_3	0,7 ÷ 0,75	0,75 ÷ 0,82	0,82 ÷ 0,87	0,87 ÷ 0,92

16.5. Силы, действующие в червячном зацеплении

Силу, возникающую в червячном зацеплении, считают приложенной в полюсе зацепления. Эту силу раскладывают на три составляющих: окружную (F_t), радиальную (F_r) и осевую (F_a) (рис. 16.10, а). Силы, действующие на червяк и колесо попарно равны по величине и противоположны друг другу по направлению (червяк и колесо «отталкиваются» друг от друга):

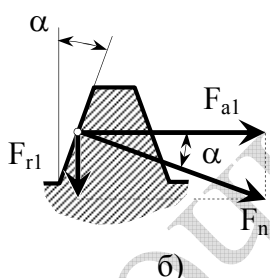
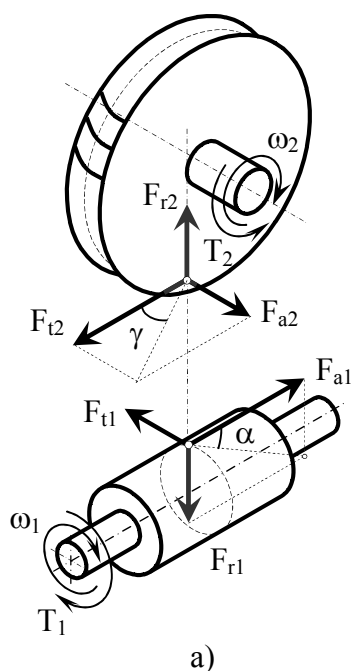


Рисунок 16.10

окружная сила на червяке численно равна осевой силе на червячном колесе

$$F_{t1} = 2T_1/d_{w1} = F_{a2}; \quad (16.8)$$

осевая сила на червяке численно равна окружной силе на червячном колесе

$$F_{a1} = F_{t2} = 2T_2/d_2; \quad (16.9)$$

радиальная сила приложенная к червяку равна радиальной силе, приложенной к колесу

$$F_{r1} = F_{r2} = F_{t2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (16.10)$$

В осевой плоскости червяка силы, действующие на виток (рис. 16.10, б), F_{a1} и F_{r1} являются составляющими силы F_n , направленной по нормали к поверхности витка.

В формулах (16.8) и (16.9) вращающие моменты на червяке и колесе связаны друг с другом через передаточное отношение i и КПД η_3 по закону передачи момента

$$T_2 = T_1 i \eta_3.$$

16.6. Критерии работоспособности и расчёт червячной передачи

Повреждение червячных передач связано, как правило, с повреждением колеса, которое по условиям контакта изготавливают из менее прочного материала, чем червяк. В отличие от типичного для зубчатых передач *выкрашивания* зубьев колёс, в червячных передачах из-за большого скольжения чаще всего наблюдаются *изнашивание* и *схватывание (заедание)*, т.е. по сути «диффузионная сварка» червяка и червячного колеса. При мягком материале колеса (оловянистые

бронзы) заедание проявляется в постепенном так называемом «намазывании» бронзы на стальной червяк, при котором передача может ещё работать продолжительное время. При твёрдых материалах (алюминиево-железистые бронзы, чугун и т.п.) заедание переходит в задир поверхности с последующим быстрым разрушением зубьев колеса.

Таким образом, износостойкость и прочность являются основными критериями работоспособности передач.

При расчёте передачи следует учитывать одновременное зацепление витков червяка с несколькими зубьями червячного колеса. Поэтому выражение для распределённой нагрузки при расчёте червячной передачи аналогично выражению для косозубой цилиндрической передачи

$$q = \frac{F_n}{l_\Sigma} = \frac{F_{t2}}{l_\Sigma \cos \alpha_w \cos \gamma},$$

где $l_\Sigma = 0,75\pi d_{w1}(2\delta)\varepsilon_\alpha / (360^\circ \cos \gamma)$ – суммарная длина контактных линий; 0,75 – коэффициент, учитывающий уменьшение длины контактной линии в связи с тем, что соприкосновение осуществляется не по полной дуге обхвата (2δ); $\varepsilon_\alpha = 1,8 \div 2,2$ – коэффициент торцового перекрытия.

Принимая в расчётах, угол обхвата червяка колесом $2\delta=100^\circ$, а коэффициент торцового перекрытия $\varepsilon_\alpha = 2$ приближённую суммарную длину контактных линий находят по формуле

$$l_\Sigma = 1,3d_{w1} / \cos \gamma$$

В реальной червячной передаче силы, действующие в зацеплении, превышают теоретические значения вследствие погрешностей изготовления червяков и колёс, а также вследствие прогибов валов под нагрузкой. Эти обстоятельства учитываются при помощи *коэффициента нагрузки* K :

$$K = K_\beta K_v,$$

где по аналогии с зубчатыми передачами K_β – коэффициент концентрации нагрузки по длине зубьев колеса; K_v – коэффициент динамической нагрузки.

Расчётная удельная нагрузка в зацеплении червячной передачи определяется по формуле

$$q_p = \frac{F_{t2}}{l_\Sigma \cos \alpha_w \cos \gamma} K = \frac{2T_2}{d_2 l_\Sigma \cos \alpha_w \cos \gamma} K_\beta K_v, \quad (16.11)$$

В предварительных расчётах передач можно принимать при расчёте на контактную усталость $K=K_H=K_{H\beta}K_{H\nu}=K_H=1,1\div 1,4$, а при расчёте на изгиб $K=K_F=K_{F\beta}K_{F\nu}=K_F=1,1\div 1,4$ (большие значения для высокоскоростных передач и переменной нагрузки).

Расчёт червячных передач на контактную усталость

При выполнении расчета червячных передач на контактную усталость так же как и при расчёте зубчатых передач пользуются формулой Герца

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{q_p E_{пр}}{2\pi(1-\mu^2)\rho_{пр}}},$$

где q_p – расчётная распределённая нагрузка (16.11); $E_{пр} = 2E_1E_2/(E_1+E_2)$ – приведённый модуль упругости материалов червяка и червячного колеса; μ – коэффициент Пуассона материала колеса; $\rho_{пр}$ – приведённый радиус кривизны передачи.

Для архимедовых червяков $\rho_1=\infty$. При этом для приведённого радиуса кривизны справедливо соотношение

$$\frac{1}{\rho_{пр}} \approx \frac{2\cos^2\gamma}{d_2\sin\alpha}. \quad (16.12)$$

Подставляя полученные выражения в формулу для контактных напряжений σ_H , принимая $\alpha = 20^\circ$; $\gamma = 10^\circ$; $2\delta = 100^\circ$; $\varepsilon_\alpha = 1,8$; для стального червяка $E_1 = 2,15$ МПа; для бронзы или чугуна $E_2 = 0,9$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu \approx 0,3$, и выполняя преобразования с учётом равенств $d_2=mz_2$; $d_1=mq$; $m=2a_w/(z_2+q+2x)$, получают зависимость для проверочного расчёта червячной передачи по контактным напряжениям (МПа):

$$\sigma_H = \frac{5400(q+2x)}{z_2} \sqrt{\left[\frac{z_2+q+2x}{(q+2x)a_w}\right]^3} K_H T_2 \leq [\sigma_H], \quad (16.13)$$

где $[\sigma_H]$ допускаемое контактное напряжение (см. раздел 16.7).

При выполнении проектного расчёта определяют межосевое расстояние передачи (коэффициент смещения $x = 0$)

$$a_w = \left(\frac{z_2}{q} + 1\right) \sqrt[3]{\left(\frac{5400q}{z_2[\sigma_H]}\right)^2} K_H T_2.$$

Поскольку первоначально коэффициент диаметра q и число зубьев колеса z_2 обычно неизвестно, то принимая как первое приближение $q = 0,25z_2$, получают

$$a_w \approx 610 \sqrt[3]{\frac{K_H T_2}{[\sigma_H]^2}}. \quad (16.14)$$

Результаты вычисления межосевого расстояния по формуле (16.14) округляют до ближайшего стандартного значения; задаются числом заходов червяка z_1 ($z_1 = 4$ при $u = 8 \div 14$; $z_1 = 2$ при $u = 16 \div 28$; $z_1 = 1$ при $u \geq 31,5$); определяют число зубьев колеса ($z_2 = z_1 u$); определяют предварительное стандартное значение модуля (округляют ориентировочное значение $m \approx (1,4 \div 1,7) a_w / z_2$); определяют предварительное значение коэффициента диаметра червяка $q = (2a_w - m z_2) / m$ (q округляют до стандартного значения); находят коэффициент смещения (табл. 16.4).

По полученным данным выполняют проверочный расчёт передачи по формуле (16.13), и при необходимости корректируют её параметры.

При действии пиковой нагрузки $T_{2\max}$ проверяют статическую прочность рабочих поверхностей колеса, определяя максимальные контактные напряжения и сравнивая их с допускаемыми

$$\sigma_{H\max} = \sigma_H \sqrt{\frac{T_{2\max}}{T_2}} \leq [\sigma_{H\max}], \quad (16.15)$$

где $T_{2\max}$ – максимальный вращающий момент на валу колеса; $[\sigma_{H\max}]$ – предельное допускаемое контактное напряжение (см. формулу 16.30).

Расчёт червячных передач по напряжениям изгиба

На изгиб рассчитываются только зубья колеса, поскольку витки червяка из-за своей формы и свойств материала значительно прочнее зубьев колеса. Расчёт зубьев червячных колес на изгиб по сравнению с аналогичным расчётом зубьев зубчатых колес усложняется переменной формой сечения зуба по ширине колеса и тем, что основание зуба расположено не по прямой, а по дуге окружности.

Напряжение изгиба у основания зубьев рассчитывается по формуле

$$\sigma_F = \frac{q_p \cos \alpha Y_F}{m_n} \cos^2 \gamma,$$

где Y_F – коэффициент, учитывающий форму зубьев, определяется по эквивалентному числу зубьев $z_v = z_2 / \cos^3 \gamma$ (табл. 16.9); m_n – нормальный модуль $m_n = m \cos \gamma$; множитель $\cos^2 \gamma$ учитывает наклон зуба и работу зуба как пластины, а не как балки.

Подставляя в формулу для σ_F выражение для расчётной нагрузки q_p , получают формулу для проверочного расчёта зубьев червячного колеса на изгиб

$$\sigma_F = \frac{F_{t2} K_F \cos \gamma Y_F}{1,3 m^2 (q + 2x)} \leq [\sigma_F]. \quad (16.16)$$

При действии пиковой нагрузки – максимального вращающего момента T_{2max} , проверку статической прочности выполняют по максимальным напряжениям по формуле

$$\sigma_{Fmax} = \sigma_F \frac{T_{2max}}{T_2} \leq [\sigma_{Fmax}], \quad (16.17)$$

где $[\sigma_{Fmax}]$ – предельное допускаемое изгибное напряжение (см. формулу 16.30).

Таблица 16.9 Коэффициент формы зуба Y_F

z_v	Y_F	z_v	Y_F	z_v	Y_F	z_v	Y_F
20	1,98	30	1,76	40	1,55	80	1,34
24	1,88	32	1,71	45	1,48	100	1,30
26	1,85	35	1,64	50	1,45	150	1,27
28	1,80	37	1,61	60	1,40	300	1,24

16.7. Допускаемые напряжения при расчёте червячных передач

Допускаемые контактные напряжения

Методика определения *допускаемых контактных напряжений* зубьев червячных колёс зависит от основной причины выхода их из строя, она различна для разных групп материалов (табл. 16.2).

I Группа материалов (оловянистые бронзы)

Допускаемые контактные напряжения материалов этой группы определяются из условия сопротивления контактной усталости по формуле

$$[\sigma_H] = K_{H\sigma} \sigma_B C_V K_{HL}, \quad (16.18)$$

где $K_{H\sigma\sigma_B}$ – допускаемое напряжение при 10^7 циклов; $K_{H\sigma}$ – коэффициент, равный 0,9 для червяков с твёрдыми ($H \geq 45$ HRC) шлифованными и полированными витками, и равный 0,75 при твёрдости поверхности витков червяка $H \leq 45$ HRC; σ_B – временное сопротивление (предел прочности) для бронзы при растяжении (табл. 16.2); C_v – коэффициент, учитывающий интенсивность износа (зависит от скорости скольжения, м/с); K_{HL} – коэффициент долговечности по контактным напряжениям, при условии $K_{HL} \leq 1,15$.

Коэффициенты C_v и K_{HL} формулы (16.18) вычисляются по зависимостям

$$C_v = 1,66 V_{ck}^{-0,352}, \quad (16.19)$$

$$K_{HL} = \sqrt[8]{10^7 / N_{HE}}. \quad (16.20)$$

Входящее в (16.20) коэффициент долговечности эквивалентное число циклов нагружения зубьев червячного колеса N_{HE} за весь срок службы передачи для типовых режимов нагружения, вычисляется по формуле

$$N_{HE} = K_{HE} N_k. \quad (16.21)$$

Если $N_{HE} > 25 \cdot 10^7$, то принимают $N_{HE} = 25 \cdot 10^7$.

Суммарное число циклов перемены напряжений

$$N_k = 60 n_2 t, \quad (16.22)$$

где n_2 – частота вращения колеса, мин^{-1} ; t – число часов работы передачи за расчётный срок службы $t = L \cdot 365 \cdot K_{год} \cdot K_{сут}$ (L – число лет работы; $K_{год}, K_{сут}$ – коэффициенты годового и суточного использования передачи).

Таблица 16.10 Коэффициенты K_{HE} , K_{FE}

Обозначение режима по рис. 14.34	Коэффициенты эквивалентности	
	K_{HE}	K_{FE}
0	1,0	1,0
1	0,416	0,2
2	0,2	0,1
3	0,121	0,04
4	0,081	0,016
5	0,034	0,004

Значения коэффициентов эквивалентности для типовых режимов нагружения (см. рис. 14.32) приведены в таблице 16.10.

Если режим нагружения червячной передачи не типовой, а задан циклограммой моментов (подобно изображённой на

рис. 14.31), то эквивалентное число циклов нагружения вычисляют по формуле:

$$N_{HE} = 60 \sum_{i=1}^k \left(\frac{T_i}{T_{max}} \right)^4 t_i n_i \leq 25 \cdot 10^7, \quad (16.23)$$

где T_i , n_i , t_i – вращающий момент на колесе, частота вращения колеса, мин^{-1} , время работы, ч, при режиме i ; T_{max} – максимальный длительно действующий вращающий момент; k – число ступеней на графике нагрузки (рис. 14.31).

II Группа материалов (безоловянистые бронзы и латуни)

Допускаемые контактные напряжения для материалов этой группы определяются из условия сопротивления заеданию и усиленному износу в зависимости от скорости скольжения (м/с) по следующей формуле

$$[\sigma_H] = [\sigma_{H0}] - 25 V_{\text{ск}}, \quad (16.24)$$

где $[\sigma_{H0}] = 300$ МПа для червяков с твёрдостью на поверхности витков $H \geq 45$ HRC; $[\sigma_{H0}] = 250$ МПа для червяков с твёрдостью поверхности витков $H \leq 350$ HB.

III Группа материалов (мягкие серые чугуны)

Допускаемые контактные напряжения для материалов этой группы определяются из тех же условий, что и для материалов второй группы

$$[\sigma_H] = 175 - 25 V_{\text{ск}}. \quad (16.25)$$

Из последних двух зависимостей следует, что допускаемые напряжения для материалов II и III групп существенно снижаются при значительных скоростях скольжения, чем, собственно, и ограничивается их применение.

Допускаемые напряжения изгиба

Допускаемые напряжения изгиба при длительной работе неререверсивных передач определяют для материала зубьев червячного колеса по формуле

$$[\sigma_F] = K_{FL} [\sigma_{F0}]. \quad (16.26)$$

Здесь $[\sigma_{F0}]$ исходное допускаемое напряжение изгиба для материалов:

группы I и II – $[\sigma_{F0}] = 0,25\sigma_T + 0,08\sigma_B$;

группы III – $[\sigma_{F0}] = 0,22\sigma_{\text{ви}}$,

где $\sigma_{\text{ви}}$ – предел прочности при изгибе, МПа (обычно в 1,5 ÷ 2,2 раза больше σ_B).

В формуле (16.26) коэффициент долговечности

$$K_{FL} = \sqrt[9]{\frac{10^6}{N_{FE}}}, \quad (16.27)$$

где N_{FE} – эквивалентное число циклов нагружения зубьев червячного колеса за весь срок службы передачи.

Эквивалентное число циклов нагружения для типового режима нагружения (см. рис. 14.32) вычисляется по формуле

$$N_{FE} = K_{FE} N_K, \quad (16.28)$$

где N_K – суммарное число циклов перемены напряжений (16.22); если $N_{FE} < 10^6$, то принимают $N_{FE} = 10^6$; если $N_{FE} > 25 \cdot 10^7$, то принимают $N_{FE} = 25 \cdot 10^7$.

Для режима нагружения червячной передачи заданного циклограммой моментов (см. рис. 14.31), эквивалентное число циклов нагружения вычисляют по формуле аналогичной (16.23):

$$N_{FE} = 60 \sum_{i=1}^k \left(\frac{T_i}{T_{max}} \right)^9 t_i n_i. \quad (16.29)$$

Предельные допускаемые контактные и изгибные напряжения

При расчёте червячной передачи на максимальную статическую или единичную пиковую нагрузку допускаемые контактные и изгибные напряжения принимают для материалов:

$$\begin{aligned} \text{группы I} & - [\sigma_{Hmax}] = 4\sigma_T; & [\sigma_{Fmax}] & = 0,8\sigma_T; \\ \text{группы II} & - [\sigma_{Hmax}] = 2\sigma_T; & [\sigma_{Fmax}] & = 0,8\sigma_T; \\ \text{группы III} & - [\sigma_{Hmax}] = 1,65\sigma_{ви}; & [\sigma_{Fmax}] & = 0,75\sigma_{ви}. \end{aligned} \quad (16.30)$$

16.8. Тепловой расчёт червячных передач

Механическая энергия, теряемая при работе передачи, главным образом из-за трения, превращается в тепловую энергию. Большое тепловыделение приводит к нагреву элементов передачи и смазочных материалов. Превышение предельной температуры масла ($[t_{max}] \approx 100^\circ\text{C}$) изменяет его защитные свойства, что негативно сказывается на работоспособности передачи, и может привести к заеданию.

Количество тепла, выделяющегося в передаче в единицу времени, Дж/с

$$W = 10^3(1-\eta) N_{вх}, \quad (16.31)$$

где η - КПД передачи; $N_{вх}$ – мощность на входном валу (на червяке).

Выделяющееся тепло отводится окружающему воздуху через стенки корпуса, что приводит к естественному охлаждению. Количество тепла, отданного при этом, вычисляется по формуле

$$W_1 = K_T(t_1 - t_0)A(1+\psi), \quad (16.32)$$

где K_T – коэффициент теплоотдачи с поверхности корпуса, равный $12 \div 18$ Вт/(м²·°С); t_1 – внутренняя температура редуктора или температура масла, °С; t_0 – температура окружающего воздуха, °С; $A=20a^{1,7}$ – поверхность теплоотдачи корпуса редуктора (без учёта площади основания, a – межосевое расстояние), м²; ψ – коэффициент, учитывающий теплоотвод через основание (при установке корпуса на металлическом основании $\psi=0,3$, при бетонном основании $\psi \approx 0$).

Из уравнения теплового баланса

$$W = W_1$$

с учётом выражений (16.31 и 16.32) получают выражение для расчёта температуры масла

$$t_1 = t_0 + \frac{10^3(1-\eta)N_{\text{вх}}}{K_T A(1+\psi)} \quad (16.33)$$

Если температура масла t_1 больше предельной температуры масла $[t_{\text{max}}]$, предусматривают отвод избыточного тепла при помощи оребрения корпуса, обдува корпуса вентилятором или водяного охлаждения. При естественном охлаждении рёбра располагают вертикально, при искусственном – вдоль направления потока. Вентилятор устанавливают на валу червяка при этом $K_T = 30$ Вт/(м²·°С). При водяном охлаждении при скорости воды в трубе до 1 м/с коэффициент теплоотдачи с поверхности труб до $K_T = 200$ Вт/(м²·°С).

16.9. Контрольные вопросы

1. К какому классу передач относятся червячные передачи?
2. Какова область применения червячных передач? В чём заключаются достоинства и недостатки червячных передач?
3. Почему червячные передачи работают с большим скольжением?
4. Какие силы возникают в червячных передачах? В чём заключается неблагоприятное сочетание сил для работоспособности опор валов червячной передачи?
5. Из каких материалов выполняют червяки и венцы червячных колёс?
6. По каким основным критериям работоспособности рассчитывают червячные передачи?
7. Приведите формулы для КПД червячной передачи.
8. Для чего необходим тепловой расчёт червячной передачи?

Глава 17. Передачи винт-гайка

17.1. Передачи винт-гайка. Общие сведения

Передачей винт-гайка называется механизм, основным элементом которого является винтовая пара, состоящая из винта и гайки. Передача винт-гайка предназначена для преобразования вращательного движения в поступательное или наоборот.

Передачи этого типа весьма распространены из-за простоты, надёжности и компактности конструкции. В работе передачи винт-гайка отличаются плавностью, бесшумностью, точностью, а также возможностью создания больших усилий при малых перемещениях и самоторможением. Передачи винт-гайка широко используются в прессовом оборудовании, исполнительных устройствах систем автоматизации и механизации, станках, робототехнике, инструментах и измерительных приборах. Вместе с тем, передачи с преобразованием поступательного движения во вращательное встречается достаточно редко (например, ручные дрели, ударные отвёртки и др.). Основным недостатком передач винт-гайка – большие потери на трение в винтовой паре и, соответственно, низкий КПД. Из-за конечной длины винта работа передачи всегда реверсивная, т.е. периодически требуется возвратное движение для достижения элементами исходного положения.

Передачи винт-гайка делятся на *передачи скольжения* (рис. 17.1, а) и *передачи качения* (рис. 17.1, б).

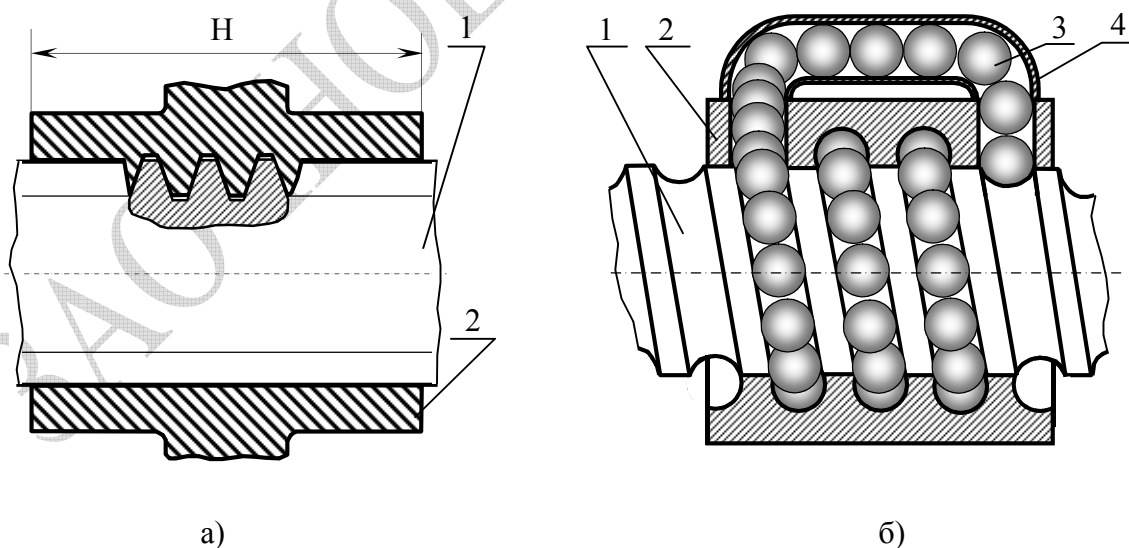


Рисунок 17.1

В передаче скольжения (рис. 17.1, а) винт 1 представляет собой цилиндр, на рабочей части которого нарезана резьба. Винты обычно изготавливают из сталей 45 и 50. Гайка 2 (рис. 17.1, а) представляет собой деталь с резьбовым отверстием глубиной H . Для

уменьшения трения скольжения гайки изготавливают из пластмасс, оловянистых бронз типа БрОЦС6-6-3, Латуни Л60..62.

Передачи с трением качения (рис. 17.1, б) применяют с целью уменьшения потерь на трение. В этой конструкции резьба винта 1 и гайки 2 представляет собой винтовую канавку кругового профиля. Контакт между винтом и гайкой осуществляется посредством шариков 3, которые при вращении винта или гайки увлекаются в направлении движения, попадают в отводной канал 4, и затем возвращаются в полость между винтом и гайкой. Достоинство шариковых винтовых пар: высокий КПД (до $\eta=0,90$), возможность полного устранения осевого и радиального зазоров). Шариковые винтовые пары проверяют по критерию контактной усталости с использованием формулы аналогичной зависимости для шарикоподшипников.

Схемы некоторых типовых передач винт-гайка представлены на рисунке 17.2. На данных схемах винты обозначены цифрой 1, гайки – 2, опоры (подшипники) – 3, направляющие поступательного движения – 4.

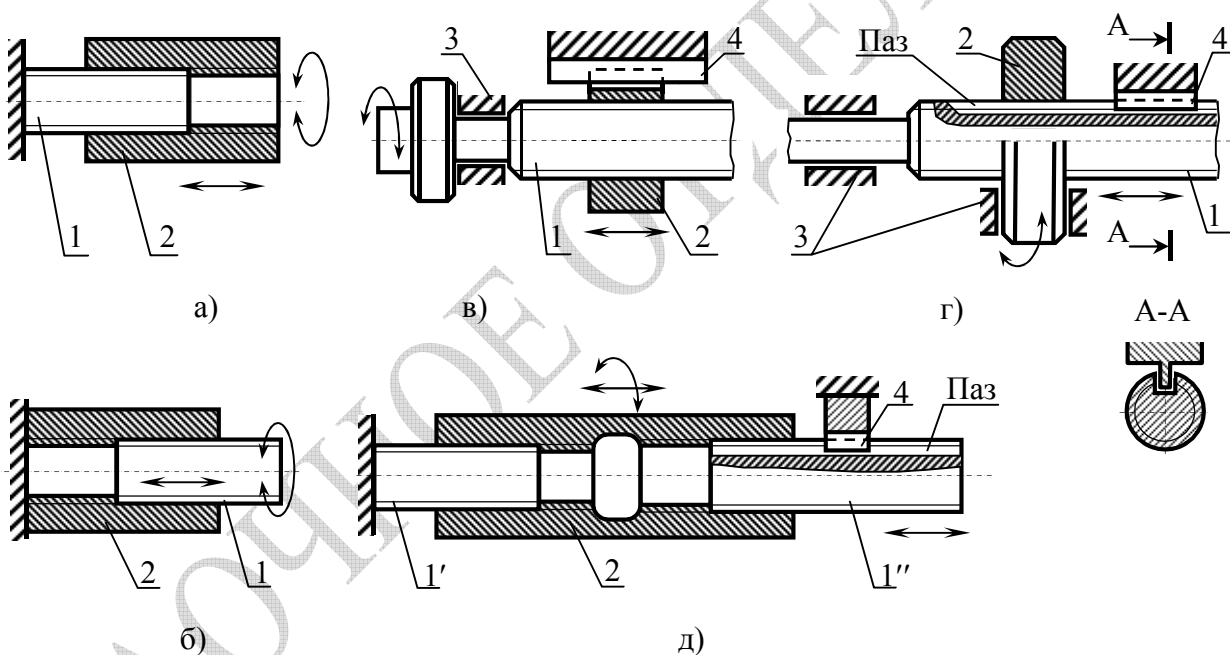


Рисунок 17.2

В простейших двухзвенных механизмах подвижным звеном может являться либо гайка 2 (рис. 17.2, а) либо винт 1 (рис. 17.2, б), которые совершают винтовое движение. В трёхзвенных механизмах вращательное движение винта 1 (рис. 17.2, в) или гайки 2 (рис. 17.2, г) преобразуется в поступательное движение, сопряжённой гайки или винта. От проворачивания ведомое поступательно движущееся звено предохраняется направляющей 4 (например, в виде шпонки), входящей в паз гайки 2 (рис. 17.2, в) или винта 1 (рис. 17.2, г).

Для наиболее распространённых схем (рис. 17.2, в) зависимость линейного перемещения l_2 ведомой гайки 2 при повороте ведущего винта 1 на угол φ_1 определяется функцией положения

$$l_2 = \frac{Pz}{2\pi} \varphi_1 = \frac{dl}{d\varphi} \varphi_1 ,$$

где P – шаг резьбы; z – число заходов резьбы; $dl/d\varphi = Pz/(2\pi)$ – передаточная функция или аналог скорости передачи винт – гайка.

Линейная скорость ведомой гайки

$$v_2 = \frac{dl_2}{dt} = \frac{dl}{d\varphi} \omega_1 ,$$

где $\omega_1 = d\varphi/dt$ – угловая скорость винта.

Схема трёхзвенного дифференциального механизма с двумя винтами 1' и 1'' и ведущей гайкой 2 представлена на рисунке 17.2, д. Такие передачи позволяют обеспечить малые поступательные перемещения ведомого винта 1''. Винты 1' и 1'', ввинченные с двух сторон в гайку 2, имеют разный ход P_{h1} и P_{h2} (ход резьбы P_h – произведение шага P на число заходов z). Функция положения дифференциальной винтовой передачи, т.е. зависимость линейного перемещения l ведомого винта 1'' от угла поворота φ_2 ведущей гайки 2 имеет вид

$$l = \frac{(P'z' \pm P''z'')}{2\pi} \varphi_2 ,$$

где знак «–» относится к винтам с одним направлением винтовой линии, а знак «+» - к механизмам с винтами с разным направлением винтовой линии, например правым и левым.

17.2. Передачи винт-гайка с трением скольжения

Для повышения КПД в передачах винт-гайка с трением скольжения применяют резьбы, имеющие пониженные потери на трение. К таким резьбам относятся *ходовые резьбы*, а именно: *прямоугольные* (рис. 17.3, а), *трапецеидальные* (рис. 17.3, б) и *упорные* (рис. 17.3, в) резьбы. Стандартные *метрические* резьбы (имеют треугольный профиль) применяют в передачах винт-гайка с шагами до 1 мм, поскольку прямоугольные и трапецеидальные резьбы с такими шагами изготовить сложно. Метрическая резьба обеспечивает лучшее направление винта или гайки в винтовых механизмах из-за малого радиального смещения по сравнению с трапецеидальной резьбой.

Начало выступа резьбы называется заходом. Резьбы передач могут быть однозаходными (рис. 17.4, а, б) и многозаходными (на рис. 17.4, в показана двухзаходная резьба), по направлению винтовой линии резьбы бывают правыми (рис. 17.4, а, в) и левыми (рис. 17.4, б). В зависимости от системы измерения все резьбы делятся на метрические и дюймовые.

Резьба характеризуется следующими геометрическими параметрами (рис. 17.3, 17.4, в): d – наружный диаметр резьбы; d_1 – внутренний диаметр резьбы; d_2 – средний диаметр резьбы; P – шаг резьбы – расстояние измеренное вдоль оси резьбы, между параллельными сторонами соседних витков; P_h – ход резьбы (для однозаходной резьбы $P_h=P$, для многозаходной резьбы $P_h=Pz$, где z – число заходов); h – рабочая высота профиля; α – угол профиля; γ – угол подъема резьбы.

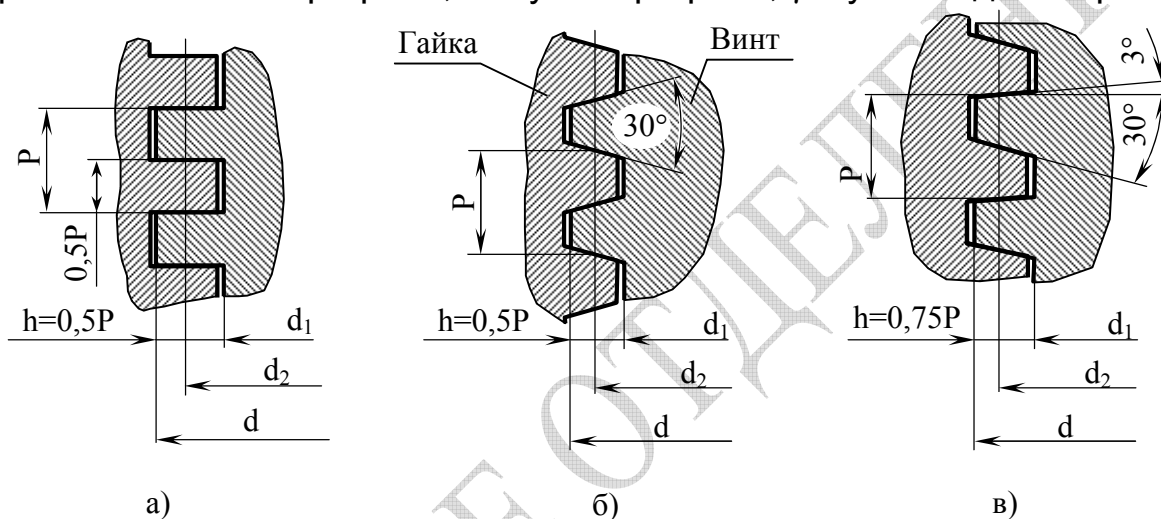


Рисунок 17.3

Геометрические параметры резьб и допуски на размеры, за исключением параметров прямоугольной резьбы стандартизованы.

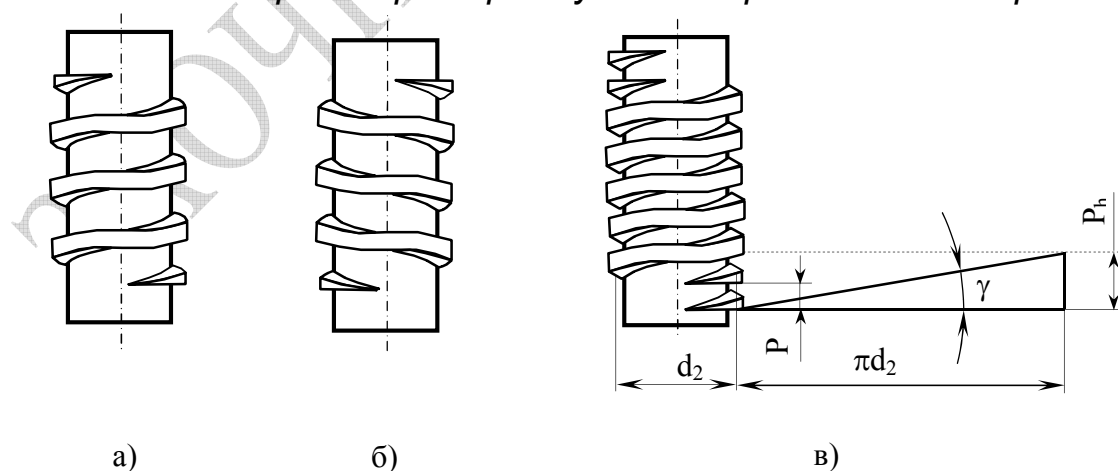


Рисунок 17.4

Прямоугольная резьба (рис. 17.3, а) с профилем в виде квадрата имеет самый высокий КПД (как будет показано ниже, чем меньше

профильный угол, тем меньше потери на трение). Недостатками прямоугольной резьбы является её низкая точность, пониженная прочность, а также образование трудно устранимых осевых зазоров при износе.

Трапецеидальные резьбы (рис. 17.3, б) (ГОСТ 24739-81) могут быть одно- и многозаходными. Число заходов z многозаходных трапецеидальных резьб изменяется от 2 до 8. Трапецеидальные резьбы обозначают буквами Тг, номинальный диаметр ($d=20$ мм), ход (только для многозаходных резьб, $P_h = 8$ мм), шаг (для многозаходных указывается в скобках, $P=4$), буквы LH (только для левой резьбы), поле допуска (8e,7H), длину свинчивания (нормальные длины свинчивания N не указывают, $l = 120$ мм): $Tr20 \times 8(P4) LH-8e-120$; $Tr20 \times 4-7H$.

Упорные резьбы (рис. 17.3, в) (ГОСТ 10177-82) предназначены для создания больших односторонних рабочих нагрузок. Упорные резьбы обозначается буквой S: $S80 \times 10-7h$; $S80 \times 20(P10) LH-7AZ-150$.

При работе винтовых механизмов под воздействием осевой силы F между элементами винта и гайки возникает сила трения скольжения $F_{тр}$, противодействующая движущей силе F_t . Важными параметрами, определяющими силовое взаимодействие двух скользящих друг по другу тел, являются коэффициент трения скольжения f и угол трения φ . Из схемы силового взаимодействия тела, движущегося со скоростью V по горизонтальной поверхности (рис. 17.5, а), справедливо следующее соотношение между силой трения $F_{тр}$, силой нормальной реакции F_n , коэффициентом трения f , и углом трения φ .

$$\frac{F_{тр}}{F_n} = f = \operatorname{tg} \varphi . \quad (17.1)$$

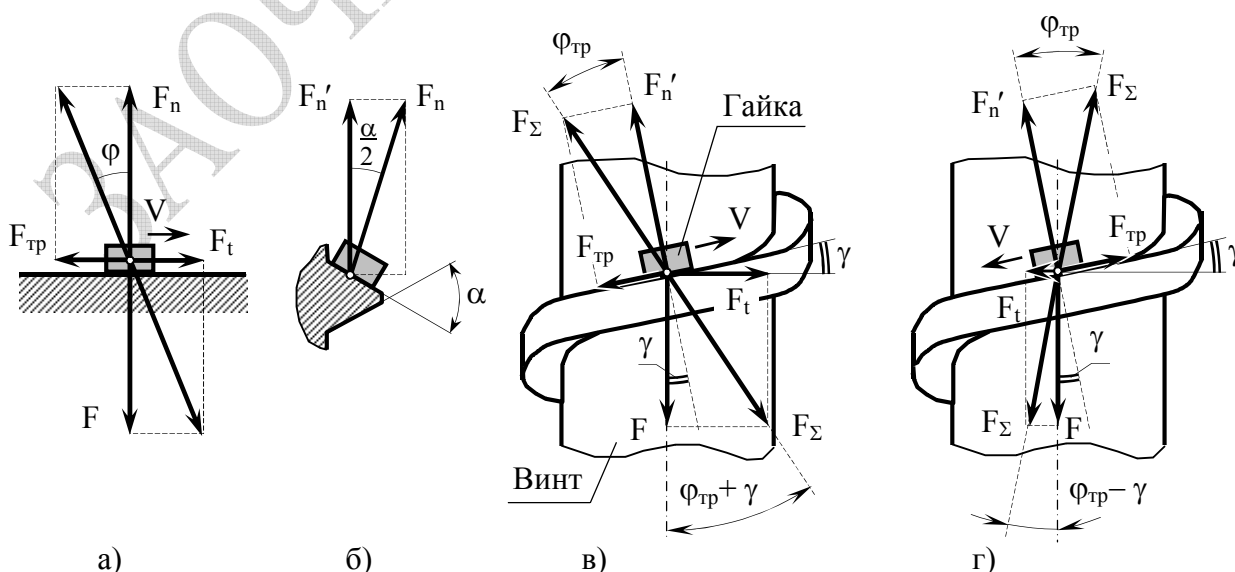


Рисунок 17.5

Коэффициент трения в резьбе f при слабой смазке для стали по бронзе $f = 0,1$, для стали по чугуна $f = 0,15$.

Для стандартных резьб (метрической, трапецеидальной, упорной), у которых угол профиля резьбы $\alpha \neq 0$ (рис. 17.5, в), с учётом (17.1) сила трения равна

$$F_{\text{тр}} = F_n f = \frac{F'_n}{\cos \frac{\alpha}{2}} f = F'_n \frac{\text{tg} \varphi}{\cos \frac{\alpha}{2}} = F'_n \text{tg} \varphi_{\text{тр}} = F'_n f' , \quad (17.2)$$

где F'_n – проекция силы нормальной реакции; $\varphi_{\text{тр}}$ – приведённый угол трения; f' – приведённый коэффициент трения в резьбе.

Коэффициент трения в резьбе f при слабой смазке для стали по бронзе $f = 0,1$, для стали по чугуна $f = 0,15$.

Из полученной зависимости следует, что чем меньше профильный угол α тем меньше сила трения в резьбе, тем выше КПД.

Приведённый угол трения вычисляют по формуле

$$\varphi_{\text{тр}} \approx \frac{\varphi}{\cos \alpha / 2} .$$

В рабочем режиме передачи винт-гайка, при преодолении осевой нагрузки F (рис. 17.5, в) вращающий момент заворачивания T_p рассчитывается по величине окружной силы F_t , условно приложенной к элементу гайки на среднем диаметре d_2

$$T_p = F_t \frac{d_2}{2} \text{tg}(\varphi_{\text{тр}} + \gamma) . \quad (17.3)$$

В режиме разгрузки, т.е. при отвинчивании, элемент гайки движется вниз (рис. 17.5, г). Момент отвинчивания рассчитывается по формуле

$$T_{\text{от}} = F_t \frac{d_2}{2} \text{tg}(\varphi_{\text{тр}} - \gamma) . \quad (17.4)$$

Из последней формулы следует, что при отвинчивании к гайке необходимо прикладывать момент если $\varphi_{\text{тр}}$ больше угла подъема γ резьбы. Условие

$$\varphi_{\text{тр}} > \gamma, \quad (17.5, \text{ а})$$

называется *условием самоторможения*, а условие

$$\varphi_{\text{тр}} < \gamma. \quad (17.5, \text{ б})$$

– *условием самоотвинчивания*.

Коэффициент полезного действия η передачи винт-гайка можно определить через отношение работы, затраченной на поворот гайки без учёта трения A' ($\varphi_{\text{тр}}=0$), к работе A по повороту на тот же угол β гайки с учётом сил трения ($\varphi_{\text{тр}} \neq 0$)

$$\eta = \frac{A'}{A} = \frac{T'_p \beta}{T_p \beta} = \frac{\text{tg} \gamma}{\text{tg}(\varphi_{\text{тр}} + \gamma)} \quad (17.6)$$

Основной причиной выхода из строя винтов и гаек винтовых передач – *износ резьбы*. Критерием износостойкости резьбы винтовой пары принимают давление p между витками винта и гайки, которое не должно превышать допустимого значения $[p]$, зависящего от материалов и условий эксплуатации. Условие износостойкости при выполнении проверочного расчёта имеет следующий вид

$$p = \frac{F}{\pi d_2 h z_B} \leq [p], \quad (17.7)$$

где F – осевая сила, действующая на винт и гайку; d_2 – средний диаметр резьбы; h – рабочая высота профиля резьбы (рис. 6.3); z_B – число витков резьбы гайки.

Число витков резьбы z_B – гайки связано с её высотой H и шагом P резьбы соотношением

$$z_B = H/P.$$

Проектный расчёт винта и гайки из условия на износостойкость (2.137) резьбы выполняют по формуле

$$d_2 = \sqrt{\frac{F}{\pi \psi_H \psi_h [p]}}, \quad (17.8)$$

где $\psi_H = H/d_2$ – коэффициент высоты гайки; $\psi_h = h/P$ – коэффициент высоты резьбы; $[p]$ – допустимое давление (для пар закалённая сталь – бронза $[p]=10 \div 15$ МПа, незакалённая сталь – чугун $[p]=5$ МПа).

Расчёт винтов на прочность выполняется по эквивалентным напряжениям $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ с учётом напряжений σ_p растяжения (сжатия) и кручения τ_k

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_p^2 + 3\tau_k^2} \leq [\sigma],$$

где $\sigma_p = 4F/(\pi d_1^2)$; $\tau_k = T_p/(0,2 d_1^3)$; $[\sigma] = \sigma_T/s$ – допустимое напряжение, здесь σ_T – предел текучести материала винта; $s \approx 2$ коэффициент запаса прочности.

Расчёт на устойчивость длинных высоконагруженных винтов при их сжатии выполняется по условию

$$\sigma_{\text{сж}} = \frac{4F}{\pi d_1^2} \leq \varphi_y [\sigma] ,$$

где φ_y – коэффициент уменьшения допускаемых напряжений, выбираемый в зависимости от гибкости $\lambda = \mu l / i$ следующим образом:

$\lambda \dots$	30	50	60	80	100	120	140	160
$\varphi_y \dots$	0,91	0,86	0,82	0,70	0,52	0,37	0,29	0,24

В связи с наличием зазоров в резьбе закрепление винта считают шарнирным ($\mu = 1$). Радиус инерции $i = (J/A)^{0,5} = 0,25d_1$ (здесь J – осевой момент инерции сечения; A – площадь поперечного сечения винта по внутреннему диаметру резьбы d_1).

17.3. Контрольные вопросы

1. К какому классу механических передач относятся передачи винт-гайка?
2. Какие типы передач винт-гайка существуют?
3. Какова область применения передач винт-гайка? Каковы основные достоинства и недостатки передач винт-гайка?
4. Как определить функцию положения передачи винт-гайка?
5. Какие виды резьб используют в передачах винт-гайка?
6. Как определяют КПД данной передачи?
7. Как получено условие самоторможения и условие самоотвинчивания?
8. Назовите основные критерии работоспособности, по которым производится расчёт передач винт-гайка.
9. Как выполняется расчёт винтов на устойчивость?

Глава 18. Цепные передачи

18.1. Цепные передачи. Общие сведения

Цепной передачей называется передача зацеплением с помощью цепи. По назначению цепи бывают грузовыми, служащими для закрепления грузов; тяговыми – для перемещения грузов в машинах; приводными – для передачи движения. Грузовые и тяговые цепи (в настоящем пособии не рассматриваются) являются гибкими звеньями машин специального назначения – подъёмных кранов, транспортёров и других устройств. Приводные цепи по количеству рядов бывают однорядные и многорядные, способные передавать большие нагрузки.

Цепные передачи (рис. 18.1) предназначены, главным образом, для передачи вращательного движения между параллельными осями на большие расстояния с преобразованием параметров движения (момента T и угловой скорости ω).

В отличие от ременных передач, цепные передачи обеспечивают постоянство среднего передаточного отношения. Передаточное отношение в тихоходных механических передачах (окружная скорость $V \leq 2$ м/с) может достигать $i = 15$, а в быстроходных ($V \leq 25$ м/с) передаточное отношение – $i \leq 3$. Передаваемая мощность до 100 кВт, межосевое расстояние a (рис. 18.1) до $6 \div 8$ м. КПД ($\eta = 0,96 \div 0,98$). При благоприятных условиях цепные передачи могут передавать мощность до нескольких тысяч киловатт, допускают скорости движения цепи до 35 м/с и передаточные отношения до $i = 10$. Радиальная нагрузка на валы в два раза меньше чем в ременной передаче. Одной цепью в движение может приводиться сразу несколько валов.

Основные недостатки цепной передачи: повышенная виброактивность и шум из-за неравномерности движения цепи, повышенный износ шарниров вследствие трения и трудностей смазки, вытягивание цепи вследствие износа шарниров и удлинения пластин, которое необходимо компенсировать натяжными устройствами.

Цепь 3 выполняет функцию гибкой связи между ведущим 1 и ведомым 2 звеньями, которые называются *звездочками* (рис. 18.1). Звёздочки по своей конструкции подобны зубчатым колёсам. Зубья звёздочек стандартизованы.

Основными типами приводных цепей являются *роликовые, втулочные и зубчатые* цепи. Многорядные цепи (с числом рядов 2 и 3) используются при больших нагрузках и скоростях цепи.

Основным геометрическим параметром цепей является *шаг P* – расстояние между осями двух смежных роликов. С увеличением шага цепи уменьшается её быстроходность и несущая способность. Приводные роликовые и втулочные цепи стандартизованы (ГОСТ 13568-

75*): в тихоходных передачах применяют цепи типа ПР (приводные роликовые) с шагом $P > 25,4$ мм, ПРИ – роликовые с изогнутыми пластинами, ПВ – приводные втулочные. В зависимости от отношения шага цепи P к диаметру ролика D различают цепи лёгкой (ПРЛ), нормальной (ПР) серий и длиннозвенные цепи (ПРД).

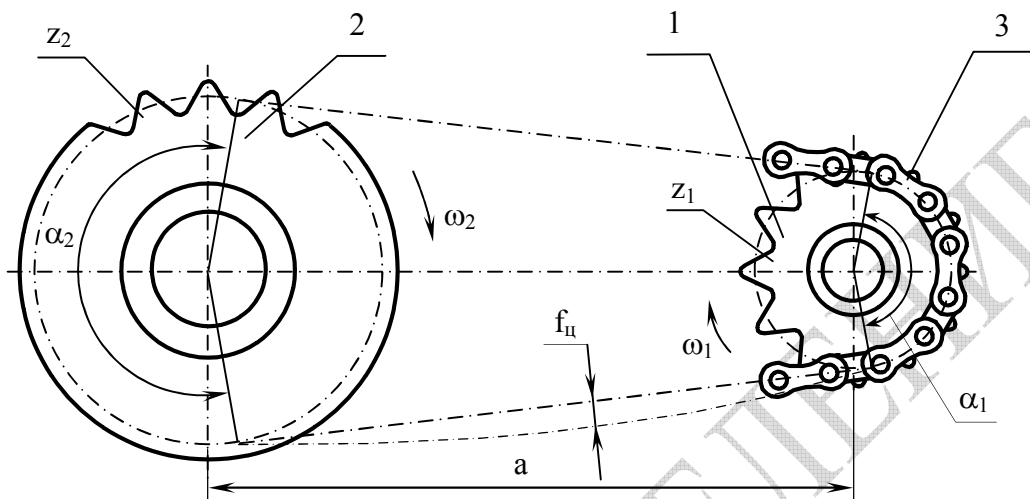


Рисунок 18.1

Длиннозвенные роликовые цепи имеют звенья двойного шага, поэтому они легче и дешевле других, применяются при малых скоростях движения. Стандартные втулочные цепи изготавливают одно- и двухрядными с шагом 9,525 мм. Роликовые цепи с изогнутыми пластинами обладая повышенной податливостью (пластины работают на изгиб), применяются при динамических нагрузках (реверсах, ударах и т.д.).

В передачах применяют обычно роликовые цепи (рис. 18.2). Они уменьшают износ зубьев звёздочек. Скорость движения роликовых цепей до 15 м/с. Недостаток – повышенный шум в процессе движения.

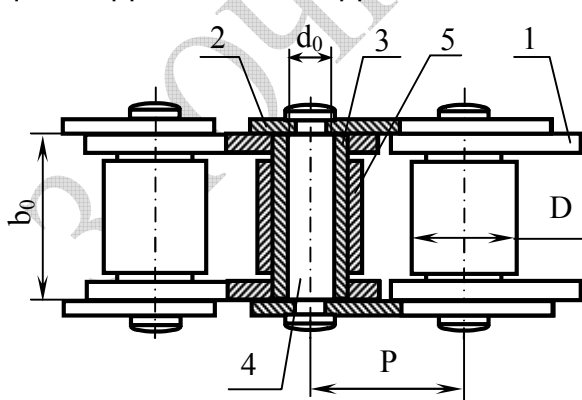


Рисунок 18.2

Роликовая цепь (рис. 18.2) состоит из чередующихся шарнирно соединённых между собой внутренних 1 и внешних 2 звеньев. Внутренние пластины звеньев напрессовываются на втулки 3, а наружные пластины напрессовываются на ось 4. На втулке 3 располагаются свободно вращающиеся ролики 5. Концы осей 4 после сборки звена расклёпываются.

Втулочные цепи проще роликовых, и отличаются от них отсутствием роликов 5 (рис. 18.2). Вследствие этого износ цепей и звёздочек увеличивается, но они имеют относительно малую массу,

могут двигаться со скоростью до 18 м/с, и применяются в приводах малой мощности.

В обозначении цепи число рядов указывается цифрой, которая ставится перед обозначением, например: *Цель ЗПР – 25,4 – 170,1 ГОСТ 13568 – 75* – трёхрядная приводная роликовая цепь нормальной серии с шагом 25,4 мм, с разрушающей нагрузкой 170,1 кН.

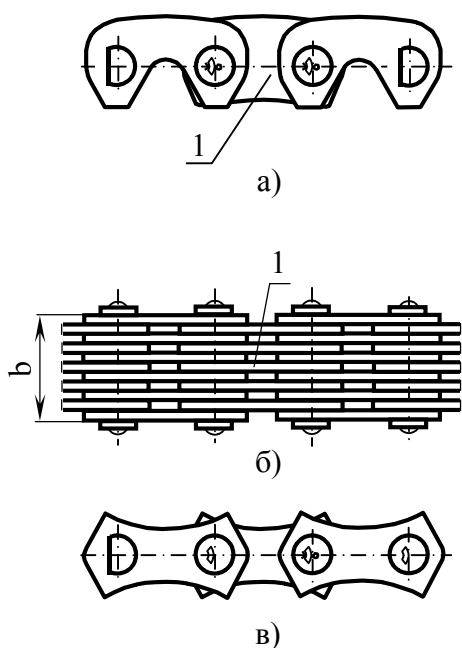


Рисунок 18.3

Зубчатые цепи (изготавливаются по ГОСТ 13552– 81*) состоят из набора пластин с двумя зубообразными выступами. Различают цепи типа I (с односторонним зацеплением) (рис. 18.3, а, б) и цепи типа II (с двусторонним зацеплением) (рис. 18.3, в).

Пластины цепи типа I зацепляются с зубьями звёздочки своими торцевыми плоскостями расположенными под углом 60° (рис. 18.4). В зубчатых цепях применяют шарниры скольжения (рис. 18.4, а) и шарниры качения (рис. 18.4, б).

В шарнирах скольжения вкладыши 1 и 2 проходят через всю ширину цепи, при этом вкладыш 1 закреплён в пластинах Б, а вкладыш 2 – в пластинах А. Шарнир благодаря секторному вырезу в пластинах допускает относительный поворот пластин на угол φ_{\max} (обычно $\varphi_{\max} = 30^\circ$). Величина угла φ_{\max} ограничивает минимальное число зубьев звёздочки по условию

$$z_{\min} = 360^\circ / \varphi_{\max} = 12.$$

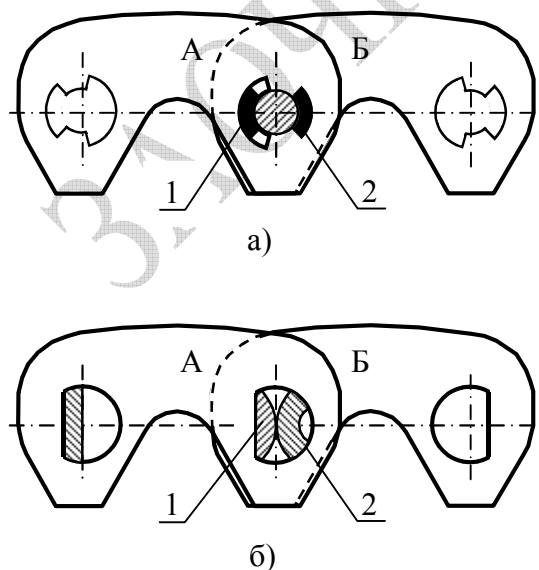


Рисунок 18.4

Шарниры качения не имеют валика – их изготавливают с двумя сегментными вкладышами (призмами) 1 и 2. При повороте звеньев вкладыши не скользят, а перекатываются, что позволяет повысить КПД и уменьшить износ элементов передачи.

Для предотвращения бокового сползания зубчатой цепи со звёздочек в цепи предусмотрена установка направляющих пластин 1 (рис. 18.3, а, б). Направляющие пластины 1 подобны рабочим, только они не имеют впадины для зуба и располагаются на середине ширины многорядной цепи

(рис. 18.3, б). Звёздочка имеет ответный паз для прохождения направляющей пластины (18.5, б).

Зубчатые цепи имеют лучшие условия зацепления с зубьями звёздочек, и работают с меньшим шумом. По сравнению с другими конструкциями зубчатые цепи тяжелее и дороже. Их ширина может превышать 1,5 м, а скорость движения достигать 25 м/с. Зубчатые цепи предназначены для передачи больших мощностей.

Пластины зубчатых цепей изготавливают из стали 50 с твёрдостью 38÷45 HRC, а призмы из сталей 15 или 20 с цементацией и закалкой до твёрдости 52÷60 HRC.

В обозначении приводной зубчатой цепи принята следующая последовательность данных:

*Цепь ПЗ –1–19,05–74–45 ГОСТ 13552 – 81** – приводная зубчатая цепь типа 1 с шагом 19,5 мм, с разрушающей нагрузкой 74 кН и рабочей шириной 45 мм.

По конструктивному оформлению звёздочки аналогичны зубчатым колёсам. Звёздочки малых размеров изготавливают из штампованных заготовок (рис. 18.5, а, б), а звёздочки средних и больших диаметров изготавливают составными – соединяют диски со ступицами сваркой (рис. 18.5, в) или болтами (рис. 18.5, г). Ширина зубчатого венца звёздочки принимается несколько меньше зазора между пластинами.

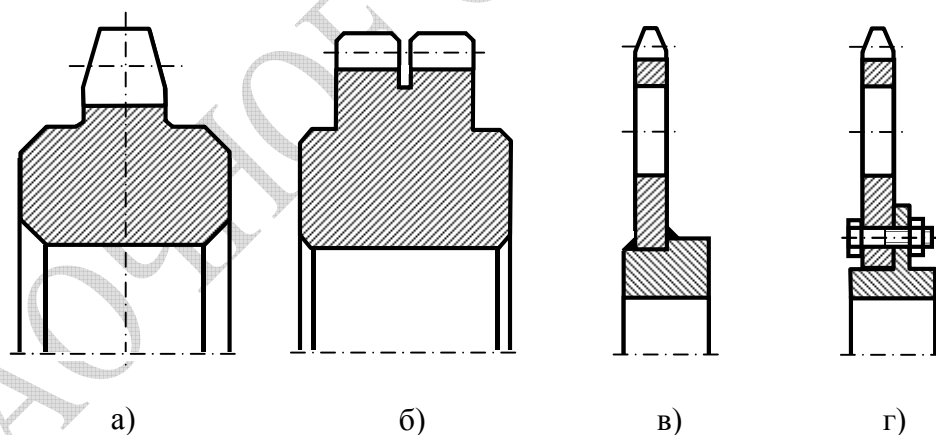
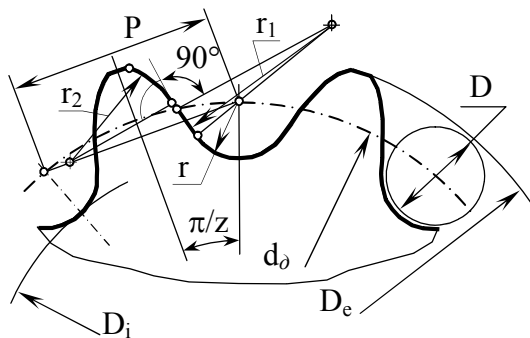


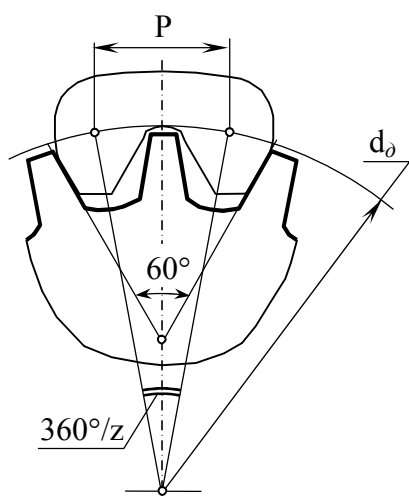
Рисунок 18.5

Минимальное число зубьев малой звёздочки для силовых передач общего назначения выбирают по эмпирической зависимости (с округлением до целого числа): $Z_{1\min} = 29 - 2i$.

Профиль зубьев (рис. 18.6) звёздочек зависит от типа цепи. Зубья звёздочек для роликовых цепей с соотношением шага $P/D < 2$ (здесь D наружный диаметр ролика) профилируют по ГОСТ 591–89. Диаметр делительной окружности звёздочки (рис. 18.6, а)



а)



б)

Рисунок 18.6

Диаметр окружности вершин звёздочки рассчитывается по формуле

$$D_e = P(0,5 + \text{ctg}180^\circ/z). \quad (18.2)$$

Звёздочки зубчатых (ГОСТ 13576–68) цепей имеют прямолинейный рабочий профиль, соответствующий прямым поверхностям зубчатых пластин (рис. 18.6, б).

18.2. Расчёт цепных передач

Кинематика цепной передачи отличается от кинематики зубчатой передачи. Звенья цепи располагаясь на звёздочке образуют многоугольник (рис. 18.1), что при постоянной угловой скорости ω_1 ведущей звёздочки приводит к неравномерному движению цепи. Среднее передаточное отношение

$$i = \omega_1 / \omega_2 = z_2 / z_1, \quad (18.3)$$

$$d_o = P/\sin(\pi/z). \quad (18.1)$$

Профилирование звёздочек производят по стандарту, предусматривающему износоустойчивые профили. Профиль зуба роликковой и втулочной цепей (рис. 18.6, а) состоит из радиусной впадины радиусом r , вогнутого участка радиусом r_1 , небольшого прямолинейного переходного участка и радиусной головки (радиус r_2). Радиус r дуги окружности, по которой очерчена ножка зуба, назначается с таким расчётом, чтобы обеспечивался гарантированный боковой зазор для ролика диаметром D во впадине звёздочки – $r > 0,5D$. Радиус r_2 подобран таким образом, чтобы головка зуба не участвовала в контакте с роликом; назначение головки – служить направляющей для внутренних пластин.

Обозначение делительного диаметра звёздочки – d_o , диаметра вершин – D_e , диаметра впадин – D_i (рис. 18.6, а).

где z_1 и z_2 – число зубьев звездочек 1 и 2.
Средняя скорость цепи, м/с,

$$V = z_1 n_1 P / 60000, \quad (18.4)$$

где z_1 – число зубьев малой звёздочки; n_1 – частота вращения малой звёздочки, мин^{-1} ; P – шаг цепи, мм.

Величина шага цепи ограничивается максимально допустимым значением угловой скорости малой звёздочки (табл. 18.1). Данное ограничение объясняется тем, что энергия удара при входе звена в зацепление со звёздочкой пропорциональна массе звена (т.е. его размеру) и квадрату угловой скорости. Последовательные удары – одна из причин разрушения цепи и звёздочки.

Таблица 18.1 Максимально допустимые угловые скорости малой звёздочки цепной передачи

Число зубьев z_1	ω_{\max} , рад/с						
	$P=12,7$ мм	$P=15,875$ мм	$P=19,05$ мм	$P=25,4$ мм	$P=31,75$ мм	$P=38,1$ мм	$P=44,45$ мм
≥ 15	Для втулочных и роликовых цепей						
	180	140	120	80	60	45	35
≥ 17	Для зубчатых цепей						
	340	280	230	170	140	–	–

Межосевое расстояние назначают в пределах

$$a = (30 \div 50) P,$$

при котором предотвращается, как быстрое изнашивание, так и провисание цепи (меньшее значение при малых передаточных числах). Максимальное значение межосевого расстояния ограничивается $a_{\max} \leq 80P$ во избежание чрезмерного натяжения цепи силой собственной тяжести. Минимальное значение межосевого расстояния ограничивается условием обеспечения угла обхвата цепью меньшей звёздочки $\alpha \geq 120^\circ$; $a_{\min} \approx 25P$.

Число звеньев цепи, определяемое по формуле

$$z_{\text{ц}} = \frac{2a}{P} + \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{P(z_2 - z_1)^2}{4\pi^2 a}, \quad (18.5)$$

для отказа от переходного звена округляют до чётного числа.

Длина цепи определяется шагом P и числом звеньев $z_{\text{ц}}$

$$L = z_{\text{ц}} P.$$

Окончательное значение межосевого расстояния

$$a = \frac{P}{4} \left(z_{\text{ц}} - \frac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{\left(z_{\text{ц}} - \frac{z_1 + z_2}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{z_2 - z_1}{\pi} \right)^2} \right). \quad (18.6)$$

Если в передаче не предусмотрено устройство для регулирования межосевого расстояния, то для обеспечения необходимого провисания цепи межосевое расстояние сокращают на $(0,002 \div 0,004)a$; при значительной вытяжке цепи за счёт износа шарниров удаляют необходимое количество звеньев. Установка цепи с провисанием позволяет избежать повышенной нагрузки на цепь и валы – стрела провисания допускается до $f_{\text{ц}} = 0,02 \div 0,015 a$ (рис. 18.1).

Силы в цепной передаче аналогичны силам, действующим в ременной передаче. Однако, в цепной передаче в отличие от ременной предварительное натяжение гибкой связи, как правило, не требуется.

Окружная сила на ведущей звёздочке

$$F_t = \frac{2T_1}{d_{\partial 1}}. \quad (18.7)$$

Сила натяжения в ведущей ветви цепи

$$F_1 = F_t + F_2.$$

Сила натяжения ведомой ветви

$$F_2 = F_0 + F_{\text{ц}},$$

где F_0 – натяжение цепи от силы тяжести; $F_{\text{ц}}$ – натяжение от действия центробежных сил.

Натяжение от силы тяжести при горизонтальном положении передачи определяют как для гибкой нерастяжимой нити

$$F_0 = \frac{m_1 g a}{8f_{\text{ц}}},$$

где m_1 – погонная масса цепи (масса одного метра), кг/м; g – ускорение свободного падения, м/с²; a – межосевое расстояние, м; $f_{\text{ц}}$ – стрела провисания цепи, мм.

При вертикальном положении передачи

$$F_0 = m_1 g a.$$

Натяжение цепи от действия центробежных сил определяют в зависимости от скорости движения цепи V по формуле

$$F_{ц} = m_1 V^2.$$

Обычно сила F_0 составляет всего несколько процентов от F_t . Величина центробежной силы $F_{ц}$ для тихоходных и среднескоростных передач ($V \leq 10$ м/с) обычно так же не превышает нескольких процентов. По этой причине для практических расчётов можно принимать

$$\left. \begin{array}{l} F_1 \approx F_t \\ F_0 \approx 0 \end{array} \right\} . \quad (18.8)$$

В общем случае результирующую силу F_{Σ} , действующую на валы, определяют по правилу сложения векторов (при параллельности ветвей цепи $F_{\Sigma} = F_1 + F_2$). При проведении практических расчётов, ввиду малости $F_{ц}$ и F_0 , считается, что расчётная сила, действующая на валы передачи направлена вдоль линии центров, и определяется как

$$F_{\Sigma} = k F_t, \quad (18.9)$$

где k – коэффициент, учитывающий массу цепи, $k = 1,15$ – для горизонтальной и $k = 1,05$ для вертикальной передачи.

Расчёт передачи (по критерию работоспособности) проводят учитывая того, что износ шарниров звеньев является основной причиной выхода из строя цепей. Он приводит к увеличению шага цепи (вытяжке цепи), неправильному зацеплению и сползанию цепи со звездочки.

Долговечность втулочных и роликовых цепей, подобранных по критерию износостойкости 2000÷5000 часов и более; долговечность зубчатых цепей 8000÷10000 часов.

Для закрытых передач, работающих при больших динамических нагрузках, критерием работоспособности является также сопротивление усталости элементов цепи, в первую очередь пластин. В ответственных передачах цепи проверяют на статическую прочность.

Проверочный расчёт втулочных и роликовых цепей выполняют по условию

$$\rho = K F_t / (z_p A_{оп}) \leq [\rho], \quad (18.10)$$

где p – расчётное среднее давление в шарнире; F_t – передаваемое окружное усилие; $A_{оп} = d_0 b_0 \approx (0,25 \div 0,28) P^2$ – площадь проекции опорной поверхности шарнира; d_0 – диаметр валика; b_0 – длина втулки; $[p]$ – допускаемое среднее давление в шарнирах (табл. 18.2); K – коэффициент эксплуатации, учитывающий конкретные особенности рассчитываемой передачи; z_p – число рядов цепи.

Коэффициент эксплуатации учитывает условия работы цепной передачи

$$K = K_1 K_2 K_3 K_4 K_4 K_5 K_6,$$

где K_1 – коэффициент динамичности нагрузки (при спокойной нагрузке $K_1=1$, при толчках $K_1=1,2 \div 1,5$, при сильных ударах $K_1=1,8$); K_2 – коэффициент, учитывающий межосевое расстояние ($K_2=1$ при $a=(30 \div 50)P$; $K_2=1,25$ при $a < 30P$; $K_2=0,9$ при $a > 50P$); K_3 – коэффициент, учитывающий способ смазки (при непрерывной смазке $K_3 = 0,8$, при капельной смазке $K_3 = 1$, при периодической $K_3 = 1,5$); K_4 – коэффициент режима работы (односменная $K_4 = 1$, двусменная $K_4 = 1,25$, трёхсменная $K_4 = 1,45$); K_5 – коэффициент, учитывающий наклон межосевой линии к горизонтали (если наклон не превышает 70° , $K_5=1$, если наклон больше 70° $K_5=1,25$); K_6 – коэффициент монтажа передачи (передвигающиеся опоры $K_6=1$, при наличии оттяжных звёздочек или нажимных роликов $K_6=1,15$, нерегулируемое натяжение $K_6=1,25$).

Таблица 18.2 Допускаемое давление в шарнире

ω , рад/с	$[p]$, МПа, при шаге цепи P , мм			
	12,7 – 15,875	19,05 – 25,4	31,75 – 38,1	44,45 – 50,8
5,2	34,3	34,3	34,3	34,3
21	30,9	29,4	28,1	25,7
42	28,1	25,7	23,7	20,6
63	25,7	22,9	20,6	17,2
84	23,7	20,6	18,1	14,7
105	22,0	18,6	16,3	–
126	20,6	17,2	14,7	–
167	18,1	14,7	–	–

При проектном расчёте предварительное значение шага цепи определяется по формуле

$$P \geq 2,8 \sqrt[3]{\frac{KT_1}{z_1[p]z_p}}, \quad (18.11)$$

где T_1 – вращающий момент на ведущей звёздочке; z_1 – число зубьев звёздочки; z_p – число рядов цепи; K – коэффициент эксплуатации (см. выше).

В данной формуле допускаемое давление $[p]$ в шарнирах принимается по таблице 18.2 ориентировочно по заданной угловой скорости и по предполагаемому шагу.

Расчёт передач с зубчатыми цепями. По стандарту число зубьев меньшей звёздочки $z_1 \geq 17$. Чем больше зубьев, тем меньше давление в шарнире, шаг и ширина цепи, и тем выше долговечность.

При проектном расчёте по выбранному шагу P , передаваемой мощности N и скорости V цепи определяют предварительную ширину зубчатой цепи

$$b \geq 25 \cdot 10^{-8} K_1 K_v N / (PV^{2/3}), \quad (18.12)$$

где K_1 – коэффициент динамичности нагрузки (при спокойной нагрузке $K_1=1$, при толчках $K_1=1,2 \div 1,5$, при сильных ударах $K_1=1,8$); K_v – коэффициент скорости, учитывающий влияние центробежных сил ($K_v = 1$ при $V \leq 10$ м/с, $K_v \approx 1,1 \div 1,4$ при $V > 10$ м/с).

Полученное значение ширины цепи округляют до стандартного значения.

18.3. Контрольные вопросы

1. К какому классу механических передач относятся цепные передачи?
2. Назовите элементы цепной передачи.
3. Какие типы цепных передач существуют? По каким признакам они классифицируются?
4. Перечислите достоинства и недостатки цепных передач.
5. Как определить передаточное число цепной передачи?
6. Почему для высоких скоростей вращения звёздочек рекомендуются цепи с малым шагом?
7. Какой критерий работоспособности является основным для цепной передачи?
8. Какие параметры учитывает коэффициент эксплуатации?
9. Для чего требуется обеспечивать натяжение цепи?

Глава 19. Фрикционные передачи

19.1. Общие сведения.

Фрикционной передачей называют механизм, в котором движение одного жесткого звена преобразуется в движение другого жесткого звена за счет сил трения, возникающих в зоне контакта. Фрикционные передачи отличаются простотой конструкции, плавностью работы, бесшумностью, автоматическим предохранением от перегрузок из-за проскальзывания (буксования) звеньев, возможностью бесступенчатого изменения передаточного отношения.

Основные недостатки связаны с непостоянством передаточного отношения из-за проскальзывания звеньев в зоне контакта, с необходимостью создания большой силы прижатия звеньев друг к другу, обеспечивающей необходимое трение, усиленный износ рабочих поверхностей, сравнительно низкий КПД ($0,7 \div 0,9$). Силы прижатия негативно сказываются на работоспособности всех элементов передачи: валов (осей), подшипников, элементов корпуса. Передачи чувствительны к загрязнению, увеличивающим проскальзывание и нестабильность передаточного отношения.

Фрикционные передачи широко применяются в технологических машинах, транспортирующих устройствах, металлорежущих станках, приборах, системах автоматики. Непостоянство передаточного отношения при необходимости компенсируется с помощью следящей системы и регулируемого электропривода.

Во фрикционных передачах вращательного движения используются катки, главным образом, цилиндрической (рис. 19.1, а, б), конической (рис. 19.1, б), реже сферической формы. Контакт между катками может быть внешним (рис. 19.1, а, б) или внутренним (рис. 19.1 в). В некоторых технологических машинах используют фрикционные механизмы, преобразующие вращательное движение в поступательное (рис. 19.1, г).

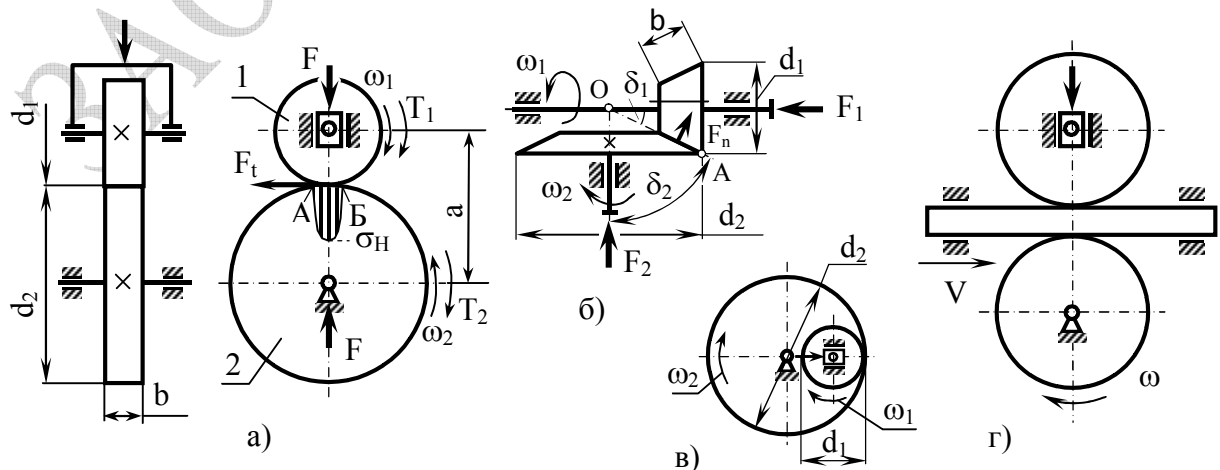


Рисунок 19.1

Частным случаем цилиндрической передачи является передача клинчатыми катками (рис. 19.2); рабочая высота выступов h принимается $(0,005 \div 0,006)d$, или $5 \div 15$ мм; угол $\beta = 12 \div 18^\circ$. Передачи этого типа отличаются лучшим сцеплением, но они сложнее в изготовлении и имеют меньший КПД.

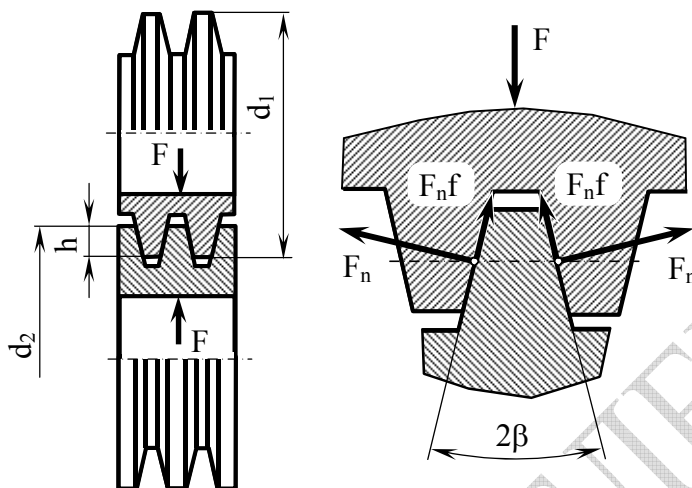


Рисунок 19.2

Трение между катками или роликами обеспечивается усилием прижатия F , которое создается специальными прижимными устройствами (пружинами, грузо-рычажной системой, гидравлическим или пневматическим давлением, электромагнитным воздействием).

Движение соприкасающихся звеньев (катков, роликов, дисков) сопровождается их относительным скольжением. Различают *упругое скольжение*, *геометрическое скольжение*, а также *буксование*.

Упругое скольжение возникает из-за различной упругой деформации ведущего 1 и ведомого 2 звеньев в зоне контакта АБ (рис. 19.1, а). Поверхностные слои ведущего катка 1, нагруженного движущим (вращающим) моментом T_1 , по мере приближения к площадке контакта АБ сжимаются, а проходя её растягиваются. В точке А волокна ведущего катка растянуты, а ведомого сжаты. Под действием сил трения в точке Б волокна ведущего катка сжаты, а ведомого – растянуты. Таким образом, в пределах площадки контакта АБ волокна каждого катка меняют свою деформацию, скользя, друг по другу.

Геометрическое скольжение вызвано несовпадением окружных скоростей звеньев фрикционного механизма вдоль линии контакта, например, если вершины конусов конических катков не совпадают, или цилиндрический ролик перекачивается по вращающемуся диску, а так же в клинчатых передачах (рис 19.2). В цилиндрической передаче (рис. 19.1, а), или в конической передаче (рис. 19.1, б) при совпадении вершин конусов – геометрическое скольжение отсутствует.

Буксование возникает, когда движущая сила больше силы сцепления между звеньями.

Катки обычно изготавливают из материалов, образующих пары с повышенным трением: сталь – сталь, сталь – текстолит, сталь – резина и др. Материалы катков для обеспечения их долговечности должны иметь большой модуль упругости, высокую контактную прочность и износостойкость. Рекомендуется изготавливать ведущий каток из более мягкого материала, что обеспечивает равномерный износ, высокий коэффициент трения, меньшую силу прижатия и снижение шума, что, однако сопровождается уменьшением КПД и повышенным упругим скольжением.

19.2. Расчёт фрикционных передач

Кинематика фрикционных передач. В точке контакта цилиндрических катков (рис. 19.1, а, б) окружные скорости ведомого и ведущего катков равны только в идеальном случае, т.е. без учёта проскальзывания. В действительности окружная скорость V_2 ведомого катка несколько меньше скорости V_1 ведущего катка, из-за их взаимного проскальзывания, которое вызвано упругим смещением контактирующих точек. Влияние проскальзывания учитывается коэффициентом скольжения ($\varepsilon = 0,01 \div 0,05$)

$$\varepsilon = (V_1 - V_2) / V_1. \quad (19.1)$$

Следовательно,

$$V_2 = (1 - \varepsilon)V_1. \quad (19.2)$$

С учетом выражений для окружных скоростей звеньев

$$V_1 = 0,5 d_1 \omega_1 \quad \text{и} \quad V_2 = 0,5 d_2 \omega_2,$$

передаточное отношение фрикционного механизма имеет вид

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1(1 - \varepsilon)}, \quad (19.3)$$

где d_2 и d_1 – диаметры катков.

Применительно к фрикционной передаче с коническими катками (рис. 19.1,б), оси которых пересекаются под углом 90° выражение (19.3) для передаточного отношения, с учётом того, что $d_2 = 2 L \sin \delta_2$, а

$d_1 = 2 L \sin\delta_1$ (здесь $L = AB$ – конусное расстояние, рисунок 19.1, б) приобретает следующий вид

$$\left. \begin{aligned} i &= \sin\delta_1 / \sin\delta_2 \\ i &= \operatorname{tg}\delta_2 = \operatorname{ctg}\delta_1 \end{aligned} \right\} \quad (19.4)$$

Усилия в передачах. При расчете фрикционных передач, как и при расчёте других видов передач в качестве исходного параметра задаётся величина передаваемой мощности $N = T_2\omega_2$ или величина момента сил сопротивления T_2 , действующего на ведомое вено 2 (рис. 19.1, а). Для преодоления этого момента требуется полезная окружная сила

$$F_t = \frac{2T_2}{d_2}. \quad (19.5)$$

Сила трения, образующаяся на площадке контакта катков зависит от усилия прижатия F и *коэффициента трения* f ($f = 0,1 \div 0,15$ – сталь по стали всухую; $f = 0,05$ – сталь по стали (в масле); $f = 0,2 \div 0,25$ – текстолит по стали; $f = 0,45 \div 0,60$ – резина по стали)

$$F_{\text{тр}} = F f. \quad (19.6)$$

Сила прижатия F определяется из условия отсутствия буксования, когда сила трения $F_{\text{тр}}$ больше окружной силы F_t

$$F_{\text{тр}} = k F_t, \quad (19.7)$$

где k – *коэффициент запаса сцепления* ($k = 2 \div 3$ для приборов; $k = 1,25 \div 1,5$ для силовых передач).

С учетом приведенных соотношений (19.6 и 19.7)

$$F = \frac{kF_t}{f}. \quad (19.8)$$

Таким образом, сила прижатия F катков многократно больше полезной окружной силы (например, при $k = 2$ и $f = 0,1$ усилие $F = 20 F_t$); для сравнения – в зубчатой передаче окружная сила и сила нормального давления примерно равны.

Для конической фрикционной передачи (рис. 19.1, б) усилия прижатия конических катков с учётом геометрических соотношений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= F_n \sin \delta_1 = \frac{kF_t}{f} \sin \delta_1 \\ F_2 &= \frac{kF_t}{f} \sin \delta_2 \end{aligned} \right\}, \quad (19.9)$$

где F_n – сила нормальной реакции; $F_t = 2T_1/d_{1m}$ – окружное усилие; T_1 – вращающий момент, приложенный к ведущему катку; $d_{1m} = d_1 - b \cdot \sin \delta_1$ – средний диаметр ведущего катка; b – ширина линии контакта.

В клинчатых фрикционных передачах точками приложения сил условно считаются точки, расположенные с двух сторон на середине рабочей высоты выступов (рис. 19.2). Усилие прижатия клинчатых катков друг к другу в соответствии со схемой может быть определено по формуле

$$F = 2F_n \sin \beta + 2fF_n \cos \beta = 2F_n (\sin \beta + f \cos \beta). \quad (19.10)$$

Полезное окружное усилие F_t (вектор этого усилия перпендикулярен плоскости чертежа) рассчитывается по зависимости

$$F_t = f2F_n = \frac{f}{\sin \beta + f \cos \beta} F = f' F, \quad (19.11)$$

где $f' = f/(\sin \beta + f \cos \beta)$ – приведённый коэффициент трения.

С учётом коэффициента запаса сцепления k усилие прижатия клинчатых катков вычисляется по формуле

$$F = \frac{kF_t}{f'}. \quad (19.12)$$

Из анализа формул (19.11 и 19.12) следует, что усилие прижатия F в передачах с клинчатыми катками может быть существенно меньше, чем в цилиндрических передачах (например, для сравнения при $\beta = 12^\circ$, $k = 2$ и $f = 0,1$ усилие $F = 7,1 F_t$, тогда как для гладких цилиндрических катков $F = 20 F_t$).

Расчет фрикционных передач. Фрикционные передачи (рис. 19.1) в зоне контакта катков образуют высшую кинематическую пару, т.е. контакт между звеньями происходит в точке или по линии, если звенья считать недеформируемыми. При таком допущении рассчитать напряжения в зоне контакта по правилам сопротивления материалов невозможно, т.к. площадь точки или линии равна нулю

($A=0$), а напряжения, следовательно, равны бесконечности ($\sigma = F/A = \infty$). В действительности из-за местной упругой деформации в зоне контакта образуется небольшая площадка АВ (рис. 19.1, а). Возникающие контактные напряжения σ_H (рис. 19.1, а) называются *контактными* и рассчитываются по формуле Герца (19.13). Для цилиндров, конусов, торов при наружном контакте по линии максимальные контактные напряжения равны

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{F_n E_{np}}{b r_{np}}}, \quad (19.13)$$

где F_n – сила прижатия нормальная к поверхности контакта (для цилиндрических катков $F_n=F$); $E_{np} = (2E_1E_2)/(E_1+E_2)$ – приведенный модуль упругости; E_1 и E_2 – модули упругости материалов ведущего и ведомого катков; b – минимальная ширина катка (для клинчатых катков $b=zh$; z – число выступов); $r_{np} = (r_1r_2)/(r_1+r_2)$; r_1 и r_2 – радиусы ведущего и ведомого цилиндрических катков.

Из-за переменного действия контактных напряжений может происходить повреждение катков в виде выкрашивания вследствие контактной усталости. При использовании неметаллических катков происходит износ и отслаивание материала на этих звеньях.

Фрикционные передачи рассчитываются на прочность по контактным напряжениям

$$\sigma_H \leq [\sigma_H], \quad (19.14)$$

где $[\sigma_H]$ – допускаемое контактное напряжение (зависит от твердости по Бринеллю, например, для стальных катков при работе всухую $[\sigma] = (1,2 \div 1,5)$ НВ; для катков из текстолита $[\sigma_H] = (80 \div 100)$ МПа).

Расчет фрикционных катков на износ производится по формуле аналогичной (19.14), в которой в качестве $[\sigma_H]$ принимается допускаемое напряжение при расчете на износостойкость.

Проектный расчёт фрикционной передачи с цилиндрическими катками проводят по формуле, полученной из формулы Герца (19.13) выражая диаметры катков через межосевое расстояние и передаточное отношение i , а силу прижатия – через вращающий момент T_1

$$a = (i + 1) \sqrt[3]{\left(\frac{0,418}{[\sigma_H]}\right)^2 \frac{E_{np} k T_1}{f \psi_a i}}, \quad (19.15)$$

где k – коэффициент запаса сцепления; f – коэффициент трения; $\psi_a = b/a$ – коэффициент ширины катка по межосевому расстоянию ($\psi_a = 0,2 \div 0,4$).

По величине межосевого расстояния a определяют размеры катков

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= 2a/(i + 1) \\ d_2 &= d_1 i \\ b &= \psi_a a \\ \text{при } b &\leq d_1 \end{aligned} \right\} \cdot \quad (19.16)$$

19.3. Фрикционные вариаторы

Фрикционные механизмы, позволяющие плавно, бесступенчато изменять передаточное отношение при $\omega_1 = \text{const}$ называются *фрикционными вариаторами* (рис. 19.3). Действие вариаторов основано на изменении взаимного положения звеньев и соответствующем изменении рабочих радиусов (диаметров) звеньев. В лобовом вариаторе (рис. 19.3, а) ролик 1 может перемещаться вдоль вала 3, при этом величина рабочего радиуса r_2 диска 2 оказывается переменной. В двойном коническом вариаторе (рис. 19.3, б) передаточное отношение изменяется в результате изменения рабочих радиусов r_1 и r_2 при перемещении промежуточного ролика. В вариаторе Святозарова (рис. 19.3, в) изменение передаточного отношения происходит при изменении оси наклона промежуточного ролика 1. Ременной вариатор (рис. 19.3, г) состоит из двух пар верхних и нижних роликов (1 и 2) и клиновидного ремня 3 натянутого между ними. При одновременном сближении или раздвижении любой пары роликов, например 1 и 2, изменяются рабочие радиусы, что вызывает изменение передаточного отношения.

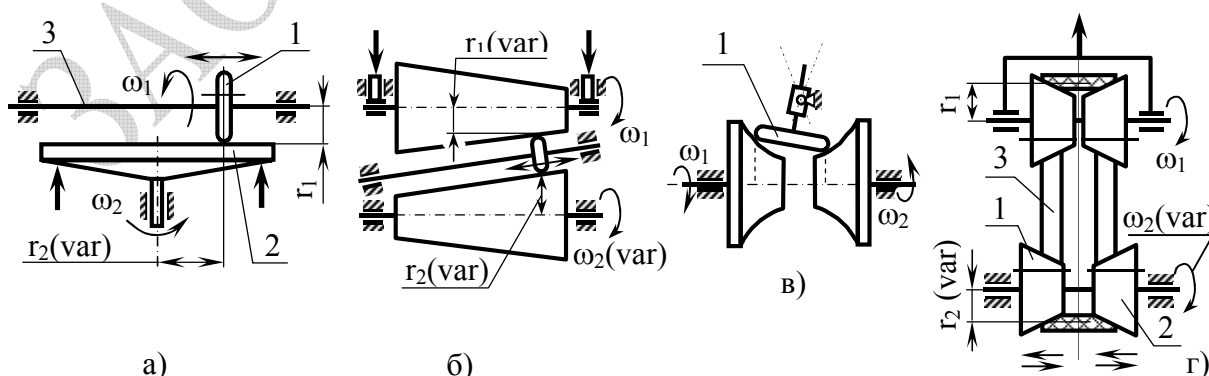


Рисунок 19.3

Применительно к вариаторам (рис. 19.3) зависимость (19.3) для передаточного отношения будет иметь вид

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1(1-\varepsilon)}. \quad (19.17)$$

где ε – см. выше.

Передаточное отношение в вариаторах изменяется в диапазоне от i_{\max} до i_{\min} (из-за изменения величин рабочих радиусов r_i). **Диапазон регулирования** вариатора

$$D = i_{\max} / i_{\min}, \quad (19.18)$$

обычно не превышает $D = 4$.

При работе лобового вариатора имеет место значительное геометрическое скольжение – окружная скорость V_1 ролика 1 постоянна по всей ширине ролика, окружная скорость диска 2 линейно изменяется от нуля в точке О до максимальной скорости V_{\max} на краю диска (рис. 19.4). Скорости ролика и диска совпадают лишь в точке А, точке контакта этих двух звеньев. В других точках линии контакта имеется скольжение со скоростью $V_{\text{ск}} = V_1 - V_2$. Скольжение вызывает повышенный износ и уменьшение КПД. Для уменьшения износа рабочим поверхностям ролика придают выпуклую форму (рис. 19.3, а).

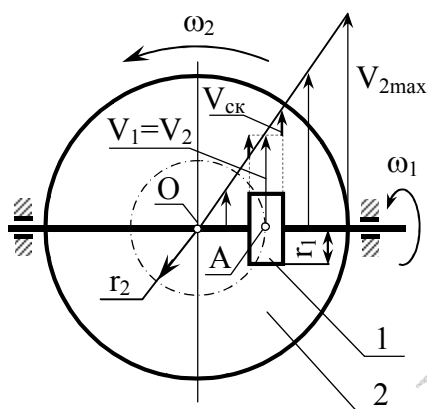


Рисунок 19.4

выпуклую форму (рис. 19.3, а).

Характеристика лобового вариатора – зависимость $i = f(r_2)$ (рис. 19.3, а)

– представлена на рисунке 19.5. На графике выделяют три зоны:

- I зона замедления ведомого вала (вала диска 2) ($r_2 > r_1$);
- II зона ускорения ведомого вала ($r_2 < r_1$);
- III зона реверса (зона изменения направления вращения ведомого вала при смещении ролика за центр диска) ($r_2 < 0$).

В окрестностях начала координат графика располагается зона, в которой наблюдается режим неустойчивой работы вариатора – повышается вероятность пробуксовки ролика и диска.

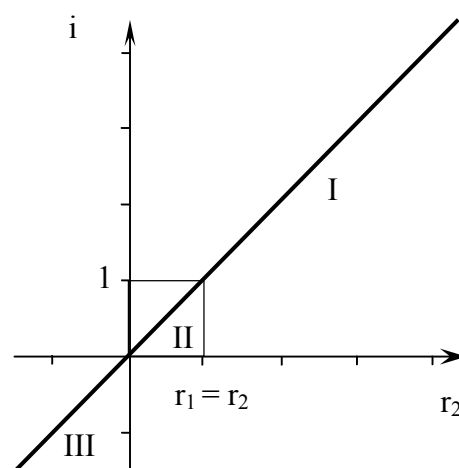


Рисунок 19.5

Для передачи больших мощностей (до 400 кВт) используют *многодисковые вариаторы* (рис. 19.6) – число ведущих дисков обычно от 9 до 21. При изменении межосевого расстояния a , диаметр d_1 остаётся постоянным – изменяется диаметр d_2 и передаточное

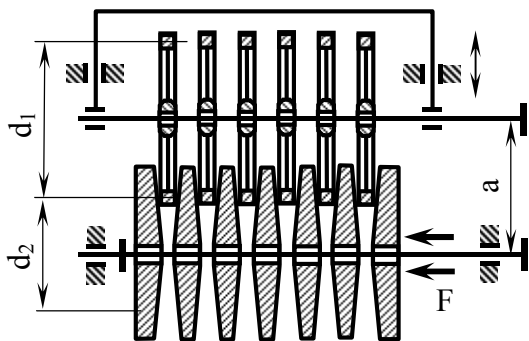


Рисунок 19.6

отношение.

В многодисковых вариаторах благодаря большому количеству точек контакта улучшается сцепление, снижаются силы прижатия F и контактные давления, что приводит к уменьшению износа дисков. Диски вариатора работают в масле, что уменьшает износ. Уменьшение коэффициента трения компенсируется увеличением числа

контактов.

Диски с конусностью от $1^{\circ}30'$ до $3^{\circ}00'$ изготавливаются из стали закалённой до твёрдости HRC 50÷60. Без учёта конусности усилие прижатия определяют по формуле

$$F = kF_t / (z_k f) = kT_1 2 / (z_k f d_1), \quad (19.19)$$

где z_k – число точек контакта (каждый ведущий диск имеет две точки контакта); T_1 – вращающий момент на ведущем валу.

19.4. Контрольные вопросы

1. На каком принципе основана работа фрикционной передачи?
2. Каковы основные достоинства и недостатки фрикционной передачи?
3. Назовите основные элементы фрикционной передачи. Как обеспечивается необходимое трение между звеньями?
4. Какие виды скольжения могут иметь место при работе фрикционной передачи? Охарактеризуйте их.
5. Какие материалы применяются для изготовления рабочих элементов фрикционных передач?
6. Как определяется передаточное отношение фрикционной передачи?
7. Какие усилия возникают во фрикционных передачах?
8. Какой критерий работоспособности является основным для расчёта фрикционных передач? Приведите основную расчётную зависимость.
9. Какие передачи называются вариаторами, на чём основан принцип их работы?
10. В чём преимущество много дисковых вариаторов?

Глава 20. Ременные передачи

20.1. Общие сведения

Ременная передача (рис. 20.1) – разновидность фрикционной передачи (передачи сцеплением), в которой осуществляется преобразование параметров движения (кинематических – скоростей вращения ω валов; силовых – моментов сил T) с передачей вращательного движения на большие расстояния при помощи *гибкой связи в виде ремня*. Исключение составляют передачи зубчатым ремнем, приводимым в движение зубчатым колесом (рис. 20.1, к) их относят к передачам зацеплением. В большинстве случаев ременные передачи понижающие, т.е. преобразуют вращательное движение с уменьшением скорости.

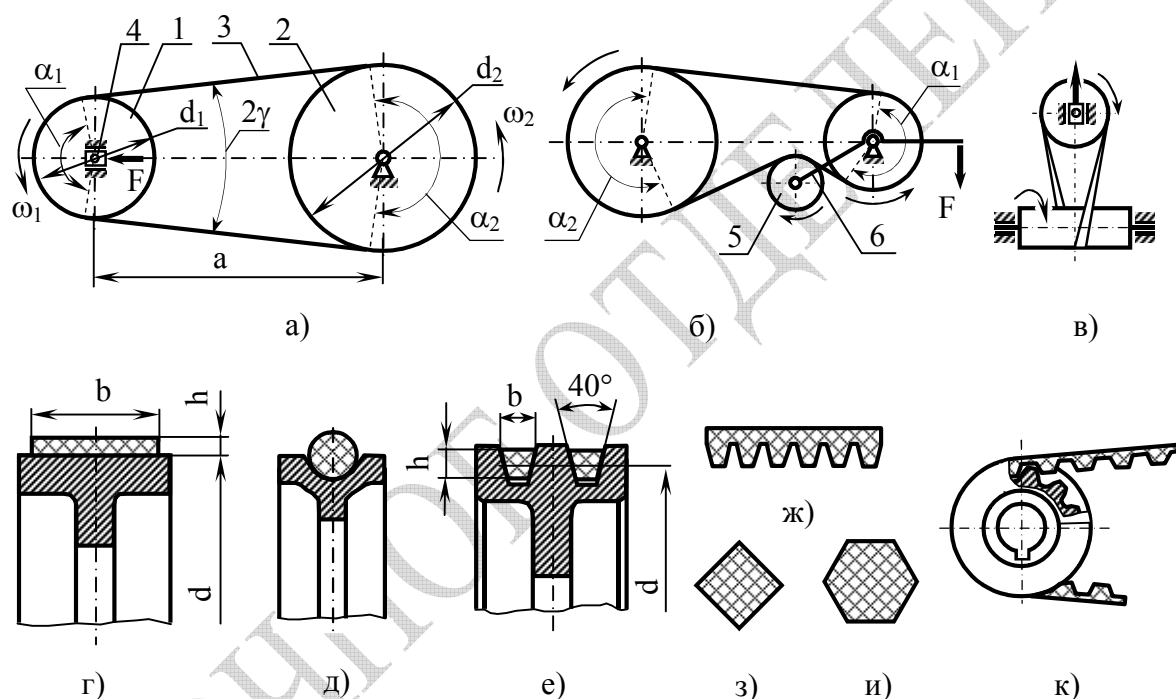


Рисунок 20.1

Ременные передачи могут быть *открытыми* (рис. 20.1, а) и *передачами с натяжным роликом* (рис. 20.1, б). Передачи с натяжным роликом рекомендуется применять при большом передаточном отношении ($5 < i \leq 10$) и числе ремней ($z > 5$). При большом количестве ремней нагрузка между ними распределяется неравномерно, что приводит к интенсивному износу наиболее нагруженных ремней. По этой причине не рекомендуется использовать в передаче более 8 ремней.

Открытая ременная передача (рис. 20.1, а) состоит из ведущего 1 и ведомого 2 *шкивов*, ремня 3 и натяжного устройства 4. Ведущие шкивы часто устанавливаются непосредственно на валу электродвигателя. Ременная передача с промежуточным роликом 5 (рис. 20.1, б),

который вместе с рычагом 6 выполняет функцию *натяжного устройства*, позволяет увеличить углы обхвата α_1 и α_2 (и соответствующие им дуги обхвата), что улучшает сцепление ремня со шкивами. Натяжные устройства облегчают установку и замену изношенных ремней, обеспечивают необходимую величину трения в передаче и компенсируют вытяжку ремня. Вращение шкивов и натяжного ролика (рис. 20.1, б) разнонаправленное. Ременные передачи могут передавать вращательное движение между шкивами, оси которых находятся в разных плоскостях (рис. 20.1, в).

Натяжные устройства могут быть *периодического действия* (рис. 20.2) (натяжение периодически регулируется винтами), *постоянного действия* (натяжение поддерживается постоянным за счёт силы тяжести или усилиями пружин), *автоматические* в зависимости от нагрузки на передаче.

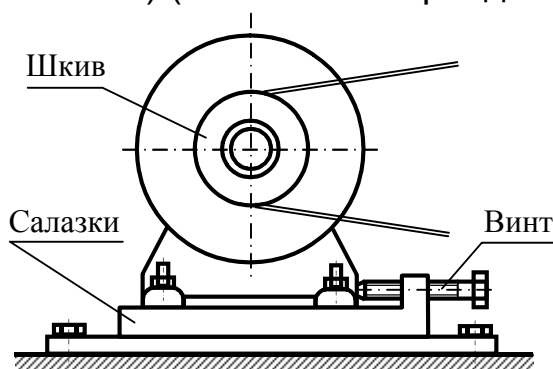


Рисунок 20.2

По форме поперечного сечения ремня различают плоско-, кругло-, клиноременные передачи (рис. 20.1, г, д, е), а также передачи поликлиновыми (многоручьевыми) ремнями (рис. 20.1, ж), ремнями квадратного сечения (рис.

20.1, з) и шестигранного сечений (рис. 20.1, и).

Ременные передачи способны передавать значительную мощность до 50 кВт (иногда до 1500 кВт), передаточные отношения i могут достигать до 10. Линейная скорость ремня обычно достигает 40-50 м/с, а в ненагруженных передачах – 100 м/с. КПД при нормальных условиях работы для плоскоремненной передачи равен 0,96, а для клиноременной 0,95. Величина максимального КПД определяется в основном потерями на внутреннее трение в ремне, т.е. на трение между слоями материала при изгибе ремня, проходящего через шкивы.

Плоские ремни (ГОСТ 23831–79, ГОСТ Р 50440-92, ГОСТ Р 50441-92) (рис. 20.1, г) отличаются гибкостью и высокой прочностью при изгибе из-за относительно малой толщины. Плоские ремни, как и большинство конструкций других ремней изготавливаются из армированных материалов: в качестве несущего слоя, обеспечивающего прочность при растяжении, используются капроновые ткани, полиэфирные нити, а в качестве внешнего материала, т.е. материала фрикционного слоя – полиамид или каучук.

Круглые ремни (рис. 20.1, д) диаметром 2÷8 мм используются в маломощных передачах.

Клиновыи ремни (рис. 20.1, е; 20.3) благодаря форме сечения плотно входят в углубления шкивов, обеспечивая наилучшее сцепление, и как следствие большую в 2÷2,5 раза, по сравнению с плоскими

ремнями, силу трения. Клиноремённые передачи имеют повышенную тяговую способность, большие передаточные отношения ($i \leq 10$), меньшее межосевое расстояние a и угол обхвата α (рис. 20.1, а).

При изготовлении клиновых ремней используют $2 \div 10$ слоев кордовой ткани с диаметром нитей $0,8 \div 0,9$ мм или одного слоя шнуров толщиной $1,6 \div 1,7$ мм, вулканизированных в резиновом наполнителе (кордтканевые и кордшнуровые ремни). Снаружи приводной клиновой ремень может быть обернут несколькими слоями прорезиненной ткани. Диапазон рабочей температуры для классических клиновых ремней от -30°C до $+60^\circ\text{C}$. Недостатками клиновых являются большие потери на трение; большие напряжения при изгибе из-за значительной высоты сечения ремня; более сложные конструкции шкивов.

Клиновые ремни в зависимости от отношения ширины к высоте сечения подразделяются на ремни *нормальных сечений* ($b_0/h \approx 1,6$); *узкие* ($b_0/h \approx 1,2$); *широкие* ($b_0/h \approx 2,5$).

Клиновые ремни шести нормальных сечений (рис. 20.3, а, табл. 9.1) имеют следующие буквенные обозначения: Z (О), А (А), В (Б), С (В), D (Г), Е (Д) – в скобках указаны обозначения соответствующие старым стандартам. Ремни этого типа регламентированы по размерам, техническим условиям, по передаваемой мощности (ГОСТ 1284.1–89*, ГОСТ 1284.2–89*, ГОСТ 1284.3–89*).

Узкие клиновые ремни (рис. 20.3, б, табл. 9.1) (ТУ 38.105 1289-89, ТУ 38.105 1998-91), обладая повышенной тяговой способностью за счёт лучшего распределения нагрузки по ширине несущего слоя, позволяют передавать бóльшие в $1,5 \div 2$ раза мощности, чем ремни нормальных сечений. Ремни данного типа могут работать при скоростях до 50 м/с. Сечения узких ремней имеют четыре типоразмера с обозначениями: SPZ(УО), SPA(УА), SPB(УБ), SPC(УВ) – в скобках указаны обозначения соответствующие старым стандартам.

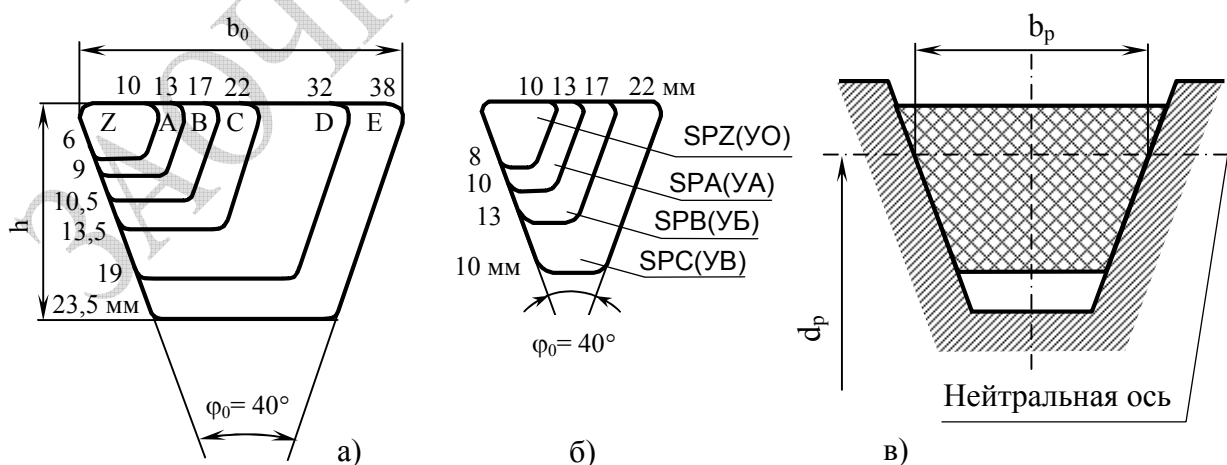


Рисунок 20.3

Широкие клиновые ремни (ГОСТ 26379–84) применяют для клиноремённых вариаторов (рис. 19.3, г), – так называемые, вариаторные

ремни.

Широкие клиновые ремни (ГОСТ 26379–84) применяют для клиноремённых вариаторов (рис. 19.3, г), – так называемые, вариаторные ремни.

Таблица 20. 1 Основные размеры клиновых ремней

Тип ремня	Минимальный расчётный диаметр d_{\min} , мм	Ширина в расчётном сечении b_p , мм	Высота сечения h , мм	Площадь сечения A , см ²	Диапазон длин L , мм
Z(O)	63	8,5	6	0,47	400-2500
A(A)	90	11	8	0,81	560-4000
B(Б)	125	14	10,5	1,38	800-6300
C(В)	200	19	13,5	2,30	1800-10600
D(Г)	315	27	19	4,76	3150-15000
E(Д)	500	32	23,5	6,92	4500-18000
SPZ	63	8,5	8	0,56	630-3550
SPA	90	11	10	0,93	800-4500
SPB	140	14	13	1,59	1250-8000
SPC	224	19	18	2,78	2000-8000

Поликлиновые (многолучевые) ремни (ГОСТ 1284-89) имеют плоскую наружную поверхность и продольные клиновые выступы на внутренней стороне (рис. 20.1, ж). Стандартизовано три сечения поликлиновых ремней (К, Л, М). Число рёбер поликлиновых ремней от 2 до 50. Поликлиновые ремни армируются шнуровым кордом. Некоторые виды поликлиновых приводных ремней характеризуются наличием усеченных клиновидных ребер, что увеличивает гибкость, снижает теплообразование и улучшает сопротивление распространению трещин, дает возможность ремню работать при высоких скоростях вращения шкивов с малым диаметром. Для передачи одной и той же мощности используется поликлиновой ремень, ширина которого в 1,5÷2 раза меньше ширины нескольких клиновых ремней.

Ремни *квадратного сечения* (рис. 20.1, з) используются в приборах при передаче небольшой мощности.

В передачах с изгибом ремней в двух направлениях, например при использовании натяжных роликов, используются *шестигранные* (сдвоенные клиновые) ремни (рис. 20.1, и).

Достоинства ременных передач: простота конструкции и низкая стоимость, плавность, малая шумность в работе, защищенность от поломок буксованием, амортизация резких колебаний нагрузки, возможность передачи вращения на большие расстояния (10 ÷ 15 м), а в транспортных устройствах, например, подъемниках на десятки и сотни метров.

Недостатки ременных передач: малая долговечность (2000÷3000 ч), большие габариты, непостоянство передаточного отношения из-за проскальзывания, чувствительность к загрязнениям,

большие силы натяжения, вредно влияющие на работоспособность валов (осей), подшипников, элементов корпуса передачи.

20.2. Геометрические параметры и кинематика ременных передач

Ременные передачи характеризуются следующими основными геометрическими параметрами (рис. 20.1, а): d_1 , d_2 – диаметры шкивов; a – межосевое расстояние; L_p – расчётная длина ремня; α_1 и α_2 – углы обхвата. Диаметры шкивов плоскоремennых передач обозначаются по действующим стандартам заглавным D , других ременных передач строчным d .

Для шкивов клиноремennых и зубчато-ременных передач основным диаметральной размер является расчётный диаметр d_p (рис. 20.3, в) – определяемый по нейтральному слою ремня, длина которого при деформациях остаётся неизменной. Слои ремня расположенные выше нейтрального слоя (рис. 20.3, в) при изгибе растягиваются, а ниже – сжимаются.

Для клиноремённой передачи минимальный расчётный диаметр d_{\min} шкива, при котором обеспечиваются минимальные габариты передачи, принимается из стандартного ряда в зависимости от типа ремня (табл. 20.1). Если отсутствуют жёсткие требования к габаритам передачи, расчётный диаметр d_1 малого шкива следует брать больше минимального значения из стандартного ряда, т.к. это повышает КПД передачи, возрастает тяговая способность и долговечность ремней.

Диаметр большего шкива при заданном передаточном отношении i предварительно определяют по формуле

$$d_2 \approx i d_1 = (\omega_1/\omega_2) d_1 . \quad (20.1)$$

Полученное значение округляют до ближайшего стандартного значения. Расчётные диаметры шкивов клиноремennых передач выбирают из стандартного ряда (мм): 63; 71; 80; 90; 100; 112; 125; 140; 160; 180; 200; 224; 250; 280; 315; 355; 400; 450; 500 и т.д.

Длина ремня (без учёта его деформации на шкивах) определяется как сумма прямолинейных участков и дуг обхвата (рис. 20.1, а). Длину ремня можно вычислить по приближённой формуле

$$L_p \approx 2a + \frac{\pi}{2}(d_2 + d_1) + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a} , \quad (20.2)$$

где a – межосевое расстояние; d_1 , d_2 – диаметры ведущего и ведомого шкивов.

Вычисленную расчётную длину бесконечных (замкнутых) ремней округляют до ближайшего стандартного значения (табл. 20.2).

Таблица 20.2 Расчётная длина клиновых ремней

Расчётная длина ремня						Тип ремня					
						Z(О)	A(A)	B(Б)	C(В)	D(Г)	E(Д)
400	(425)	450	(475)	500	(530)	+					
560	(600)	630	(670)	710	750	+	+				
800	(850)	900	(950)	1000	(1060)	+	+	+			
1120	(1180)	1250	(1320)	1400		+	+	+			
(1500)	1600	(1700)				+	+	+			
1800	(1900)	2000	(2120)	2240		+	+	+	+		
(2360)	2500					+	+	+	+		
2650	2800	(3000)					+	+	+		
3150	(3350)	3550	(3750)	4000			+	+	+	+	
(4250)								+	+	+	
4500	(4750)	5000	(5300)	5600				+	+	+	+
(6000)	(6300)							+	+	+	+
(6700)	7100	(7500)	8000	(8500)					+	+	+
9000	(9500)	10000	(10800)						+	+	+
11200	(11800)	12500	(13200)							+	+
14000	(15000)									+	+
16000	(17000)	18000									+

По заданной длине ремня, используя (20.2), вычисляют межосевое расстояние

$$a = \frac{2L_p - \pi(d_2 + d_1) + \sqrt{(2L_p - \pi(d_2 + d_1))^2 - 8(d_2 - d_1)^2}}{8}. \quad (20.3)$$

Угол обхвата ведущего шкива для открытой передачи

$$\alpha_1 = 180^\circ - 57^\circ (d_2 - d_1)/a. \quad (20.4)$$

для передачи с натяжным роликом угол α_1 определяют по чертежу.

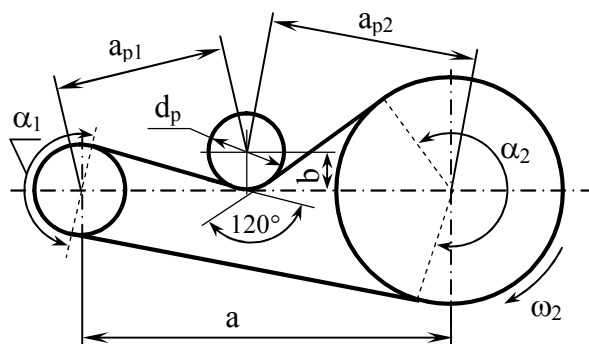
Угол между ветвями ремня (на рис. 9.1, а) определяют по формуле

$$2\gamma = 0,5(180^\circ - \alpha_1). \quad (20.5)$$

Кинематика ременных передач. Окружные скорости, м/с, на шкивах

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{\pi d_1 n_1}{60 \cdot 1000} \\ V_2 &= \frac{\pi d_2 n_2}{60 \cdot 1000} \end{aligned} \right\}, \quad (20.6)$$

где n_1, n_2 – частоты вращения шкивов, об/мин.



Рекомендуемые соотношения:
 $d_p = (0,8-1,0)d_1$; $a_{p1} \approx 2d_1$; $b \approx 0,5d_1$

Рисунок 20.4

Согласно исследованиям, впервые проведенным Н.Е. Жуковским (1847—1921), в ременных передачах следует различать два вида скольжения: *упругое скольжение и буксование*.

Упругое скольжение, вызванное упругими деформациями, в передачах трением наблюдается при любой по величине нагрузке, а буксование (проскальзывание ремня по всей поверхности соприкосновения со шкивом) –

только при перегрузке. При полном буксовании ведомый шкив останавливается, КПД передачи становится равным нулю, происходит быстрый перегрев, износ и разрушение пробуксовывающих элементов передачи.

Передаточное отношение ременной передачи с учётом упругого скольжения вычисляется по формуле

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1(1-\varepsilon)}, \quad (20.7)$$

где ε – коэффициентом упругого скольжения ($\varepsilon \approx 0,01$ для резинотканевых ремней; $\varepsilon \approx 0,015$ для кожаных ремней; $\varepsilon \approx 0,02$ – для клиновых прорезиненных кордтканевых ремней).

20.3. Силы, действующие в ременной передаче

В ременной передаче при её монтаже устанавливают *начальную силу натяжения* F_0 (рис. 20.5, а) такой, чтобы не было большой вытяжки и не терялась бы требуемая долговечность

$$F_0 = A \sigma_0, \quad (20.8)$$

где A – площадь поперечного сечения ремня (или нескольких ремней); σ_0 – начальное напряжение ($\sigma_0 = 1,2 \div 1,5$ МПа для стандартных клиновых ремней).

Момент на валу ведущего шкива определяется по величине передаваемой мощности N и угловой скорости ω_1 шкива

$$T_1 = N / \omega_1. \quad (20.9)$$

Силы натяжения ведущей F_1 и ведомой F_2 ветвей ремня в нагруженной передаче (рис. 9.5, б) находят из условия равновесия шкива

$$T_1 = 0,5 d_1 (F_1 - F_2) = 0,5 d_1 F_t, \quad (20.10)$$

откуда окружная сила равна

$$F_t = F_1 - F_2. \quad (20.11)$$

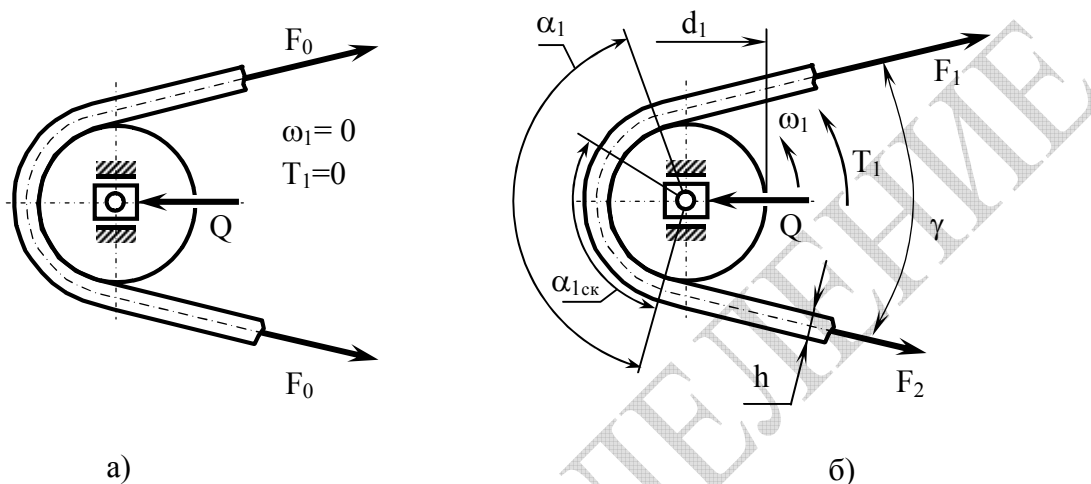


Рисунок 20.5

Так как сумма сил натяжений ветвей ремня постоянна как в ненагруженной, так и в нагруженной (работающей) передаче, то

$$F_1 + F_2 = 2F_0, \quad (20.12)$$

$$F_1 = F_0 + 0,5F_t \text{ и } F_2 = F_0 - 0,5F_t. \quad (20.13)$$

Между силами F_1 и F_2 для *гибкой, невесомой, нерастяжимой нити* имеется зависимость, носящая название *формулы Эйлера*

$$F_1 / F_2 = e^{f\alpha} = q, \quad (20.14)$$

где f – коэффициент трения (для чугунных и стальных шкивов, и для резинотканевых ремней $f \approx 0,35$, для кожаных ремней $f \approx 0,22$); α – угол обхвата шкива (рис. 20.5).

С учетом (20.12 – 20.14)

$$F_1 = F_t \frac{q}{q-1}, \quad (20.15)$$

$$F_2 = F_t \frac{1}{q-1}, \quad (20.16)$$

$$F_0 = 0,5 F_t \frac{q+1}{q-1}. \quad (20.17)$$

Из-за деформируемости реального ремня и из-за разности натяжения ведомой и ведущей ветвей на части дуги обхвата с центральным углом α возникает упругое скольжение между ремнём и шкивом. Дуги упругого скольжения соответствующие углу $\alpha_{ск}$ – располагаются со стороны сбегающей ветви (рис. 20.5).

Сила, действующая на вал шкива (рис. 20.5), равна геометрической сумме сил натяжения ветвей ремня

$$Q \approx (F_1 + F_2) \cos (\gamma/2). \quad (20.18)$$

Данную силу учитывают при расчёте валов и подшипников.

20.4. Напряжения, возникающие в ремнях

При работе передачи ремень растягивается, а при прохождении через шкив диаметром d испытывает изгиб и действие центробежных сил. Выражение для напряжений от изгиба получают из известной из сопротивления материалов зависимости, предполагая, что для материала справедлив закон Гука (так называемый, «закон Гука при изгибе»)

$$\sigma_{и} = E\varepsilon = \frac{E y_{\max}}{r} = \frac{E h/2}{d/2 + h/2} \approx \frac{E h}{d},$$

здесь r – радиус кривизны изогнутого ремня; $y_{\max} = h/2$ – максимальное расстояние от нейтральной оси до крайних слоёв сечения; h – толщина плоского ремня; E – модуль продольной упругости ($E = 200 \div 300$ МПа для прорезиненных ремней; $E = 500 \div 600$ МПа для клиновых кордтканевых ремней).

Напряжения от действия центробежных сил определяются по формуле полученной в курсе сопротивления материалов для напряжений в тонком вращающемся кольце

$$\sigma_{ц} = \rho V^2,$$

где ρ – плотность материала ремня ($\rho = 1200 \div 1250$ кг/м³ для прорезиненных ремней); $V = (\omega d / 2)$ – окружная скорость.

При расчете ремней учитывают то обстоятельство, что максимальное нормальное напряжение действует в точке набегания ремня на шкив меньшего диаметра (рис. 20.6). Максимальное напряжение в ремне складывается из напряжения σ_1 от растягивающей силы F_1 , из напряжения $\sigma_{и}$ изгиба ремня при его прохождении по шкиву, и из напряжения $\sigma_{ц}$ от действия центробежных сил

$$\sigma_{1\max} = \sigma_1 + \sigma_{1и} + \sigma_{ц} = \frac{F_1}{A} + \frac{Eh}{d_1} + \rho V^2, \quad (20.19)$$

где A – площадь поперечного сечения ремня; d_1 – диаметр ведущего шкива; $V = (\omega_1 d_1 / 2)$ – окружная скорость.

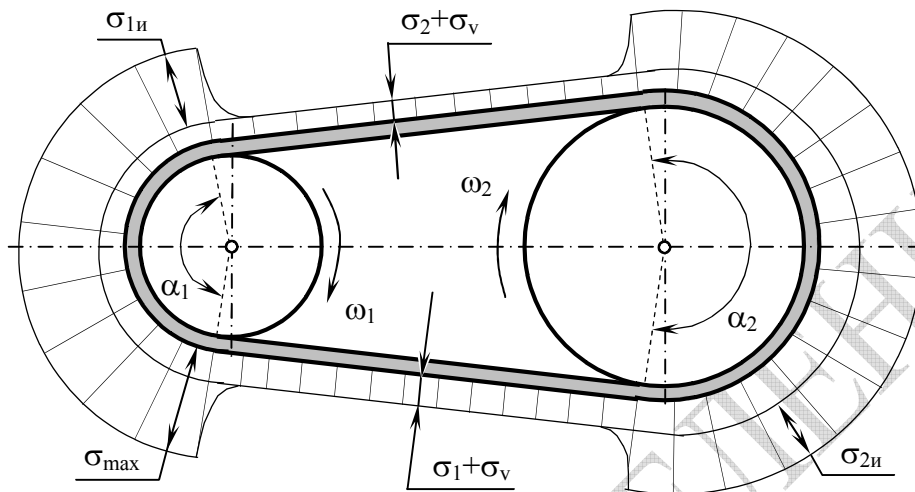


Рисунок 20.6

Напряжения σ_2 от растягивающей силы F_2 и напряжения от изгиба $\sigma_{2и}$ при прохождении ремня по шкиву большего диаметра (рис. 20.6) рассчитываются по формулам

$$\sigma_2 = F_2/A; \quad \sigma_{2и} = Eh/d_2.$$

20.5. Тяговая способность передачи

Тяговая способность ременной передачи – способность передавать заданную нагрузку без буксования. Тяговая способность обеспечивается силами сцепления между ремнём и шкивами. Для анализа тяговой способности пользуются экспериментальными кривыми *относительного скольжения* ε , совмещёнными с кривыми КПД (η), в зависимости от *коэффициента тяги* φ (рис. 20.7).

Коэффициент тяги φ характеризует уровень нагруженности передачи вращающим моментом и не зависит от размеров передачи

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} = \frac{F_t}{2F_0} = \frac{\sigma_t}{2\sigma_0} \\ \varphi &= \frac{q-1}{q+1} \end{aligned} \right\}. \quad (20.20)$$

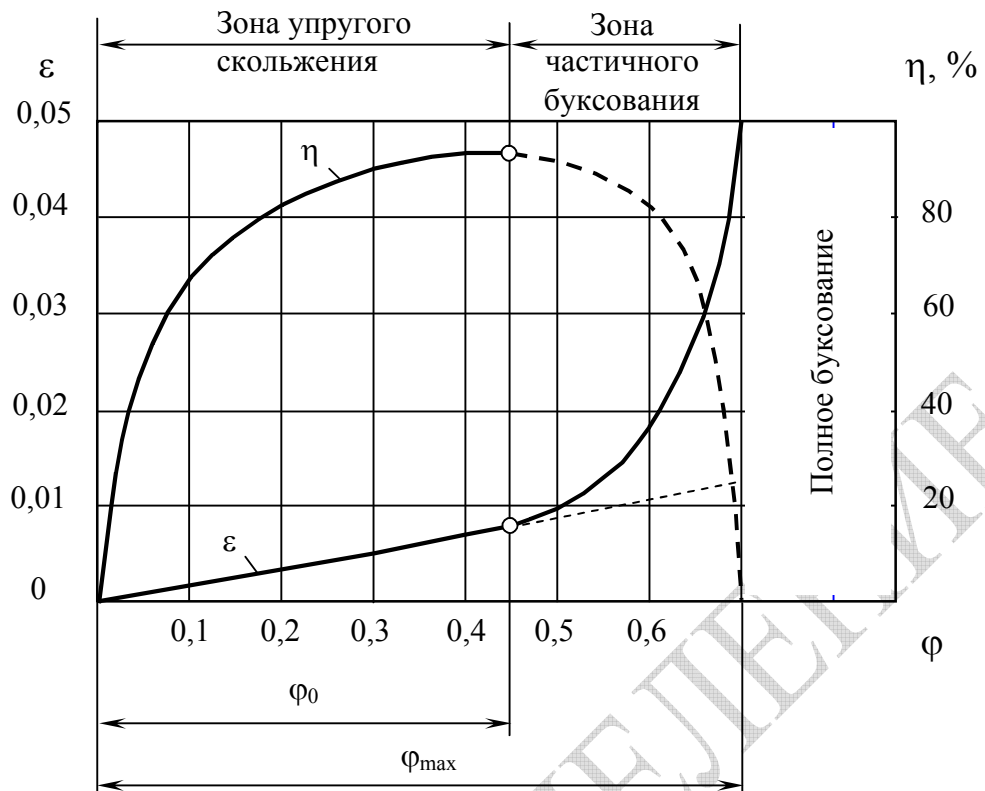


Рисунок 20.7

Вращающий момент на ведущем шкиве диаметром d_1 , характеризующий тяговую способность передачи рассчитывают по формуле

$$T_1 = \frac{\varphi - 1}{\varphi + 1} F_0 d_1 = \frac{e^{f\alpha_{ск}} - 1}{e^{f\alpha_{ск}} + 1} F_0 d_1 = \varphi F_0 d_1, \quad (20.21)$$

где $\alpha_{ск}$ – угол, соответствующий дуге скольжения (рис. 20.3); в расчётах принимают $\alpha_{ск} \approx 0,7\alpha$.

Из формулы (20.21) следует, что тяговая способность передачи

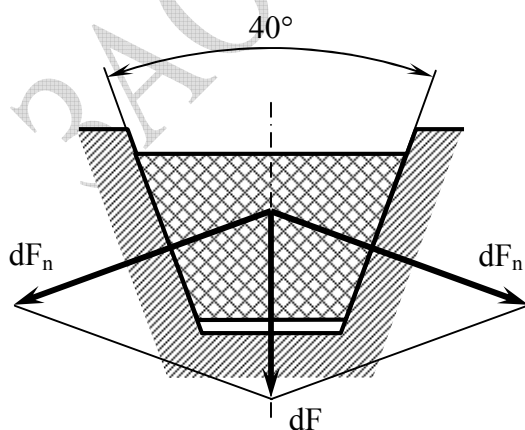


Рисунок 20.8

может быть повышена увеличением силы F_0 начального натяжения и коэффициента тяги φ , который пропорционален коэффициенту трения f и углу дуге скольжения $\alpha_{ск}$. Однако, чрезмерное увеличение как F_0 , так и f не желательно, так как в первом случае может быть перегружен ремень и элементы передачи (например, подшипники), а во втором – возрастают потери на трение, что сопровождается перегревом ремня.

В формуле (20.21) коэффициент трения f соответствует плоскоремённой передаче. В клиноремённой передаче трение больше чем плоскоремённой. Элементарная сила натяжения dF (рис. 20.8), действующая на элементарный участок ремня может быть разложена на две составляющих dF_n нормальных к наклонным поверхностям канавки шкива

$$dF_n = \frac{dF}{2\sin 20^\circ}.$$

Элементарная сила трения при этом будет равна

$$dF_{тр} = 2dF_n f = dF \frac{f}{\sin 20^\circ} = dF f',$$

где $f' = f/\sin 20^\circ \approx 3f$ – приведённый коэффициент трения.

Таким образом, в клиноремённой передаче сцепление примерно в три раза больше, чем в плоскоремённой.

КПД ременной передачи может быть выражен через вращающие моменты T и угловые скорости ω на шкивах

$$\eta = (T_2\omega_2)/(T_1\omega_1) = T_2/(T_1i). \quad (20.22)$$

КПД зависит от коэффициента тяги φ и от соответствующего ему коэффициента относительного скольжения ремня ε .

На начальном участке кривой скольжения ($\varepsilon = f(\varphi)$) от 0 до φ_0 наблюдается только упругое скольжение (рис. 20.7). Этот участок близок к линейному, поскольку упругие деформации ремня приближённо подчиняются закону Гука.

При увеличении нагрузки F_t , и при превышении коэффициентом тяги определённого значения ($\varphi > \varphi_0$) кривая скольжения отклоняется от линейного закона (пунктирная прямая) – начинается частичное буксование (рис. 20.7), т.е. режим неустойчивой работы с интенсивным изнашиванием ремня. Частичное буксование допустимо, лишь при кратковременных перегрузках.

Передача работает до наступления полного буксования при φ_{\max} . При полном буксовании $\eta=0$. Максимальный КПД передачи соответствует определённому значению коэффициента тяги φ_0 на линейном участке кривой скольжения. Оптимальным считают нагружение передачи при наибольшем КПД и при сохранении некоторого запаса сцепления: $\varphi_0 = 0,4 \div 0,5$ для плоскоремённых и $0,6 \div 0,7$ для клиноремённых передач. Отношение $\varphi_{\max}/\varphi_0 = 1,15 \div 1,5$ характеризует при заданном значении F_0 возможную перегрузку передачи до наступления буксования.

20.6. Расчёт ременной передачи

Основными критериями работоспособности ременных передач являются *тяговая способность передачи* и *долговечность ремня*.

Основой для расчета ремня на тяговую способность является зависимость

$$\sigma_t = F_t / A \leq [\sigma_t], \quad (20.23)$$

где σ_t – полезное напряжение; $[\sigma_t]$ – допускаемое полезное напряжение, определяемое из условия надежного сцепления ремня со шкивом; A – площадь поперечного сечения ремня или комплекта ремней.

Расчёт на тяговую способность плоскоремennых передач с учётом зависимости (9.23) сводится к определению ширины ремня b по заданной окружной силе F_t , материалу ремня

$$b = \frac{F_t C_p}{h[\sigma_t]}, \quad (20.24)$$

где C_p – коэффициент динамичности, учитывающий режим работы передачи (табл. 20.3).

Таблица 20.3 Коэффициент динамичности и режима работы

Характер нагрузки	Тип машины	C_p
Спокойная. Пусковая нагрузка до 120% от номинала	Электродвигатели, центробежные насосы и компрессоры; станки с непрерывным процессом резанья; вентиляторы; ленточные конвейеры	1,0
Умеренные колебания нагрузки. Пусковая нагрузка до 150% от номинала	Поршневые насосы и компрессоры с тремя и более цилиндрами; станки и автоматы; пластинчатые конвейеры	1.1
Значительные колебания нагрузки. Пусковая нагрузка до 200% от номинальной	Реверсивные приводы; поршневые насосы и компрессоры с одним и двумя цилиндрами; строгальные и долбежные станки; винтовые и скребковые конвейеры; элеваторы; эксцентриковые и винтовые прессы с тяжёлыми маховиками	1,25
Ударная и резконе равномерная нагрузка. Пусковая нагрузка до 300% от номинальной	Ножницы, молоты, мельницы; подъёмники, экскаваторы, драги; эксцентриковые и винтовые прессы с лёгкими маховиками	1,5÷1,6
Примечания: 1. При частых и резких пусках двигателя с большими пусковыми моментами значение C_p следует повысить на 0,15 2. При двухсменной работе значение C_p повышают на 0,15, а при трёхсменной работе – на 0,35.		

Допускаемое полезное напряжение для горизонтально расположенной передачи, работающей в «стандартных» условиях ($\sigma_0 = F_0/A = 1,6 \div 2$ МПа, $\alpha = 180^\circ$, $V = 10$ м/с) находят из эмпирического соотношения

$$[\sigma_0] = a_k - w_k \frac{h}{D_1}, \quad (20.25)$$

где $a_k = 2 \div 3$ МПа; $w_k = 9 \div 17$ МПа для прорезиненных и хлопчатобумажных ремней; D_1 – диаметр малого шкива плоскоремненной передачи.

Поскольку конструктивные и рабочие параметры проектируемой передачи обычно отличаются от «стандартных» условий допускаемое полезное напряжение уточняют при помощи корректирующих коэффициентов

$$[\sigma_t] = [\sigma_0] C_\alpha C_v C_0. \quad (20.26)$$

где C_α – коэффициент, учитывающий влияние угла обхвата меньшего шкива:

α , град	120	140	160	180	200	220
C_α	0,82	0,88	0,94	1,0	1,1	1,2

$C_v = 1,04 - 0,0004V^2$ – коэффициент, учитывающий влияние скорости ремня; C_0 – коэффициент, учитывающий способ натяжения ремня и положение передачи, $C_0 = 1$ в передачах с автоматическим натяжением, $C_0 = 1,0; 0,9; 0,8$ в передачах с периодическим подтягиванием ремня и углом наклона линии центров к горизонту соответственно: $0 - 60^\circ; 60 - 80^\circ; 80 - 90^\circ$.

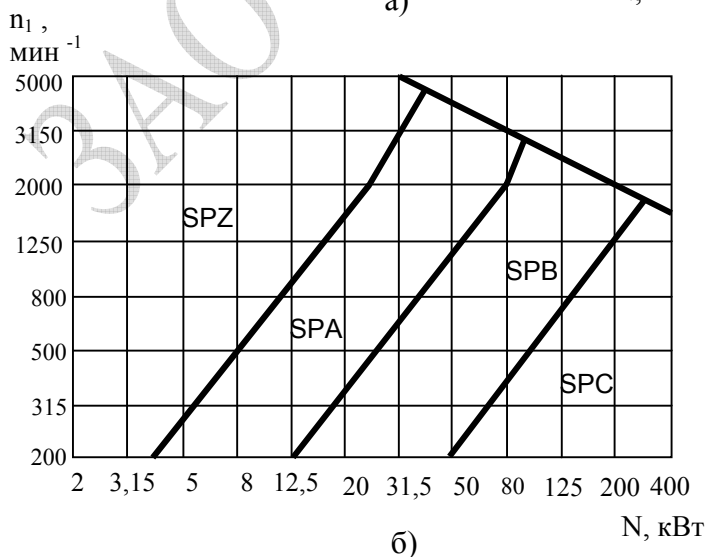
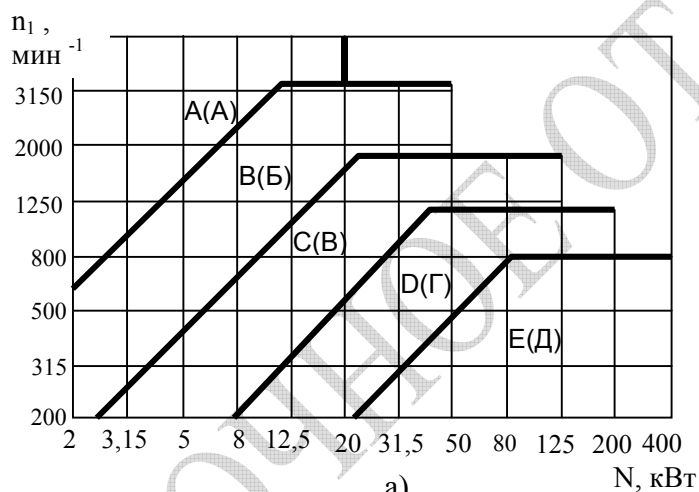


Рисунок 20.9

следующем этапе выполняют кинематический расчёт, силовой расчёт, расчёт напряжений в ремне.

Расчёт на тяговую способность клиноременных передач, базирующийся на формуле (20.23), состоит в определении требуемого числа ремней по выбранному профилю сечения.

Число ремней z клиноременной передачи вычисляют по формуле

$$z = \frac{NC_p}{N_0 C_\alpha C_L C_z} \quad \text{или} \quad z = \frac{F_t V C_p}{N_0 C_\alpha C_L C_z}, \quad (20.27)$$

где N – мощность передачи; C_p – коэффициент динамичности (см. табл. 20.1); F_t – полезная нагрузка; N_0 – допускаемая мощность в передаче одним клиновым ремнём при $\alpha=180^\circ$, спокойной работе и $\sigma_0=1,6$ МПа (см. табл. 20.4, 20.5); C_α, C_L, C_z – корректирующие коэффициенты:

C_α - коэффициент угла обхвата:

α , град	70	90	110	130	150	180
C_α	0,56	0,68	0,78	0,88	0,92	1,0

C_L – коэффициент, учитывающий влияние длины ремня на его ресурс:

L/L_0	0,3	0,5	0,8	1,0	1,4	1,6	2,0
C_L	0,79	0,86	0,95	1,0	1,07	1,1	1,15

здесь L и L_0 соответственно расчётная и условная длина ремня

Сечение	Z(0)	A(A)	B(Б)	C(В)	D(Г)	E(Д)
L_0 , мм	1320	1700	2240	3750	-	6000

Сечение	SPZ(УО)	SPA(УА)	SPB(УБ)	SPC(УВ)
L_0 , мм	1600	2500	3550	5600

C_z – коэффициент, учитывающий неравномерное распределение нагрузки между одновременно работающими ремнями, при $z = 2 \div 3$ $C_z = 0,95$, при $z = 4 \div 6$ $C_z = 0,90$, при $z > 6$ $C_z = 0,85$.

Расчёт ремня на циклическую долговечность. Переменные циклические напряжения, которые испытывает ремень при набегании и сбегании со шкивов, приводят к накоплению усталостных повреждений и выходу его из строя. Определение долговечности ремней из-за недостаточности статистических данных о параметрах кривых усталости нельзя считать вполне точным.

Расчёт срока службы ремня выполняется по формуле

$$T = \frac{K_\sigma K_D}{3600 v z_{\text{ш}}} \left(\frac{c}{\sigma_{1\text{max}}} \right)^m, \quad (20.28)$$

где σ_{1max} – максимальное напряжение в ремне (20.19); $z_{ш}$ – число шкивов; $v = V/L$ – число пробогов ремня в секунду; $c = 21$ МПа, $m=9\div 11$ для клиновых кордтканевых ремней, для кордшнуровых ремней $c = 30$ МПа, $m=6\div 11$ для передач с $\sigma_0 = 1,2$ МПа, $i = 1$; коэффициенты K_{σ} , K_D находят по графикам (рис. 20.10).

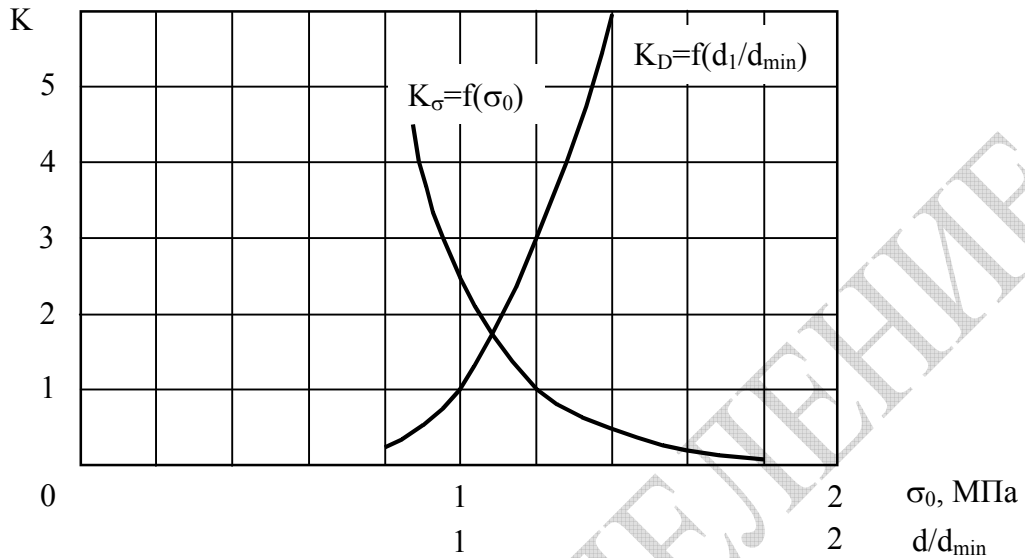


Рисунок 20.10

Таблица 20.4 Мощность N_0 (кВт), передаваемая узким клиновым ремнём

Тип ремня	Расчётный диаметр шкива, мм	Число оборотов n_1 , об/мин		
		950	1450	2800
SPZ(УО)	63	0,78-0,88	1,08-1,23	1,74-2,02
	71	0,99-1,10	1,40-1,55	2,29-2,58
	80	1,24-1,33	1,74-1,90	2,90-3,19
	90	1,50-1,60	2,13-2,28	3,55-3,84
SPA(УА)	90	1,70-1,92	2,35-2,69	3,64-4,29
	100	2,11-2,33	2,94-3,28	4,64-5,28
	112	2,60-2,82	3,65-3,98	5,79-6,44
	125	3,12-3,34	4,39-4,73	6,99-7,65
SPB(УБ)	140	4,29-4,75	5,90-6,61	8,54-9,86
	160	5,47-5,93	7,58-8,24	10,9-12,3
	180	6,62-7,09	9,20-9,86	13,0-14,4
	200	7,80-8,24	10,7-11,4	14,8-16,1
SPC(УВ)	224	11,3- 12,4	14,9-16,7	15,2-18,6
	250	13,6-14,8	18,0-19,7	16,9-20,3
	280	16,3-17,4	21,2-22,9	17,4-20,8
	315	19,1-20,3	24,6-26,3	–

Примечание. Меньшие значения N_0 соответствует $i=1\div 2$; большие – $i=3$

Таблица 20.5 Мощность N_0 (кВт) передаваемая одним клиновым ремнём нормального сечения

Тип ремня	Расчётный диаметр шкива, мм	Скорость ремня, м/с															
		1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
Z (O)	63	0,08	0,15	0,29	0,42	0,56	0,69	0,82	0,96	1,09	1,18	1,26	1,26	1,20	-	-	-
	71	0,10	0,17	0,32	0,47	0,63	0,78	0,93	1,07	1,22	1,30	1,38	1,39	1,32	-	-	-
	80	0,11	0,20	0,37	0,53	0,69	0,85	1,00	1,15	1,27	1,39	1,51	1,55	1,51	-	-	-
	90	0,12	0,21	0,41	0,58	0,76	0,93	1,11	1,27	1,40	1,55	1,67	1,78	1,65	-	-	-
A (A)	90	0,22	0,37	0,66	0,88	1,10	1,33	1,47	1,62	1,77	1,84	1,84	1,84	1,75	-	-	-
	100	0,22	0,37	0,66	0,96	1,18	1,40	1,62	1,84	1,91	1,99	1,99	1,99	1,91	-	-	-
	112	0,22	0,37	0,66	0,96	1,25	1,47	1,69	1,99	2,12	2,29	2,41	2,41	2,33	-	-	-
	125	0,29	0,44	0,74	1,10	1,40	1,69	1,99	2,20	2,33	2,50	2,65	2,65	2,65	-	-	-
B (B)	125	-	0,59	0,96	1,33	1,69	2,06	2,42	2,70	2,94	2,94	2,94	2,80	2,65	-	-	-
	140	-	0,66	1,08	1,40	1,84	2,33	2,65	3,02	3,32	3,54	3,60	3,54	3,40	-	-	-
	160	-	0,74	1,18	1,62	1,99	2,50	2,94	3,40	3,76	4,05	4,35	4,35	4,35	-	-	-
	180	-	0,81	1,33	1,77	2,20	2,72	3,16	3,60	4,05	4,42	4,71	4,94	4,94	-	-	-
C (B)	200	-	1,03	1,77	2,50	3,10	3,68	4,35	4,94	5,52	6,00	6,25	6,19	6,05	-	-	-
	224	-	1,10	2,06	2,88	3,54	4,27	5,00	5,67	6,25	6,78	7,15	7,15	6,85	-	-	-
	250	-	1,25	2,20	3,10	3,90	4,64	5,45	6,12	6,63	7,15	7,50	7,73	7,73	-	-	-
	280	-	1,33	2,36	3,32	4,20	5,00	5,90	6,70	7,29	7,58	7,80	8,02	8,10	-	-	-
D (Г)	315	-	-	-	5,45	7,00	8,45	9,70	10,70	11,40	11,78	11,90	11,62	11,10	-	-	-
	355	-	-	-	5,96	7,65	9,20	10,44	11,54	12,50	13,30	13,72	13,82	13,60	12,92	-	-
	400	-	-	-	6,48	8,24	10,08	11,54	12,88	14,11	15,00	15,72	16,19	16,03	15,38	-	-
	450	-	-	-	6,94	8,90	10,98	12,50	13,90	15,14	16,19	17,00	17,25	17,45	17,20	-	-
E (Д)	500	-	-	-	8,75	11,56	14,00	15,98	17,65	19,00	19,85	20,46	20,46	20,46	20,46	-	-
	560	-	-	-	9,87	12,60	15,25	17,45	19,20	20,80	22,40	23,60	24,20	24,30	24,30	24,30	-
	630	-	-	-	10,75	13,40	16,08	18,70	21,20	23,20	24,80	26,50	27,30	27,50	27,60	27,60	27,6
	710	-	-	-	11,48	14,90	18,00	21,00	22,90	25,20	27,20	29,00	30,20	30,80	31,40	31,80	31,8

20.7. Конструкции шкивов

Конструктивно шкив состоит из обода, по которому перекачивается ремень, ступицы, насаживаемой на вал, диска или спиц, соединяющих обод со ступицей. Основные конструктивные особенности и размеры шкивов стандартизованы.

Шкивы изготавливают из чугуна методом отливки, из стали литьём, точением или сваркой, а также из сплавов и пластмасс. Стальные шкивы могут сборными, составленными из штампованных тарелок. Чугунные шкивы допускают окружную скорость до 30 м/с; стальные шкивы – до 45 м/с; шкивы из алюминиевых сплавов допускают вращение с окружной скоростью до 100 м/с. Неметаллические шкивы имеют малую массу, обеспечивают высокое трение, но они менее теплопроводны и менее износостойки по сравнению с металлическими изделиями.

Наружные поверхности шкивов плоскоремennых передач обычно гладкие, исключение составляют шкивы высокоскоростных передач – на их поверхности протачивают кольцевые канавки, которые обеспечивают выход воздуха из-под ремня для предотвращения образования воздушного клина. Обод шкива может быть цилиндрическим (рис. 9.11, а) или выпуклым, что предотвращает сползание ремня со шкива. Выпуклым очерченным по дуге окружности (рис. 9.11, в) или с коническими краями (рис. 9.11, б) обычно делают ведомый шкив. Величина стрелы выпуклости h возрастает с увеличением диаметра шкива. Ширина обода B в зависимости от ширины плоского ремня (b , мм: 16; 20; 25; 32; 40; 50; 63; 71; 80; 90; 100 и т.д. до 250) для открытых передач вычисляется по формуле

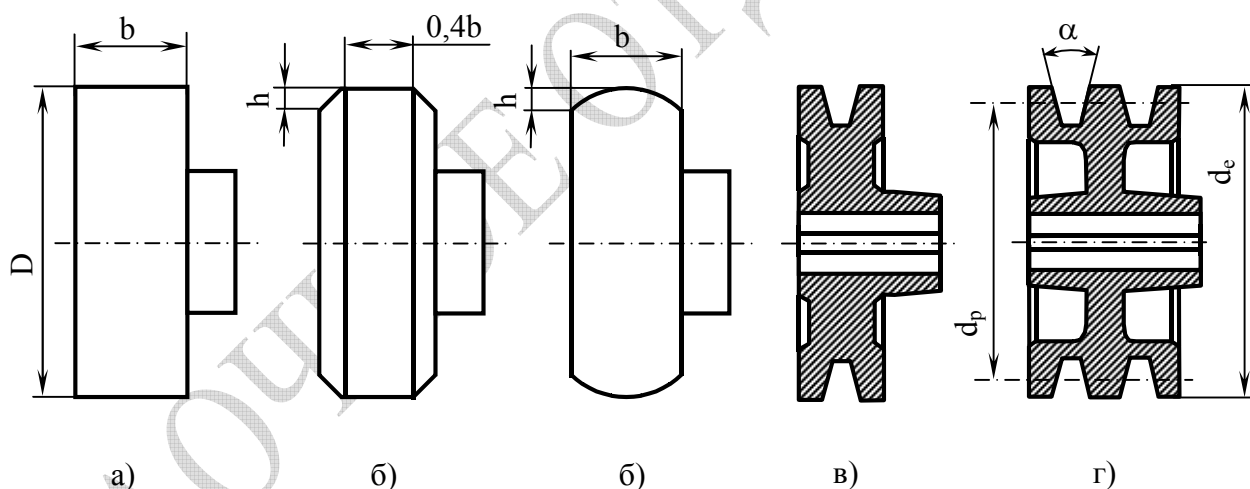


Рисунок 20.11

$B=1,1b+10$ мм и уточняется по стандарту.

Шкивы клиноремennых передач (максимальные диаметры d_e), имеющие расчетные диаметры d_p до 100 мм могут быть монолитными (рис. 20.11, в), т.е. без диска и спиц; шкивы диаметрами 80÷400 мм – с дисками (рис. 20.11, г); шкивы диаметрами 180÷1000 мм – со спицами. Для обеспечения плотности прилегания ремня к канавкам шкива угол профиля канавок назначается в пределах $\alpha=34\div40^\circ$ (рис. 9.11, в, г) в зависимости от величины расчётного диаметра d_p .

20.8. Контрольные вопросы

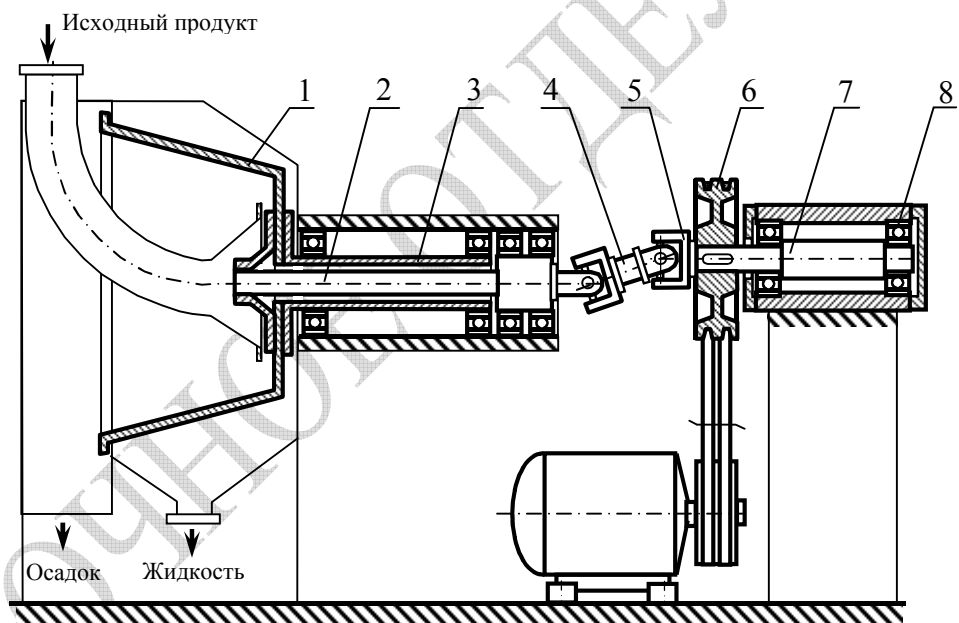
1. К какому классу механических передач относятся ременные передачи?
2. Как называются основные элементы ременной передачи?
3. Каковы основные типы ремней и ременных передач?
4. В чём состоят основные достоинства и недостатки ременных передач?
5. Как определяется передаточное отношение ременной передачи?
6. Какие силы действуют на ветви ремня в состоянии покоя и при работе? Приведите формулу Эйлера для ременной передачи. Как определяется сила, действующая на шкив ременной передачи.
7. Чем вызваны напряжения, которые испытывает ремень при работе передачи?
8. Что понимают под тяговой способностью ременной передачи? Что характеризует и чему равен коэффициент тяги?
9. Что такое упругое скольжение и буксование ременной передачи?
10. Какие факторы влияют на усталостное разрушение ремня?
11. Каковы основные конструкции шкивов?

Глава 21. Валы и оси

21.1. Разновидности, конструктивные элементы валов и осей

Валы и оси – типовые элементы машин и механизмов, предназначенные для поддержания, установки и крепления вращающихся деталей и узлов механизмов, таких как зубчатые колеса, шкивы, муфты, мешалки, барабаны центрифуг и т.д. По своей конструкции валы и оси очень похожи друг на друга. Принципиальное различие между осями и валами состоит в том, что *валы передают крутящий момент, а оси не передают крутящий момент.*

На рисунке 21.1 представлена схема центрифуги с кинематическим возбуждением крутильных колебаний: торсионный вал 2, передающий только вращающий момент, разгружен от действия изгибающего момента, который воспринимает полая ось 3; вал 7 ременной передачи передаёт вращающий момент от шкива 6 до шарнирной муфты 5.



1 – перфорированный барабан центрифуги; 2 – вал торсионный; 3 – ось ротора полая; 4 – вал карданный; 5 – шарнирная муфта; 6 – шкив ременной передачи; 7 – вал ременной передачи; 8 – подшипники

Рисунок 21.1

Оси, как и валы, могут быть как вращающимися (полая ось 3 ротора на рис. 21.1), так и неподвижными. Примером неподвижной оси может служить запрессованная в стенку корпуса передачи ось блока зубчатых колёс (рис. 21.2). Подвижные оси используются очень часто в качестве роликов и барабанов ленточных транспортеров или рольгангов (роликовых дорожек). Основной деформацией, которую испытывает ось, является изгиб.

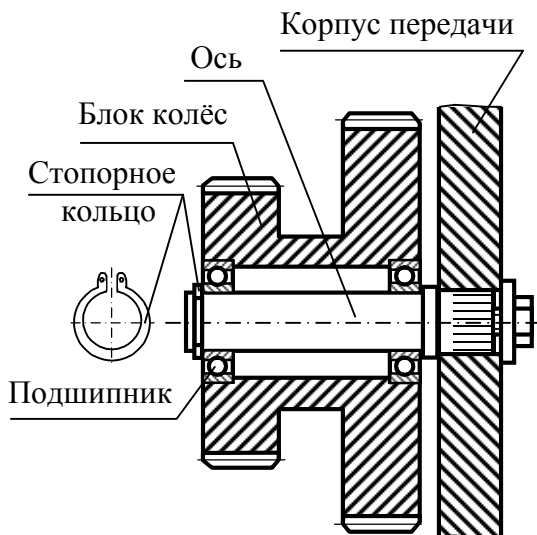


Рисунок 21.2

Большинство валов являются вращающимся – это валы редукторов, валы перемешивающих устройств, валы станков и транспортных машин. При помощи вала крутящий момент передается на некоторое расстояние от одного узла конструкции к другому узлу. Примером неподвижного вала может служить *торсионный* вал, использующийся в качестве амортизатора крутильных колебаний, или в качестве упругого чувствительного элемента измерительного прибора, преобразующего крутящий момент в угловое перемещение. Валы

испытывают деформацию кручения, а также деформацию изгиба и, в меньшей степени, растяжения-сжатия.

Геометрически оси представляют собой прямые стержни, преимущественно цилиндрической формы (рис. 21.3, а). Валы в зависимости от формы *геометрической оси* могут быть *прямые* (рис. 21.3, б), *коленчатые* (рис. 21.3, в) и *гибкие* (рис. 21.3, г) (обладают высокой жёсткостью при кручении и малой жёсткостью при изгибе).

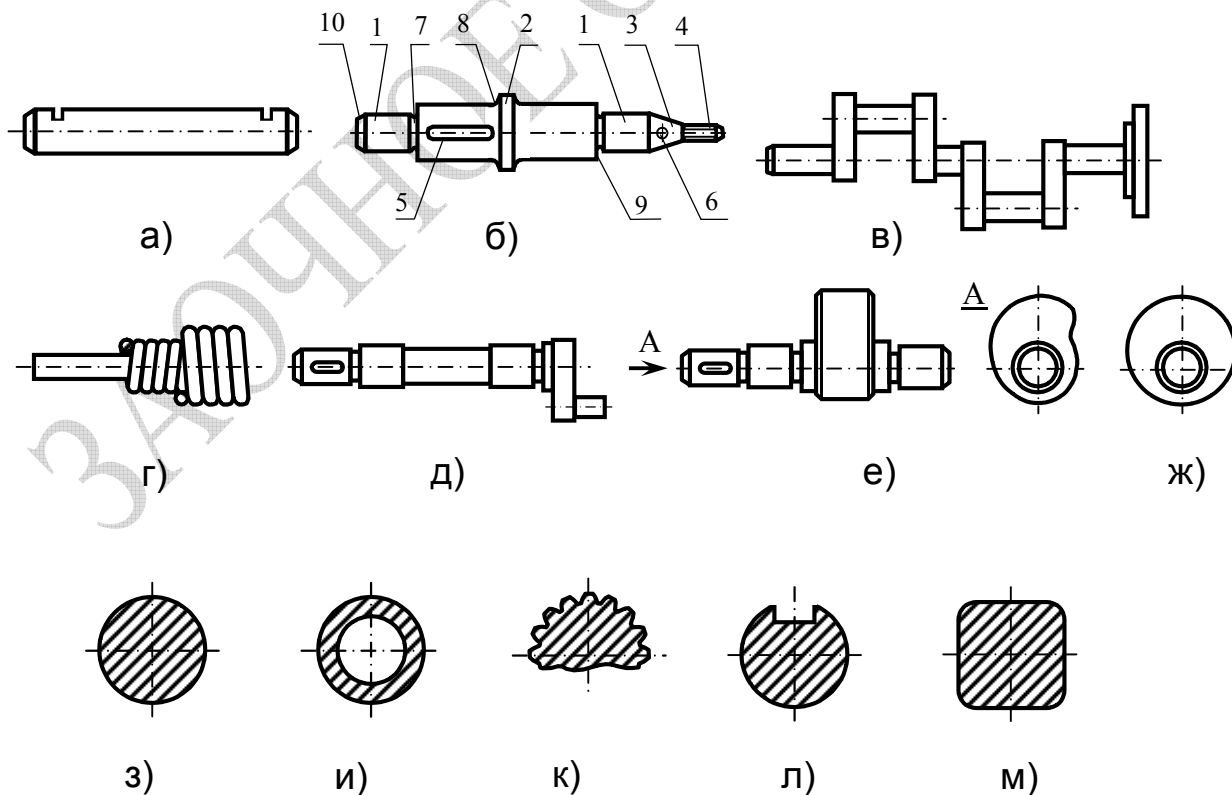


Рисунок 21.3

Наиболее распространены прямые валы. Коленчатые валы (рис. 21.3, а) применяются для преобразования вращательного движения в поступательное (механизм насоса) или – поступательного во вращательное (механизм поршневого двигателя). Разновидностями коленчатых валов являются кривошипные (рис. 21.3, д) и кулачковые валы (рис. 21.3, е), получившие названия по наименованию ведущих звеньев соответствующих механизмов. Эксцентровые валы имеют рабочую цилиндрическую часть – эксцентрик – смещённую относительно оси вращения вала (рис. 21.3, ж); по форме продольного сечения эти валы практически совпадают с кулачковыми валами. Эксцентровые валы служат источниками колебаний, или выполняют функции кривошипных валов при малых радиусах кривошипов. Гибкие валы (рис. 21.3, г) в виде проволочных сердечников, помещённых внутрь витой многослойной пружины, используются для передачи вращения между деталями, изменяющими относительное положение в пространстве.

По форме продольного сечения валы (оси) бывают *гладкими* (рис. 21.3, а) и *ступенчатыми* (рис. 21.3, б).

Опорные части валов и осей (рис. 21.3, б) называются *цапфами* (шипами) 1, а опоры вращающихся осей и валов называются *подшипниками*. Для предотвращения осевого смещения деталей относительно вала могут использоваться *бурты* 2 (рис. 21.3, б), участки конической формы 3, ступени или заплечики 9 (рис. 21.3, б, 21.4, б). Для закрепления деталей на валу предусматривают *резьбовые участки* 4 *шпоночные пазы* 5, отверстия 6. Наличие *проточек* (канавок) 7 обычно связано с технологией шлифовки участков вала. Для уменьшения концентрации напряжений в зонах с резким изменением диаметра вала необходимы плавные скругления – *галтели* 8 (рис. 21.3, б, 21.4). *Фаски* 10 облегчают насаживание деталей на вал. Непосредственно на валу может быть нарезано зубчатое колесо, червяк (винтовая часть червячной передачи).

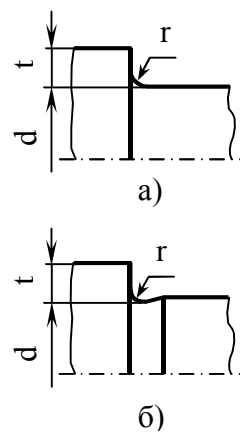


Рисунок 21.4

По форме поперечного сечения валы бывают сплошными круглыми (рис. 21.3, з), полыми (кольцевое сечение) (рис. 21.3, и), некруглого сечения, например, валы со шлицевыми или шпоночными канавками) (рис. 21.3, к, л), профильного сечения – квадратного (рис. 21.3, м), треугольного и др.

Цапфы для размещения стандартных подшипников качения имеют цилиндрическую форму, а для установки подшипников скольжения – могут быть, не только цилиндрическими (рис. 21.5), но коническими, и сферическими.

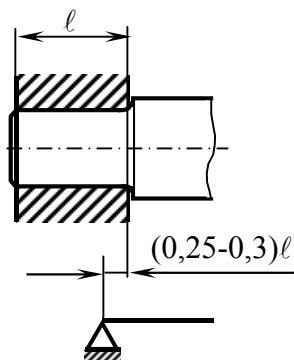


Рисунок 21.5

По способу изготовления валы и оси чаще выполняют цельными, т.е. изготовленными из проката (круга или трубы) или поковок путём токарной обработки и последующего шлифования отдельных участков или всего вала. Валы большой длины (6 и более метров), например, валы механических перемешивающих устройств изготавливают составными – разъёмными или неразъёмными.

Материалами валов и осей служат, как правило, среднеуглеродистые стали 40, 45 и легированные стали 40Х, 40ХН, 40ХН2МА, 30ХГТ, 30ХГСА и др. Для изготовления валов и осей неответственных конструкций применяют углеродистые конструкционные стали Ст4, Ст5. При необходимости прочностные свойства валов повышают термической обработкой: улучшению (закалке с высоким отпуском) или поверхностной закалке ТВЧ с низким отпуском. Если в качестве опор валов используются подшипники скольжения, то для обеспечения высокой твёрдости цапф валы изготавливают цементуемых сталей типа 20Х, 12ХН3А, 18ХГТ или азотируемых сталей типа 38Х2МЮА. Валы работающие в агрессивных средах изготавливают из нержавеющей сталей, марки которых подбирают по таблицам коррозионной стойкости в зависимости от параметров среды.

Основными критериями работоспособности валов и осей являются прочность, жесткость и виброустойчивость.

21.2. Расчёт валов

Расчётам вала предшествует анализ особенностей работы проектируемого устройства, анализ силовых взаимодействий между элементами, предварительный отбор основных критериев работоспособности значимых для данного вала, установление порядка расчёта, разработка расчётной схемы вала. Расчётная схема включает такие

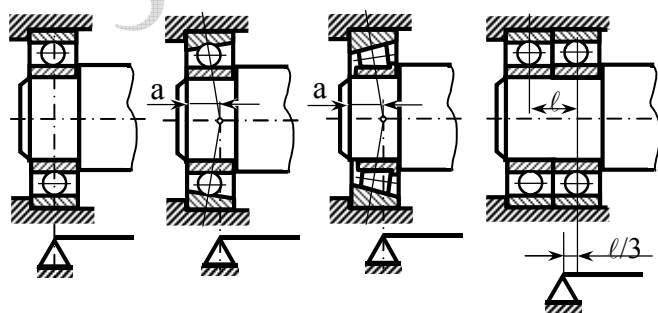


Рисунок 21.6

обязательные составляющие, как, геометрическую схему, дополняемую схемой нагружения вала, необходимые механические и прочностные характеристики материала (таблица 21.1).

При составлении расчётной схемы вала нагрузки от деталей, насаженных на вал (зубчатых колёс, звёздочек, шкивов

и т.д.), считаются сосредоточенными, и приложенными в середине ширины ступицы. Сечения вала в этом месте принимаются за расчётные. На расчётной схеме вала или оси шарнирную опору располагают в соответствии со схемами на рисунках 21.5 и 21.6. (расстояние a между шарниром и торцом подшипника определяется графически или расчётом исходя из типа и геометрии подшипника).

Таблица 21.1 Механические характеристики основных материалов

Сталь	Диаметр заготовки, мм, не более	Твёрдость НВ, не менее	σ_B	σ_T	σ_{-1}	τ_{-1}	Ψ_σ	Ψ_τ
			МПа					
Ст5	Не ограничен	190	520	280	220	130	0	0
45	Не ограничен	200	560	280	250	150	0	0
	120	240	800	550	350	210	0,1	0
	80	270	900	650	380	230	0,1	0,05
40X	Не ограничен	200	730	500	320	200	0,1	0,05
	200	240	800	650	360	210	0,1	0,05
	120	270	900	750	410	240	0,1	0,05
20	60	145	400	240	170	100	0	0
20X	120	197	650	400	300	60	0,05	0
12XН3А	120	260	950	700	420	210	0,1	0,05
12X2Н4А	120	300	1100	850	500	250	0,15	0,1
18XГТ	60	330	1150	950	520	280	0,15	0,1

Расчет и конструирование (т.е. определение формы и размеров) вала в общем случае состоит из нескольких этапов. Поскольку расчёт проводится по наиболее важным, с точки зрения обеспечения работоспособности, критериям, то некоторые расчёты могут быть опущены. По мере необходимости в расчётную схему, конструкцию вала и порядок его расчёта вносят корректировки.

Расчёт оси – частный случай расчёта вала, при котором крутящий момент $T=0$, а изгибающий момент $M \neq 0$.

На первом этапе проводят предварительный расчёт – определяют ориентировочное значение диаметра вала из условия прочности на кручение по пониженным допускаемым касательным напряжениям при известном крутящем моменте T или мощности N передаваемой валом

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau]_{кр}}} = \sqrt[3]{\frac{N}{0,2[\tau]_{кр} \omega}}, \quad (21.1)$$

где $[\tau]_{кр} = (12 \div 20)10^6$ – допускаемое напряжение на кручение для стали, Па; T – крутящий момент, Нм; N – мощность; Вт; ω – угловая скорость вращения вала, рад/с.

Полученное значение диаметра округляют в большую сторону, при этом, обычно, ориентируются на стандартные значения внутренних диаметров подшипников.

Расчёт вала по значительно пониженным допускаемым напряжениям на кручение $[\tau]_{кр}$ позволяет условно компенсировать отсутствие данных об изгибе вала – как правило, длина участков вала, и соответственно, величина изгибающих моментов на начальном этапе работы не известны.

На втором этапе разрабатывают эскизную конструкцию вала, вычерчивая его в составе сборочной единицы. При этом конструктивно, т.е. исходя из общей конструкции разрабатываемого узла, назначают форму, диаметры, длины отдельных участков вала, а также шероховатость поверхности и другие параметры. Производят уточнение расчётной схемы.

На третьем этапе проводят проверочный расчет валов на *статическую прочность*. На статическую прочность валы рассчитывают по наибольшей возможной кратковременной нагрузке, например, при пуске машины (в расчёте используют коэффициент перегрузки $K_{п} \approx 1,2 \div 2,2$, на который увеличивают номинальный вращающий момент T). Поскольку валы испытывают сложное напряжённое состояние – работают, в основном, в условиях изгиба и кручения (напряжения от растяжения-сжатия обычно малы), то расчет в опасном сечении ведут по эквивалентным напряжениям $\sigma_{экв}$ с использованием третьей теории прочности.

Расчет на статическую прочность выполняют в следующем порядке:

- составляют расчетную схему вала в виде стержня (рис. 21.7);
- определяют внешние силы, т.е. силы, действующие на вал со стороны сопряженных деталей или обрабатываемого вещества (если силы действуют в разных плоскостях, то их проектируют на координатные оси);
- в каждой координатной плоскости (например, горизонтальной – H и вертикальной – V) методами теоретической механики определяют опорные реакции R в опоре A и в опоре B ;
- определяют внутренние усилия с использованием правил сопротивления материалов, и строят эпюры изгибающих моментов в горизонтальной и вертикальной плоскостях (M_H и M_V) (рис. 21.7);
- вычисляют суммарный момент M_c по границам грузовых участков, строят эпюру суммарного момента (рис. 21.7)

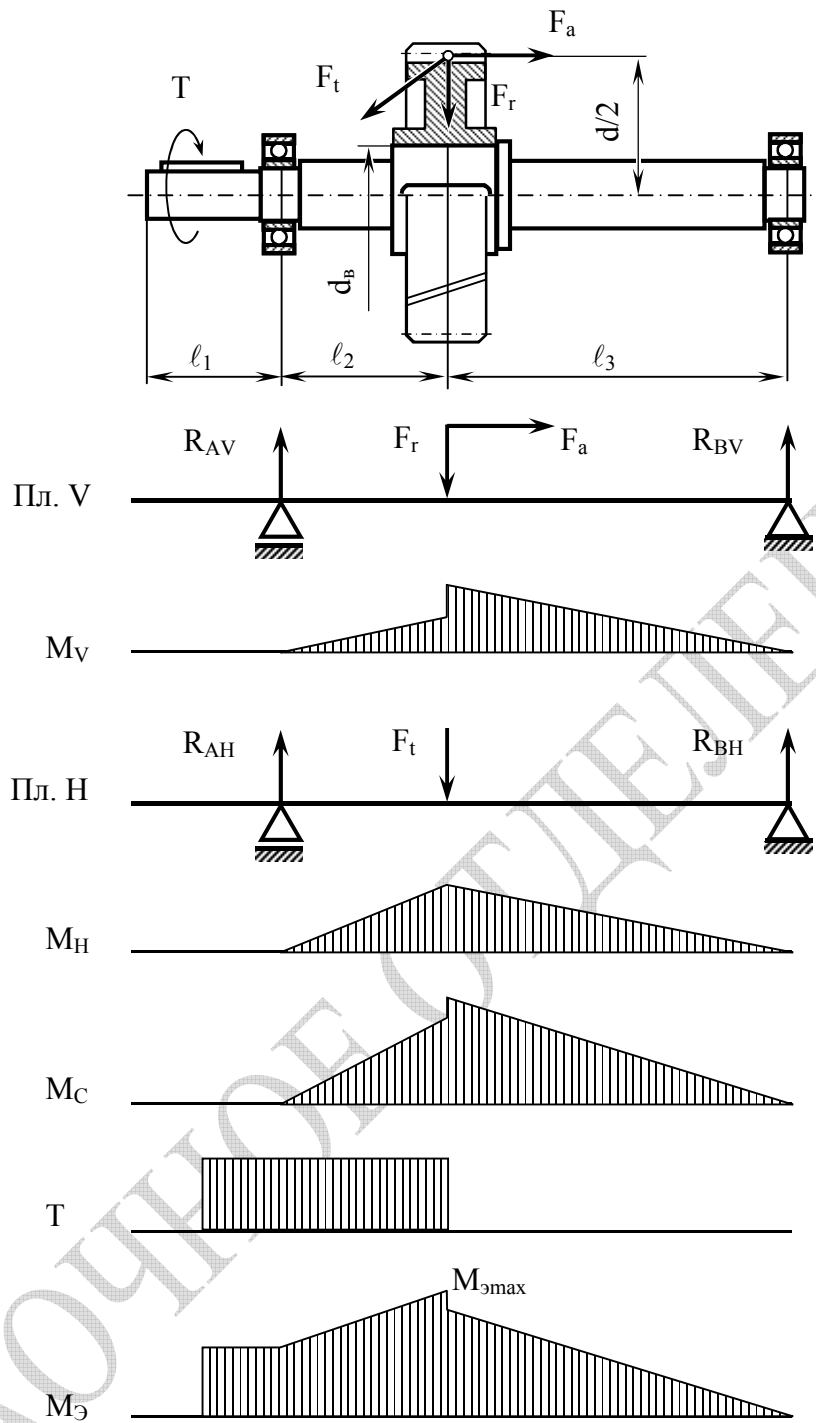


Рисунок 21.7

$$M_c = \sqrt{M_H^2 + M_V^2}; \quad (21.2)$$

- строят эпюру крутящего момента T (рис. 21.7);
- вычисляют эквивалентный момент $M_{Э}$, строят эпюру эквивалентного момента (рис. 21.7)

$$M_{\text{э}} = \sqrt{M_c^2 + T^2}; \quad (21.2)$$

- определяют опасное сечение вала, т.е. сечение, в котором эквивалентный момент максимален – $M_{\text{эmax}}$;
- выполняют проверочный (21.3) или проектный расчет (21.4) вала

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{и}}^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_c}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \frac{M_{\text{эmax}}}{0,1d^3} \leq [\sigma], \quad (21.3)$$

$$d_{\text{в}} \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{эmax}}}{0,1[\sigma]}}, \quad (21.4)$$

где W_z , W_p – соответственно осевой и полярный моменты сопротивления круглого сечения вала (табл. 21.2); $[\sigma] = \sigma_T / s_T$ – допускаемое напряжение; s_T – запас прочности для валов и осей по пределу текучести (σ_T), $s_T = 1,3 \div 1,8$ – для валов, $s_T \geq 1,5$ – для осей.

На четвертом этапе проводят расчет вала на усталость. *Усталость* материала – изменение состояния материала в результате длительного действия переменной нагрузки, приводящее к внезапному разрушению после определенного срока эксплуатации.

Цель проверочного расчета вала на усталость заключается в определении коэффициента запаса S прочности по переменным напряжениям и сравнении его с допускаемым значением $[S]$. Проверке подлежат опасные сечения вала, т.е. сечения в которых имеются какие-либо концентраторы напряжений в виде шпоночного паза, галтели, отверстия, фаски, резьбы или участок вала под напрессованным на него подшипником.

Постоянные по величине и направлению силы вызывают во вращающихся валах переменные напряжения изгиба, изменяющиеся по симметричному синусоидальному циклу, при этом условно принимают, что крутящий момент и напряжения от кручения изменяются по пульсационному (отнулевому) циклу, тогда

$$\sigma_{\text{и}} = \sigma_{\text{а}} = \frac{M_c}{W_z}; \quad \sigma_{\text{м}} = 0; \quad (21.5 \text{ а})$$

$$\tau_a = \frac{1}{2} \tau_{кр} = \frac{T}{2 \cdot W_p}; \quad \tau_m = \tau_a. \quad (21.5 б)$$

Коэффициенты запаса прочности вала по нормальным и касательным напряжениям определяются с учетом данных таблицы 21.1 по известным формулам

$$S_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{1}{K_V} \left(\frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} + K_{F\sigma} - 1 \right) \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}, \quad (21.6, а)$$

$$S_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{1}{K_V} \left(\frac{K_\tau}{K_{d\tau}} + K_{F\tau} - 1 \right) \tau_a + \psi_\tau \tau_m}, \quad (21.6, б)$$

где σ_{-1} – предел выносливости по нормальным напряжениям при симметричном цикле, Па; τ_{-1} – предел выносливости по касательным напряжениям при симметричном цикле, Па; K_V – коэффициент влияния поверхностного упрочнения; K_σ , K_τ – эффективные коэффициенты концентрации нормальных и касательных напряжений; $K_{d\sigma}$, $K_{d\tau}$ – коэффициент влияния абсолютных размеров поперечного сечения; $K_{F\sigma}$, $K_{F\tau}$ – коэффициенты влияния шероховатости; ψ_σ – коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла по нормальным напряжениям; ψ_τ – коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла по касательным напряжениям.

Значения коэффициентов, входящих в уравнения (21.6, а, б) приведены в таблицах 21.2 – 21.8.

Общий коэффициент запаса прочности S должен превышать минимально допустимое значение коэффициента запаса прочности для вала $[S] = 2$

$$S = \frac{S_\sigma S_\tau}{\sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2}} \geq [S]. \quad (21.6, в)$$

Таблица 21.2 Значения коэффициентов $K_{d\sigma}$, $K_{d\tau}$ влияния абсолютных размеров поперечного сечения

Напряженное состояние материала	$K_{d\sigma}, K_{d\tau}$ при диаметре вала d , мм					
	20	30	40	50	70	100
Изгиб для углеродистой стали	0,92	0,88	0,85	0,81	0,76	0,71
Кручение для всех сталей и изгиб для легированной стали	0,83	0,77	0,73	0,70	0,65	0,59

Таблица 21.3 Значения коэффициентов $K_{F\sigma}$, $K_{F\tau}$ влияния шероховатости

Вид механической обработки	Параметр шероховатости R_a , мкм	$K_{F\sigma}$ при σ_B , МПа		$K_{F\tau}$ при σ_B , МПа	
		≤ 700	> 700	≤ 700	> 700
Шлифование тонкое	до 0,2	1	1	1	1
Обтачивание тонкое	0,2 - 0,8	0,99-0,93	0,99-0,91	0,99-0,96	0,99-0,95
Шлифование чистовое	0,8 - 1,6	0,93-0,89	0,91-0,86	0,96-0,94	0,95-0,92
Обтачивание чистовое	1,6 - 3,2	0,89-0,86	0,86-0,82	0,94-0,92	0,92-0,89

Таблица 21.4 Значения коэффициента K_V влияния поверхностного упрочнения

Вид упрочнения поверхности вала	Значение K_V при:		
	$K_\sigma = 1$	$K_\sigma = 1,1-1,5$	$K_\sigma \geq 1,8$
Закалка ТВЧ	1,3 – 1,6	1,6 – 1,7	2,4 – 2,8
Азотирование	1,15 – 1,25	1,3 – 1,9	2,0 – 3,0
Накатка роликом	1,2 – 1,4	1,5 – 1,7	1,8 – 2,2
Дробеструйный наклёп	1,1 – 1,3	1,4 – 1,5	1,6 – 2,5
Без упрочнения	1,0	1,0	1,0

Таблица 21.5 Значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений K_σ , K_τ для ступенчатых переходов с галтелью

t / r	r / d	K_σ при σ_B , МПа				K_τ при σ_B , МПа			
		500	700	900	1200	500	700	900	1200
2	0,01	1,55	1,6	1,65	1,7	1,4	1,4	1,45	1,45
	0,02	1,8	1,9	2,0	2,15	1,55	1,6	1,65	1,7
	0,03	1,8	1,95	2,05	2,25	1,55	1,6	1,65	1,7
	0,05	1,75	1,9	2,0	2,2	1,6	1,6	1,65	1,75
3	0,01	1,9	2,0	2,1	2,2	1,55	1,6	1,65	1,75
	0,02	1,95	2,1	2,2	2,4	1,6	1,7	1,75	1,85
	0,03	1,95	2,1	2,25	2,45	1,65	1,75	1,75	1,9
5	0,01	2,1	2,25	2,35	2,5	2,2	2,3	2,4	2,6
	0,02	2,15	2,3	2,45	2,65	2,1	2,15	2,25	2,5

Таблица 21.6 Значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений K_σ , K_τ для шпоночных пазов

σ_B , МПа	K_σ		K_τ
	концевой	дисковой	
500	1,8	1,5	1,4
700	2,0	1,55	1,7
900	2,2	1,7	2,05
1200	2,65	1,9	2,4

Таблица 21.7 Значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений K_σ , K_τ для шлицев и резьбы

σ_B , МПа	K_σ для		K_τ для		K_τ для резьбы
	шлицев	резьбы	прямоугольных	эвольвентных	
500	1,45	1,8	2,25	1,43	1,35
700	1,6	2,2	2,5	1,49	1,7
900	1,7	2,45	2,65	1,55	2,1
1200	1,75	2,9	2,8	1,6	2,35

Таблица 21.8 Значения отношения коэффициентов $K_\sigma/K_{d\sigma}$, $K_\tau/K_{d\tau}$ для оценки концентрации напряжений в местах установки деталей с натягом

Диаметр вала d , мм	$K_\sigma/K_{d\sigma}$, при σ_B , МПа				$K_\tau/K_{d\tau}$, при σ_B , МПа			
	500	700	900	1200	500	700	900	1200
30	2,6	3,3	4,0	5,1	1,5	2,0	2,4	3,05
40	2,75	3,5	4,3	5,4	1,65	2,1	2,6	3,25
50	2,9	3,7	4,5	5,7	1,75	2,2	2,7	3,4
60	3,0	3,85	4,7	5,95	1,8	2,3	2,8	3,55
70	3,1	4,0	4,85	6,15	1,85	2,4	2,9	3,7
80	3,2	4,1	4,95	6,3	1,9	2,45	3,0	3,8
90	3,3	4,2	5,1	6,45	1,95	2,5	3,05	3,9
100	3,35	4,3	5,2	6,6	2,0	2,55	3,1	3,95

На пятом этапе производят расчёт вала на жесткость. Учёт упругих деформаций валов и осей, находящихся под нагрузкой, необходим, если возникающие деформации влияют на работоспособность сопряжённых с ними деталей, например, подшипников, герметичных уплотнений валов аппаратов, фрикционных катков, или же влияют на точность работы технологического устройства. Жесткость вала при изгибе оценивают прогибом y и углом поворота θ сечения вала (рис. 21.8), а при кручении – углом закручивания φ , которые определяются по правилам сопротивления материалов. Условия жесткости имеют вид

$$y \leq [y], \quad \theta \leq [\theta], \quad \varphi \leq [\varphi]. \quad (21.7)$$

Рекомендации по назначению допускаемых значения прогиба $[y]$, угла поворота $[\theta]$, угла закручивания $[\varphi]$ содержатся в нормативно-технической литературе, и зависят от типа и параметров устройства. Например, $[y] = 0,01m$ – допускаемый прогиб в месте установки зубчатых колёс (m – модуль); $[y_{\max}] = 0,0003\ell$ – максимальный прогиб (стрела прогиба) для валов общего назначения в станкостроении (ℓ – длина пролёта); $[\theta] = 0,001$ рад, для подшипников скольжения; $[\theta] = 0,005$ рад, для шариковых однорядных подшипников качения; $[\theta] = 0,0016$ рад, для подшипников качения с коническими роликами.

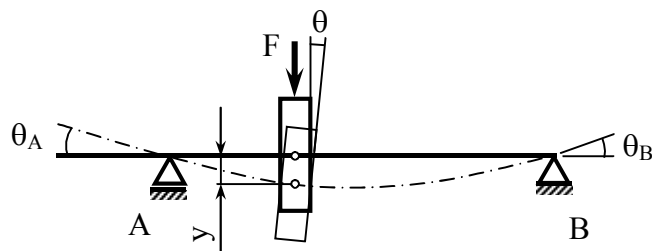


Рисунок 21.8

На шестом этапе, при необходимости, проводят расчет вала на виброустойчивость. Этот этап расчета обязателен при проектировании быстровращающегося ротора – вала с закрепленными на нем деталями. Быстровращающимися роторами оснащаются такие устройства, как аппараты с мешалкой, центрифуги, дисковые распылительные сушилки, центробежные насосы и т.д. К быстровращающимся роторам относятся роторы, при вращении которых могут возникать резонансные явления (резкое возрастание амплитуды колебаний).

Колебания валов и иных деталей могут, также возникать под действием периодически изменяющихся внешних сил. Колебания, по видам деформации вала, могут быть изгибными и крутильными. Возникающая при вращении вала вибрация, негативно сказывается на работоспособности, как самого вала, так и всех деталей и узлов которым передается вибрация.

Изгибные колебания (вибрации) валов обусловлены центробежными силами, возникающими вследствие несбалансированности роторов, т.е. несовпадением центра масс с осью вращения. Расстояние e от оси вращения до центра масс ротора называется *эксцентриситетом* (рис. 21.9, а). Центробежные силы вызывают появление динамического прогиба вала, и соответственно, сил упругости.

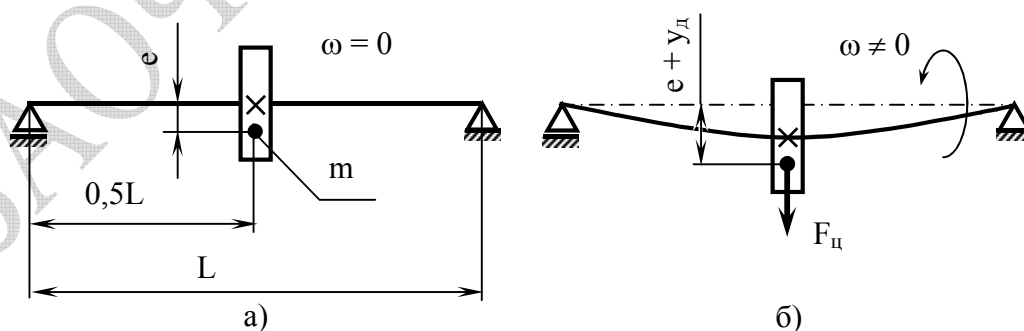


Рисунок 21.9

Центробежная сила, возникающая при вращении вала с закреплённой на нём деталью (рис. 21.9,б), рассчитывается по формуле

$$F_{ц} = m(e+y_d)\omega^2, \quad (21.8)$$

где m – приведённая масса системы «вал-деталь» ($m \approx m_d + 0,5m_b$); m_d – масса детали; m_b – масса вала; y_d – динамический прогиб.

Методика определения приведённой массы рассматривается в теории колебаний. Если масса детали значительно превосходит массу вала, то в первом приближении массу вала не учитывают.

Сила упругости (внутренняя сила), уравнивающая силу инерции, рассчитывается по формуле

$$F_{\text{упр}} = ky_d, \quad (21.9)$$

где k – коэффициент жесткости ($k = 48EI_z/L^3$ – для симметричного расположения детали на валу); E – модуль продольной упругости; I_z – осевой момент инерции поперечного сечения вала.

Приравняв F_c и $F_{\text{упр}}$, и вводя обозначение $\omega_0^2 = k/m$ получим

$$ky_d = m(e + y_d)\omega^2,$$

$$y_d k/m = (e + y_d)\omega^2,$$

$$y_d \omega_0^2 = (e + y_d)\omega^2,$$

$$y_d = \frac{e}{(\omega_0 / \omega)^2 - 1}. \quad (21.10)$$

Из уравнения (21.10) следует, что при рабочей частоте вращения ω динамический прогиб y_d стремится к бесконечности (см. резонансную кривую на рис. 12.6).

Угловая скорость ω_0 , соответствующая собственной (резонансной) частоте колебаний вала, называется *критической скоростью*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (21.11)$$

где k – коэффициент жесткости вала; m – масса ротора, приведенная к месту закрепления детали, например, диску, колесу или барабану центрифуги и т.п.

При совпадении рабочей скорости вращения вала ω с критической скоростью ω_0 возникает наиболее опасный режим работы – центробежные силы, динамический прогиб, изгибающий момент и напряжения изгиба максимальны – теоретически стремятся к бесконечности. Для исключения большой амплитуды колебаний рабочая скорость вращения вала должна находиться либо в дорезонансной области (жёсткий вал), либо в зарезонансной области (гибкий вал). Условия виброустойчивости для жесткого вала (12.13) и гибкого вала (12.14) имеет вид

$$\omega \leq 0,7\omega_0 ,$$

$$1,3 \omega_0 \leq \omega \leq 1,6 \omega_0 .$$

Если ротор приходится эксплуатировать в режиме гибкого вала, например вар центрифуги, то при разгоне зону резонанса следует проходить максимально быстро.

Поэтапное выполнение расчётов позволяет проанализировать и оценить общую работоспособность вала или оси, усовершенствовать их конструкцию, а именно:

- выбрать конструктивные решения уменьшающие концентрацию напряжений (например, избежать применения без необходимости прессовых посадок, которые не только увеличивают концентрацию напряжений, но и делают узел неразъёмным);
- вынести из зоны опасных сечений элементы вала, вызывающие концентрацию напряжений, т.е. избежать неблагоприятного сочетания опасных факторов;
- уменьшить длины пролётов вала;
- уменьшить массу вращающихся деталей;
- внести в чертежи указания по обеспечению необходимых шероховатостей, допусков форм и расположения поверхностей вала.

21.3. Контрольные вопросы

1. Какие детали называются валами? Какие детали называются осями?
2. Приведите классификацию валов и осей.
3. Перечислите типовые элементы вала (оси).
4. Назовите основные критерии работоспособности валов и осей.
5. Каковы основные этапы расчёта и конструирования валов и осей и каково основное содержание расчётов на каждом этапе?
6. Какие параметры учитывают при определении коэффициента запаса прочности?

Глава 22. Опоры валов и осей

Вращательные кинематические пары машин и механизмов конструктивно оформляются в виде опор. Опоры вращающихся валов и осей называются *подшипниками*. Они поддерживают вал или ось в определенном положении и обеспечивают их свободное вращение. Подшипники воспринимают и передают нагрузки от подвижных деталей на корпус устройства.

В зависимости от направления нагрузок опоры делят на: *радиальные* подшипники, воспринимающие нагрузки вдоль радиуса вала; *упорные* подшипники (подпятники), воспринимающие нагрузки, направленные вдоль оси вала; *радиально-упорные* подшипники, воспринимающие одновременно радиальные и осевые нагрузки.

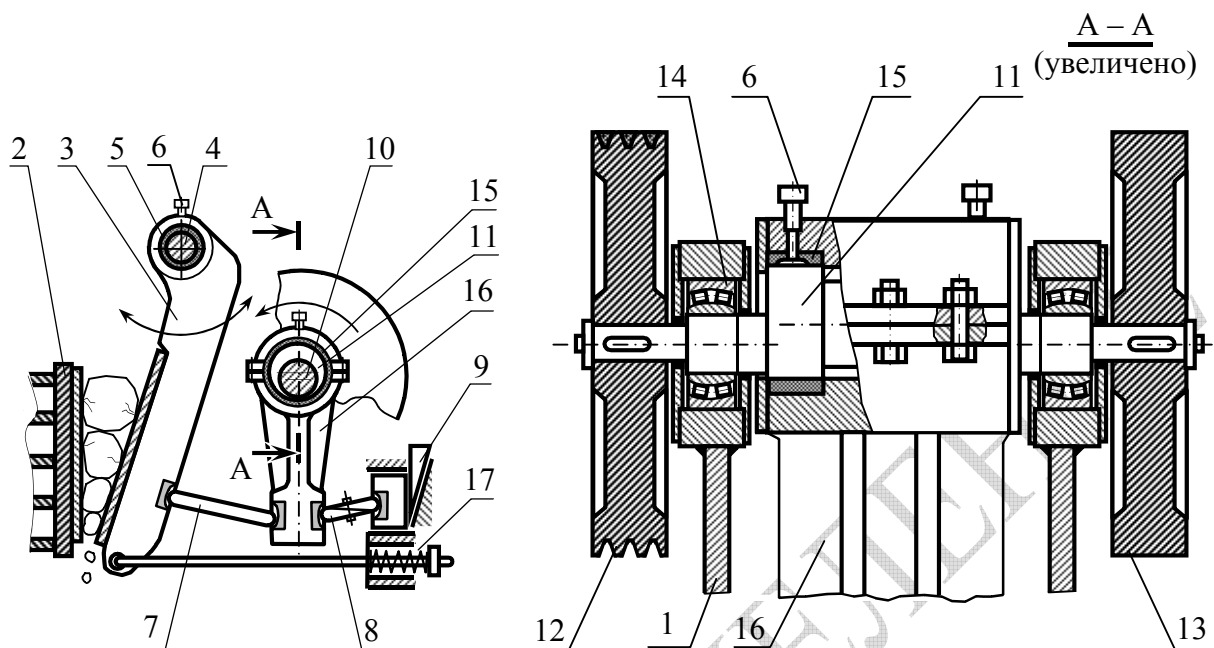
В зависимости от вида трения между соприкасающимися поверхностями валов и опор различают подшипники с *трением скольжения*, подшипники с *трением качения* и специальные подшипники (электромагнитные, с трением упругости).

Подшипники качения, как правило, используются в качестве опор вращающихся валов, а подшипники скольжения применяются, обычно, для поддержания качающихся деталей, быстровращающихся деталей, деталей испытывающих значительные ударные нагрузки, с целью уменьшения габаритов опоры.

В качестве примера рассмотрим схему щёковой дробилки (рис. 22.1) и узла приводного вала. Все элементы данной машины, предназначенной для измельчения кускового материала, испытывают значительные динамические нагрузки. При вращении эксцентрикового вала 10 шатун 16 совершает движения близкие к вертикальным возвратно-поступательным движениям, которые, в свою очередь, вызывают качательные движения щеки 3. Вал 10 установлен в корпусе 1 на подшипниках качения 14. Шатун 16 связан с эксцентриковой частью вала при помощи подшипников скольжения (вкладыш 15). Подвижная щека 3 крепится на оси 4 при помощи подшипника скольжения 5. Распорные плиты 7 и 8 образуют с сопряженными деталями открытые опоры качения, близкие к ножевым опорам.

Помимо вращательных кинематических пар технологические машины и механизмы (кривошипно-ползунные, кулисные и др.) содержат значительное количество поступательных кинематических пар. Устройства, обеспечивающие поступательное движение звена или движение по криволинейной траектории, называются *направляющими*. Различают направляющие с трением скольжения и трением качения.

Основные требования, предъявляемые к подшипникам и направляющим – малые потери на трение, точность, износостойкость, небольшие габариты, простота конструкции. Большинство подшипников стандартизовано.



1 – Станина; 2 – неподвижная щека; 3 – подвижная (качающаяся) щека; 4 – неподвижная ось; 5 – подшипник скольжения оси; 6 – маслёнка; 7 – распорная плита; 8 – распорная плита с предохранительными заклёпками; 9 – регулировочный клин; 10 – приводной вал; 11 – эксцентриковая часть вала; 12 – шкив; 13 – маховик; 14 – подшипник качения; 15 – вкладыш подшипника скольжения шатуна; 16 – шатун; 17 – тяга с возвратной пружиной

Рисунок 22.1

22.1. Общие сведения о подшипниках скольжения

Подшипники скольжения по сравнению с подшипниками качения обладают рядом преимуществ: способны выдерживать вибрационные и ударные нагрузки; бесшумны; обеспечивают лучшую центровку валов; могут быть разъемными; имеют малые габариты; способны работать в агрессивных средах; выдерживают высокую частоту вращения вала из-за меньших центробежных сил. По размерам подшипники скольжения могут быть миниатюрными, например, в измерительных приборах и часах, и больших диаметров, превышающих стандартные подшипники качения.

К недостаткам подшипников скольжения относится чувствительность к качеству смазки; большие коэффициенты трения в режиме пуска и остановки (от стационарного режима отличаются примерно в 20 раз); чувствительны к температуре эксплуатации – изменяется вязкость смазки; КПД подшипников скольжения – 0,98, что меньше чем у подшипников качения.

Областями применения подшипников скольжения являются: крупногабаритные валы диаметрами 1 м и более (дешевле опор качения); динамически нагруженные валы; высокоскоростные роторы сепараторов и центрифуг с частотой вращения более 10^5 об/мин; коленчатые валы (применяются только разъемные подшипники).

Основной причиной выхода из строя подшипников является износ рабочих поверхностей. При попадании в смазку твердых частиц с размерами большими толщины масляного слоя происходит абразивное изнашивание. Усталостное разрушение подшипников возникает при нагрузках действующих циклически. Повышение температуры выше допустимой изменяет свойства смазки и может привести к выплавлению вкладышей или к заклиниванию вала в подшипнике.

Подшипник скольжения (рис. 22.2) представляет собой пару вращения, состоящую из опорного участка вала (*цапфы*) и корпуса подшипника, во *вкладыше* которого скользит цапфа. Цапфу радиального подшипника расположенную в конце вала (рис. 22.2, а) называют *шипом*, а в средней части вала (рис. 22.2, б) – *шейкой*. Цапфу упорного подшипника (рис. 22.2, в, г) называют *пятой*, а сам подшипник *подпятником*. Форма рабочей поверхности вкладышей подшипников и цапф может быть цилиндрической (рис. 22.2, а, б, в, г), конической (рис. 22.2, д) и сферической (рис. 11.2, е). Сферические подшипники обеспечивают поворот вала в трех плоскостях. Наиболее часто применяются цапфы цилиндрической формы.

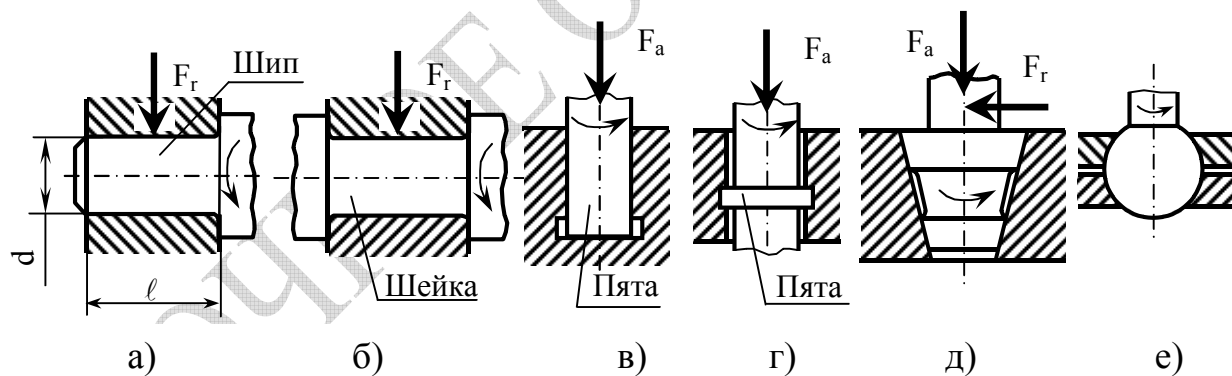


Рисунок 22.2

Для снижения потерь на трение в подшипнике подбирают *пару трения*, т.е. такие материалы цапфы и вкладыша, которые, обеспечивают минимальный коэффициент трения при взаимном скольжении, а также используют смазку. Валы (цапфы) изготавливают из стали. Вкладыши подшипников изготавливают из сплавов (бронз, баббитов), полимерных и композитных материалов (фторопласт, текстолит, прессованная металлокерамика с добавлением графита и т.д.). Вкладыши могут быть из биметаллов – на стальную или чугунную основу наплавляют баббиты и свинцовые бронзы. На металлическую основу вкладыша могут наноситься такие полимеры, как нейлон, капрон, тефлон.

Подобные вкладыши могут работать без смазки. Корпуса подшипниковых узлов изготавливают обычно из серого чугуна СЧ15, СЧ18 и СЧ20.

Типовая конструкция узла подшипника скольжения представлена на рисунке 22.3. В корпус 1 запрессован вкладыш 5. Винт 4 предохраняет вкладыш от смещения относительно корпуса. Для подачи смазки через масленку предусмотрено отверстие 2. При помощи пазов 3 смазка распределяется на внутренней поверхности вкладыша.

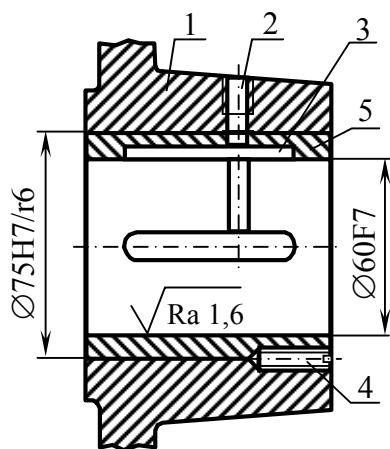


Рисунок 22.3

В зависимости от толщины масляного слоя подшипник обычно работает в режиме *жидкостного* или *полужидкостного* трения. Для образования и удержания слоя смазки используют два способа: *гидростатический*, когда давление обеспечивается насосом, и *гидродинамический* при котором звенья образуют клиновидный слой смазки, в котором при движении цапфы возникает

давление, уравнивающее силу, действующую на вал. Если смазка отсутствует, то трение называют *сухим*. Если же в отдельных зонах контакта имеются тонкие смазочные плёнки толщиной около 0,1 мкм, то такое трение называют *граничным*.

Между цапфой и вкладышем имеется диаметральный зазор Δ (рис. 22.4, а), и соответствующий ему эксцентриситет ($e = 0,5\Delta$), т.е. расстояние между осью вала и осью отверстия в подшипнике. При определенной скорости вращения вала ω цапфа отходит от вкладыша («всплывает»). Эксцентриситет e уменьшается (рис. 22.4, б).

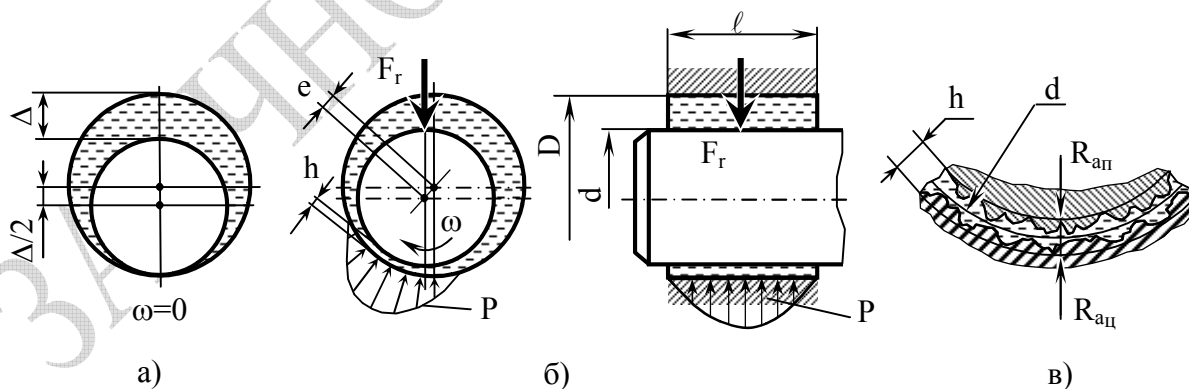


Рисунок 22.4

При жидкостном трении рабочие поверхности вала и подшипника полностью разделяет слой смазки h (рис. 22.4, б, в), толщина которого больше сумм микронеровностей поверхности цапфы $R_{ац}$ и микронеровностей поверхности вкладыша $R_{ап}$

$$h_{\min} \geq R_{ац} + R_{ап}, \quad (22.1)$$

коэффициент трения f при этом не превышает 0,005 и износ практически отсутствует. В слое смазки под цапфой возникает давление P (рис. 22.4, б), которое удерживает вал на «масляном клине». При полужидкостном трении условие (22.1) не выполняется, имеется частичный контакт между поверхностями вала и цапфы, которые разделены слоем смазки, а коэффициент трения больше, чем при жидкостном трении примерно на порядок ($f \approx 0,05$). На основании опыта принимают $h_{\min} \geq 2(R_{aц} + R_{aп})$.

На графике зависимости изменения коэффициента трения f подшипника от угловой скорости ω вращения вала (рис. 22.5) выделяется три участка – участок 1-2 – участок сухого и граничного трения; 2-3 – участок полужидкостного трения; 3-4 участок жидкостного трения. Угловая скорость ω_0 , при которой устанавливается жидкостной режим трения, называется критической скоростью.

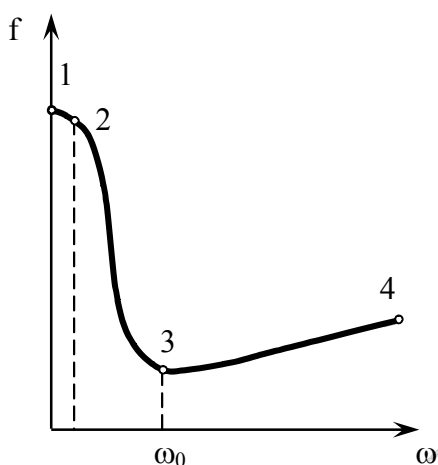


Рисунок 22.5

Наиболее благоприятным является жидкостное трение – потери энергии на трение, а так же износ рабочих поверхностей оказываются минимальными.

Впервые гидродинамические явления, происходящие в слое смазки, были исследованы и описаны профессором Петербургского технологического института, профессором Н.П. Петровым, который считается создателем гидродинамической теории смазки.

В качестве смазки подшипников скольжения высокоскоростных роторов (турбокомпрессоров, гироскопов, газовых турбинах и др.) применяют газ, который позволяет резко понизить коэффициент трения и неограниченно повысить скорости вращения. Применяют газостатические и газодинамические опоры. В газостатических опорах газ принудительно подаётся в зазор между корпусом и цапфой вала (оси) под давлением. Данные конструкции требуют высокой точности изготовления, менее грузоподъёмны, подвержены автоколебаниям.

22.2. Основы расчёта подшипников скольжения

Работоспособность подшипника скольжения (рис. 22.2, а; 22.4, б) определяется несколькими условиями, при соблюдении которых обеспечивается несущая способность, ограничивается износ, перегрев и заедание

$$p = F_r / (d \ell) \leq [p], \quad p \cdot v \leq [p \cdot v], \quad v \leq [v], \quad t \leq [t]. \quad (22.2)$$

Получение упрощённых расчетных зависимостей основано на учете мощности $N_{тр}$, затрачиваемой на трение при работе подшипника

$$N_{тр} = T_{тр} \omega = F_{тр} 0,5 d \omega = F_r f 0,5 d \omega = F_r f v = p d \ell f v, \quad (22.3)$$

где $T_{тр}$ – момент сил трения; $F_{тр}$ – сила трения; ω - угловая скорость вращения вала; d – диаметр цапфы; f – коэффициент трения; ℓ - длина цапфы (рис. 22.2, а); p – условное (осреднённое) контактное давление.

Поскольку в (22.3) геометрические параметры (d и ℓ) и коэффициент трения f постоянны, то в упрощённом виде проверку несущей способности и износостойкости подшипника полужидкостного трения выполняют по условию (22.4), а проверку на отсутствие перегрева и заедания – по условию (22.5)

$$p \leq [p], \quad (22.4)$$

$$p \cdot v \leq [p \cdot v], \quad (22.5)$$

где $[p] = 2...6$ МПа, $[p \cdot v] = 4...8$ МПа·м/с – допускаемые значения для подшипника с бронзовыми вкладышами для редукторов общего назначения; $[p] = 6...12$ МПа, $[p \cdot v] = 6...20$ МПа·м/с для редукторов тяжелого типа (см. также таблицу 11.1).

Диаметр цапфы d и длину ℓ (рис. 22.2, а) определяют конструктивно или из условия прочности на изгиб ($M_{из} = 0,5 \ell F_r$) в корневом сечении цапфы, с учетом соотношения

$$\ell = (0,5 \div 1,2) d. \quad (22.6)$$

Таблица 22.1 Допускаемые режимы работы подшипников полужидкостного и жидкостного трения

Материал подшипника	$[p]$, МПа	$[V]$, м/с	$[pV]$, МПа·м/с	$[t]$, °С
Чугун СЧ18-36	<0,5	4,0	-	-
Чугун АЧС-1	2,5	5,0	10	-
Чугун АЧС-5	20	1	20	-
Латунь ЛКС 80-3-3	12	2	10	-
Латунь ЛМцЖ 52-4-1	4	2	6	-
Бронза БрС30	25	12	30	-
Бронза О10Ф1	15	4	12	-
Бронза БрА9Ж4Л	15	4	12	-
Баббит Б88	20	50	75	115
Баббит Б16	10	30	3	110
Фторопласт 4	1,5	5	-	200
Полиамид АК-7	15-20	4	20	100
Капрон Б	2-2,5	5	20	100
Текстолит со смазкой	10	5-10	25	100

22.3. Общие сведения о подшипниках качения

Подшипники качения в виде стандартных узлов, основными элементами которых являются тела качения (шарики, ролики), установленные между наружным и внутренним кольцами, – наиболее распространенный вид опор валов и осей. К достоинствам подшипников качения относятся малые потери на трение (КПД – 0,99), низкая стоимость, очень широкий диапазон размеров и типов, простота монтажа и обслуживания, малые осевые размеры, малая разница моментов трения при пуске и в установившемся (равномерном) движении. Недостатками подшипников качения являются относительно большие радиальные размеры, высокая чувствительность к ударным и вибрационным нагрузкам, значительно меньшая по сравнению с подшипниками скольжения долговечность при высоких частотах вращения и больших нагрузках.

Подшипник (рис. 22.6, а) состоит из тел качения 1, сепаратора (разделителя тел качения) 2, наружного 3 и внутреннего 4 колец. Размеры и другие параметры подшипников приводятся в стандартах.

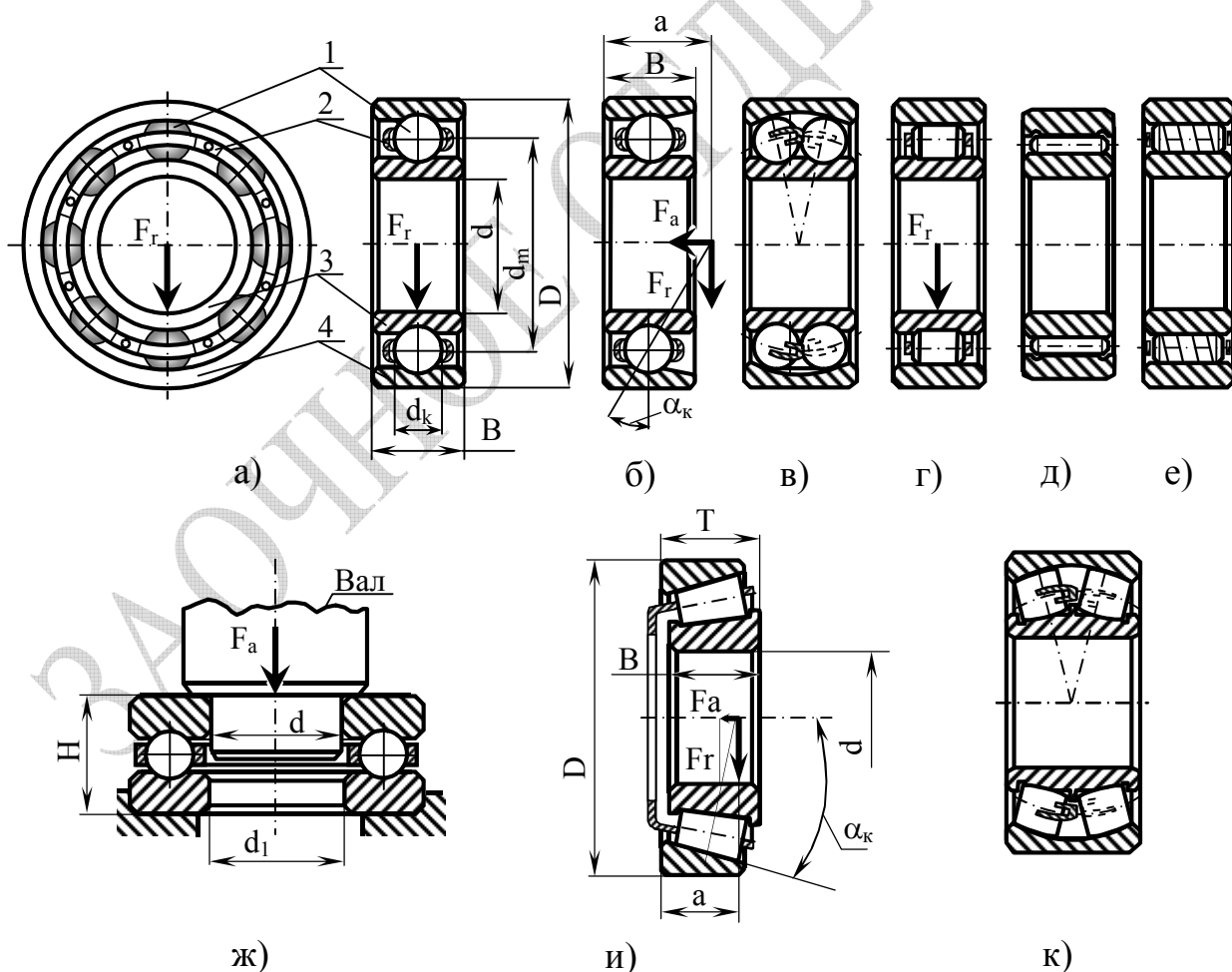


Рисунок 22.6

Подшипники качения классифицируют по нескольким признакам:

1. По форме тел качения подшипники разделяются на *шариковые* (рис. 22.6, а, б, в, ж) и *роликовые* (рис. 22.6, г, д, е, и, к); по форме ролики могут быть *цилиндрическими* (рис. 22.6, г), *коническими* (рис. 22.6, и), *игольчатыми* (рис. 22.6, д), *витыми* (рис. 22.6, е), *бочкообразными* (рис. 22.6, к);

2. По направлению воспринимаемых сил подшипники могут быть *радиальными* (рис. 22.6, а, г, д, е), т.е., воспринимающими только силу F_r , направленную по радиусу; *радиально-упорными* (рис. 22.6, б, и), воспринимающими как радиальную силу F_r , так и силу F_a , направленную вдоль оси подшипника; *упорными* (рис. 22.6, ж), т.е. воспринимающими только осевую силу F_a ;

3. По способности самоустанавливаться подшипники подразделяют на *несамоустанавливающиеся* и *самоустанавливающиеся* (рис. в, к), допускающие в процессе работы поворот оси внутреннего кольца на $2^\circ \div 3^\circ$ по отношению к оси наружного кольца;

4. По числу рядов тел качения подшипники подразделяют на *однорядные* (рис. 22.6, а, б, г – и), *двухрядные* (рис. 22.6, в, к), *четырёхрядные*;

5. По габаритным размерам (диаметр D и ширина B) подшипники одного и того же диаметра отверстия d подразделяют на размерные серии: *сверхлегкую*, *особолегкую*, *легкую*, *среднюю*, *тяжёлую*, *особо узкую*, *узкую*, *нормальную*, *широкую*, *особо широкую*.

В зависимости от типа, точности, размеров и серии подшипники имеют различную грузоподъемность и быстроходность. Подшипники более тяжелых серий имеют повышенную грузоподъемность, но они менее быстроходны. Шариковые радиальные и радиально-упорные подшипники быстроходнее роликовых, но менее грузоподъемны.

Промышленностью выпускаются подшипники пяти классов точности (в порядке повышения точности: 0, 6, 5, 4, 2). При отсутствии особых требований к точности вращения применяют подшипники нормального класса точности 0.

Быстроходность подшипников оценивают параметром $d_m n$, где d_m – диаметр окружности (рис. 22.6, а), проходящей через центры вращения тел качения (шариков, роликов); n – частота вращения кольца подшипника, об/мин. Для радиальных и радиально-упорных шарикоподшипников (рис. 22.7, а, б) $d_m n \approx 0,5 \cdot 10^6$ мм·об/мин; для роликоподшипников – $d_m n \approx 0,3 \cdot 10^6$ мм·об/мин; для упорных шарикоподшипников – $d_m n \approx 0,22 \cdot 10^6$ мм·об/мин.

Подшипники качения изготавливаются из шарикоподшипниковых высокоуглеродистых хромистых сталей ШХ15 и ШХ15СГ. Твердость элементов подшипника по Роквеллу HRC 60 – 66. Основная причина выхода подшипника из строя – усталостное выкрашивание дорожек и тел качения из-за действия переменных контактных напряжений.

Кинематика подшипника качения подобна кинематике планетарного механизма, в котором водилом является сепаратор. Если наружное кольцо подшипника неподвижно, а внутреннее вращается с частотой n_1 , то частота вращения сепаратора n_c определяется по формуле

$$n_c = 0,5n_1 \left(1 - \frac{d_k}{d_m} \right), \quad (22.7)$$

где d_k – диаметр шарика; $d_m = 0,5(D+d)$ – диаметр окружности осей шариков.

При вращении тел качения вокруг оси подшипника каждое из них испытывает действие центробежной силы $F_{ц}$, которая передаётся на дорожку наружного кольца

$$F_{ц} = 0,5md_m\omega_c^2, \quad (22.8)$$

где m – масса тела качения; $\omega_c = \pi n_c/30$ – угловая скорость сепаратора.

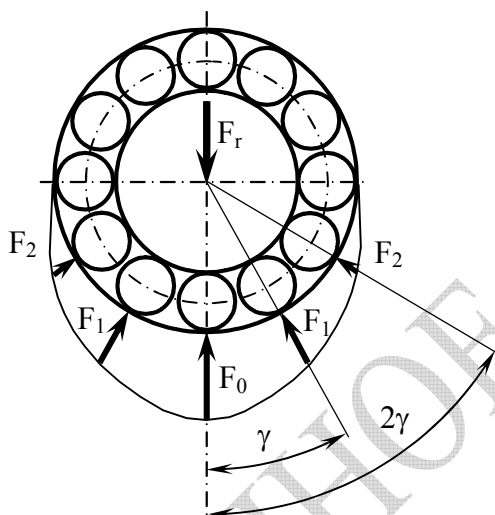


Рисунок 22.7

Радиальная нагрузка F_r , действующая со стороны вала на подшипник уравнивается реакциями тел качения F_i в зоне не более 180° . Нагрузка между телами качения (шариками или роликами) распределяется неравномерно (рис. 11.7). Реакция F_i зависит от угла между радиусом, проходящим через центр тела качения, и направлением нагрузки. Эюра распределения нагрузки представлена на рисунке 22.7.

Из условия равновесия следует, что

$$F_r = F_0 + 2F_1\cos\gamma + 2F_2\cos2\gamma + \dots + 2F_n\cos n\gamma, \quad (22.9)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, n$ – номер нагруженного тела качения; γ – угловой шаг тел качения.

Из анализа уравнения (22.9) с учётом уравнений совместности перемещений тел качения и колец получают формулу для силы F_0

$$F_0 = kF_r/z, \quad (22.10)$$

где z – число тел качения (10-20); k – коэффициент (для роликовых подшипников с учетом радиальных зазоров $k = 4,08$; для шариковых – $k = 5$).

Свыше 50% всей нагрузки воспринимает один шарик или ролик, расположенный в данный момент на линии действия нагрузки. С учётом действия на тело качения центробежных сил максимальная сила

$$F_{0\max} = F_0 + F_{ц.}$$

Резко неравномерное распределение нагрузки приводит к чрезмерному повышению контактных напряжений, которые из-за вращательных движений элементов подшипника изменяются циклически по пульсационному циклу. Наибольшие контактные напряжения действуют на шарик в центре площадки контакта с внутренним кольцом. Данные напряжения рассчитываются по формуле Герца.

22.4. Выбор и расчёт подшипников качения

Важнейшими характеристиками подшипников являются статическая и динамическая грузоподъёмность:

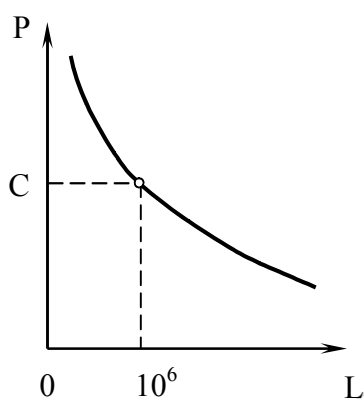


Рисунок 22.8

- *статическая грузоподъёмность C_0 – допустимая нагрузка невращающегося подшипника, при которой остаточная деформация тел качения и колец не превышает $10^{-4}d_k$ (здесь d_k – диаметр тел качения);*

- *динамическая грузоподъёмность C – условная радиальная нагрузка, которую подшипник может выдержать в течение базового числа оборотов 10^6 .*

Значения статической C_0 и динамической C грузоподъёмности некоторых типов подшипников можно определить по таблицам 22.2 и 22.3; значения коэффициентов X и Y – по таблице 22.4.

Кривую усталости (рис.22.8), т.е. зависимость нагрузки P , которую может выдержать подшипник в течение определённого числа оборотов L , получают экспериментально.

Долговечность (ресурс) подшипника в часах определяют по зависимости

$$L_h = \frac{10^6}{60n} \left(\frac{C}{P} \right)^\alpha, \quad (22.7)$$

где $\alpha = 3$ – показатель степени для шарикоподшипников, $\alpha = 3,33$ – для роликоподшипников; n – частота вращения кольца подшипника, об/мин; P – эквивалентная (приведенная) нагрузка, рассчитываемая по формуле

$$P = (XVF_r + YF_a)k_\delta k_T, \quad (22.8)$$

здесь F_r и F_a – соответственно, радиальная и осевая нагрузки, действующая на подшипник; X и Y – коэффициенты соответственно радиальной и осевой нагрузок (табл. 22.4); V – коэффициент вращения, $V = 1$ при вращении внутреннего кольца, $V = 1,2$ при вращении наружного кольца; k_b - коэффициент безопасности, учитывающий влияние на долговечность подшипников характера внешних нагрузок (табл. 22.5); k_T – температурный коэффициент (табл. 22.6).

Таблица 22.2 Параметры радиальных однорядных шарикоподшипников по ГОСТ 8338-75

Индекс подшипника	d	D	B	C	C ₀
	мм			кН	
Легкая серия					
204	20	47	14	9,81	6,18
205	25	52	15	10,8	6,95
206	30	62	16	15,0	10,0
207	35	72	17	19,7	13,6
208	40	80	18	25,1	17,8
209	45	85	19	25,2	17,8
210	50	90	20	27,0	19,0
211	55	100	21	33,0	25,0
212	60	110	22	40,3	30,9
213	65	120	23	44,0	34,0
214	70	125	24	47,9	37,4
215	75	130	25	50,9	41,1
216	80	140	26	57,0	45,4
217	85	150	28	65,4	54,1
218	90	160	30	75,3	61,7
219	95	170	32	85,3	70,9
220	100	180	34	95,8	80,6
221	105	190	36	104,0	91,0
222	110	200	38	113,0	102,0
224	120	215	40	122,0	114,0
226	130	230	40	120,0	112,0
228	140	250	42	126,0	122,0
230	150	m	45	149,0	153,0
232	160	290	48	158,0	168,0
234	170	310	52	189,0	213,0
236	180	320	52	178,0	200,0
238	190	340	55	200,0	233,0
244	230	400	65	220,0	272,0
Средняя серия					
300	10	35	11	8,06	3,75
301	12	37	12	9,75	4,65
302	15	42	13	11,4	5,4
303	17	47	14	13,5	6,65
304	20	52	15	15,9	7,8
305	25	62	17	17,2	11,4
306	30	72	19	21,6	14,8
307	35	80	21	25,7	17,6

Индекс подшипника	d	D	B	C	C ₀
	мм			кН	
Средняя серия					
308	40	90	23	31,3	22,3
309	45	100	25	37,1	26,2
310	50	110	27	47,6	35,6
311	55	120	29	54,9	41,8
312	60	130	31	62,9	48,4
313	65	140	33	71,3	55,6
314	70	150	35	80,1	63,3
315	75	160	37	87,3	71,4
316	80	170	39	94,6	80,0
317	85	180	41	104,0	91,0
318	90	190	43	112,0	101,0
319	95	200	45	120,0	111,0
320	100	215	47	136,0	133,0
321	105	225	49	144,0	145,0
322	110	240	50	161,0	170,0
324	120	260	55	170,0	184,0
326	130	280	58	180,0	198,0
330	150	320	65	217,0	258,0
Тяжелая серия					
403	17	62	17	22,9	11,8
405	25	80	21	28,6	20,4
406	30	90	23	36,4	26,6
407	35	100	25	42,7	31,2
408	40	110	27	49,3	36,2
409	45	120	29	59,2	45,5
410	50	130	31	67,1	51,9
411	55	140	33	77,0	62,4
412	60	150	35	83,8	70,0
413	65	160	37	90,6	78,0
414	70	180	42	111,0	105,0
416	80	200	48	125,0	124,0
417	85	210	52	136,0	138,0

Таблица 22.3 Параметры роликоподшипников конических
однорядных по ГОСТ 333-79

Индекс подшипника	d	D	T	C, кН	Y	e	C ₀ , кН
	мм						
Легкая серия $\alpha_k = 12 \div 16^\circ$							
7204	20	47	15,5	18,7	1,67	0,36	13,1
7205	25	52	16,5	23,4	1,67	0,36	17,5
7206	30	62	17,5	29,2	1,65	0,36	21,9
7207	35	72	18,5	34,5	1,62	0,37	25,9
7208	40	80	20,0	41,6	1,56	0,38	32,1
7209	45	85	20,5	41,9	1,45	0,41	32,8
7210	50	90	22,0	51,9	1,60	0,37	39,8
7211	55	100	23,0	56,8	1,46	0,41	45,2
7212	60	110	24,0	70,8	1,71	0,35	57,4
7214	70	125	26,5	94,0	1,62	0,37	80,5
7215	75	130	27,5	97,6	1,55	0,39	84,5
7216	80	140	28,5	106,0	1,43	0,42	95,2
7217	85	150	31,0	109,0	1,38	0,43	91,4
7218	90	160	33,0	141,0	1,56	0,38	125,0
7219	95	170	35,0	145,0	1,48	0,41	131,0
7220	100	180	37,5	162,0	1,49	0,40	146,0
7224	120	215	44,0	252,0	1,56	0,39	237,0
7230	150	270	50,0	330,0	1,62	0,37	300,0
Средняя серия $\alpha_k = 10 \div 14^\circ$							
7304	20	52	16,5	24,5	2,03	0,30	17,4
7305	25	62	18,5	29,0	1,66	0,36	20,5
7306	30	72	21,0	39,2	1,78	0,34	29,3
7307	35	80	23,0	47,2	1,88	0,32	34,6
7308	40	90	25,5	59,8	2,16	0,28	45,1
7309	45	100	27,5	74,6	2,09	0,29	58,2
7310	50	110	29,5	94,7	1,94	0,31	74,4
7311	55	120	32,0	102,0	1,80	0,33	81,5
7312	60	130	34,0	118,0	1,97	0,30	96,3
7313	65	140	38,5	134,0	1,97	0,30	111,0
7314	70	150	38,5	168,0	1,94	0,31	137,0
7315	75	160	40,5	178,0	1,83	0,33	148,0
7317	85	180	45,0	221,0	1,91	0,31	195,0
7318	90	190	47,0	240,0	1,88	0,32	201,0
7320	100	215	52,0	290,0	1,88	0,32	270,0
Средняя широкая серия $\alpha_k = 11 \div 15^\circ$							
7605	25	62	25,5	44,6	2,19	0,27	35,9
7606	30	72	29,0	60,1	1,88	0,32	50,0
7607	35	80	33,0	70,2	2,03	0,30	60,3
7608	40	90	35,5	78,5	2,03	0,30	65,9
7609	45	100	38,5	102,0	2,06	0,30	88,6
7610	50	110	42,5	120,0	2,03	0,30	106,0
7611	55	120	46,0	148,0	1,85	0,32	140,0
7612	60	130	49,0	171,0	1,97	0,30	157,0
7613	65	140	51,5	178,0	1,83	0,33	168,0
7614	70	150	54,5	204,0	1,71	0,35	186,0
7615	75	160	58,5	249,0	1,97	0,30	235,0
7616	80	170	62,0	294,0	1,89	0,32	291,0
7618	90	190	68,0	369,0	1,97	0,30	363,0
7620	100	215	78,0	451,0	1,91	0,31	459,0
7622	110	240	85,0	490,0	1,82	0,33	506,0
7624	120	260	91,0	601,0	1,97	0,31	601,0
7634	170	360	128,0	1080,0	1,88	0,32	1170,0

Таблица 22.4 Параметр e и коэффициенты X , Y для однорядных радиальных шариковых подшипников, а также для однорядных конических роликоподшипников

Шариковые подшипники			Роликоподшипники конические
F_a/C_o	Y^*	e	$e = 1,5 \operatorname{tg} \alpha_k$ (значения см. по табл. 22.3) при $F_a/(VF_r) \leq e$ $X=1$ и $Y=0$; при $F_a/(VF_r) > e$ $X=0,4; Y=0,4 \operatorname{ctg} \alpha_k$.
0,014	2,30	0,19	
0,028	1,99	0,22	
0,056	1,71	0,26	
0,084	1,55	0,28	
0,110	1,45	0,30	
0,170	1,31	0,34	
0,280	1,15	0,38	
0,420	1,04	0,42	
0,560	1,00	0,44	
при $F_a/(VF_r) \leq e$ $X=1,0$ и $Y=0$; при $F_a/(VF_r) > e$ $X=0,56$, Y^*			

Таблица 22.5 Значения коэффициентов безопасности

k_b	Характер нагрузки	Примеры
1	Спокойная (без толчков)	Ролики ленточных транспортёров
1÷1,2	Лёгкие толчки, кратковременные перегрузки до 125%	Вентиляторы, блоки, высокоточные передачи
1,3÷1,5	Умеренные толчки и вибрации; перегрузка до 150%	Редукторы всех конструкций
1,5÷1,8	То же при требованиях повышенной надёжности	Центрифуги, энергетическое оборудование
1,9÷2,5	Значительные толчки и вибрации; перегрузка до 200%	Дробилки для руды и камней, передача 9-й степени точности
2,5÷3,0	Сильные удары и перегрузки до 300%	Рольганги, ножницы, ковочные машины

Таблица 22.6 Значения температурного коэффициента k_T

$t, ^\circ\text{C}$	≤ 100	125	150	175	200	225	250	300	350
k_T	1,0	1,05	1,1	1,15	1,25	1,35	1,4	1,6	2,0

Выбор и расчет подшипника производится в несколько этапов.

1 этап. Исходя из диаметра вала d , условий эксплуатации, а так же значений действующей на подшипник радиальной F_r и осевой F_a нагрузки (реакции опор вала), частоты вращения n , по каталогу пред-

варительно намечают тип подшипника, и при необходимости уточняют действующие на подшипник силы F_{ri} и F_{ai} .

Для расчёта *радиальных подшипников* необходимые значения радиальной F_{ri} и осевой F_{ai} опорных реакций, действующих в i -ой подшипниковой опоре (рис. 22.9) определяются непосредственно из расчёта вала на статическую прочность (см. расчёт вала, глава 21).

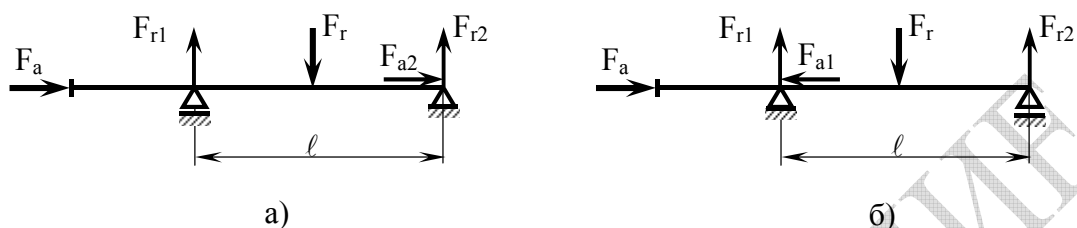


Рисунок 22.9

Несколько иначе определяют реакции F_{ri} и F_{ai} в опорах при расчёте *радиально-упорных подшипников* (шариковых или роликовых): первоначально уточняют расчётную схему вала, для чего находят точку приложения радиальной реакции F_{ri} к каждому подшипнику. Радиальная реакция F_{ri} радиально-упорного подшипника приложена к валу в точке пересечения нормали к середине поверхности контакта тела качения с наружным кольцом подшипника и осевой линии вала, т.е. на расстоянии a от торца кольца подшипника (рис. 22.6, б, и). При восприятии осевой нагрузки одним рядом тел качения: для однорядных радиально-упорных шарикоподшипников

$$a = 0,5(B + 0,5(d+D)\operatorname{tg}\alpha_k); \quad (22.9)$$

для двухрядных радиально-упорных шарикоподшипников

$$a = 0,5(1,5B + 0,5(d+D)\operatorname{tg}\alpha_k); \quad (22.10)$$

для однорядных конических роликоподшипников

$$a = 0,5T + (d+D)e/6; \quad (22.11)$$

для двухрядных роликоподшипников

$$a = 0,75T + (d+D)e/6, \quad (22.12)$$

где d – внутренний диаметр; D – наружный диаметр; B – ширина; T – монтажная высота подшипника; α_k – угол контакта подшипника, зависящий от параметров подшипника (табл. 22.3 и 22.4).

После определения размера a составляют расчётную схему вала (рис. 22.10), находят расстояние l между точками приложения сил, и, так же как для радиального подшипника по правилам теоретической механики определяют радиальные реакции F_{ri} , действующие на каждый подшипник (i -ю опору).

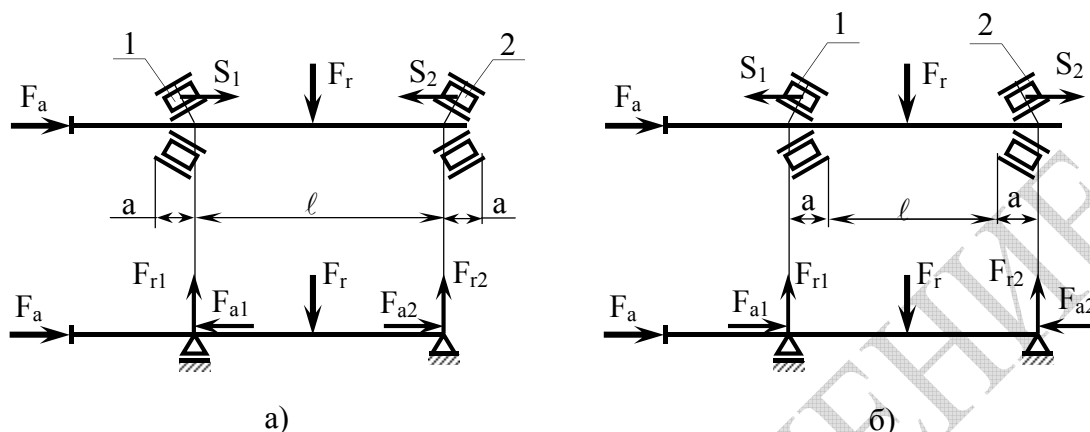


Рисунок 22.10

Затем учитывают дополнительные *осевые составляющие реакции* S_i , которые появляются при действии на i -й радиально-упорный подшипник радиальной нагрузки (реакции) F_{ri} (рис. 22.10). Направление осевых составляющих S_i зависит от способа установки вала (см. раздел 22.5): *враспор* (рис. 22.10, а) или *свободно* (рис. 22.10, б), т.е. с одной фиксирующей опорой (в данной схеме правой).

Величина осевой составляющей S_i от действия радиальной нагрузки F_{ri} (рис. 22.10) для радиальных и радиально-упорных шарикоподшипников вычисляется по формуле

$$S_i = e F_{ri}; \quad (22.13)$$

для конических роликоподшипников

$$S_i = 0,83 e F_{ri}, \quad (22.14)$$

где e — коэффициент осевого нагружения, зависящий от угла контакта α подшипника (приводится в стандартах на подшипники).

Найденные составляющие S_i учитывают при определении результирующей осевой нагрузки F_{ai} на каждый радиально-упорный подшипник (рис. 22.10).

При отсутствии осевых смещений и предварительного натяга осевая нагрузка на каждый из двух подшипников (1-й и 2-й) вала (рис. 22.10) может быть определена по формулам в таблице 22.6

Таблица 22.7 Формулы для определения осевых нагрузок

Условия нагружения	Осевые нагрузки
$S_1 \geq S_2; F_a \geq 0$	$F_{a1} = S_1$
$S_1 \leq S_2; F_a \geq S_2 - S_1$	$F_{a2} = S_1 + F_a$
$S_1 \leq S_2; F_a \leq S_2 - S_1$	$F_{a1} = S_2 - F_a; F_{a2} = S_2$

2 этап. В соответствии с формулой (22.8) вычисляют эквивалентную динамическую нагрузку P .

3 этап. По эквивалентной динамической нагрузке P и требуемой долговечности $(L_h)_{тр}$ с помощью формулы (22.7) вычисляют требуемую динамическую грузоподъёмность $C_{тр}$.

4 этап. По диаметру d и динамической грузоподъёмности C по каталогу ($C > C_{тр}$) выбирают соответствующий подшипник.

Если тип подшипника определен заранее, из конструктивных соображений, то с учетом (22.7) по (22.8) проверяют его ресурс.

Невращающиеся или медленно вращающиеся ($n < 1 \text{ мин}^{-1}$) подшипники качения рассчитываются на статическую грузоподъёмность C_0 , по которой подбирают соответствующий подшипник. При действии на подшипник радиальной F_r и осевой нагрузок F_a эквивалентную статическую нагрузку P_0 для шариковых радиальных, шариковых и роликовых радиально-упорных подшипников принимают по наибольшему значению из двух выражений

$$P = X_0 F_r + Y_0 F_a,$$

$$P = F_r,$$

где X_0 и Y_0 – коэффициенты радиальной и осевой статических нагрузок (ГОСТ 18854-82).

22.5. Подшипниковые узлы. Уплотнения

Подшипники на валах и в корпусах в зависимости от типа подшипников и особенностей конструкции передачи могут устанавливаться с одной *фиксирующей опорой* (левая опора на рисунке 22.11, а) и одной *плавающей опорой* (правая опора на рис. 22.11, а). Такой способ применяют для закрепления относительно длинных валов ($l/d > 8$).

Для установки коротких валов используется наиболее простая и распространённая в механических передачах установка подшипников *враспор* (рис. 22.11, б), причём для компенсации температурных деформаций (перепад температур вала и корпуса не должен превышать 20°) между крышкой узла и одним из наружных колец оставляется зазор $0,1-0,3 \text{ мм}$.

Короткие валы могут устанавливаться *врастяжку* (рис. 22.11, в). Неудобство данной схемы – трудность регулирования подшипников.

К элементам опор относятся не только подшипники, но ряд других деталей, таких как подшипниковые крышки: фланцевые (рис. 22.11, а), или закладные (рис. 22.11, б, в); пружинные кольца (рис. 22.11, а); круглые шлицевые гайки, стопорные многолапчатые шайбы (рис. 22.11, в); прессмаслёнки (рис.22.1); уплотнения валов (войлочные сальники, резиновые манжеты и т.д.

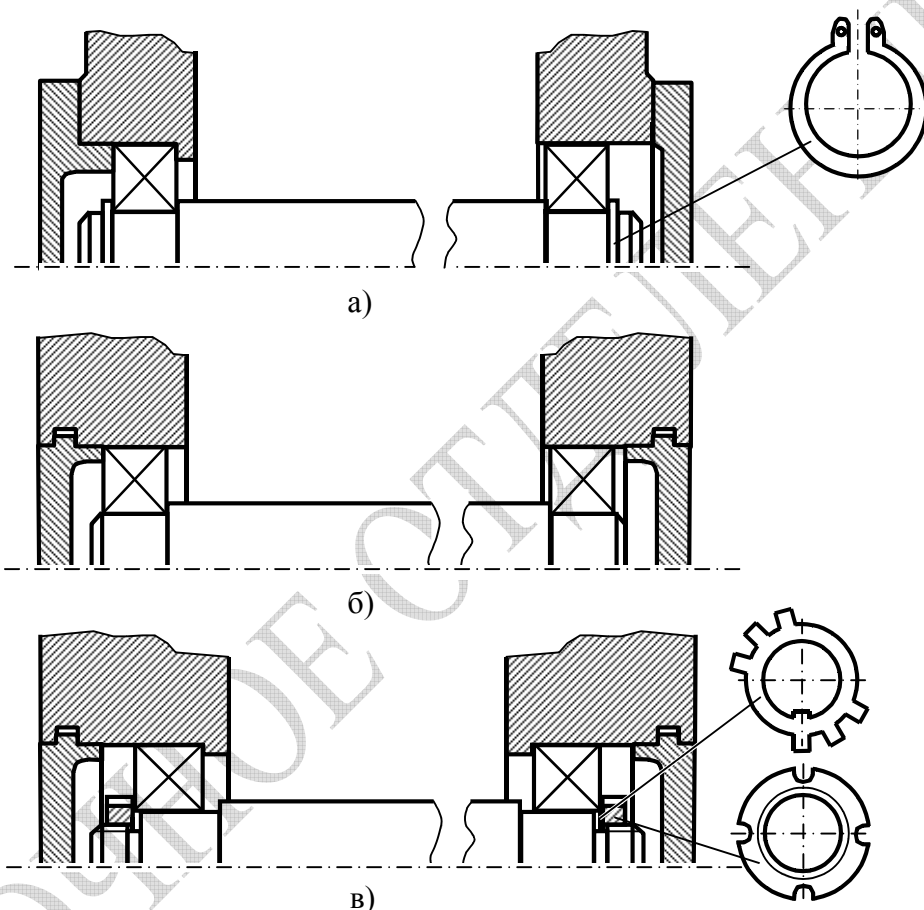


Рисунок 22.11

Уплотнительные устройства предотвращают вытекание смазки, защищают подшипники от попадания пыли, грязи, влаги. По принципу действия уплотнительные устройства подразделяются на контактные, щелевые, лабиринтные, центробежные и комбинированные.

Контактные уплотнения стандартизованы. Уплотнение войлочным кольцом прямоугольного сечения, помещаемым в канавку трапецеидальной формы (рис. 22.12, а) применяется в сочетании с пластичным смазочным материалом при температурах до 90°, без избыточного давления и при окружной скорости до 5 м/с.

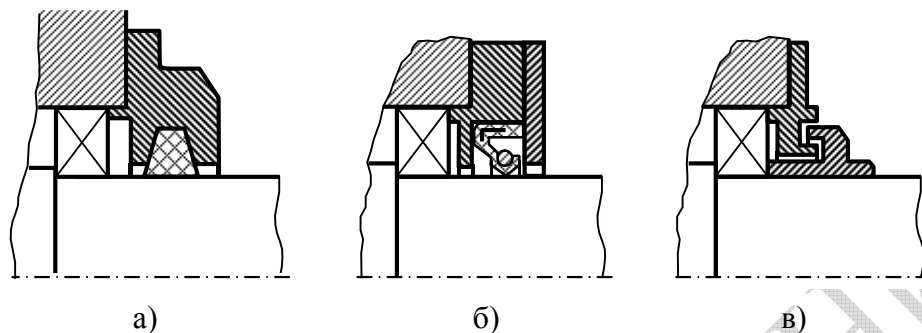


Рисунок 22.12

Контактные уплотнения с применением армированных резиновых манжет с поджимной пружиной (рис. 22.12, б) способны работать при любом смазочном материале, допускают скорость до 20 м/с.

Бесконтактное лабиринтное уплотнение (рис. 22.12, в) может работать при любой скорости вращения, пригодно для любого смазочного материала. Зазор в лабиринте заполняется пластичным смазочным материалом.



Рисунок 22.13

Установка подшипника на вал выполняется по посадкам с натягом (g6, k6, js6, m6, n6, k4 и др.), а в корпус механизма по посадкам с зазором или по переходным посадкам (H7, K7, J7, Js6, K6 и др.).

22.6. Контрольные вопросы

1. Какие функции выполняют опоры? По каким признакам классифицируются опоры?
2. Каковы достоинства и недостатки подшипников скольжения? Области применения подшипников скольжения.
3. Каковы основные конструктивные элементы подшипников скольжения?
4. Какие материалы применяют для изготовления подшипников скольжения? Что означает термин «пара трения»?
5. Какие режимы трения могут быть в подшипниках скольжения?
6. Чему равен коэффициент трения скольжения, и какие значения он принимает при различных режимах трения?
7. Какие критерии работоспособности являются основными для подшипника скольжения?
8. На учете, какого параметра основано получение упрощённых расчетных зависимостей для несущей способности подшипника скольжения?
9. По каким условиям выполняют упрощённую проверку несущей способности подшипника скольжения полужидкостного трения?
10. Каковы основные элементы подшипника качения? Каковы область применения, а так же основные достоинства и недостатки подшипников качения?
11. Как классифицируются подшипники качения?
12. Каких классов точности бывают подшипники качения? Как оценивается быстроходность подшипников качения? Из каких материалов изготавливают подшипники качения?
13. В чём особенности кинематики подшипника качения?
14. Какие напряжения испытывают элементы подшипников качения? Чем вызываются эти напряжения?
15. Приведите формулу для расчёта долговечности подшипника качения. Назовите и дайте определения параметрам, входящим в данную формулу.
16. Приведите формулу для эквивалентной нагрузки.
17. Каков порядок выбора и расчёта подшипника качения?
18. Какие схемы установки валов в подшипниковых опорах существуют?
19. Каково назначение, основные типы и элементы уплотнений подшипниковых узлов?

Глава 23. Муфты

23.1. Общие сведения

Большинство машин компонуют из отдельных агрегатов с входными и выходными валами. Такими агрегатами могут являться, например, электродвигатель (Эд), механическая передача (МП) и основной рабочий орган (РО) машины (рис. 23.1). Кинематическая и силовая связь между отдельными агрегатами машины осуществляется с помощью муфт. Длинные валы технических устройств по условиям технологии изготовления и сборки также приходится делать составными, соединяя их между собой с помощью муфт.

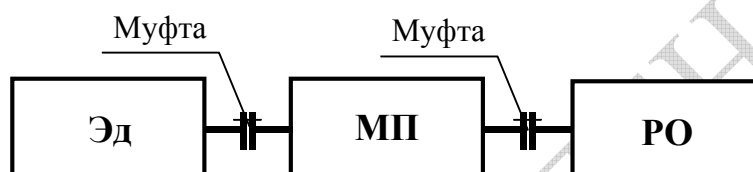


Рисунок 23.1

Таким образом, *муфтами называют устройства, предназначенные для соединения валов между собой с целью передачи вращательного движения и крутящего момента*. Муфты помимо основных могут выполнять и ряд дополнительных функций, например, компенсировать несоосность валов, амортизировать удары и толчки, сцеплять или расцеплять валы при ручном управлении или автоматически в процессе работы при изменении параметров движения и т.д.

Таблица 23.1 Виды несоосности валов

Возможные смещения валов	Схемы взаимного расположения валов
Строго соосные валы	
Валы с продольным смещением Δ	
Валы с радиальным смещением осей δ	
Валы с угловым смещением осей α	
Валы комбинированным смещением	

Из-за трудности обеспечения точности изготовления, сборки или конструктивных особенностей машинного агрегата соединяемые валы могут иметь различные виды несоосности (табл. 23.1). Из-за этого от муфты на валы передается так называемая консольная радиальная нагрузка:

- на тихоходный вал редуктора $F_k = 250T_T$, Н (здесь T_T момент на тихоходном валу);
- на быстроходный вал редуктора $F_k \approx 80T_6$, Н

(здесь T_6 момент на быстроходном валу).

Обычно муфта состоит из двух частей – *полумуфт*. По виду физического взаимодействия, возникающего между полумуфтами различают *механические, гидродинамические и электромагнитные* муфты. Поскольку в химическом машиностроении используется большое количество механических муфт, то ниже рассматриваются только некоторые типы механические муфт.

23.2. Классификация механических муфт

По характеру соединения валов муфты подразделяются на две группы и несколько подгрупп:

1) *нерасцепляемые (постоянные)* – ведущая и ведомая полумуфты соединены между собой постоянно, разъединяются только после разборки. К этой группе относятся:

- *глухие муфты* – предназначены для соединения строго соосных валов (т.е. смещение осей не должно превышать $2\div 5$ мкм); к данной подгруппе относятся втулочные (рис. 23.2, а, б), фланцевые (рис. 23.2, в), продольно-разъёмные (рис. 23.2, г), продольно-свёртные и др. муфты;

- *жесткие компенсирующие муфты* – предназначены для соединения валов с различными видами несоосности (зубчатые (рис. 23.2, д), шарнирные (рис. 23.2, е), крестово-кулисные и др.)

- *упругие компенсирующие* – предназначены для соединения валов с различными видами несоосности и для амортизации динамических нагрузок (упругие втулочно-пальцевые (рис. 23.2, ж), с упругой торообразной оболочкой и др.);

2) *сцепные* – ведущая и ведомая полумуфты сцепляются и расцепляются как при остановке, так и во время работы (на ходу). К этой группе относятся:

- *управляемые* – сцепление и расцепление полумуфт производится оператором (фрикционные (рис. 23.2, з), кулачковые и др.);

- *самоуправляющиеся* – сцепление и расцепление полумуфт производится автоматически при изменении заданного режима работы муфты (направление и скорость вращения, величина крутящего момента и т.п.); к данному типу муфт относятся (*центробежные* (рис. 23.2, и), *предохранительные* (рис. 23.2, б), *обгонные* и др.).

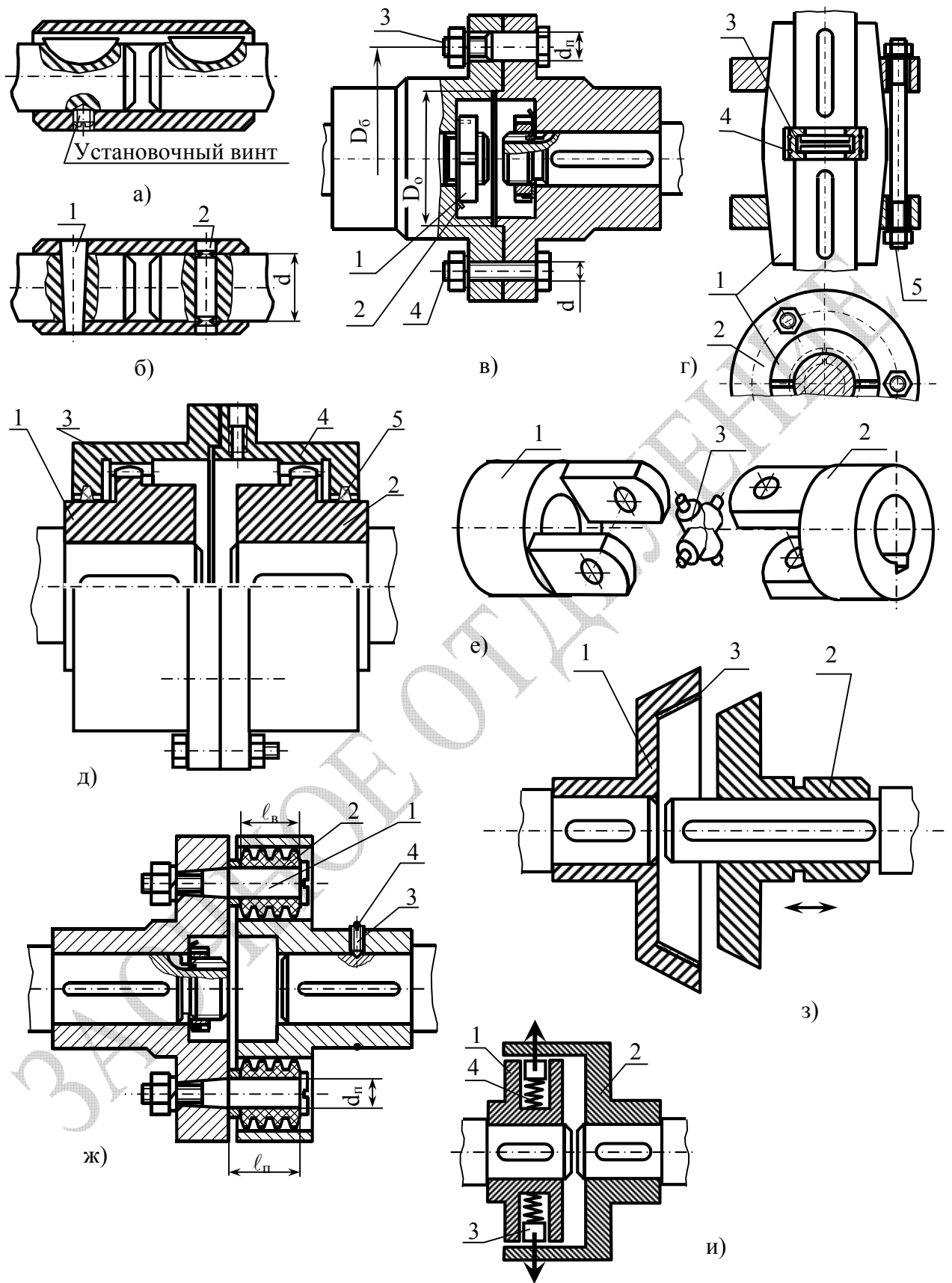


Рисунок 23.2

23.3. Выбор и расчёт муфт

Широко применяемые муфты нормализованы. Основными характеристиками каждой муфты являются *диаметры валов*, для соединения которых предназначена муфта и *величина допускаемого вращающего момента* [Т]. Эти параметры представлены в стандартах и в справочной литературе.

Муфты подбираются по назначению, условиям монтажа (габаритам, удобству сборки и т.д.), диаметру вала и расчетному крутящему моменту T_p . Величину *расчетного крутящего момента* в наиболее тяжелых условиях нагружения муфты определяют по формуле

$$T_p = kT, \quad (23.1)$$

где T – крутящий момент, передаваемый муфтой при установившемся режиме работы (номинальный момент); k – коэффициент динамичности или режима работы, учитывающий дополнительные динамические нагрузки на муфту (таблица 23.2).

Таблица 23.2 Значения коэффициента k

Тип машины или технологического агрегата	k
Аппараты с мешалкой	2,0 ÷ 2,7
Насосы центробежные	1,5 ÷ 2,0
Вентиляторы центробежные и воздуходувки	1,25 ÷ 1,5
Насосы и компрессоры поршневые	2,0 ÷ 3,0
Конвейеры ленточные	1,25 ÷ 1,5
Вращающиеся барабанные печи и сушилки	1,3 ÷ 1,6

При выборе муфты должно соблюдаться условие

$$T_p \leq [T].$$

Для некоторых элементов муфт выполняют проверочные расчеты на прочность.

Втулочные муфты (рис. 23.2 а, б) имеют самые малые габариты, просты по конструкции – передача момента осуществляется при помощи шпонок, например, сегментных (рис. 23.2, а) или при помощи конических 1 или цилиндрических 2 штифтов (рис. 23.2, б). Цилиндрические штифты со специально подобранными сечениями малых размеров могут выполнять функцию предохранительного элемента, разрушающегося при превышении определённой нагрузки – в этом случае муфта будет являться предохранительной. Шпонки и штифты рассчитываются на срез и смятие.

Фланцевая муфта (рис. 23.2, в) может комплектоваться болтами устанавливаемыми с зазором 4 и без зазора 3. Круглая шлицевая гай-

ка 1 и стопорная шайба 2 предотвращают осевые смещения вала относительно муфты. Точность взаимного расположения полумуфт обеспечивается центрирующим выступом диаметром D_o . При передаче фланцевой муфтой крутящего момента T_p болты, установленные без зазора испытывают поперечную силу F_o и рассчитываются на срез

$$F_o = \frac{2T_p}{D_o z_1}, \quad (23.2)$$

$$\tau_{ср} = \frac{4F_o}{\pi d_n^2} \leq [\tau], \quad (23.2)$$

где z_1 – число болтов, установленных без зазора; d_n – диаметр ненарезанной части болта.

Болты фланцевой муфты, установленные с зазором, должны быть затянуты с таким усилием F_6 , при котором сжатие полумуфт обеспечивает создание между торцевыми поверхностями полумуфт такой силы трения, при которой обеспечивается неподвижность полумуфт друг относительно друга

$$F_6 = \frac{2T_p}{D_o f (z_1 + z_2)}, \quad (23.3)$$

где $f \approx 0,2$ – коэффициент трения; z_2 – число болтов, установленных с зазором.

При этом болты испытывают действие растягивающей силы и момента, скручивающего болты. Таким образом, болты, установленные с зазором, образуют напряженное соединение и рассчитываются по формуле

$$\sigma_{экр} = 1,3 \frac{4F_6}{\pi d_1^2} \leq [\sigma], \quad (23.4)$$

где d_1 – внутренний диаметр резьбы.

В продольно-разъемной муфте (рис. 23.2, г) валы предварительно соединяются двумя вкладышами 3, которые фиксируются пружинными кольцами 4. При окончательной сборке полумуфты 1 стягиваются двумя кольцами 2 при помощи трех шпилек 5.

Зубчатые муфты (рис. 23.2, д) применяются в высоконагруженных приводах для валов от 40 до 560 мм. Они допускают угловое смещение осей до $1,5^\circ$ и определенное радиальное смещение. Муфта состоит из втулок 1 и 2 с внешними зубьями и двух обойм 3 и 4 с внутренними зубьями. Обоймы жестко соединены болтами. В обоймах имеются каналы для подачи высоковязкой смазки, для удержания ко-

торой и для герметизации внутренней полости муфты предусматриваются уплотнительные кольца 5.

Шарнирная муфта (рис. 23.2, е) допускают работу при наибольших угловых смещениях соединяемых валов – до 45°. Шарнирная муфта (кардан) состоит из двух полумуфт 1, 2 и промежуточного звена – крестовины 3.

Упругие втулочно-пальцевые муфты (рис. 23.2, ж) применяют для соединения валов диаметрами от 9 до 160 мм при вращающих моментах 6,3 – 16000 Нм. Момент между полумуфтами передается при помощи стальных пальцев снабженных гофрированными резиновыми втулками. Стальные пальцы проверяются на изгиб, а резиновые втулки на смятие

$$\sigma_{и} = \frac{M_{и}}{W} = \frac{(2T/D_{о}z)(\ell_{п} / 2)}{0,1d_{п}^3} \leq [\sigma], \quad (23.5)$$

$$\sigma_{см} = \frac{F_{см}}{A_{см}} = \frac{2T_{р}}{D_{о}zd_{п}\ell_{в}} \leq [\sigma]_{см}, \quad (23.6)$$

где $d_{п}$ – диаметр стального пальца; $\ell_{п}$, $\ell_{в}$ – соответственно рабочая длина стального пальца и резиновой втулки.

Фрикционная коническая муфта (рис. 23.2, з) передает момент между полумуфтами 1 и 2 за счет фрикционной накладки 3, после перемещения прижатия подвижной полумуфты 2 к полумуфте 1.

Самоуправляемая центробежная муфта прямого действия (рис. и) используется для автоматического сцепления полумуфт 1 и 2 при помощи колодок 3. При определенной скорости вращения полумуфты 1, центробежные силы, действующие на колодки 3, преодолевают силы упругости пружины 4. Колодки прижимаются к полумуфте 2, и тем самым передают вращение с одной полумуфты на другую.

23.4. Контрольные вопросы

1. Что называется муфтой? Для чего предназначены муфты? Какие функции они могут выполнять?
2. Какие могут быть виды несоосностей валов?
3. Приведите классификацию муфт.
4. Приведите примеры глухих муфт, жёстких компенсирующих, упругих компенсирующих. Для чего предназначены данные муфты?
5. Каков порядок выбора муфт?
6. Поясните особенности расчёта элементов фланцевых и упругих втулочно-пальцевых муфт.

Глава 24. Соединение деталей машин

24.1. Основные типы неразъемных и разъемных соединений

Наиболее распространенные соединения деталей машин разделяют на две основные группы: неразъемные и разъемные (см. таблицу 24.1).

Неразъемные соединения – соединения, разборка, которых возможна лишь в результате разрушения или повреждения конструктивных элементов детали. Неразъемные соединения часто выполняют функции цельноизготовленной детали, если ее получение технологически затруднительно или неэкономично. Неразъемные соединения компактнее разъемных, однако, затруднен контроль качества этих соединений.

Таблица 24.1 Классификация основных типов соединений

Типы соединений	
Неразъемные	Разъемные
- сварные; - пайкой; - адгезивами; - заформовкой; - склепыванием; - вальцеванием; - загибкой; - запрессовкой	- резьбовые; - шпоночные; - шлицевые; - штифтовые; - фланцевые; - ниппельные; - байонетные; - клеммовые - профильные

Разъемные соединения – соединения, которые позволяют осуществлять многократную сборку и разборку конструкции при сохранении формы и размеров деталей.

Применение в проектируемом оборудовании того или иного типа соединения определяется особенностями функционирования и изготовления конструкции или ее узлов, а также возможностями производства, экономическими показателями и пр. Основными критериями работоспособности, которым должны отвечать соединения

– *прочность, жесткость, виброустойчивость, плотность* (т.е. способность защищать рабочую поверхность изделия от проникновения твердых посторонних частиц), *герметичность* (т.е. способность препятствовать прохождению жидкости или газа через стык соединения).

В данной главе приведены общие сведения о конструкциях, области применения неразъемных и разъемных соединений, а также методики прочностного расчёта основных видов соединений.

24.2. Сварные соединения. Виды сварки.

Классификация сварных соединений и сварных швов

Сварные соединения – наиболее распространенный вид неразъемных соединений. *Сварка* – технологический процесс, основанный на образовании межатомных связей между материалами соединяемых деталей. Сварка может производиться, во-первых, за счет сильного

местного нагрева деталей до расплавленного состояния и последующего остывания (*сварка плавлением*), и, во-вторых, при совместном пластическом деформировании нагретых или холодных стыков деталей (*сварка давлением*). Затвердевший после сварки материал, соединяющий сваренные детали, образует *сварной шов* или *сварную точку*.

Сварка плавлением. К сварке плавлением относятся следующие виды: дуговая сварка, газовая, плазменная, электрошлаковая, электронно- и ионнолучевая и др.

Дуговая сварка является наиболее распространенной; в качестве источника тепла используется электрическая дуга. Дуговая сварка может быть осуществлена плавящимся и неплавящимся (угольным, графитовым или вольфрамовым) электродами. Она может выполняться вручную, автоматически или полуавтоматически (с механизированной подачей только электродной проволоки). Для защиты зоны соединения от воздуха применяют сварку под флюсом (т.е. применяют химикаты, например буру, борную кислоту, хлориды и фториды, в которых растворяются оксиды, образующиеся на свариваемых поверхностях), в среде инертных газов (аргона или гелия), в углекислом газе и в вакууме.

Электрошлаковая сварка применяется для соединений массивных деталей (элементов корпусов толстостенных аппаратов, станин) толщиной до 1000 мм и выше. Теплота выделяется при прохождении электрического тока через расплавленный шлак.

Газовая сварка происходит при оплавлении материала деталей и прутка присадочного металла высокотемпературным газовым пламенем при сгорании ацетилена в кислороде. Она применяется для сварки деталей малых толщин – при толщине деталей более 8 мм газовая сварка становится не экономичной. Горячими газами, например, воздухом сваривают пластмассовые элементы оборудования.

Плазменная сварка – осуществляется за счет энергии плазмы. Это один из самых высокопроизводительных и экономичных способов сварки, широко применяющийся для высокоточной сварки и резки массивных деталей.

Электронно-лучевая сварка основана на превращении кинетической энергии движущихся в вакууме (остаточное давление порядка $10 - 0,1$ мПа) электронов в тепло при бомбардировке ими поверхности металла. Данный вид сварки обеспечивает высокую точность, а также значительную глубину проплавления по отношению к ширине шва (20:1 и более), применяется при соединении деталей очень малых и очень больших толщин из тугоплавких материалов, допускает сварку в труднодоступных местах, например, через щели. При помощи *лазерной сварки* возможно соединять керамические, а так же разнородные материалы.

Сварка давлением. *Сварка давлением* – основана на сближении соединяемых поверхностей на межатомные расстояния в результате пластической деформации материалов, создаваемой сжимающей силой. Наиболее распространены такие типы сварки давлением, как контактная сварка и сварка трением. Реже в машиностроении используется ультразвуковая сварка, сварка взрывом, диффузионная сварка, холодная, магнитноимпульсная и т.д.

Контактная сварка – осуществляется при сжатии деталей электродами с одновременным включением тока. Поскольку электрическое сопротивление стыка «электрод-деталь» примерно в два раза меньше сопротивления стыка «деталь-деталь», то происходит нагрев и сваривание только сжатых деталей. Различают точечную, шовную и стыковую контактную сварку. При *точечной сварке* тонкостенные детали соединяют внахлестку. Так как высокие температуры действуют на небольших участках, коробление соединяемых деталей отсутствует. *Шовную сварку* осуществляют вращающимися роликовыми электродами, при этом получается непрерывный сварной шов. При *стыковой сварке* соединяемые детали сжимают, и при прохождении тока в зоне контакта выделяется большое количество теплоты. Этим способом соединяют стержневые детали различных сечений (круг, квадрат, уголок и пр.), толстостенные трубы. Недостатком стыковой сварки является изменение длины детали за счет брызг и выдавливания расплавленного металла в виде грата.

Сварка трением осуществляется за счет теплоты, выделяющейся в месте контакта прижатых друг к другу и вращающихся друг относительно друга деталей. Эта разновидность сварки применяется для соединения частей составных валов, в том числе деталей из разнородных металлов и сплавов.

Классификация сварных швов и соединений

В зависимости от взаимного расположения деталей различают следующие виды *сварных соединений*: *стыковые* (рис. 24.1, а), *нахлесточные* (рис. 24.1, б), *угловые* (рис. 24.1, в), *тавровые* (рис. 24.1 г). Швы могут быть односторонними (рис. 24.1, а, в) и двусторонними (рис. 24.1, б, г). Сварные швы нахлесточных, угловых и тавровых соединений называют *угловыми*, а стыковых соединений – *стыковыми*. *Угловые и стыковые швы рассчитываются на прочность по различным методикам*. Сварные швы и соединения стандартизованы.

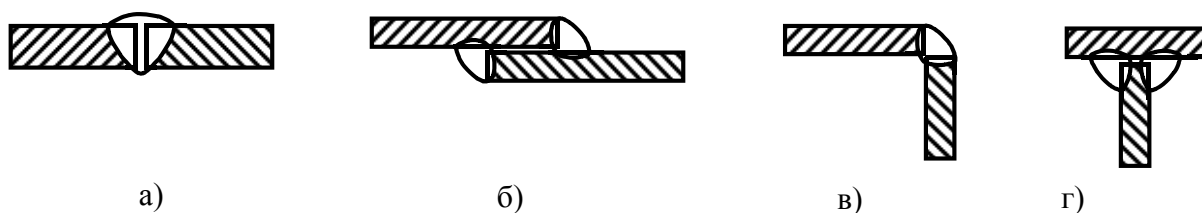


Рисунок 24.1

В зависимости от расположения шва относительно направления действующей нагрузки швы делят на фланговые (рис. 24.2, а), лобовые (рис. 24.2, б) и косые (рис. 24.2, в). Сочетание фланговых, лобового и косого швов в одном соединении называют комбинированным швом.

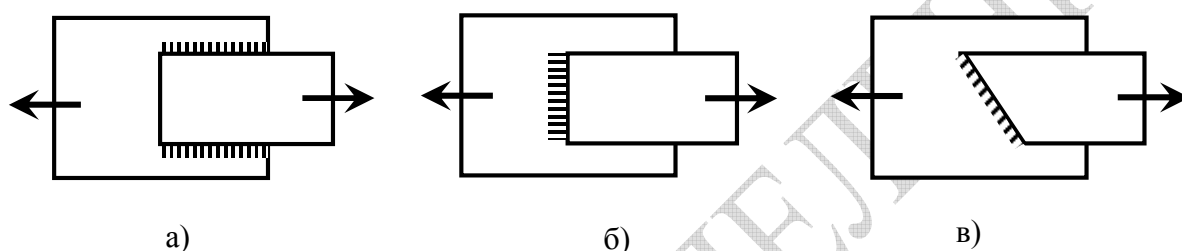


Рисунок 24.2

На чертежах стандартный сварной шов обозначают несимметричной стрелкой, на полке-выноске которой по определённой структуре (рис. 24.3) указывают параметры соединения и шва:

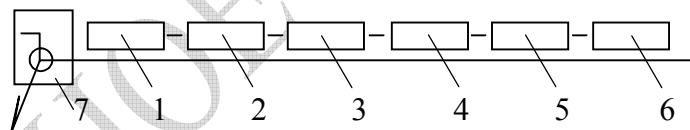



Рисунок 24.3

поз. 1 – обозначение стандарта (ГОСТ 5264-80 – ручная дуговая сварка; ГОСТ 8713-79 – сварка под флюсом; ГОСТ 1153-75 – автоматическая и полуавтоматическая сварка под флюсом; ГОСТ 14771 – 76 дуговая сварка в защитном газе и др.);




поз. 2 – буквенно-цифровое обозначение вида сварного соединения, где буква обозначает – вид соединения, а цифра – конструктивные особенности шва, например, односторонний, двухсторонний; форма обработки кромок деталей и т.д. (С1-С61 стыковые; Н1-Н6 – нахлесточные; У1-У24 – угловые; Т1-Т10 – тавровые);



поз. 3 – условное обозначение способа сварки по стандарту (Р – ручная; А – автоматическая; П – полуавтоматическая; И – в инертном газе; Н – неплавящимся электродом и др.); данное обозначение может быть опущено, если по данному стандарту швы выполняются только одним способом (например, ГОСТ 5264-80) или когда стандарт преду-

смаатривает несколько способов сварки, а конструктор не выделяет конкретного способа;

поз. 4 – знак  и размер катета по стандарту (только для угловых швов);

поз. 5 – для прерывистого шва – длина провариваемого участка и шаг (например, 20 / 80 для цепного шва; 25 Z 100 – для шахматного расположения);

поз. 6 – обозначение вспомогательных знаков:  – усиление снять;  – наплывы и неровности шва обработать с плавным переходом к основному металлу;  – шов по незамкнутой линии; $\sqrt{Ra_{6,3}}$ – шероховатость шва;

поз. 7 – обозначение вспомогательных знаков:  – сварка по замкнутому контуру;  – шов выполнить при монтаже изделия.

24.3. Расчет на прочность сварных соединений

Метод расчета сварных соединений зависит от рода действующей нагрузки, типа соединения, вида шва и способа сварки. *Угловые швы всех типов соединений рассчитываются на срез, а стыковые по тем же самым деформациям, что и соединяемые детали.*

В сварных швах из-за локального нагрева и совместной деформации наплавленного и основного металла действуют *остаточные* (связующие) напряжения и *рабочие*, создаваемые приложенной нагрузкой. В расчетах на прочность учитывают только рабочие напряжения. Влияние способов сварки учитывают при выборе допускаемых напряжений для сварных швов, которые назначают как долю от допускаемых напряжений на растяжение основного металла,

$$[\sigma]' = \varphi [\sigma]; \quad [\tau]' = \varphi [\sigma], \quad (24.1)$$

где $[\sigma]'$ – допускаемое напряжение стыкового сварного шва; $[\tau]'$ – допускаемое напряжение на срез стыкового и углового сварных швов; φ – коэффициент понижения допускаемых напряжений (коэффициент сварного шва).

Таблица 24.2 Ориентировочные значения коэффициента φ для соединений дуговой сваркой

Тип сварного шва	Вид нагружения	Ручная сварка	Автоматическая и полуавтоматическая
Стыковой	Растяжение	0,8	1,0
	Сжатие	0,9	
Стыковой и угловой	Срез	0,6	0,65

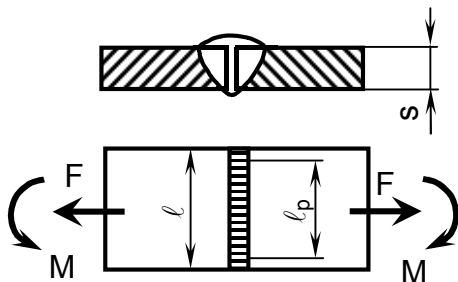


Рисунок 24.4

Проектный расчет стыкового сварного шва толщина, которого равна толщине листов s (рис. 13.4) сводится к определению расчетной длины l_p из условий прочности. Из-за возможного *непровара* шва на краях деталей фактическая длина шва принимается равной

$$l = l_p + (10 \div 15) \text{мм} . \quad (24.2)$$

Для устранения непровара сварку продолжают на 10-30 мм по вспомогательному листу, состыкованному к соединяемым деталям. После окончания сварки вспомогательный лист срезают.

При совместном действии изгибающего момента и растягивающей силы ($M \neq 0, F \neq 0$), (рис. 13.4) условие прочности имеет вид

$$\sigma = \frac{M}{W_z} + \frac{F}{A_p} \leq [\sigma]' \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{6 M}{s l_p^2} + \frac{F}{l_p s} \leq [\sigma]' , \quad (24.3)$$

где A_p – площадь поперечного сечения шва; W_z – осевой момент сопротивления сечения шва.

Опасной точкой является точка, в которой материал шва испытывает наибольшее растяжение.

При растяжении-сжатии ($F \neq 0, M = 0$) и при изгибе ($F = 0, M \neq 0$) условие прочности (24.3) упрощается. Если размеры соединения заданы (l и s), то выполняют *проверочный* расчет, т.е. проверяют выполнение условия прочности (24.3).

Угловые швы рассчитывают на срез, по наименьшей площади сечения, расположенного в плоскости биссектрисы прямого угла поперечного сечения шва. В угловых швах размер катета k , как правило, соответствует толщине более тонкой детали s (рис. 24.5). Расчетная высота угловых швов h зависит от способа сварки, и ориентировочно может приниматься равной

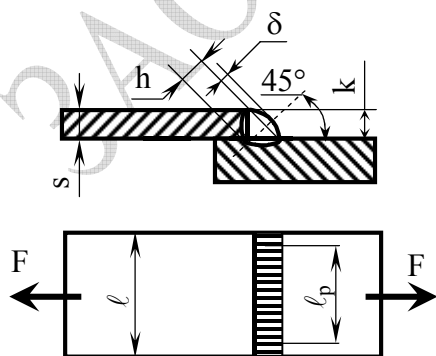


Рисунок 24.5

$$h = 0,7 k . \quad (24.4)$$

Усиление шва, т.е. выпуклая часть размером δ (рис. 24.5), при определении расчетного сечения шва не учитывается.

Для нахлесточных соединений с лобовым (рис. 24.6) или косым швом (рис.

24.2, в) условие прочности имеет вид

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{F}{A_{\text{ср}}} \leq [\tau]' \quad \text{или} \quad \tau_{\text{ср}} = \frac{F}{\ell_p h} \leq [\tau]'. \quad (24.5)$$

Для расчета соединений фланговыми швами (рис. 24.2, а) используется формула (24.5), при этом расчетная длина принимается равной суммарной длине швов. *Максимальная* длина флангового шва из-за неравномерности распределения нагрузки не должна быть больше $60k$. Из-за непровара в начале и в конце шва, *минимальную* длину флангового шва назначают не менее чем 30 мм.

Если соединение угловым швом нагружено изгибающим моментом M в плоскости приварки (рис. 24.6), то расчет шва производят по формуле

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{M}{W_z} \leq [\tau]' \quad \text{или} \quad \tau_{\text{ср}} = \frac{6 M}{h \ell_p^2} \leq [\tau]'. \quad (24.6)$$

Опасная точка находится на растянутом краю шва (рис. 24.6) т.е. сверху.

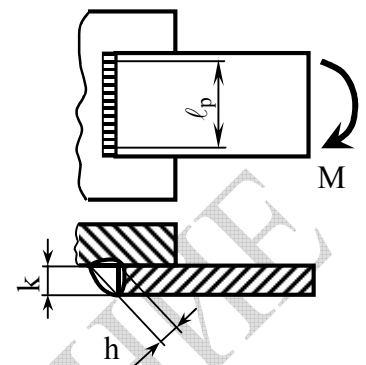


Рисунок 24.6

24.4. Паяные и клеевые соединения

Соединения пайкой – получили широкое распространение в различных отраслях машиностроения и в ряде случаев вытесняют сварку. Пайка может применяться в сочетании с другими видами соединений, как вспомогательное, например, сочетаться с вальцеванием и загибкой для обеспечения герметичности основного соединения.

Важным преимуществом пайки является сохранение формы и размеров деталей, т.к. их кромки не расплавляются при соединении. Пайка позволяет соединять детали из разнородных материалов, а также детали из тугоплавких материалов (молибден, вольфрам и др.), и материалов, плохо поддающихся сварке. Вместе с тем, пайка, как вид соединения менее универсальна, чем сварка.

Существенным недостатком пайки является низкая прочность на сдвиг и очень низкая прочность на отрыв.

Пайка – процесс соединения деталей в нагретом состоянии при помощи связующего материала *припоя*, температура плавления которого ниже температуры плавления спаиваемых элементов. Расплавленный припой заполняет зазоры между деталями и при остывании в результате кристаллизации образует *паяный шов*. При пайке между

припоем и металлом детали возникает межатомная связь. Переходный слой, связывающий металл детали и припой называют *спаем*. Один спай образуется при *лужении*, т.е. при покрытии поверхности металла тонким слоем расплавленного припоя. В качестве припоев используют чистые металлы и сплавы (всего 26 подгрупп). В зависимости от температуры плавления они подразделяются на три группы: *легкоплавкие* или *мягкие* (до 300 °С), *среднеплавкие* (от 300°С до 1000°С), *тугоплавкие* (свыше 1000°С). Чаще всего в машиностроении применяют оловянно-свинцовые (ПОС), серебряные (ПСр), латунные припои. Для уменьшения вредного влияния окисления поверхностей деталей используют специальные флюсы на основе канифоли, буры, хлористого цинка и др.

Нагрев соединяемых деталей может производиться паяльником, газовой горелкой, индукционным способом, в печах, электронным лучом и т.д.

При проектировании паяного соединения следует предусматривать зазор между деталями порядка 0,01-0,4 мм. Величина зазора зависит от вида припоя. Качество обработки и сборки деталей перед пайкой выше, чем перед сваркой; особое внимание уделяют чистоте соединяемых поверхностей. Типы паяных соединений в основном такие же, как и у сварных соединений (стыковые, нахлесточные, угловые, тавровые) – дополнительно применяются *телескопические* (т.е. «труба в трубе»), *косостыковые* (стыковка по наклонной поверхности), *соприкасающиеся соединения*.

Расчёт на прочность стыковых и нахлесточных паяных соединений аналогичен расчёту сварных соединений.

Условие прочности стыкового соединения нагруженного растягивающими силами F и моментами M (рис. 24.7 , а) имеет вид

$$\sigma = \frac{6 M}{s l^2} + \frac{F}{l s} \leq [\sigma], \quad (24.7)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение, зависящее от материала соединяемых деталей, материала припоя и способа нагрева (табл. 24.3).

Условие прочности нахлесточного соединения (рис. 24.7 , б) при действии растягивающей силы

$$\tau = \frac{F}{l b} \leq [\tau], \quad (24.8)$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение (табл. 13.3).

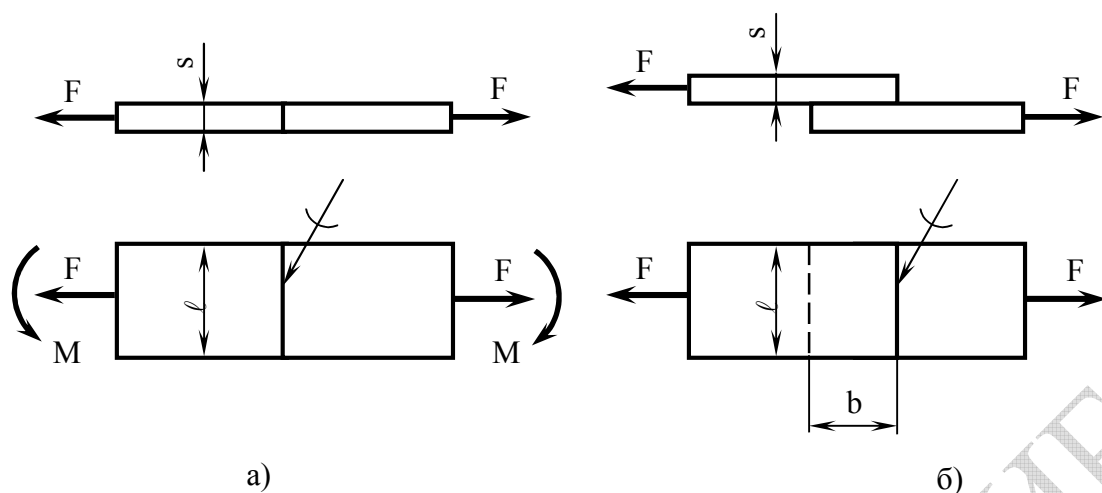


Рисунок 24.7

Таблица 24. 3 Допускаемые напряжения паяных соединений

Материал соединяемых элементов	Припой	Способы нагрева	Допускаемые напряжения для соединений, МПа	
			стыковых [σ]	нахлесточных [τ]
Медь	ПОС 40	Паяльником	60-70	40-50
	ПОС 18		80-90	25-40
	ПСр 45	В печи	300-320	240-300
Сталь низкоуглеродистая	ПОС 40	Паяльником	80	40
	ПОС 18		100	50
	ПСр 45	В печи	105	60

Соединения адгезивами (т.е. клеями) – получили широкое распространение благодаря появлению разнообразных полимерных клеящих составов, позволяющих соединять практически все материалы промышленного назначения в любом сочетании. К соединениям за счет адгезии (от лат. adhaesio – прилипание) относятся соединения *клеями, герметиками, замазками*. Клеи изготавливаются на основе эпоксидных смол (ЭД-5, ЭД-40), полиуретана (ПУ-2), фенолформальдегида (типа БФ) и др.

Клеевые швы не ослабляют детали, не корродируют, обеспечивают герметичность соединения. Основными недостатками клеевых соединений являются старение со временем и невысокая теплостойкость (рабочая температура не выше 300°C). Прочность клеевого соединения, так же как и паянного пропорциональна площади соединения.

Типы клеевых соединений, как и методы их расчёта в основном такие же, как и у паяных соединениях. Допускаемые напряжения клеевого шва зависят от марки клея, видов деформации, и принимают значения, как правило, в пределах от 10 до 40 МПа.

24.5. Соединения заформовкой

Соединения заформовкой – соединение, которое осуществляется погружением детали в жидкий или размягченный материал с последующим его затвердеванием в специальных литейных или пресс-формообразующих материалах, после затвердевания которого образуется неразъемное соединение. Заформовываемые части деталей для надежности соединения должны иметь пазы, канавки (рис. 24.8, а) или отверстия (рис. 24.8, б), в который попадает размягченный материал.

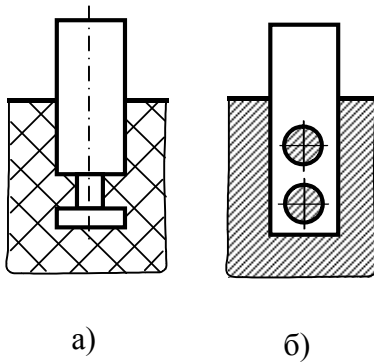


Рисунок 24.8

Поскольку элементы соединения обычно испытывают растяжение, сдвиг и смятие, то прочностные расчёты чаще всего проводят именно по этим деформациям. Прочность соединения заформовкой зависит от физико-механических свойств материала детали и формообразующего материала, геометрической формы и размеров детали. Характер соединения не предполагает высоких требований к точности изготовления детали. Заформовку используют для соединения металлических деталей с пластмассами

(рис. 24.4, а), металлами (рис. 24.4, б), резиной и стеклом, когда элементам конструкции требуется придать специальные свойства, например, при изготовлении комбинированных зубчатых колёс.

24.6. Соединения заклёпками, вальцеванием и загибкой

Заклепочные соединения выполняют при помощи специальных крепежных деталей – заклёпок (рис. 24.9, а, б) или непосредственным расклепыванием цапф деталей (рис. 24.9, в). **Заклепка** представляет собой цилиндрический стержень с двумя головками, одна из которых называемая **закладной**, выполняется заранее, а вторая (**закрывающая**) получается в процессе сборки под ударами инструмента. Форма и размеры заклёпок стандартизированы. Стержень заклёпки может быть сплошным или полым (пустотелая заклёпка - *пистон*).

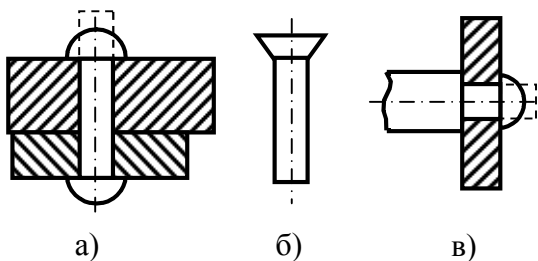


Рисунок 24.9

Форма головки может быть полукруглой (рис. 24.9, а), потайной (рис. 24.9, б), полупотайной, плоской. Заклепка изготавливается из пластичных материалов. Соединение собирается путем установки заклёпки в заранее подготовленное отверстие в деталях и последующей клепки замы-

кающей головки специальным инструментом. Основные недостатки соединений связаны с большой трудоемкостью изготовления. Для повышения технологичности соединения, т.е. простоты и быстроты его выполнения могут использоваться пирозаклепки и заклепки из сплавов с эффектом памяти, пустотелые замыкающие головки которых после кратковременного нагрева пламенем газовой горелки принимают необходимую форму без механического воздействия.

Заклёпочные соединения стабильны по своим прочностным свойствам, качество соединения легко контролируется. Заклёпки применяются для соединения несвариваемых деталей из материалов, в соединениях, в которых недопустим нагрев из-за коробления деталей, или из-за изменения свойств термообработанных деталей. Заклёпки могут выполнять функции механических предохранителей, разрушающихся при превышении определённой нагрузки.

Соединения заклёпками бывают при расположении листов внахлёстку (рис. 24.10, а, б), а также с одной или двумя накладками (рис. 24.10, в).

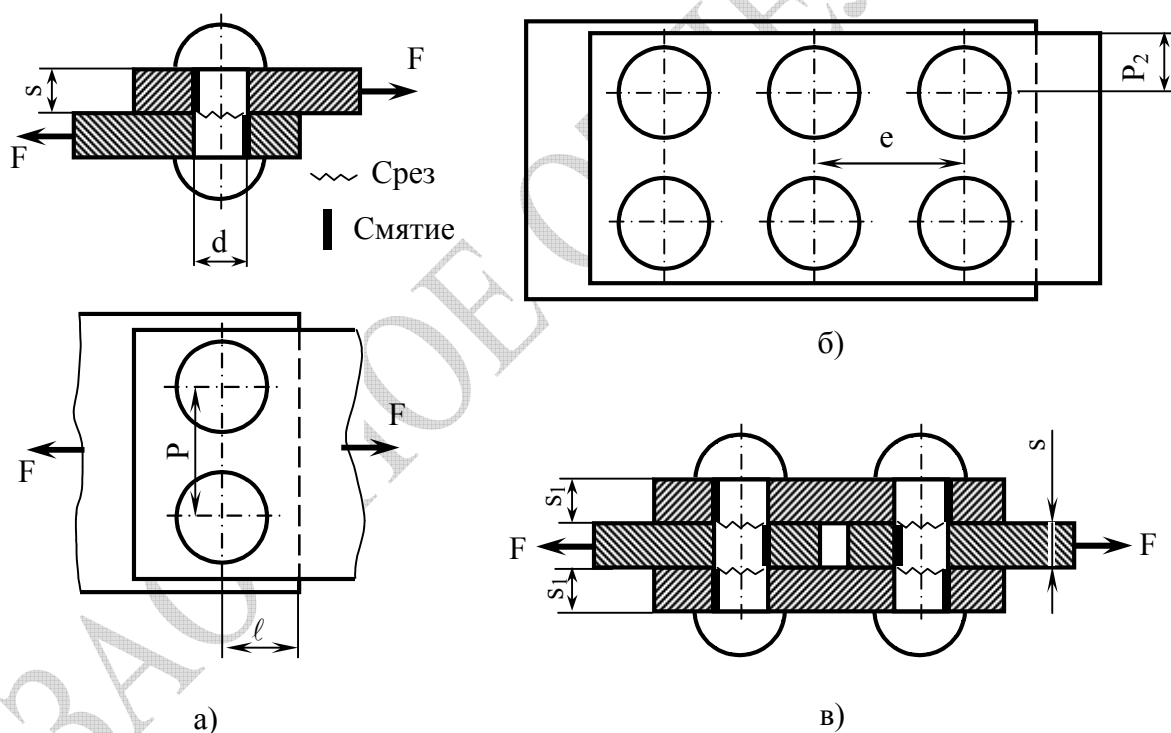


Рисунок 24.10

При действии растягивающих сил заклёпки испытывают срез (сдвиг) и смятие. По числу поверхностей среза соединения бывают одно- (рис. 24.10,а) и двухсрезными (рис. 24.10, в). По числу рядов заклёпок соединения бывают однорядные (рис. 13.10,а) и многорядные (рис. 24.10, б). Двухсрезные соединения с двумя накладками нагружают заклёпки симметрично, не вызывая изгиба листов, как у однорядных нахлесточных соединений.

Диаметр заклёпок d назначают в зависимости от толщины соединяемых листов s : в односрезных соединениях в диапазоне $(1,8 \div 2)s$, в двухсрезных – $(1,2 \div 1,8)s$. Шаг P в однорядном односрезном соединении принимают $3d$, в двухсрезном – $3,5d$, в двухрядных соединениях $(4 \div 5)d$. Расстояние ℓ от оси заклёпки до края листа устанавливают равным $(1,5 \div 2)d$ (рис. 24.10, а, б). Расстояние между рядами двух- и многорядных швов при рядовом расположении рекомендуется принимать $e=4d$, а при шахматном $e=2d$. Толщина накладок – $s_1=(0,75 \div 1)s$.

Условие прочности одной заклёпки на срез имеет вид

$$\tau_{\text{ср}} = F_1 / (Ai) \leq [\tau]_{\text{ср}}, \quad (24.9)$$

где F_1 – сила, воспринимаемая одной заклёпкой; i – число срезов заклёпки; $[\tau]_{\text{ср}}$ – допускаемое касательное напряжение заклёпки на срез ($[\tau]_{\text{ср}} = 140$ МПа для стали Ст0, Ст2 и Ст3).

При известной величине $[\tau]_{\text{ср}}$ из уравнения (24.9) определяют силу F_1 , и общее число заклёпок в нахлесточном соединении $z = F / F_1$. В соединениях с использованием накладок число заклёпок в два раза больше.

Заклёпки проверяют на смятие по условию

$$\sigma_{\text{см}} = F_1 / (sd) \leq [\sigma]_{\text{см}}, \quad (24.10)$$

где $[\sigma]_{\text{см}}$ – допускаемое напряжение смятия для материала заклёпки ($[\sigma]_{\text{см}} \approx 300$ МПа для стали Ст0, Ст2 и Ст3).

Поскольку листы заклёпочного соединения ослабляются отверстиями, их необходимо проверить на прочность на разрыв

$$\sigma_p = F / (s(b - n_1d)) \leq [\sigma]_p, \quad (24.11)$$

где $[\sigma]_p$ – допускаемое напряжение при растяжении ($[\sigma]_p = 160$ МПа для стали Ст3).

Соединения вальцеванием и загибкой осуществляют за счет остаточной деформации тонкого отогнутого края одной из соединяемых деталей. Вальцевание сопровождается вращением инструмента. При завальцовке (рис. 24.11, а) край охватываемой детали по замкнутому контуру загибают внутрь, а при развальцовке (рис. 24.11, б) – наружу. Соединения загибкой получают при отгибе края или лапки деталей, или используют вспомогательные детали стандартные – шплинты (рис. 24.11, в).

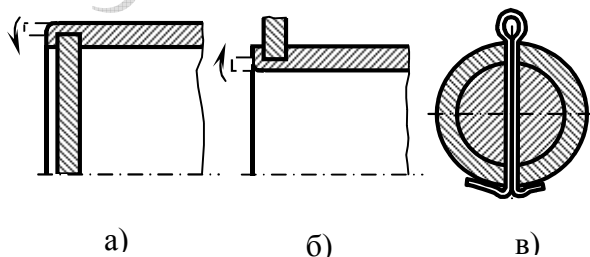


Рисунок 24.11

24.7. Соединения с натягом (запрессовкой)

Соединения запрессовкой – получают при насаживании охватывающей детали (детали с отверстием) на охватываемую деталь (вал), если посадочный размер отверстия гарантировано меньше посадочного размера вала. Такую разность посадочных размеров называют *натягом*. Наиболее распространены детали, в которых натяг осуществляется по цилиндрическим поверхностям.

После сборки вследствие упругих и пластических деформаций на поверхности контакта возникают удельное давление и соответствующие ему силы трения, препятствующие взаимному смещению деталей. Сборку соединений производят механическим способом (на прессе) или «тепловым» способом, нагревая охватывающую деталь (в электропечи) или охлаждая охватываемую деталь (жидким азотом или твердой углекислотой) до температуры, обеспечивающей свободное совмещение деталей. Точность полученной сборочной единицы практически равна точности цельноизготовленной детали.

Соединения с натягом передают рабочие нагрузки – силу F или момент T , за счёт сил трения покоя между деталями сопряжёнными по цилиндрическим поверхностям ($F_{тр} = F/f$ или $F_{тр} = 2T/(fd)$, здесь f – коэффициент трения) (рис. 24.12).

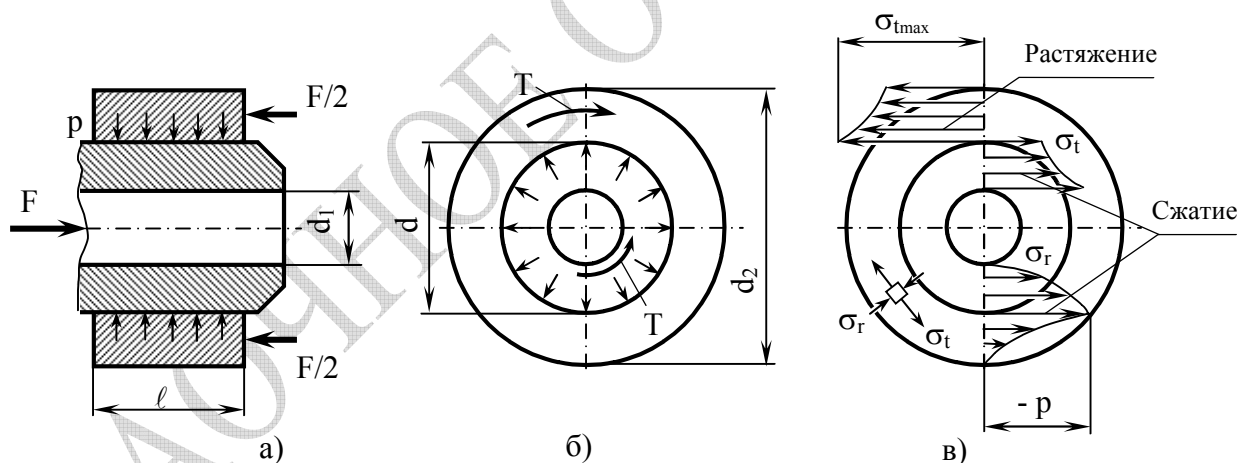


Рисунок 24.12

После сборки соединения на сопрягаемых поверхностях возникают контактные давления p (рис. 24.12), которые условно считаются равномерно распределёнными по контактирующим цилиндрическим поверхностям.

Неподвижность деталей соединения нагруженного осевой силой F обеспечивается при соблюдении условия

$$p \geq F/(\pi d \ell); \quad (24.12)$$

при действии на соединение крутящего момента T ($T=F_t d/2$, здесь F_t – окружная сила) условие неподвижности деталей имеет вид

$$p \geq F_t/(f\pi d \ell) \text{ или } p \geq 2T/(f\pi d^2 \ell); \quad (24.13)$$

при совместном действии осевой силы F и крутящего момента

$$p \geq \frac{\sqrt{F^2 + F_t^2}}{f\pi d \ell} \text{ или } p \geq \frac{\sqrt{F^2 + (2T/d)^2}}{f\pi d \ell}, \quad (24.14)$$

где f – коэффициент трения для деталей из стали и чугуна при сборке запрессовкой $f = 0,08$, при сборке с нагревом и охлаждением $f = 0,12-0,14$, если одна из деталей бронзовая или латунная $f = 0,05$; d – диаметр сопрягаемых цилиндров; ℓ – длина посадочной поверхности.

Полученное значение давления p увеличивается на коэффициент запаса сцепления $K = 1,5-3$, т.е. $p_p = Kp$.

По найденному расчётному давлению p_p определяют расчётный натяг N_p , пользуясь известной из сопротивления материалов формулой Ляме для толстостенных цилиндров (рис. 24.12, а, б),

$$N_p = \frac{p_p d}{C_1/E_1 + C_2/E_2}, \quad (24.15)$$

где $C_1 = (d^2 + d_1^2)/(d^2 - d_1^2) - \nu_1$; $C_2 = (d_2^2 + d^2)/(d_2^2 - d^2) - \nu_2$; E_1, ν_1 и E_2, ν_2 – модули Юнга и коэффициенты Пуассона соответственно для материалов охватываемой и охватывающей деталей ($\nu = 0,3$ для стали, $\nu = 0,25$ для чугуна, $\nu = 0,33$ для бронзы); $d_1 = 0$ для сплошной детали.

Поскольку в результате сборки микронеровности контактных поверхностей сглаживаются и срезаются, расчётный натяг N_p увеличивают на величину равную $u=1,2 (R_{z1} + R_{z2})$, где R_{z1} и R_{z2} – высота микронеровностей сопрягаемых поверхностей.

Если сборка соединения производится при нагревании охватывающей детали и охлаждении охватываемой детали, то необходимая разность температур соединяемых деталей составляет

$$\Delta t = (N_{\max} + S_m)/(\alpha d),$$

где N_{\max} – наибольший натяг выбранной посадки; S_m – зазор, необходимый для сборки соединения (10 мкм при $d=30 - 80$ мм, 15 мкм при $d = 80 - 180$ мм, 20 мкм при $d= 180 - 400$ мм; α – коэффициент линейного расширения ($\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ для стали, $\alpha = 10,5 \cdot 10^{-6}$ для чугуна, $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}$ для оловянистых бронз, $\alpha = 18 \cdot 10^{-6}$ для латуни).

Из курса сопротивления материалов известно, что при подобном сопряжении двух цилиндров материал охватывающей и охватываемой деталей испытывает плоское напряжённое состояние с главными напряжениями равными σ_t и σ_r . Из эпюр нормальных напряжений (рис. 24.12 ,в) следует, что наибольшие напряжения возникают у внутренней поверхности охватывающей детали, поэтому она, как правило, является опасным элементом соединения. Наибольшие тангенциальные напряжения рассчитываются по формуле

$$\sigma_{t\max} = p_p \frac{d_2^2 + d^2}{d_2^2 - d^2} . \quad (24.16)$$

С учётом вида напряжённого состояния материала для выполнения прочностных расчётов определяют эквивалентные напряжения. По третьей теории прочности получим

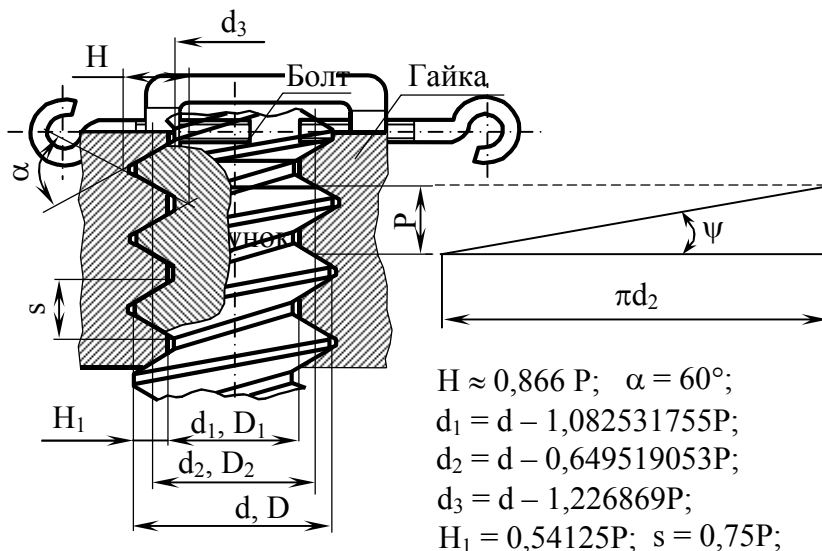
$$\sigma_3^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{t\max} - \sigma_r = \frac{2p_p}{1 - (d/d_2)^2} \leq [\sigma] = \sigma_T / [s], \quad (24.17)$$

где σ_T – предел текучести; $[s]$ – допускаемый коэффициент запаса прочности.

24.8. Общие сведения о резьбовых соединениях

Резьбовые соединения – соединения деталей с помощью резьбы, являются наиболее распространенным видом разъемных соединений. Свыше 60% деталей имеет резьбу. Резьба в виде винтовой канавки определенного профиля и постоянного шага наносится на наружную или внутреннюю (цилиндрическую или коническую) поверхности заготовки. Основными геометрическими параметрами метрической резьбы (рис. 24.13) являются: d – наружный диаметр наружной резьбы (болта); d_1 – внутренний диаметр болта; d_2 – средний диаметр болта; α – угол профиля; P – шаг; ψ – угол подъема винтовой линии; большими буквами D обозначены соответствующие диаметры гайки.

По системе измерений резьбы бывают метрическими и дюймовыми (1 дюйм = 1" = 25,4 мм); *по профилю витка* – треугольными (рис. 24.13), трапецеидальными симметричными, трапецеидальными несимметричными (упорные), прямоугольными и круглыми; *по направлению винтовой линии* – правыми (используется в абсолютном большинстве соединений) и левыми; *по величине шага* – с крупным и мелким шагом; *по количеству заходов* – однозаходными и многозаходными; *по назначению* – крепежными, крепежно-уплотнительными и ходовыми (используются в механизмах,



$$\begin{aligned}
 H &\approx 0,866 P; \quad \alpha = 60^\circ; \\
 d_1 &= d - 1,082531755P; \\
 d_2 &= d - 0,649519053P; \\
 d_3 &= d - 1,226869P; \\
 H_1 &= 0,54125P; \quad s = 0,75P;
 \end{aligned}$$

Рисунок 24.13

см. главу «Передачи винт-гайка»). Неподвижность резьбовых соединений обеспечивается трением в резьбе.

Резьбовые соединения бывают двух типов: соединения с помощью специальных резьбовых крепежных деталей (болтовые соединения рис. 24.14, а, винтовые соединения

рис. 24.14, б, шпилечные соединения рис. 24.14, в) и соединения с непосредственным свинчиванием деталей.

Под гайки, головки болтов и винтов подкладываются шайбы для увеличения опорной поверхности (рис. 24.14, а) или для повышения трения в резьбе (рис. 24.14, в), за счет пружинных свойств шайбы. Достоинствами резьбовых соединений являются простота, удобство сборки и разборки, широкая номенклатура, высокий уровень стандартизации, взаимозаменяемость, относительно низкая стоимость и высокая надежность. Недостатки резьбовых соединений – наличие во впадинах резьбы концентраций напряжений, снижающих прочность соединений; чувствительность к вибрационным и ударным воздействиям, приводящим к самоотвинчиванию; низкая точность соединения из-за зазоров между наружной и внутренней поверхностями резьбы.

Крепежная резьба бывает метрической, дюймовой и трубной. По профилю она, как правило, имеет треугольный профиль. Чаще всего применяется метрическая (ГОСТ 8724-81, ГОСТ 24705-81), правая, однозаходная резьба (рис. 24.6).

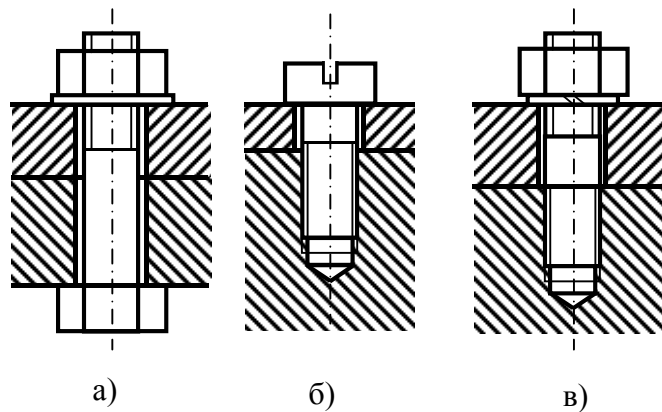


Рисунок 24.14

Левая резьба (обозначение дополняется буквами LH) применяется в тех случаях, когда применение правой невозможно, например из-за самоотвинчивания, или при конструировании резьбовых муфт («римских» гаек), обеспечивающих при вращении в одном направлении перемещение резьбовых стержней навстречу друг-другу или в противоположные стороны (рис. 24.15). Подобные муфты

используются как натяжные устройства, и для регулирования взаимного положения деталей.

Основными крепежными деталями резьбовых соединений являются болты, винты, шпильки, гайки, шайбы и стопорные элементы (пружинные шайбы, шплинты), предохраняющие гайки от самоотвинчивания. Крепежные детали изготавливают из углеродистых, легированных сталей и сплавов.

Крепёжные детали изготавливаются, обычно, методом холодного деформирования. При этом из-за эффекта наклёпа резьбовые детали, выполненные из разных материалов, приобретают близкие механические характеристики. Это позволило сгруппировать резьбовые детали (ГОСТ 1759-82) с учётом их механических характеристик по 11 классам прочности (см. таблицу 24.4)

Таблица 24.4 Механические характеристики некоторых материалов резьбовых деталей

Класс прочности		σ_B , МПа	σ_T , МПа	Марка стали
Винт	Гайка			
3.6	4	300 ÷ 400	200	Ст3; 10
4.6	5	400 ÷ 500	240	20
5.6	6	500 ÷ 700	300	30; 35
6.6	8	600 ÷ 800	360	35; 45; 40Г
8.8	10	800 ÷ 1000	640	35Х; 38ХА; 45Г
10.9	12	1000 ÷ 1200	900	40Г2; 40Х; 30ХГСА

Класс прочности винта обозначают двумя числами, например 5.6. Первое число, умноженное на 100, показывает минимальное значение предела прочности σ_B (МПа), а их произведение, умноженное на 10, даёт примерное значение предела текучести.

Для резьбовых соединений допускаемые напряжения $[\sigma]_p$ при действии постоянной нагрузки определяют по пределу текучести σ_T материала болта и коэффициенту запаса прочности ($s = 1,5 \div 2,5$), т.е.

$$[\sigma]_p = \sigma_T / s.$$

24.9. Расчет на прочность резьбовых соединений

Методы расчета резьбовых соединений на прочность определяются конструктивными особенностями соединения, направлением и характером действующей нагрузки, способом сборки и условиями эксплуатации.

По направлению рабочие нагрузки разделяются на *осевые*, действующие по геометрической оси резьбового стержня, *поперечные*, перпендикулярные оси стержня, и *эксцентричные*, действующие параллельно оси.

При действии на болт осевой силы F нагрузка между отдельными витками распределяется неравномерно. Характер распределения нагрузки был установлен Н.Е. Жуковским (рис. 24.16). Первый виток со стороны опорной поверхности резьбы передает 34% всей нагрузки, а десятый – около 1%. Следовательно, в крепёжном соединении нецелесообразно применять высокие гайки. Стандартная высота нормальной гайки составляет $0,8 d$, а низкой – $0,5d$.

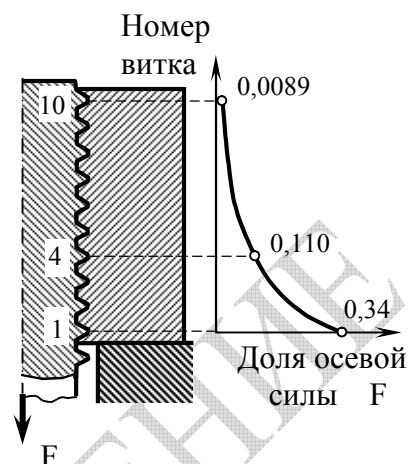


Рисунок 24.16

Соединения, собранные с предварительным затягом называются *напряженными* – детали этих соединений испытывают напряжения еще до приложения рабочей нагрузки. При затяжке ключом болта (гайки) к резьбовому стержню прикладывается крутящий момент T и создается растягивающее усилие. *Величина крутящего момента T зависит от величины создаваемой силы сжатия соединяемых деталей, геометрических параметров резьбы и трения в резьбе.* Абсолютное большинство соединений относится к напряженным соединениям. Примером напряженных соединений являются фланцевые соединения. Соединения, собранные без предварительного затяга, являются *ненапряженными*. Расчет ненапряженных соединений отличается от расчета предварительно затянутых (напряженных) соединений. Выход из строя болтов, винтов и шпилек чаще всего происходит вследствие разрыва стержня по резьбе. Реже разрыв происходит по переходному сечению у головки, а также в результате разрушения резьбы (срез, смятие, изгиб витков резьбы).

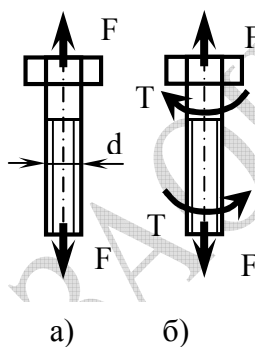


Рисунок 24.17

При действии только статической *растягивающей* силы ($F \neq 0, T = 0$) (рис. 24.17, а), т.е. для ненапряженных резьбовых соединений условие прочности резьбовой части стержня на разрыв по наименьшему сечению A_p имеет вид

$$\sigma = \frac{F}{A_p} \leq [\sigma] \text{ или } \sigma = \frac{4F}{\pi d_1^2} \leq [\sigma], \quad (24.18)$$

где d_1 – внутренний диаметр резьбы; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

В напряженных резьбовых соединениях (рис. 13.17, б) из-за действия *растягивающей* силы F и крутящего момента T , в поперечном сечении резьбового стержня одновременно действуют нормальные и касательные напряжения, что является случаем сложного сопротивления. В рамках третьей теории прочности, с учетом соотношения между силой F и моментом T , условие прочности на разрыв стандартного резьбового стержня имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = 1,3 \frac{F}{A_p} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{экв}} = 1,3 \frac{4F}{\pi d_1^2} \leq [\sigma], \quad (13.19)$$

где 1,3 – коэффициент, учитывающий действие касательных напряжений.

Если соединение нагружено *поперечной* силой F , а болт установлен в отверстие соединяемых деталей без зазора (рис. 13.18, а), то разрушение может произойти в результате среза болта в сечении стыка деталей, подобно заклепке. Условие прочности стержня болта имеет вид

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{4F}{\pi d_c^2} \leq [\tau]_{\text{ср}}, \quad (13.20)$$

где $[\tau]_{\text{ср}}$ – допускаемое напряжение на срез ($[\tau]_{\text{ср}} \approx 0,75[\sigma]$); d_c – диаметр стержня.

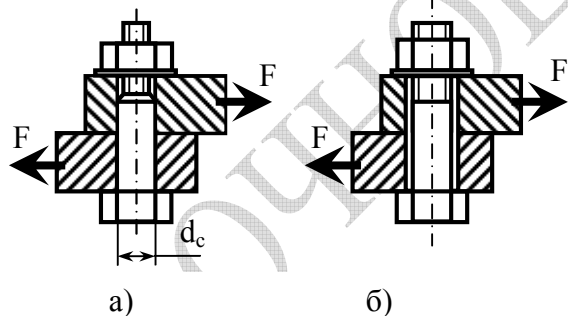


Рисунок 24.18

Если болт установлен в отверстие соединяемых деталей с зазором (рис. 24.18, б), а соединение при этом нагружено *поперечной* силой F , то взаимная неподвижность деталей обеспечивается силой трения $F_{\text{тр}}$ на стыке, которая, в свою очередь, создается осевой силой затяга F_o . Условие взаимной неподвижности деталей соединения

$$F \leq F_{\text{тр}}, \quad (24.21)$$

$$F_{\text{тр}} = F_o f, \quad (24.22)$$

где $f = 0,1 \div 0,2$ – коэффициент трения.

Поскольку в последнем случае (рис. 24.18, б) соединение собирается с предварительным затягом, т.е. является напряженным, условие прочности на разрыв болта имеет вид аналогичный формуле (24.19)

$$\sigma_{\text{экв}} = 1,3 \frac{4F_o}{\pi d_1^2} \leq [\sigma]. \quad (24.23)$$

Проверочные расчеты резьбовых соединений предполагают проверку условий прочности (24.18 – 24.20, 24.23). При выполнении проектных расчетов определяют расчетное значение диаметра болта, и округляют его до ближайшего большего стандартного значения (см. табл. 24.5).

Таблица 24.5 Наружный диаметр d и шаг резьбы P по ГОСТ 8724-81

d , мм	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
P , мм	0,8; 1,0	1,0; 1,25	1,0; 1,25 1,5	1,0; 1,25 1,5	1,0; 1,25 1,5; 1,75	1,0; 1,5; 2,0		1,0; 1,5; 2,0; 2,5			1,0; 1,5; 2,0; 3,0

24.10. Определение усилий в затянутом резьбовом соединении при действии внешней осевой нагрузки

При расчете ответственных резьбовых соединений необходимо учитывать, усилие затяжки с целью обеспечения необходимой плотности соединяемых деталей при действии внешней нагрузки.

Примером являются *фланцевые соединения* (рис. 13.19), предназначенные для герметичного соединения элементов корпусов машин, аппаратов, трубопроводов, работающих под давлением. Соединение состоит из двух фланцев, болтового (шпилечного) соединения и прокладки, которая устанавливается между уплотнительными поверхностями и обеспечивает. Уплотнительные поверхности фланцев и зажатая между ними прокладка образуют *затвор*. Давление, создавая дополнительное внешнее усилие, способствует раскрытию затвора (стыка) и нарушению герметичности устройства.

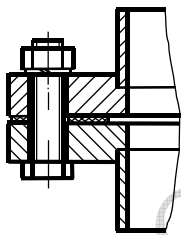


Рисунок 24.19

Рассмотрим болтовое соединение, состоящее из двух деталей (рис. 24.20, а) затянутых с усилием F_3 , и затем нагруженное внешним растягивающим усилием F , приходящимся на данный болт. Усилие F_3 вызывает удлинение болта на $\Delta l_б$ и сжатие промежуточных деталей на $\Delta l_д$, которые в области действия закона Гука вычисляются по формулам:

$$\Delta l_б = \frac{F_3 l}{A_б E_б}, \quad (24.24)$$

$$\Delta l_d = \frac{F_3 \ell}{A_d E_d}, \quad (24.25)$$

где E_b и E_d – модули продольной упругости материалов болта и деталей; A_b и A_d – площади поперечного сечения болта и деформируемой части детали. Если высота гайки много меньше ℓ , то при расчёте Δl_b её не учитывают.

Для определения A_d деформируемую зону представляют в виде двух полых усечённых конусов с общим бóльшим основанием расположенном на расстоянии $0,5(h_1 + h_2)$ от торцов. Этот конус заменяют равным по объёму цилиндром с наружным диаметром D . Площадь сечения A_d цилиндра вычисляют по формуле

$$A_d = 0,25 \pi (D^2 - d_0^2), \quad (24.26)$$

где $D = a + 0,25(h_1 + h_2)$; a – принимают равным размеру под ключ.

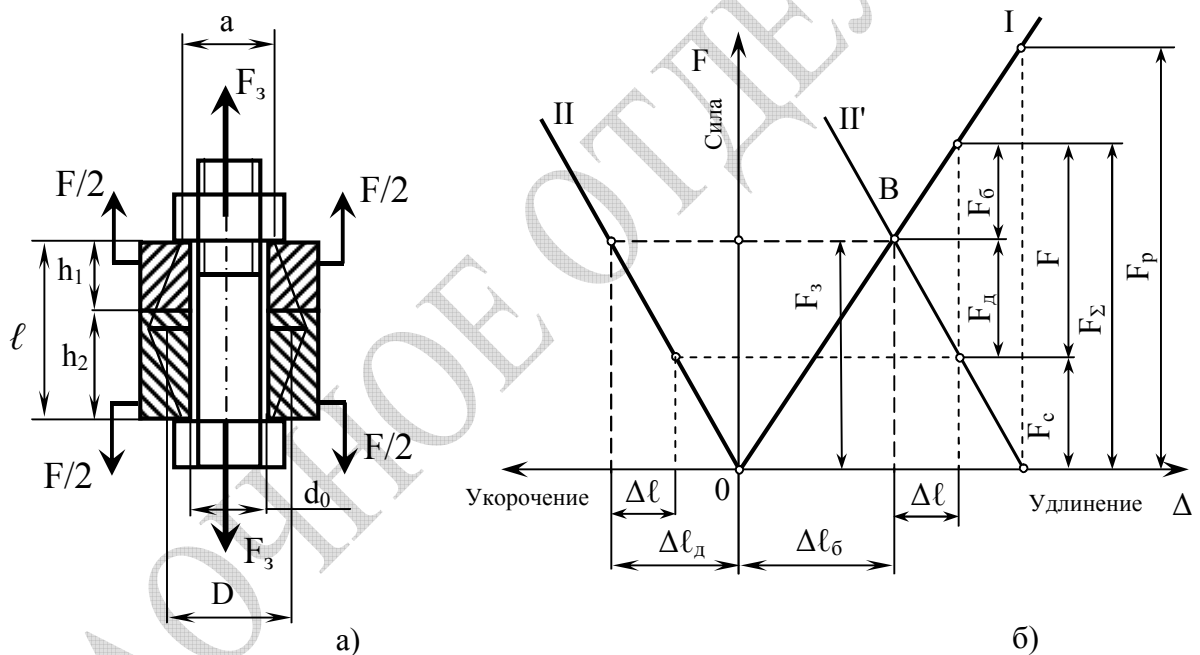


Рисунок 24.20

Значения усилия затяга F_3 , а также значения удлинение Δl_b и укорочения Δl_d позволяет на *диаграмме усилий* (рис. 24.20, б) провести прямые деформирования болта (прямая I) и промежуточных деталей (прямая II). Диаграмма усилий выражает зависимость усилия от удлинения (или сжатия).

Поведение деталей при упругом деформировании характеризуется такими параметрами, как *жесткость* и *податливость*. *Податливость* λ (величина обратная жесткости) – это отношение перемещения к силе, которая вызвала данное перемещение. Примени-

тельно к болту и соединяемым деталям податливость определяется из (24.24, 24.25) по формулам

$$\lambda_{\text{б}} = \frac{\Delta l_{\text{б}}}{F_3} = \frac{l}{A_{\text{б}} E_{\text{б}}}, \quad (24.27)$$

$$\lambda_{\text{д}} = \frac{\Delta l_{\text{д}}}{F_3} = \frac{l}{A_{\text{д}} E_{\text{д}}}. \quad (24.28)$$

Внешняя сила F вызывает дополнительное удлинение болта на величину Δl . При этом усилии, действующее на болт *возрастает* на $F_{\text{б}}$, а усилии, действующее на сжатые детали *уменьшается* на величину $F_{\text{д}}$. Эти усилии можно выразить через Δl и податливость λ :

$$F_{\text{б}} = \Delta l / \lambda_{\text{б}}, \quad (24.29)$$

$$F_{\text{д}} = \Delta l / \lambda_{\text{д}}. \quad (24.30)$$

Снижение усилии, действующего на детали можно найти, проводя через точку В прямую II' параллельно II (рис 13.20, б). Сумма усилии

$$F = F_{\text{б}} + F_{\text{д}}.$$

С учетом выражений (13.29, 13.30)

$$F = \Delta l \frac{\lambda_{\text{б}} + \lambda_{\text{д}}}{\lambda_{\text{б}} \lambda_{\text{д}}}. \quad (24.31)$$

Введем коэффициент основной нагрузки

$$\chi = F_{\text{б}}/F. \quad (24.32)$$

Следовательно, дополнительное усилии на болт,

$$F_{\text{б}} = \chi F.$$

Из последней формулы следует, что *в затянутом резьбовом соединении внешняя нагрузка на болт передается лишь частично* ($\chi = 0,2 \div 0,3$).

Коэффициент основной нагрузки (24.32) с учетом (24.31, 24.32а) можно выразить через податливости

$$\chi = \frac{\lambda_{\text{д}}}{\lambda_{\text{б}} + \lambda_{\text{д}}}. \quad (24.33)$$

Полное усилии F_{Σ} , действующее на болт (до раскрытия стыка), а также усилии на стыке деталей $F_{\text{с}}$ (после приложения силы) определяется из диаграммы усилии (рис.13.20, б)

$$F_{\Sigma} = F_3 + F_{\text{б}} = F_3 + \chi F, \quad (24.34)$$

$$F_c = F_3 - F_d = F_3 - (1 - \chi)F, \quad (24.35)$$

Условие нераскрытия стыка

$$F_3 > (1 - \chi)F. \quad (24.36)$$

Если нагрузка возрастет до величины

$$F_p = \frac{F_3}{(1 - \chi)}, \quad (24.37)$$

то стык раскроется, и внешняя нагрузка полностью передается на болт. Следовательно, усилие затяжки следует назначать таким, чтобы при заданной внешней нагрузке F стык оставался плотным.

24.11. Расчёт резьбы на срез, смятие и изгиб

Расчёт витков резьбы на срез, смятие и изгиб проводят в тех случаях, когда детали соединения выполнены из материалов с разной прочностью, или используются детали с нестандартными параметрами, поскольку для стандартных резьбовых соединений прочность витков резьбы выше прочности резьбового стержня.

Подобная задача встречается при разработке малогабаритных уплотнительных соединений – ниппельных соединений.

Ниппельные соединения – разъёмные соединения трубопроводной арматуры машин. Основными элементами данных соединений являются *ниппель*, *проходник* и *накидная гайка* (рис. 24.21).

Проходник устанавливается в корпусе машины. Герметичность присоединения проходника может обеспечиваться сваркой, пайкой, коническим резьбовым соединением или резьбовым соединением с прокладкой (резиновой, полимерной, металлической).

Накидная гайка прижимает ниппель к проходнику. В конструкции, представленной на рисунке 24.21, рабочая поверхность ниппеля имеет сферическую форму, а проходника – коническую, т.е. контакт осуществляется по линии (по окружности), что гарантирует при относительно небольшом усилии затяга накидной гайки высокое удельное давление по линии контакта, а, следовательно, и герметичность стыка без использования прокладок.

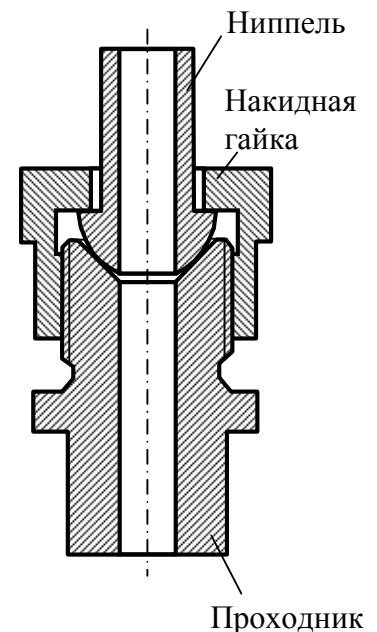


Рисунок 24.21

Расчет ниппельного соединения выполняют в следующем порядке:

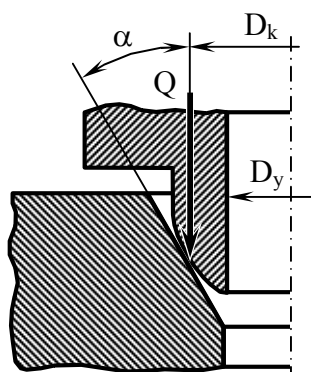


Рисунок 24.22

1) определяют предварительное усилие затяга накладной гайки

$$F_3 \geq \pi D_k q_k \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}, \quad (24.38)$$

где q_k – удельная нагрузка по линии уплотнения (для малых диаметров условных проходов $q_k \approx 0,2$ МН/м); $\alpha = 30^\circ$ – угол конуса проходника (рис. 13.22); φ – угол трения (для стали по стали $\varphi = 10^\circ$).

2) определяют усилие, действующее на ниппель и накладную гайку после подачи давления P_y

$$F_6 = F_3 + \kappa \frac{\pi D_k^2}{4} P_y, \quad (24.39)$$

где $\kappa = 1,1$ – константа жесткости для поверхностей сфера-конус.

3) рассчитывают рабочую длину l резьбы накладной гайки из условий прочности на изгиб витка

$$l \geq \frac{3F_6 H_1 P}{\pi d_3 s^2 [\sigma]_и}, \quad (24.40)$$

срез

$$l \geq \frac{F_6 P}{\pi d_3 s [\tau]_{ср}}, \quad (24.41)$$

смятие

$$l \geq \frac{4F_6 P}{\pi(d^2 - d_3^2)[\sigma]_{см}}, \quad (24.42)$$

где d – наружный диаметр резьбы; P – шаг резьбы; d_3 – наименьший внутренний диаметр резьбы; H_1 – рабочая высота профиля резьбы; s – высота основания витка резьбы.

В приведённых формулах поверхность среза витка условно считается цилиндрической, площадь смятия – площадью плоского кольца. При расчёте витков на изгиб, виток представляют в виде консольной балки с корневым сечением прямоугольной формы высотой s , шириной πd_3 ; изгибающий момент $M = 0,5F_6 H_1$.

24.12. Шпоночные соединения

Шпоночные соединения осуществляют с помощью специальных деталей – шпонок, устанавливаемых в пазах между валом и ступицей. Шпоночные соединения служат для передачи крутящего момента от вала к ступице. Шпоночные соединения просты и надежны. Основным недостатком шпоночных соединений являются в том, что шпоночные пазы ослабляют валы и ступицы – являются концентраторами напряжений.

По своей форме шпонки (от нем. Span – щепка, клин) бывают *призматическими, сегментными, цилиндрическими и клиновыми*. Конструкция и форма шпонки связана с технологичностью изготовления пазов под шпонку и особенностями конструкции. Пазы на валах фрезеруют, а в ступицах прорезают протяжками. Шпонки обычно изготавливают из среднеуглеродистых сталей 40, 45.

Призматические шпонки (ГОСТ 23360-78) (рис. 24.23, а, б, в) имеют прямоугольное сечение. Концы шпонок могут быть скругленными (рис. 24.23, а) и плоскими (рис. 24.23, б). В радиальном направлении (рис. 24.23, в) между шпонкой и пазом ступицы остается зазор (t_2+t_1-h). Паз под шпонку делают примерно 0,6 ее высоты, т.е. $t_1 \approx 0,6h$, паз во втулке – на длину всей ступицы. Ширина и высота шпонки определены стандартом и подбираются в зависимости от диаметра вала. Длина шпонки определяется из условия прочности на смятие, а прочность на срез обеспечивается с избытком.

Сегментные шпонки (ГОСТ 24071-80) (рис. 24.23, г) удобнее в изготовлении, устойчивее располагаются в пазу, но имеют малую длину, требуют более глубоких пазов в валах, что снижает прочность валов. Их применяют для передачи незначительных нагрузок. Рассчитываются так же, как и призматические.

Цилиндрические шпонки (штифты) (ГОСТ 3128-70 и 12207-79) (рис. 24.23, д) обычно применяют для закрепления деталей на конце вала. Шпонка устанавливается с натягом.

Клиновые шпонки (ГОСТ 24068-80) (рис. 24.23, е) образуют напряженные соединения – их с усилием вбивают в паз между валом и ступицей. Эти шпонки передают усилия за счет сил трения. В отличие от призматических и сегментных шпонок у клиновых шпонок зазор остается по боковым граням. Они применяются ограничено из-за возникающего перекоса ступицы, но способны передавать большие нагрузки.

Расчет шпоночных соединений на прочность относится к типовым расчетам, выполняемым при проектировании большинства механических передач. Крутящий момент с вала на ступицу, например, зубчатого колеса, передается при помощи призматической шпонки размещенной в шпоночных пазах вала и ступицы (рис. 24.24).

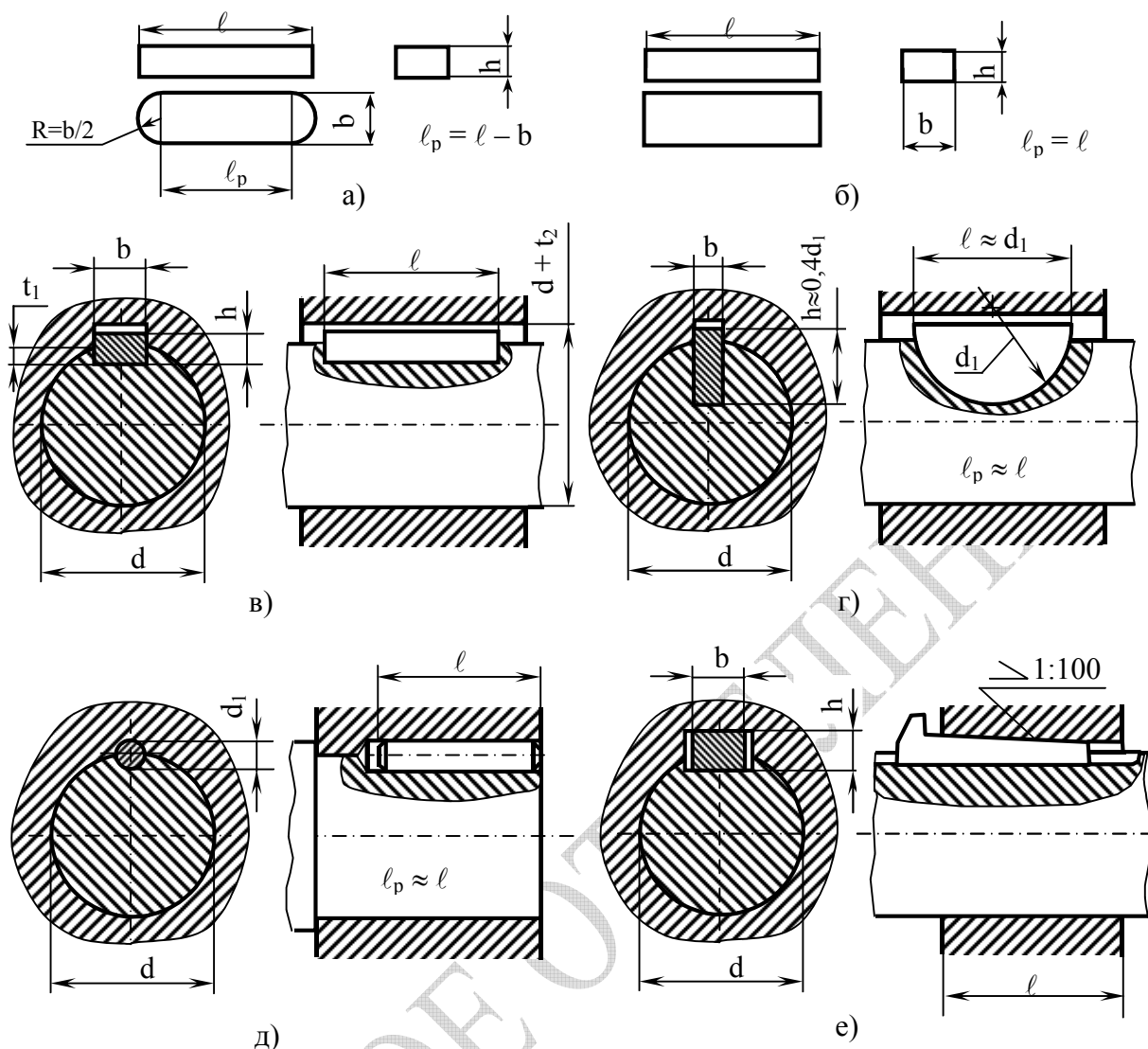


Рисунок 24.23

Боковые грани шпонки на половине своей высоты испытывают напряжения смятия $\sigma_{см}$, а продольное сечение – напряжения среза $\tau_{ср}$.

Для шпоночного соединения стандартной шпонкой выполняется проверочный расчет только на смятие. Шпонка испытывает смятие с двух противоположных боковых сторон: со стороны вала в поперечном сечении (нижняя часть одной из боковых поверхностей), и со стороны ступицы (верхняя часть противоположной боковой поверхности). Со стороны ступицы поверхность смятия минимальна.

Сила, вызывающая смятие:

$$F_1 = F_2 = F = \frac{T}{0,5d}, \quad (24.43)$$

где d – диаметр вала.

Минимальная поверхность смятия определяется по формуле

$$A_{см} \approx l_p 0,4h, \quad (24.44)$$

где l_p – рабочая длина шпонки, принимаемая из стандартного ряда размеров. Длина l шпонки должна быть на 5 -10 мм меньше высоты ступицы L.

Условие прочности шпонки на смятие:

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{F}{A_{\text{см}}} \leq [\sigma]_{\text{см}},$$

где $\sigma_{\text{см}}$ – напряжение смятия на боковой поверхности шпонки; $[\sigma]_{\text{см}} \approx 1,5[\sigma]$ – допускаемые напряжения на смятие материала шпонки.

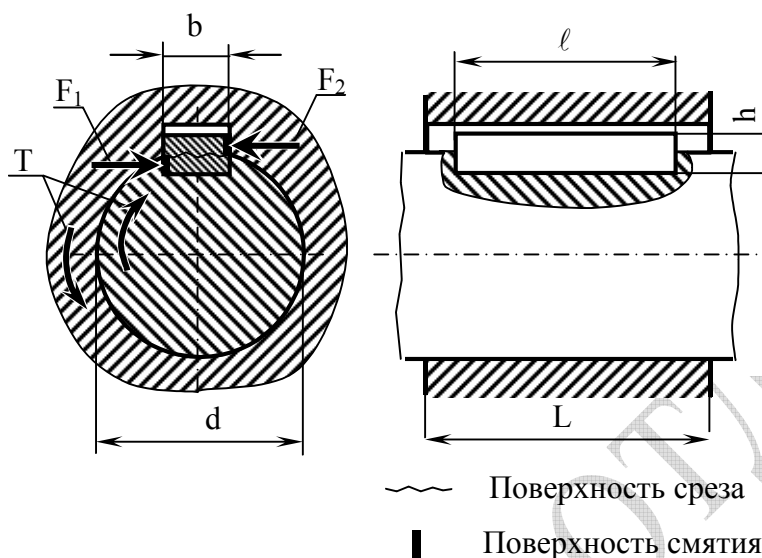


Рисунок 24.24

Если условие прочности не выполняется, необходимо поставить две шпонки той же длины, смещенные по окружности на угол 180° .

Расчёт соединения с цилиндрическими шпонками (рис. 24.23, д), как правило, сводится к определению количества $z_{\text{ш}}$ шпонок необходимого для передачи момента T, при этом учитывают неравномерность распределения напряжений смятия

$$z_{\text{ш}} \geq \frac{16T}{\pi d d_1 l_p [\sigma]_{\text{см}}}, \quad (24.45)$$

где $d_1 \approx (0,13 \div 0,16)d$; $l_p \approx (3 \div 4)d_{\text{ш}}$; $[\sigma]_{\text{см}}$ увеличивают на 25÷30% по сравнению с допускаемыми напряжениями смятия для призматических шпонок.

24.13. Шлицевые (зубчатые) соединения

Шлицевые соединения служат для передачи вращающего момента между валом и установленными деталями. Шлицевое соединение условно можно представить как многошпоночное. Это соединение обеспечивает как подвижное (в осевом направлении), так и неподвижное соединение между валом и насаженной деталью.

Шлицевые соединения прочнее и точнее шпоночных, но значительно сложнее. По форме поперечного сечения шлицов различают прямобоочные (рис. 24.25, а), треугольные (рис. 24.25, б) и

эвольвентные (рис. 24.25, в) шлицевые сечения. Число и размеры поперечного сечения шлицов принимают по ГОСТ 1139-80, ОСТ 100092-73, ГОСТ 6033-80 в зависимости от диаметра вала. Стандартом предусмотрено три серии соединений (лёгкая, средняя, тяжёлая), которые отличаются высотой и количеством зубьев.

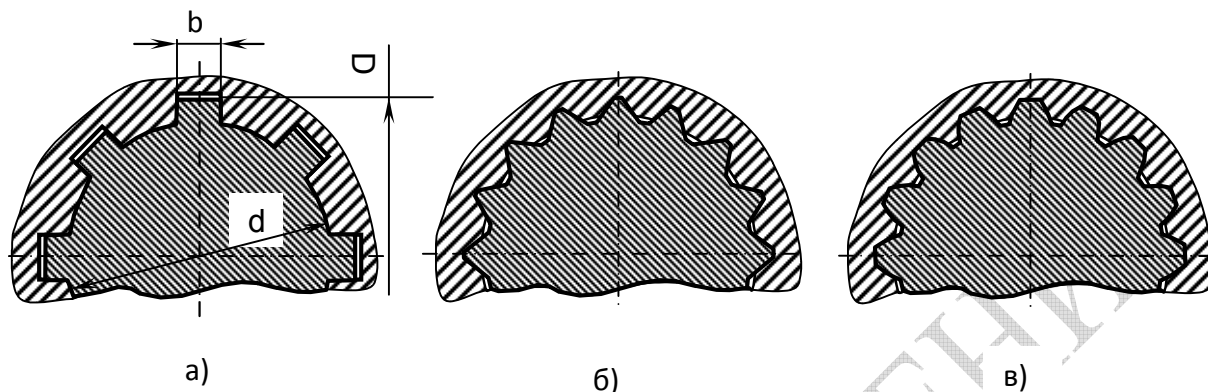


Рисунок 24.25

Расчёт шлицевых соединений проводят на смятие по формуле

$$\sigma_{\text{см}} = 2T / (Kz h \ell d_{\text{ср}}) \leq [\sigma]_{\text{см}}, \quad (24.46)$$

где $K \approx 0,7 \div 0,8$ – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения усилий между зубьями; z – число зубьев; h – высота поверхности контакта зубьев (зависит от формы зубьев – для прямоугольных – $h \approx 0,5(D-d)$); ℓ – рабочая длина зубьев; $d_{\text{ср}}$ – средний диаметр поверхности контакта (зависит от формы зубьев – для прямоугольных – $d_{\text{ср}} = 0,5 (D+d)$); $[\sigma]_{\text{см}}$ – допускаемое напряжение смятия, зависящее от типа соединения и твёрдости поверхности зубьев (например, для неподвижного соединения со средними условиями эксплуатации и твёрдостью до 350 НВ $[\sigma]_{\text{см}} = 60 \div 100$ МПа).

13.15. Штифтовые соединения

Штифтовые соединения осуществляются при помощи специальных стандартных деталей – штифтов, т.е. стержней цилиндрической (рис. 24.26, а) или конической (рис. 24.26, б) формы плотно вставляемых в отверстие двух соединяемых деталей. Штифты по назначению подразделяются на *соединительные*, служащие для разъёмного соединения деталей передающих небольшие нагрузки; *установочные*, предназначенные для точной фиксации относительного положения деталей; *направляющие*, обеспечивающие перемещение одной детали относительно другой по заданной траектории; *предохранительные*, разрушающиеся (например, в муфтах) при перегрузке.

Штифты могут быть трубчатыми (рис. 24.26, в) или быть насечными (рис. 24.26, г). Трубчатые штифты, благодаря своей упругой податливости могут плотно вставляться в отверстия с большим полем допуска на размер. Острые кромки насечных штифтов врезаются в края отверстия и надежно страхуют штифт от выпадения.

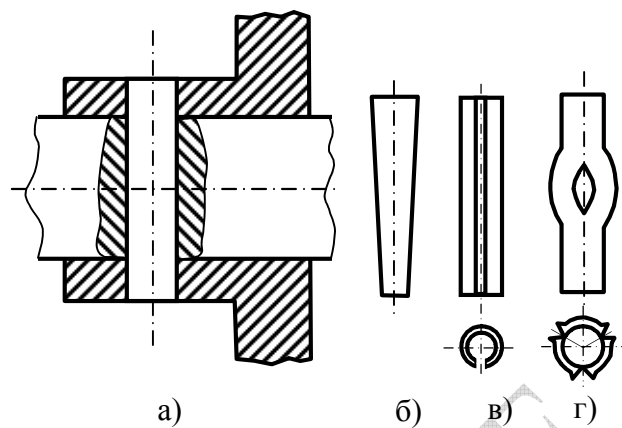
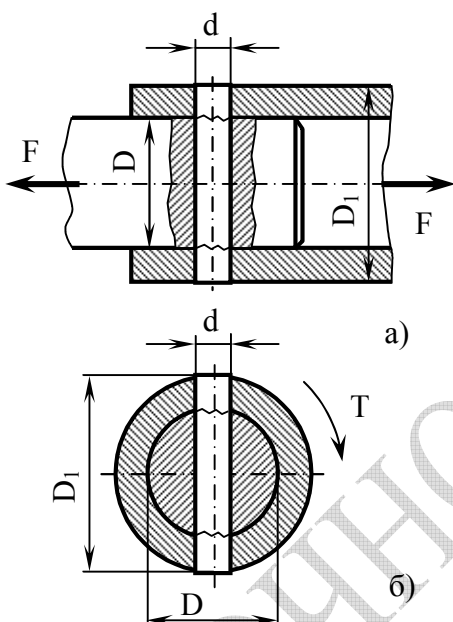


Рисунок 24.26

Основное достоинство штифтовых соединений – простота конструкции. Недостатки: ослабление сечения детали; концентрация напряжений; нетехнологичность изготовления соединения – требуется совместное сверление и развёртывание отверстий под штифт после сборки ступицы с валом.

Диаметр штифта при действии поперечной силы F (рис. 24.27, а) и крутящего момента T (рис. 24.27, б) определяют из условия прочности на срез



$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\tau]_{cp}z}} ; d \geq \sqrt{\frac{8T}{\pi D[\tau]_{cp}z}} ; (24.47)$$

где z – число поверхностей срезов; $[\tau]_{cp}$ – допускаемые напряжения на срез штифта (для стали 45 $[\tau]_{cp} = 80$ МПа).

Если ступица тонкая ($D < 1,5d$), то выполняют расчёт на смятие.

Рисунок 24.27

24.16. Байонетные соединения

Байонетные соединения – разъемные соединения двух деталей (рис. 24.28), осуществляемые путем ввода выступа на одной из деталей в специальную прорезь другой детали и последующего относительного смещения деталей на длину прорези.

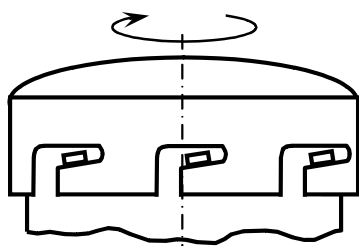


Рисунок 24.28

Байонетные (франц. *baionnette* – штык) соединения применяют в тех случаях, когда требуется частое и быстрое соединение и разъединения элементов оборудования, например, отсоедине-

ние крышек автоклавов – аппаратов периодического действия для термообработки материалов и изделий под давлением.

Конструкции байонетных соединений многообразны. Методика расчёта байонетного соединения зависит от его конструктивных особенностей и от характера нагружения.

24.17. Клеммовые соединения

Клеммовые соединения – соединения деталей с соосными цилиндрическими посадочными поверхностями осуществляемые за счёт сил трения. Необходимая взаимная фиксация вала и охватывающей детали обеспечивается трением, которое создаётся путём изгиба охватывающей детали затянутыми болтами (рис. 24.29).

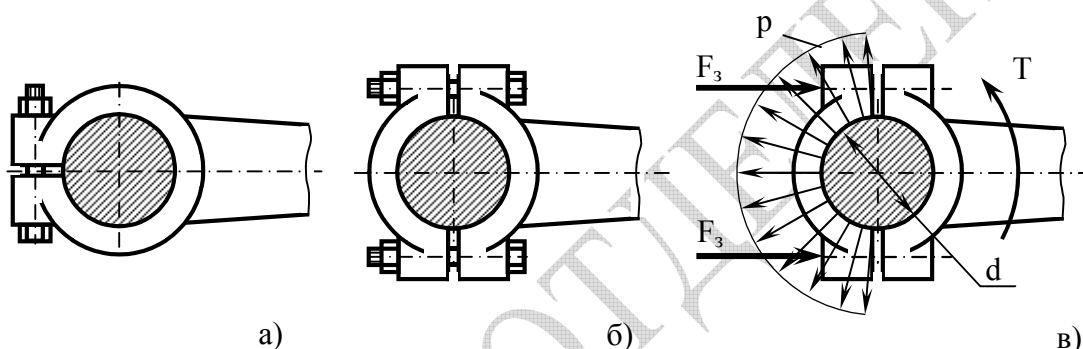


Рисунок 24.29

Клеммовые соединения применяют для закрепления деталей, например, рычагов на валах и осях. По конструкции бывают соединения с одной прорезью в ступице (рис. 24.29, а) или с разъёмной ступицей (рис. 24.29, б). Данный тип соединения отличается простотой конструкции, монтажа и регулировки взаимного положения деталей. Основные недостатки – малая несущая способность, нестабильность трения.

При проектировании соединения определяют силу F_3 затяжки болтов, которая обеспечивает взаимную фиксацию деталей и передачу требуемого вращающего момента T . Условие равновесия клеммы (рис. 24.29, в) имеет вид

$$zF_3 = pld, \quad (24.48)$$

где p – контактное давление (см. раздел «Соединения запрессовкой»); z – количество болтов в одном или двух рядах (рис. 24.29, б); l – ширина клеммы.

Выражение для контактных давлений с учётом условия неподвижности деталей соединения (24.13) передающих момент T имеет вид

$$p = 2Tk / (f\pi d^2 \ell), \quad (24.49)$$

где k – коэффициент запаса сцепления ($k \approx 2 \div 3$); f – минимальное значение коэффициента трения (сцепления).

Учитывая два последних соотношения, выражение для усилия затяга (используется для расчёта болтов на растяжение) имеет вид

$$F_3 = 2T / (f\pi dz). \quad (24.50)$$

24.18. Профильные соединения

Профильные соединения – разъемные соединения, у которых ступица насаживается на фасонную поверхность вала. Этот тип

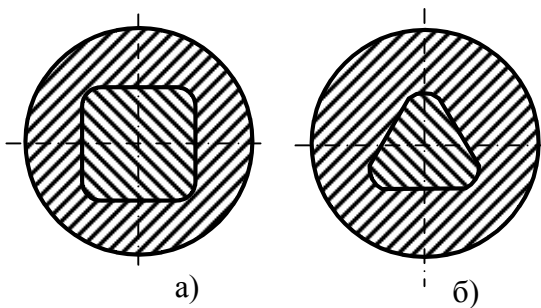


Рисунок 24.30

соединения используется, например, при закреплении маховиков запорной арматуры (вентилей, кранов, задвижек). Поперечное сечение вала и форма отверстия в ступице может быть квадратной (рис. 24.30, а), треугольной (рис. 24.30, б), овальной и т.п. Соединение обеспечивает

хорошее центрирование, отсутствует концентрация напряжений. Фасонные поверхности соединения сложны в изготовлении.

Соединения рассчитывают приближённо по напряжениям смятия, которые возникают на рабочих гранях. Допускают, что зазор в соединении равен нулю, напряжения смятия распределяются в соответствии с расчётной схемой (рис. 24.31). Расчётные зависимости имеют вид

$$T = 4 \frac{\sigma_{см}}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \ell \cdot \frac{a}{3} = \sigma_{см} \frac{\ell a^2}{3} \quad \text{или} \quad \sigma_{см} = \frac{3T}{\ell a^2},$$

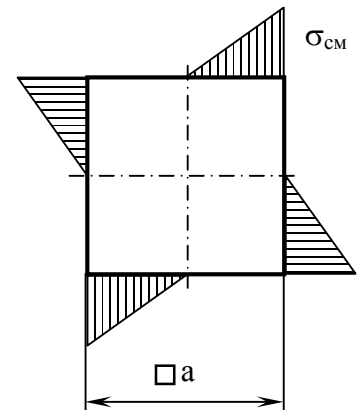


Рисунок 24.31

где ℓ – высота ступицы; a – размер стороны квадрата; T – вращающий момент.

24.19. Контрольные вопросы

1. В чём отличие разъемных соединений от неразъемных? В чём заключаются достоинства и недостатки каждого вида соединений?

2. Приведите краткую классификацию неразъёмных и разъёмных соединений.
3. Чем отличается сварка плавлением от сварки давлением? Назовите разновидности сварки плавлением и сварки давлением?
4. Назовите наиболее распространённые способы дуговой сварки.
5. Проведите классификацию сварных соединений и сварных швов.
6. Каков порядок условного обозначения сварки на чертежах?
7. В чём разница в расчёте стыковых и угловых швов?
8. В чём достоинства паяных и клеевых соединений? Каковы основы расчёта этих соединений?
9. Каким образом осуществляются заклёпочные соединения, соединения вальцеванием и загибкой? В чём их достоинства и недостатки?
10. По каким условиям прочности рассчитывают заклёпочные соединения?
11. Каким образом осуществляются соединения запрессовкой? Какова область применения этих соединений?
12. Каково условие неподвижности соединения запрессовкой? Какие напряжения возникают в этом соединении?
13. Приведите основные параметры резьбы. Проведите классификацию резьб и резьбовых соединений.
14. Какие резьбовые соединения относятся к ненапряжённым, а какие – к напряжённым? Как рассчитываются такие соединения?
15. Какие особенности распределения усилий в затянутом резьбовом соединении при действии внешней осевой нагрузки? Какой подход используется для определения этих усилий?
16. В каких случаях выполняется расчёт витков резьбы на срез, смятие и изгиб? В чём отличительная особенность ниппельных соединений?
17. Для чего применяются шпоночные соединения? Какими они бывают? По каким условиям прочности выполняется расчёт данных соединений?
18. Каково назначение шлицевых соединений? В чём их достоинства и недостатки? Назовите виды боковых поверхностей шлицов? Как рассчитываются шлицевые соединения?
19. В каких случаях применяются штифтовые соединения? Каковы разновидности штифтов? Как рассчитываются эти соединения?
20. Для чего применяются байонетные соединения?
21. За счёт каких сил обеспечиваются клеммовые соединения? В чём особенности этих соединений?
22. Для чего применяются профильные соединения? Какими они бывают? По какому условию их рассчитывают?

Глава 25. Упругие элементы

25.1. Общие сведения

Упругими элементами называют детали, основным рабочим свойством которых является способность изменять свои размеры и форму под действием нагрузки и восстанавливать их после снятия нагрузки. Одной из главных функций упругих элементов является *преобразование нагрузок в механические перемещения*.

По виду заготовки упругие элементы подразделяются на три группы: *стержневые* (рис. 25.1, а – ж), изготавливаемые из проволоки или ленты, *оболочки* (рис. 25.1, з – л), получаемые из листа или трубок, *массивы* – изготавливаемые из массивов резины и полимеров.

По геометрической форме упругие элементы подразделяются на плоские (рис. 25.1, а, и), изогнутые (рис. 25.1, б, л), винтовые (рис. 25.1, г, д, е), спиральные (рис. 25.1, ж), гофрированные (мембраны и сильфоны (рис. 25.1, и).

По виду воспринимаемой нагрузки различают пружины растяжения (рис. 25.1, д), сжатия (рис. 25.1, г), кручения (рис. 25.1, в, е, ж) и изгиба (рис. 25.1, а).

По назначению всё многообразие упругих элементов подразделяется на несколько групп:

силоизмерительные, служащие для измерения сосредоточенных сил и моментов (плоские, спиральные, винтовые пружины);

манометрические, используемые в манометрах для преобразования давления в перемещение (мембраны (рис. 25.1, и), сильфоны (рис. 25.1, к), трубчатые пружины (рис. 25.1, л);

термоизмерительные, применяемые для измерения температуры (биметаллические пластины (рис. 25.1, б), мембраны, сильфоны и трубчатые пружины);

силовые, используемые в качестве источников механической энергии (спиральные, винтовые, сильфоны);

кинематические, обеспечивающие перемещение одной детали относительно другой в заданном направлении (плоские пружины, сильфоны);

компенсаторные, устраняющие зазоры между деталями механизмов (плоские, винтовые, тарельчатые пружины (рис. 25.1, з);

разделительные, служащие для разделения двух сред с разными физическими свойствами (мембраны, сильфоны);

насосные, используемые в насосах и дозаторах (мембраны, сильфоны);

амортизаторы, поглощающие энергию колебаний, вибраций, ударов (плоские, спиральные, винтовые пружины, торсионные валы (рис. в), резинометаллические упругие элементы).

Материалы упругих элементов должны обладать достаточной пластичностью на стадии изготовления упругого элемента, и приобретать стабильные упругие свойства после завершения процесса изготовления. Материалы упругих элементов могут приобретать необходимые упругие свойства в результате механической обработки заготовки (штамповка, обжатие), в результате термической обработки (закалка, отпуск), а пластмассы и

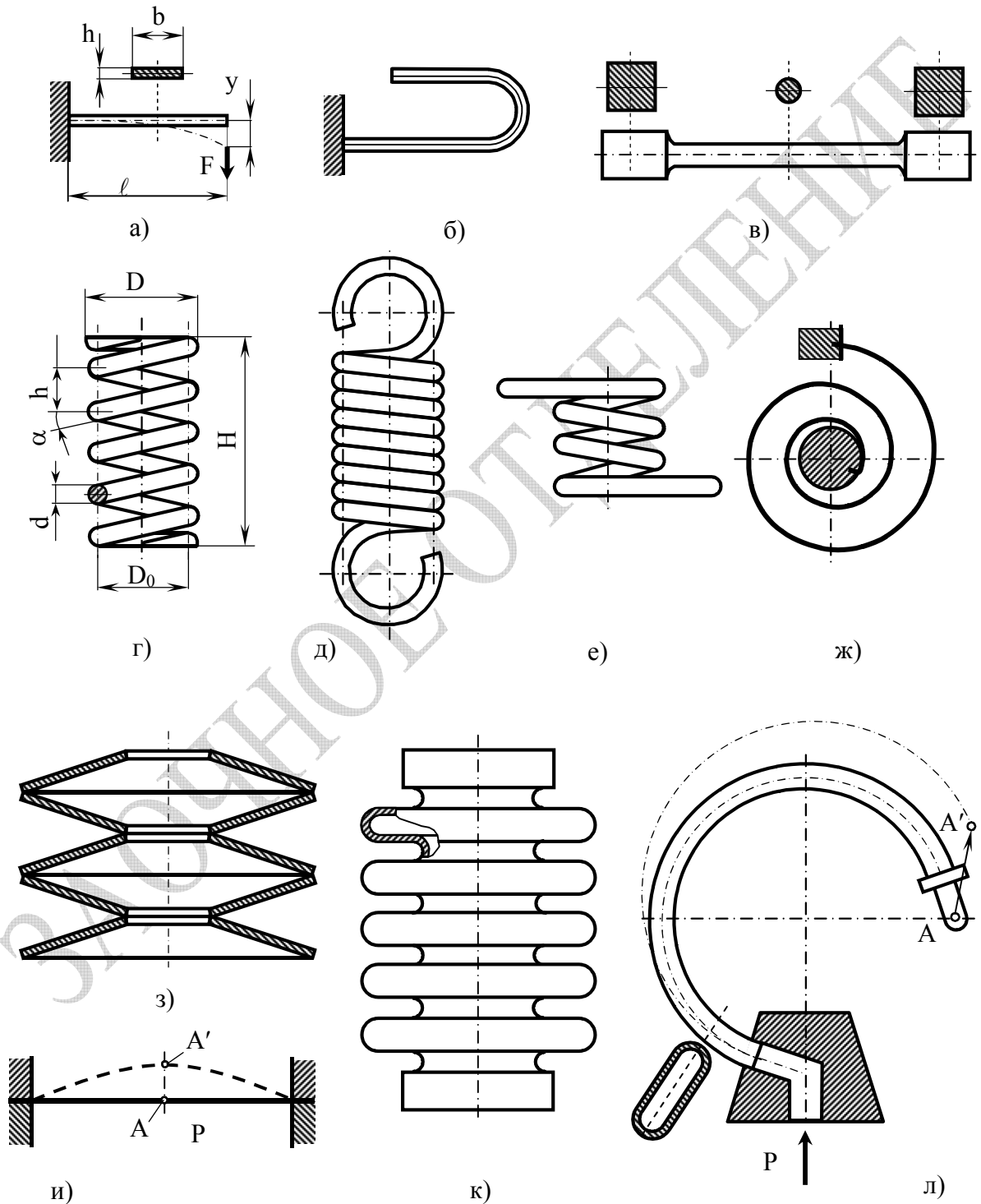


Рисунок 25.1

резина – в результате полимеризации и вулканизации. Наиболее широко для изготовления упругих элементов используются высокоуглеродистые стали (65,70) хромованадиевая сталь (50ХФА), сплавы (36НХТЮ), бронзы (БрБ2), латуни (Л80) и др.

Основными параметрами упругого элемента являются *упругая характеристика, жесткость и чувствительность*.

Под воздействием нагрузок приложенных к упругому элементу определенная часть элемента (например, конец пружины) получает *линейное или угловое перемещение*. Линейные перемещения точки

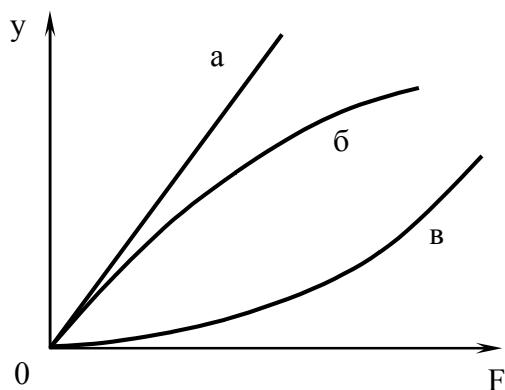


Рисунок 25.2

упругого элемента принято называть *прогибом* или *ходом*. Зависимость между нагрузкой F и перемещением y называется *упругой характеристикой*.

Упругая характеристика (рис. 25.2) может быть линейной (а), затухающей (б) или возрастающей (в). Предел отношения приращения перемещения Δy к приращению нагрузки ΔF называют *чувствительностью* (податливостью) упругого элемента

$$\delta = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta F} \right). \quad (25.1)$$

Величина обратная чувствительности называется *жесткостью* упругого элемента

$$C = \frac{1}{\delta} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta F}{\Delta y} \right). \quad (25.2)$$

Если упругий элемент имеет линейную упругую характеристику, то его чувствительность δ и жесткость C – постоянные величины

$$\delta = y / F, \quad (25.3)$$

$$C = F / y, \quad (25.4)$$

где F – сила, вызвавшая перемещение y .

25.2. Расчёт плоских и винтовых пружин

Плоские пружины во многих устройствах представляют собой консольно закрепленные балки (рис. 25.1, а). В этом случае проектный или проверочный расчет производят по максимальным нормальным напряжениям с использованием условия прочности при изгибе

$$\sigma = \frac{|M|}{W_z} = \frac{|Fl|}{\left(\frac{bh^2}{6}\right)} \leq [\sigma]. \quad (25.5),$$

где W_z – осевой момент сопротивления поперечного сечения плоской пружины.

Прогиб плоской пружины рассчитывают по следующей зависимости

$$y = \frac{Fl^3}{3EI_z} = \frac{Fl^3}{3E\left(\frac{bh^3}{12}\right)}, \quad (25.6),$$

где E – модуль продольной упругости материала пружины; I_z – момент инерции поперечного сечения пружины.

Выражения (25.4, 25.6) позволяют получить формулу для расчета жесткости плоской консольно закреплённой пружины

$$C = \frac{3EI_z}{l^3}. \quad (25.7)$$

Наиболее широкое распространение в самых разных устройствах получили винтовые пружины растяжения-сжатия (рис. 25.1, г, д). По конструкции пружины сжатия (рис. 25.1, г) отличаются от пружин растяжения (рис. 25.1, д): витки в пружинах сжатия навиваются с зазором, что необходимо для получения требуемого хода y , а навивка пружин растяжения плотная – без зазоров. Кроме того, для обеспечения симметричности приложения сжимающей силы, последние витки пружин сжатия подгибаются и сошлифовываются (рис. 25.1, г). Крайние витки пружин растяжения обычно формируются в виде зацепов (рис. 25.1, д).

Основными геометрическими параметрами винтовых пружин (рис. 25.1, г) являются: D – наружный диаметр, D_0 – средний диаметр пружины, d – диаметр проволоки, h – шаг навивки, α – угол подъема витка, z – число витков, $q = D_0 / d$ – *индекс пружины*. Индекс пружины должен находиться в пределах от 4 до 12. Если $q < 4$ – пружину не навить из-за упругой отдачи витка. Если $q > 12$ – пружина становится неустойчивой в поперечном направлении. Параметры винтовых пружин стандартизованы.

Рассмотрим пружину, находящуюся под действием сжимающей силы F (рис. 25.3, а). Для определения характера силовых факторов, действующих в поперечном сечении витка, переместим первоначально силу F вдоль линии её действия в точку, находящуюся напротив одного из витков. Затем, пользуясь правилом параллельного

переноса сил, переместим силу на виток в точку В. В результате получим, что в точке В помимо силы F на виток будет действовать ещё пара сил $M = 0,5FD_0$. Сила F и пара сил M могут быть разложены на составляющие (рис. 25.3, б), которым в сечении витка соответствуют различные деформации: силе F_1 – сдвиг; силе F_2 – растяжение-сжатие; паре сил T – кручение; моменту M – изгиб. Причём, из-за малости угла подъема витков ($\alpha < 10 \div 12^\circ$), $\sin\alpha \approx 0$, $\cos\alpha \approx 1$ получаемые выражения упрощаются:

$$F_1 = F \cos\alpha \approx F, \quad (25.9)$$

$$F_2 = F \sin\alpha \approx 0, \quad (25.10)$$

$$T = 0,5 D_0 F \cos\alpha \approx 0,5 D_0 F, \quad (25.11)$$

$$M = 0,5 D_0 F \sin\alpha \approx 0. \quad (25.12)$$

Таким образом, допустимо считать, что сечение пружины работает только на кручение и сдвиг. Как показывают расчеты, напряжения кручения многократно больше напряжений сдвига. Для упрощения расчетов, влияние сдвига учитывают введением в расчетные зависимости коэффициента кривизны витка

$$k = \frac{4q-1}{4q-4} + \frac{0,615}{q}. \quad (25.13)$$

С учетом допущений, условие прочности на кручение витка имеет вид

$$\tau = \frac{T k}{W_p} = \frac{kFD_0}{2 \left(\frac{\pi d^3}{16} \right)} \leq [\tau]_{кр}, \quad (25.14)$$

где W_p – полярный момент сопротивления.

Условие (25.14) используется как для проверочных расчетов, так и для определения расчетного диаметра проволоки, который затем округляется до стандартного значения.

Зависимость для расчета прогиба (хода) пружин растяжения-сжатия получают на основе энергетических соображений.

При получении пружиной прогиба y , силой F совершается механическая работа A_n по упругому перемещению витков. Величина этой работы соответствует площади треугольника (рис. 25.3, в) на упругой характеристике пружины $y=f(F)$. Одновременно в поперечных сечениях витков накапливается равная, совершенной работе A_n , потенциальная энергия кручения $A_{кр}$, которая соответствует площади треугольника диаграммы $\varphi = f(T)$ (рис. 25.3, г).

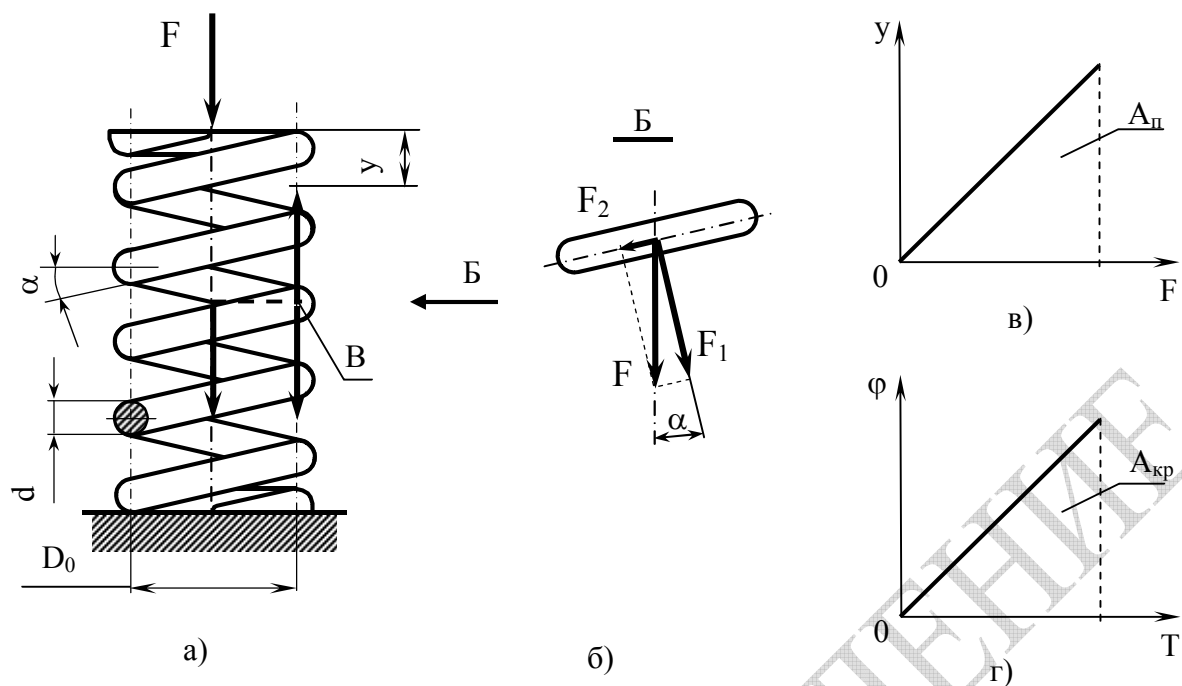


Рисунок 25.3

Следовательно,

$$A_{II} = A_{KP}, \quad (25.15)$$

$$\frac{1}{2} Fy = \frac{1}{2} T\varphi,$$

$$Fy = T \frac{T\ell}{GI_p},$$

$$Fy = \frac{(0,5D_0F)^2 \ell}{GI_p} = \frac{(0,5D_0F)^2 (\pi D_0 z)}{GI_p},$$

здесь φ – угол закручивания проволоки; ℓ – полная рабочая длина развернутой пружины; G – модуль сдвига; I_p – полярный момент инерции, z – число витков.

Окончательное выражение для прогиба пружины растяжения (сжатия) имеет вид

$$y = \frac{\pi F D_0^3 z}{4 G I_p}. \quad (25.16)$$

Жесткость пружины с учетом (8.99) и (8.110)

$$C = \frac{4GI_p}{\pi D_0^3 z} = \frac{C_B}{z}, \quad (25.17)$$

где C_B – жесткость одного витка.

25.3. Контрольные вопросы

1. Какие детали называют упругими элементами? Какими свойствами они обладают и какие функции выполняют?
2. Приведите классификацию упругих элементов.
3. Какие материалы используются для изготовления упругих элементов? Какими свойствами они должны обладать?
4. Назовите основные параметры упругих элементов. Дайте им определения.
5. Что называется жёсткостью, что называется податливостью (чувствительностью) упругого элемента? Как эти параметры связаны между собой? Приведите формулы для этих параметров.
6. Как рассчитывается на прочность и жёсткость плоская пружина?
7. Какие напряжения учитываются при расчёте винтовой пружины на прочность?
8. Как получают выражение для жёсткости винтовой пружины растяжения-сжатия?
9. Что больше жёсткость всей пружины или одного витка? Как это можно объяснить?

Глава 26. Корпусные детали механизмов

26.1. Общие сведения

Корпусные детали механизмов являются несущими частями, на которых устанавливаются остальные детали и узлы машин, аппаратов и приборов. Корпусы обеспечивают защиту элементов механических передач от коррозии, от попадания грязи и посторонних предметов в передачи, позволяют обеспечить смазку и необходимый температурный режим.

Корпусные детали должны обладать необходимой прочностью, жёсткостью, технологичностью, обеспечивать герметичность, удобство сборки-разборки и технического обслуживания машины или механизма:

прочность – необходимое условие любой корпусной детали;

жёсткость – важное требование к корпусам механических передач, станков, приборов и т.д.;

герметичность является одним из основных условий защиты узлов передачи от вредных внешних воздействий;

технологичность предполагает возможность изготовления деталей корпусов с минимальным расходом материалов высокопроизводительными методами;

Детали корпусов обычно наиболее металлоёмкие и трудоёмкие в изготовлении из всех деталей механических устройств.

По функциональному назначению корпусные детали подразделяются на следующие группы:

- несущие;
- основные защитные, предохраняющие от механических и других внешних воздействий, и обеспечивающие безопасную эксплуатацию;
- защитные (пыле-, брызго-, водозащитные и т.п.).

26.2. Конструкция корпуса редуктора зубчатой передачи

Корпус редуктора служит для правильного взаимного положения зубчатых передач, восприятия усилий, возникающих при работе, защиты от загрязнений, как ёмкость для смазки. Корпусы редукторов обычно бывают литыми (чугун), реже сварными. Конструктивные особенности корпусных деталей в их взаимосвязи с элементами передачи целесообразно рассмотреть на примере устройства цилиндрического редуктора (рис. 26.1).

При конструировании толщину стенки для выполнения технологии литья и необходимой жёсткости рекомендуется определять по формуле

$$\delta = 2(0,1T)^{0,25} \geq 6\text{мм},$$

где T – вращающий момент на тихоходном валу, Нм.

Элементы корпуса должны сопрягаться одинаковым радиусом $r \approx 0,25\delta$.

Толщина стенки редуктора может быть также определена в зависимости от приведённого габарита $L_{\text{пр}}$ корпуса (табл. 26.1)

$$L_{\text{пр}} = (2L + B + H)/4, \quad (26.1)$$

где L , B , H – соответственно длина, ширина и высота корпуса.

Таблица 26.1 Зависимость толщины стенок литого корпуса редуктора от приведённого габарита

$L_{\text{пр}}$, мм	0,4	0,75	1,0	1,5	1,8
δ , мм	6	8	10	12	14

Толщина стенки крышки составляет примерно $0,8\delta$ (где δ – толщина стенки картера).

Для повышения жёсткости корпус усиливают рёбрами, расположенными по осям опор валов. Поперечные сечения рёбер жёсткости имеют литейный уклон.

Корпус редуктора для удобства монтажа выполняют разъёмным (рис. 26.1). Нижняя часть 1 называется *картером*, а верхняя – *крышкой* 2. По всему контуру разъёма предусмотрены *фланцы*, в которых размещаются *болты* 3, стягивающие картер и крышку (диаметры болтов принимаются примерно равными $d_b \approx (T)^{1/3}$). Толщина каждого фланца по разъёму составляет примерно $1,5\delta$. Основные стяжные болты 3 стремятся максимально приблизить к *подшипникам* 18, 19, 20 для увеличения жёсткости соединения. Остальные болты 4 располагают с шагом $(12 \div 15)d_b$. Ширина самого фланца $(2,7d_b)$ устанавливается такой, чтобы на ней свободно размещались гайки и была бы возможность поворота гаечного ключа на 60° .

Плотность прилегания крышки к картеру достигается соответствующей обработкой рабочей поверхности фланцев (шабрение и шлифовка); при сборке на поверхности наносят герметик.

В крышке редуктора с целью заливки масла в картер (картерная смазка), а так же для визуального контроля за правильностью зацепления зубьев колёс 15 и 16 с зубьями валов-шестерней 13 и 12 при регулировке имеется окно, закрытое прямоугольной крышкой 6 с *отдушиной* 7. Отдушина служит для выравнивания давления внутри корпуса с атмосферным, что предотвращает утечку масла через уплотнения. При картерной смазке венец колеса быстроходной ступени погружается в масло на высоту зуба. При вращении колёс

масло попадает, как в зону зацепления, так и в подшипники. Уровень масла контролируют щупом 9, на котором имеются риски, соответствующие риски.

Для слива отработанного масла в картере имеется отверстие заглушенное пробкой 8 и медной шайбой, подкладываемой под головку винта-пробки 8. Масло сливают без разборки редуктора – стекание происходит благодаря дну картера, выполненному с уклоном примерно $1,5^\circ$ в сторону спускного отверстия. Для полного удаления отработанного масла возле отверстия на дне делается местное углубление.

Герметичность быстроходного вала 12, промежуточного вала-шестерни 13, тихоходного вала 14 и их точная установка относительно корпуса обеспечивается закладными глухими крышками 22, 23 и закладными сквозными крышками 21 и 24. Герметичность прохождения консольных частей быстроходного и тихоходного валов через сквозные крышки 21 и 24 достигается применением войлочных колец (вид В) и уплотнительных манжет (вид Е). Во избежание попадания в подшипники продуктов износа зубчатых колёс, а так же излишнего полива маслом, подшипники расположенные ближе к зубчатому колесу закрываются маслозащитными шайбами 25 и 26.

В данной конструкции редуктора валы установлены наиболее распространённым способом – «в распор». Для осевой фиксации валов использованы распорные втулки 17. Между вращающимися деталями должны быть предусмотрены определённые зазоры: между торцами зубчатых колёс $\Delta_1 \approx 0,5\delta$, между торцом колеса и внутренними деталями корпуса $\Delta_2 \approx 0,8\delta$, между вершинами зубьев колёса и корпусом $\Delta_3 \approx 1,25\delta$.

Для размещения подшипников на боковых стенках корпуса предусмотрены *приливы*. Отверстия под подшипники растачивают в сборке картера 1 с крышкой 2, при этом точность стыковки этих двух деталей обеспечивается установочными *штифтами* 5.

Для крепления редуктора к раме или плите привода в нижней части картера 1 делают фланцы, в которых имеются отверстия под болты (диаметры болтов $d_{\text{ф}} \approx 1,25d_6$). Число фундаментных болтов при $a_{\text{т}} \leq 250$ мм $z_{\text{ф}}=4$, при $a_{\text{т}} > 250$ мм $z_{\text{ф}}=6$. Опорная поверхность корпуса редуктора (вид Б) выполнена в виде четырёх обработанных *платиков* 27. Поскольку поверхности под головками болтов или под шайбами должны быть перпендикулярны к осям отверстий их обрабатывают: фрезеруют если есть пластик, зенкуют для гладких фланцев.

Для перемещения крышки и картера используют проушины 10 и крючья 11.

Подобные рекомендации справедливы и для корпусов червячных редукторов.

26.3. Контрольные вопросы

1. Какие детали относятся к корпусным? Какие функции они выполняют?
2. Каким основным критериям работоспособности должны удовлетворять корпусные детали?
3. На какие группы делятся корпусные детали по функциональному назначению?
4. Какими способами изготавливают корпуса редукторов? Как называются основные части корпуса?
5. Какие рекомендации используют для назначения размеров под болты во фланцевых соединениях редукторов?
6. Для чего в крышке редуктора устраивается отдушина?
7. Каким образом обеспечивается герметичность редуктора?
8. Какая система смазки наиболее распространена в общемашиностроительных редукторах? Как заливается новое масло, и как удаляется отработанное масло?
9. Что предусматривается для крепления редуктора к раме или фундаменту?

Варианты контрольных заданий.

В соответствии с рабочей программой учебной дисциплины «Техническая механика» по разделам «Соппротивление материалов» и «Детали машин» студенты должны выполнить и защитить шесть контрольных работ. Защита каждой контрольной работы проводится в форме собеседования, в результате которого преподаватель должен убедиться в том, что студент удовлетворительно усвоил материал соответствующей темы. Контрольные работы посвящены следующим темам:

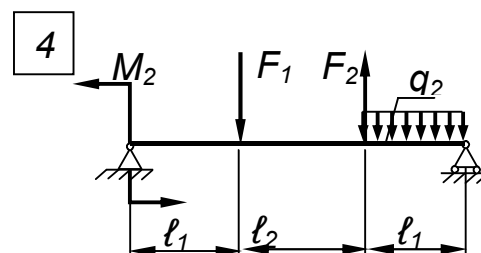
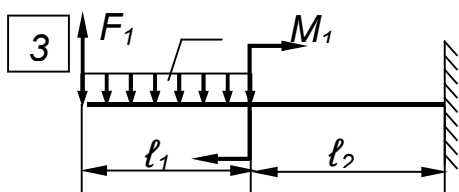
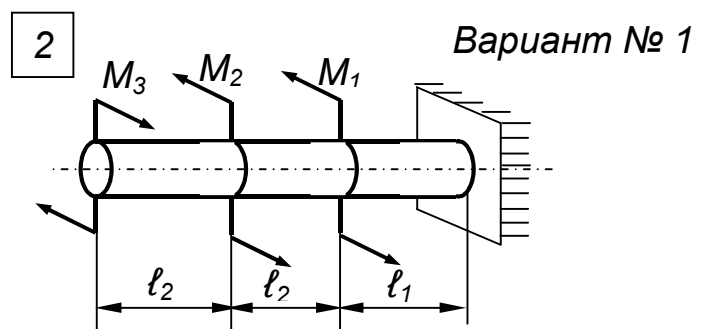
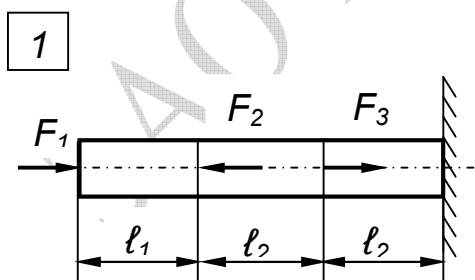
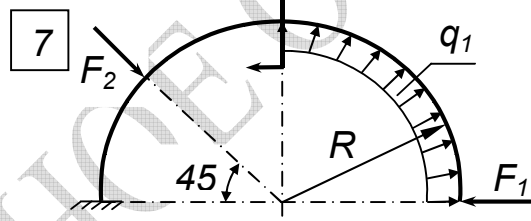
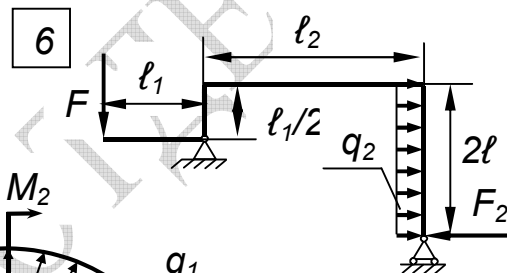
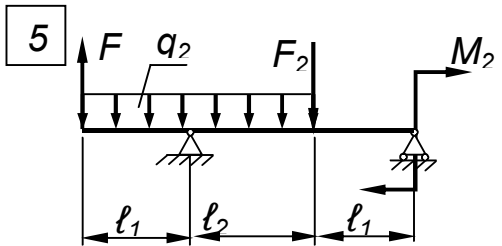
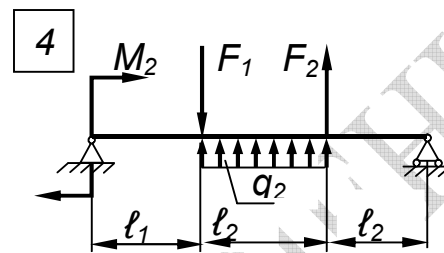
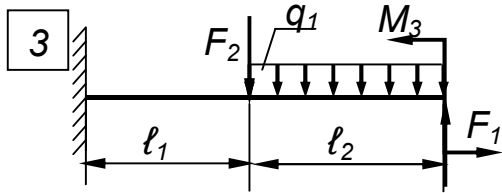
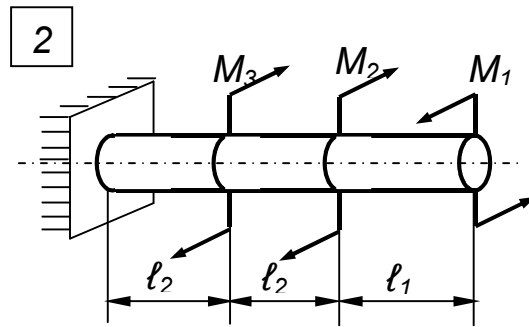
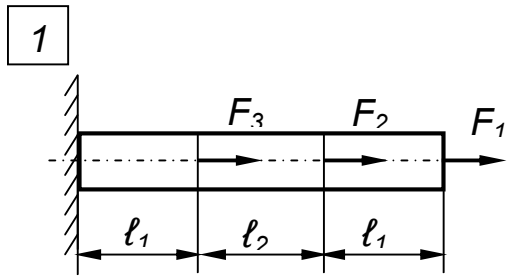
- контрольная работа № 1 – «Внутренние силовые факторы в поперечных сечениях стержней»;
- контрольная работа № 2 – «Расчет статически определимых балок на прочность и жесткость»;
- контрольная работа № 3 – «Метод сил»;
- контрольная работа № 4 – «Кинематический расчёт привода»;
- контрольная работа № 5 – «Расчёт элементов механических передач»;
- контрольная работа № 6 – «Расчет соединений деталей».

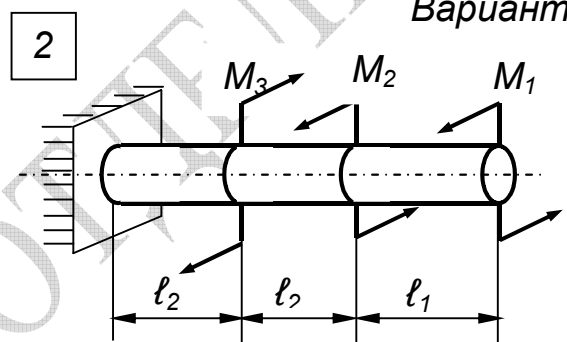
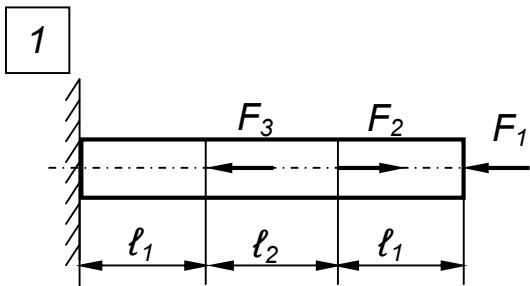
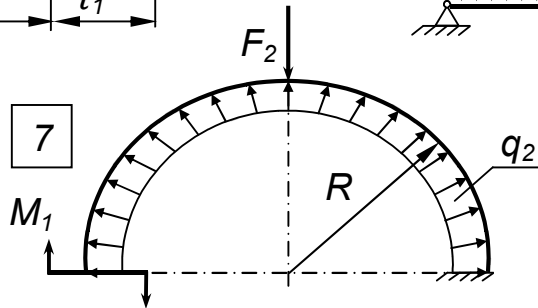
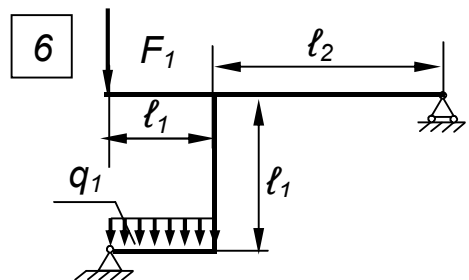
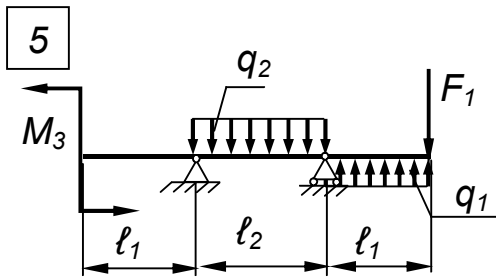
Задание по каждой контрольной работе включает две части: расчетную схему и численные значения исходных данных. Расчетные схемы представлены в виде рисунков, исходные данные – в виде числовых таблиц. Номер задания для конкретного студента определяется преподавателем. Для студентов заочного отделения или при дистанционном обучении вариант исходных данных для выполнения каждой контрольной работы определяется шифром. Шифром являются три последние цифры номера зачетной книжки: *A* – последняя цифра зачетной книжки, *B* – предпоследняя и *C* – третья от конца. В зависимости от этих цифр из таблицы исходных данных выбираются соответствующие строки.

В законченном виде работы оформляются так же, как и контрольные задания по первой части пособия.

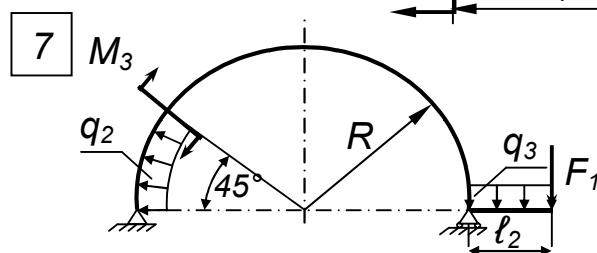
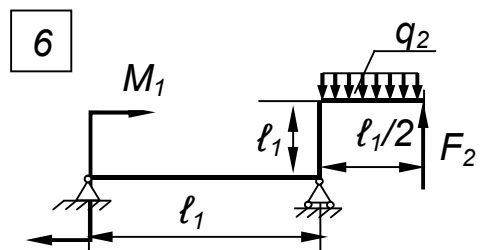
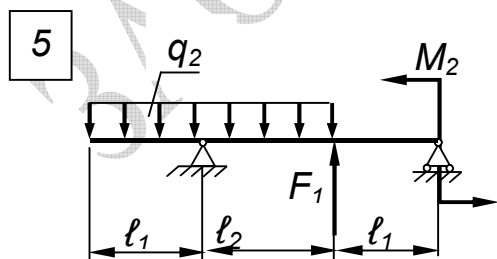
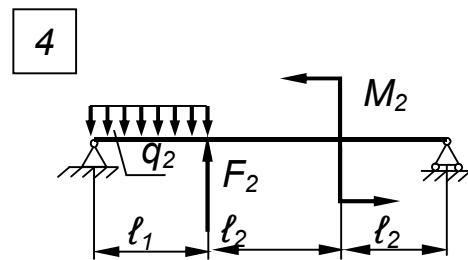
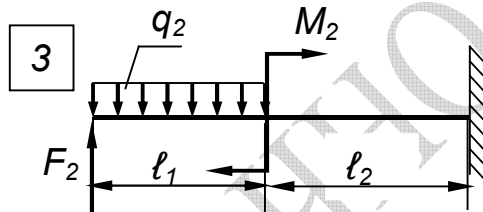
Контрольная работа № 1.

Для стержней, нагруженных заданными нагрузками, построить эпюры внутренних силовых факторов. Численные значения нагрузок заданы в таблице, приведенной после вариантов расчетных схем. Примеры подробного решения аналогичных задач рассмотрены в главе 2.

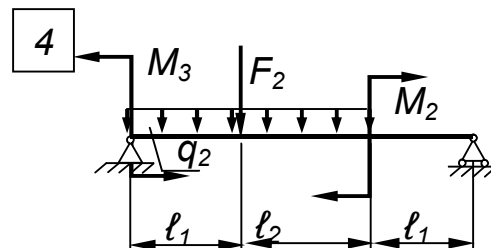
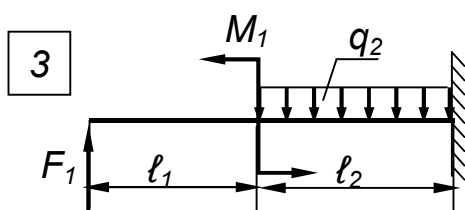
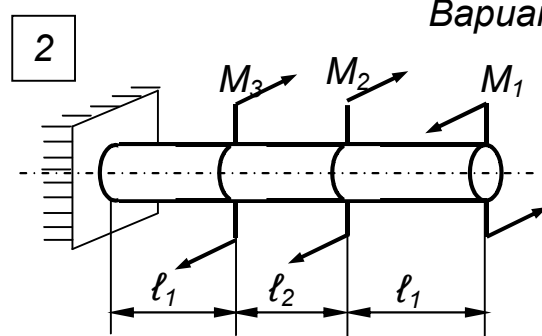
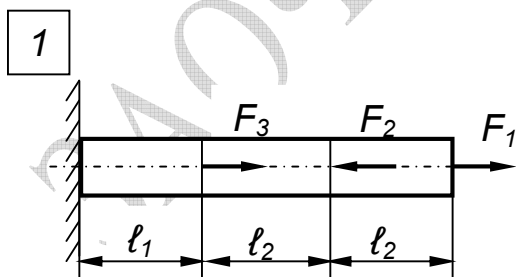
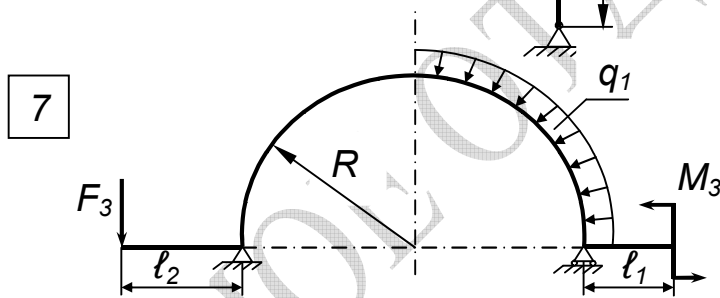
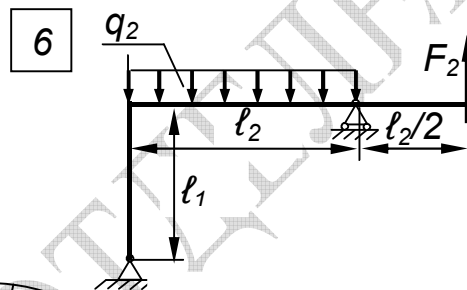
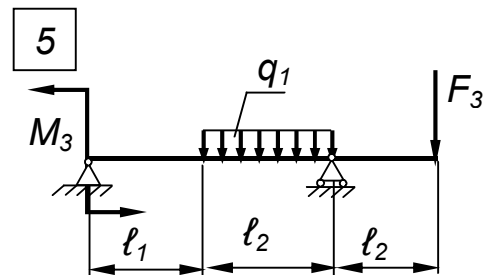
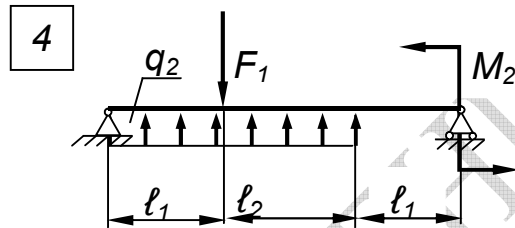
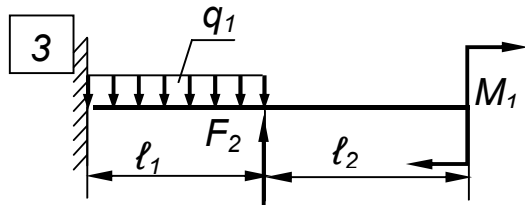
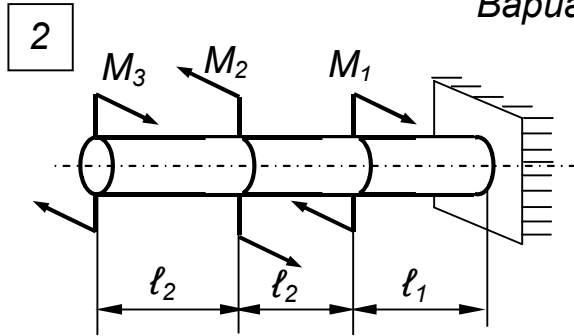
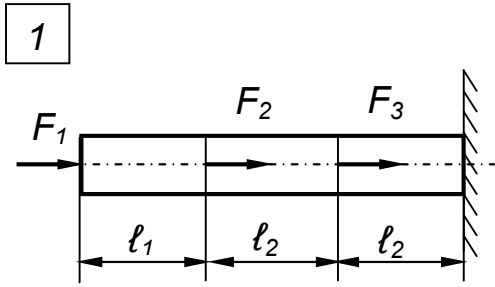




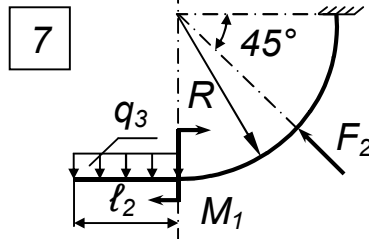
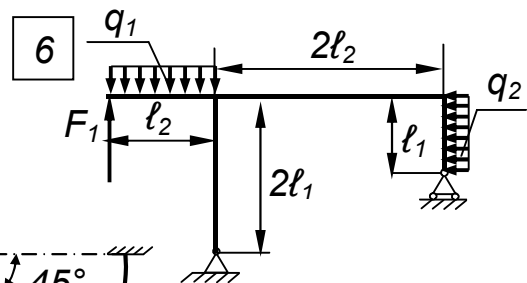
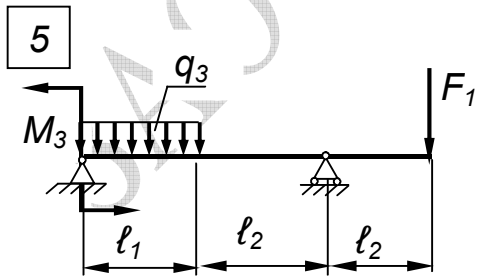
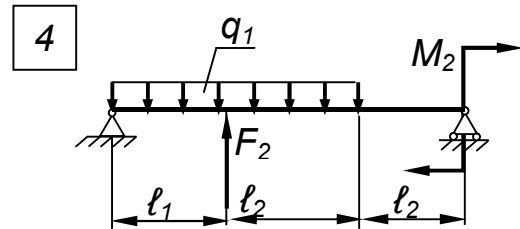
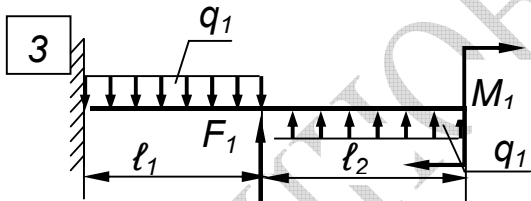
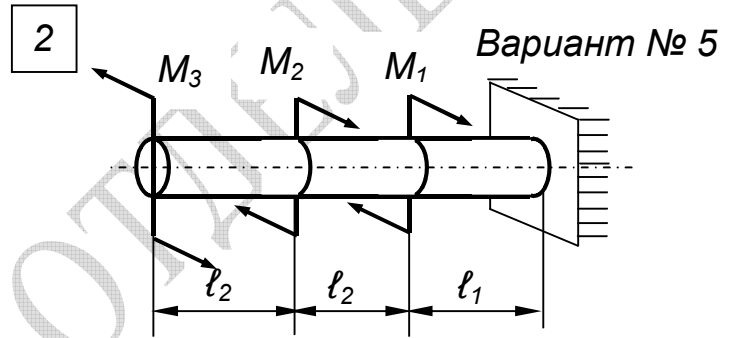
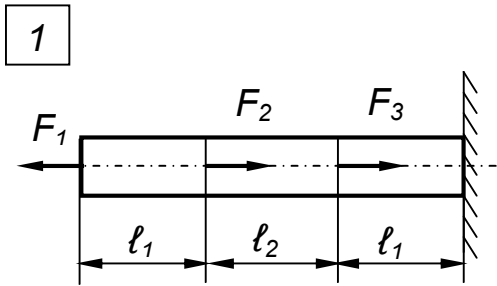
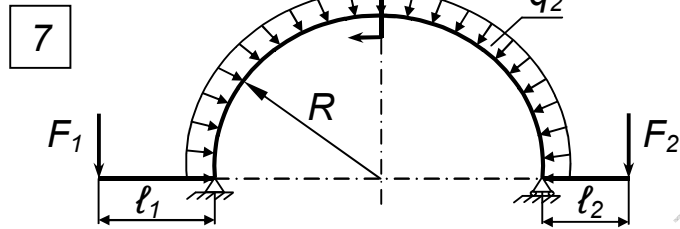
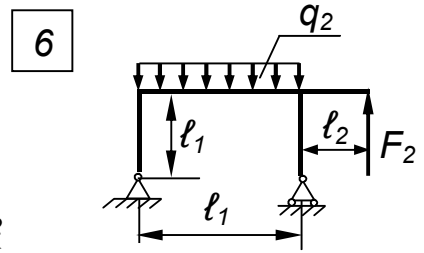
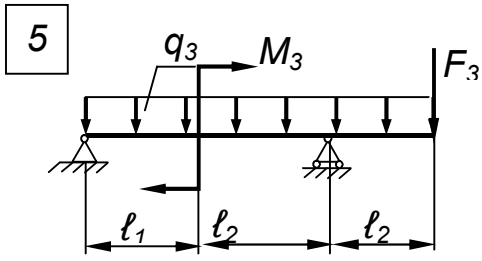
Вариант № 2



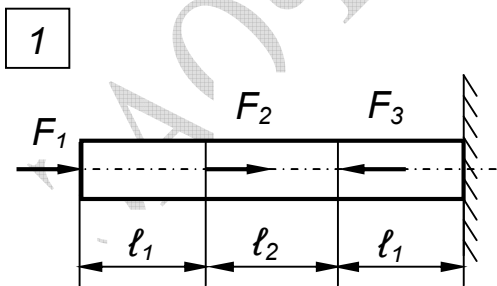
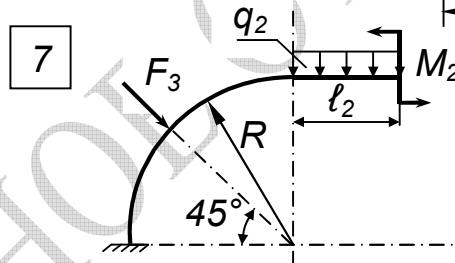
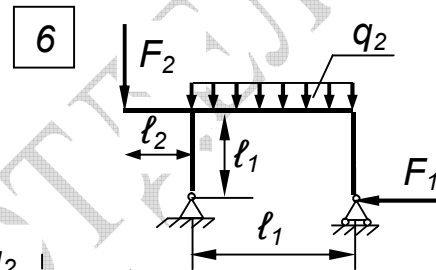
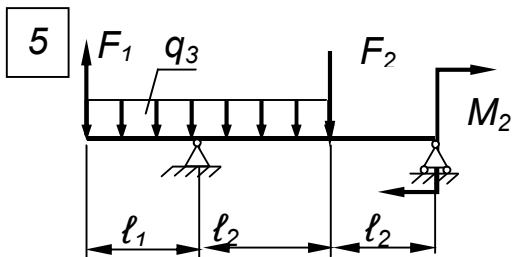
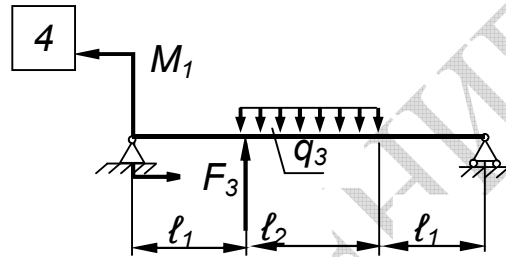
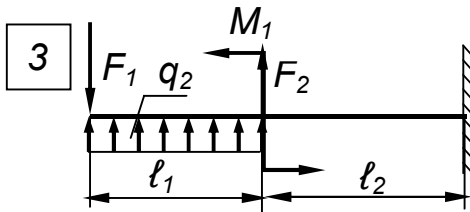
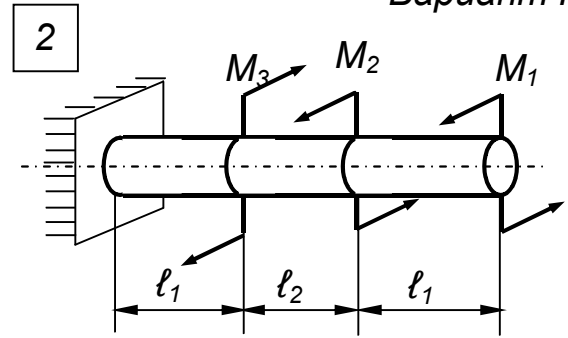
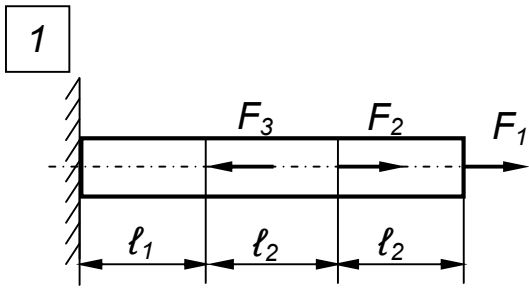
Вариант № 3



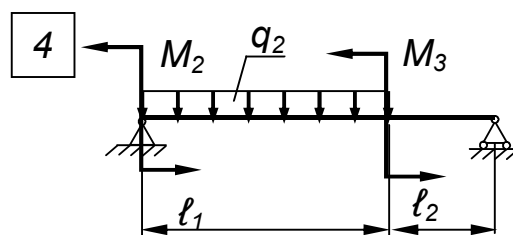
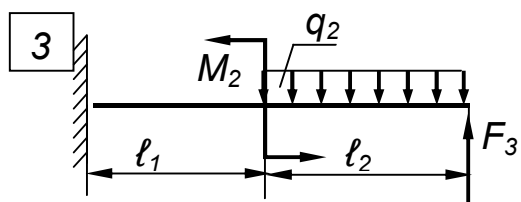
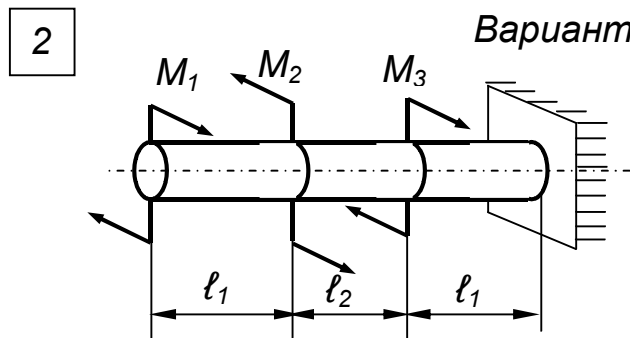
Вариант № 4



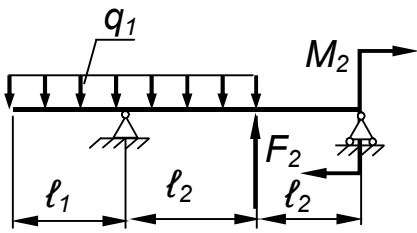
Вариант № 6



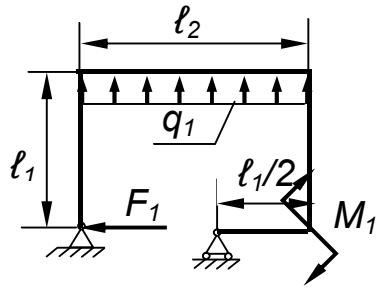
Вариант № 7



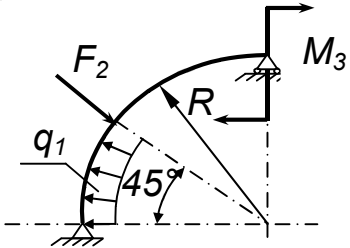
5



6

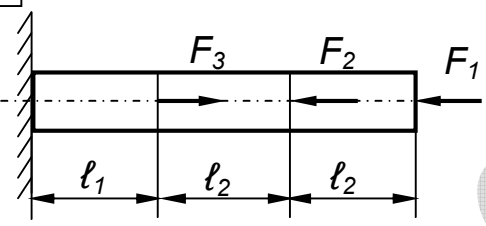


7

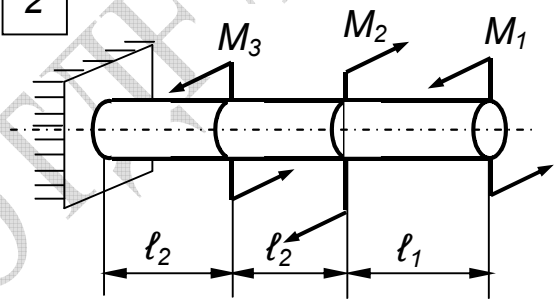


Вариант № 8

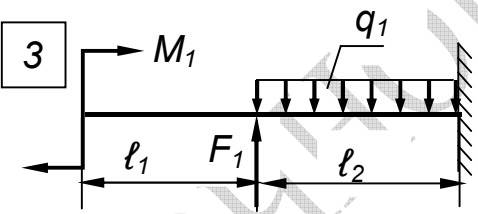
1



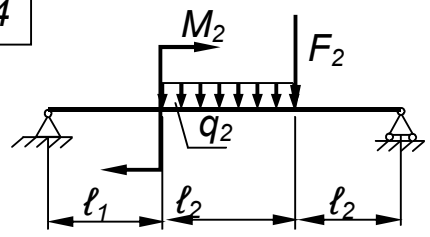
2



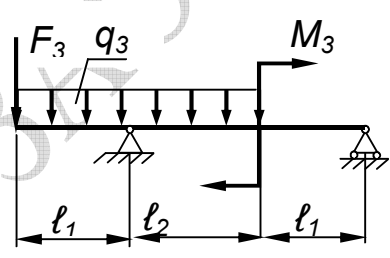
3



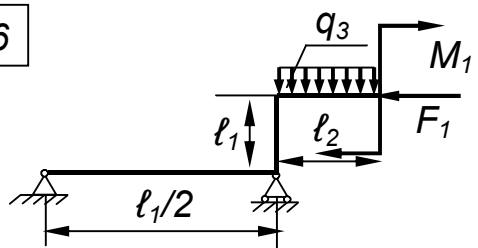
4



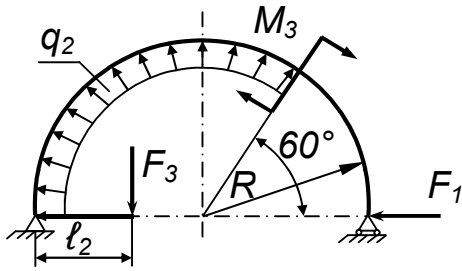
5

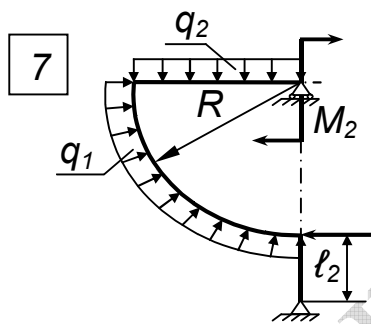
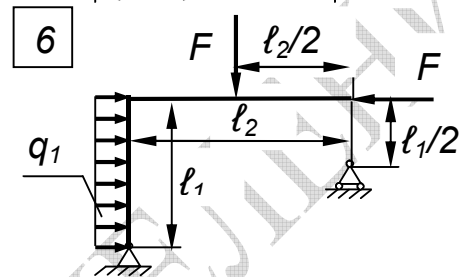
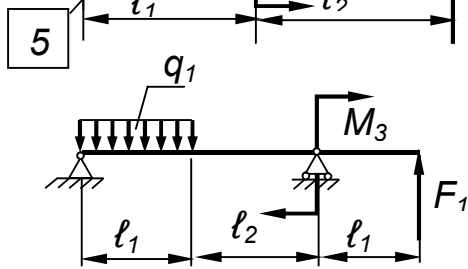
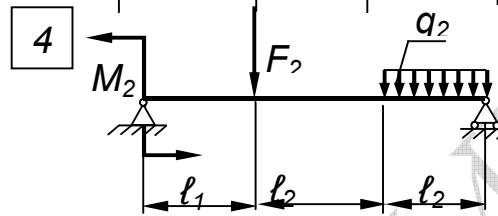
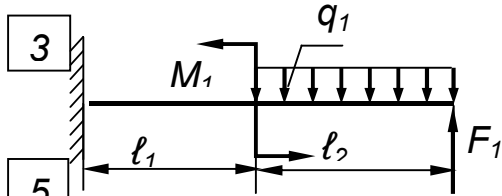
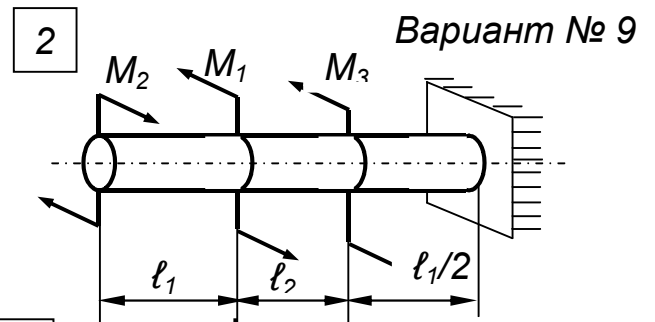
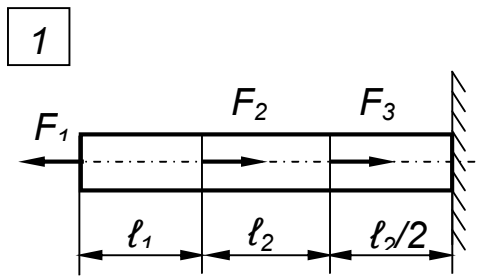


6



7





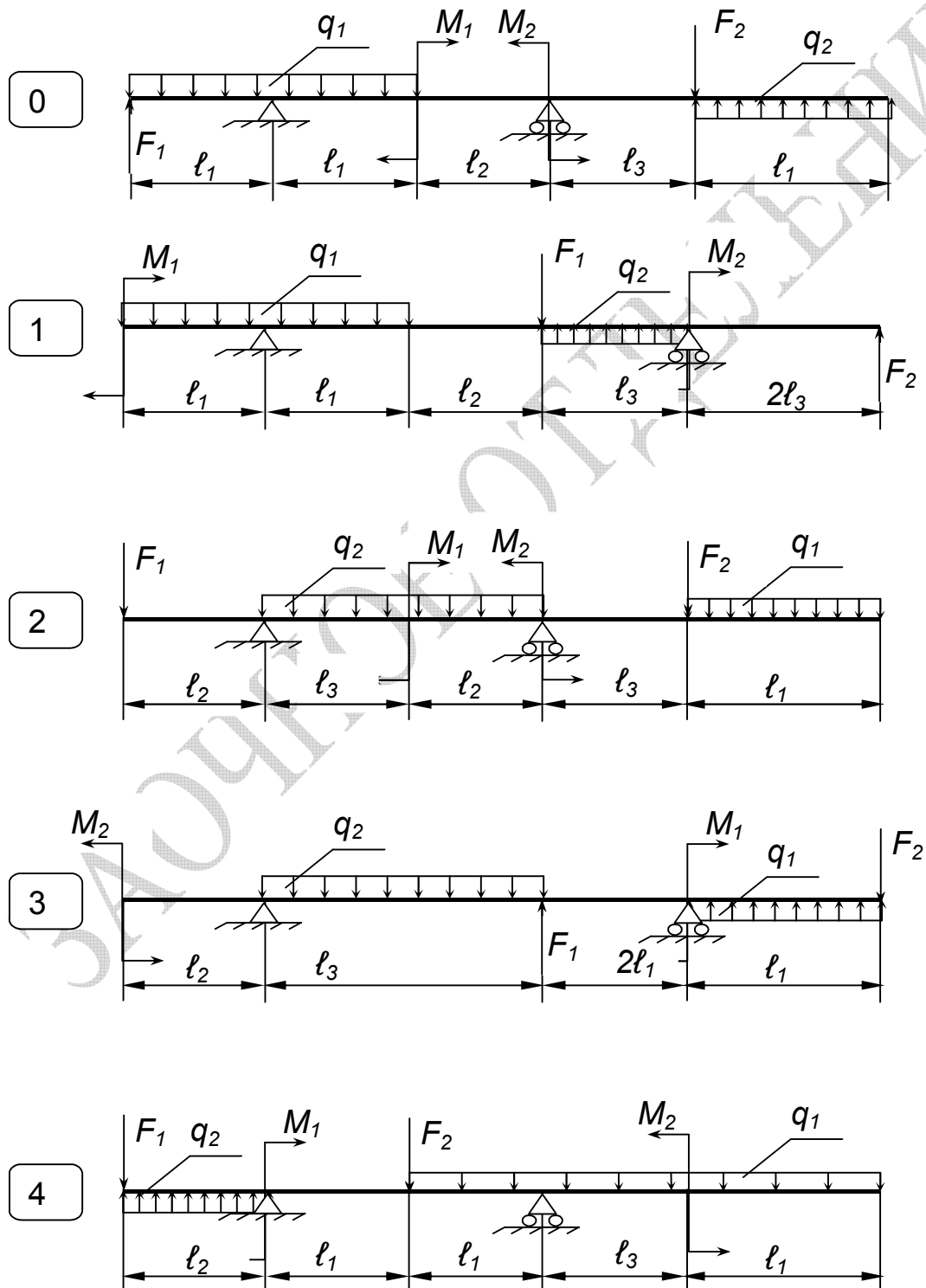
Исходные данные

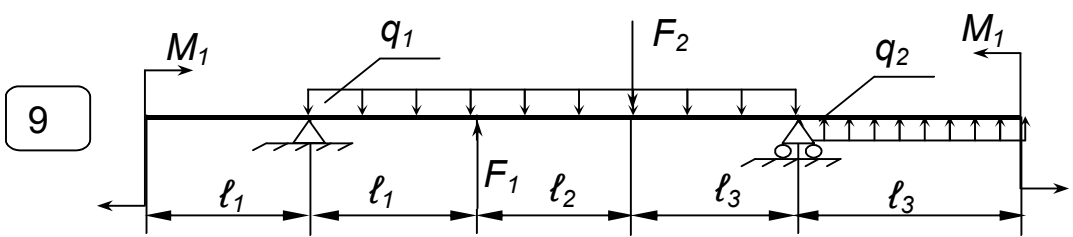
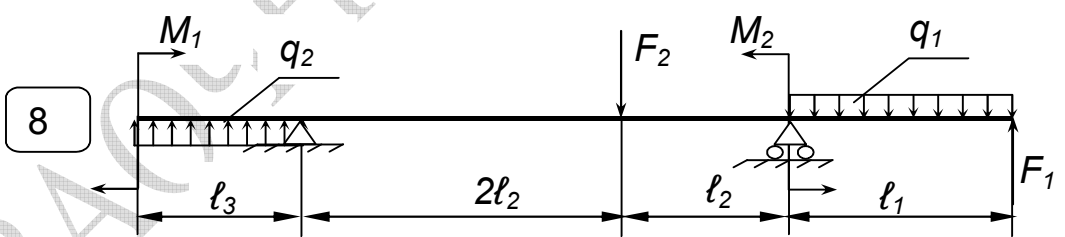
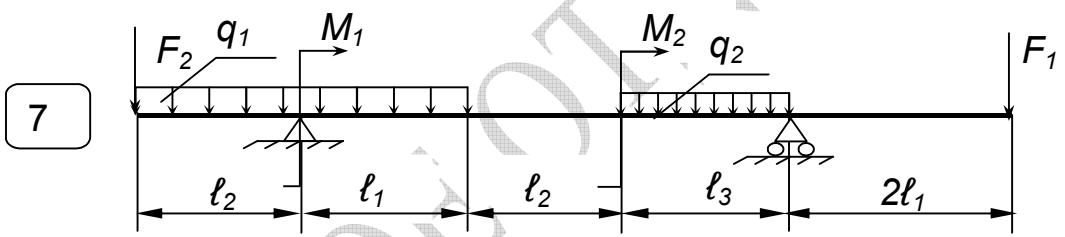
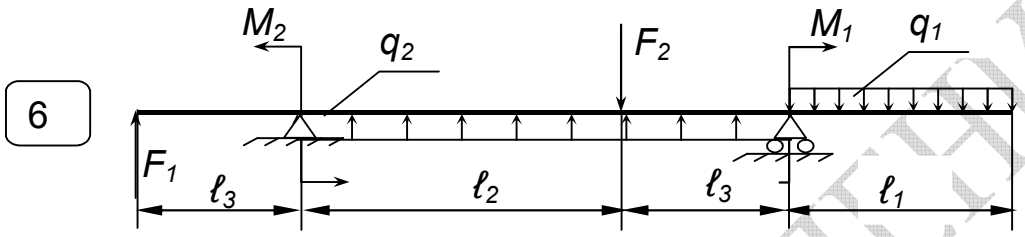
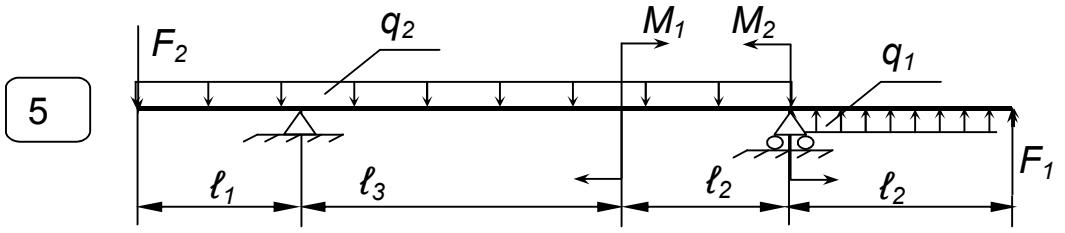
A	q_1 , кН/М	F_1 , кН	M_1 , кН М	l_1 , М	B	q_2 , кН/М	F_2 , кН	M_2 , кН М	l_2 , М	№ варианта	C	q_3 , кН/М	F_3 , кН	M_3 , кН М	R, М
0	5	20	50	1	0	10	20	80	2	0	0	20	40	40	2
1	40	30	60	1	1	25	30	10	2	1	1	25	80	70	1
2	10	10	20	1	2	6	30	30	2	2	2	20	10	40	3
3	5	10	30	1	3	10	50	10	4	3	3	20	30	50	2
4	8	40	10	3	4	10	10	15	4	4	4	30	40	20	4
5	5	20	20	2	5	15	70	5	4	5	5	25	40	10	3
6	20	30	40	2	6	20	50	20	3	6	6	15	60	25	5
7	30	50	40	3	7	30	30	10	1	7	7	40	80	50	2
8	25	5	80	2	8	10	15	60	2	8	8	25	90	40	1
9	15	25	10	2	9	20	30	80	4	9	9	5	20	20	4

Контрольная работа № 2.

Провести полный расчет по критериям прочности и жесткости статически определимой балки. Численные значения нагрузок заданы в таблице, приведенной после вариантов расчетных схем. Пример подробного решения аналогичной задачи рассмотрен в параграфе 5.8.

Расчетные схемы





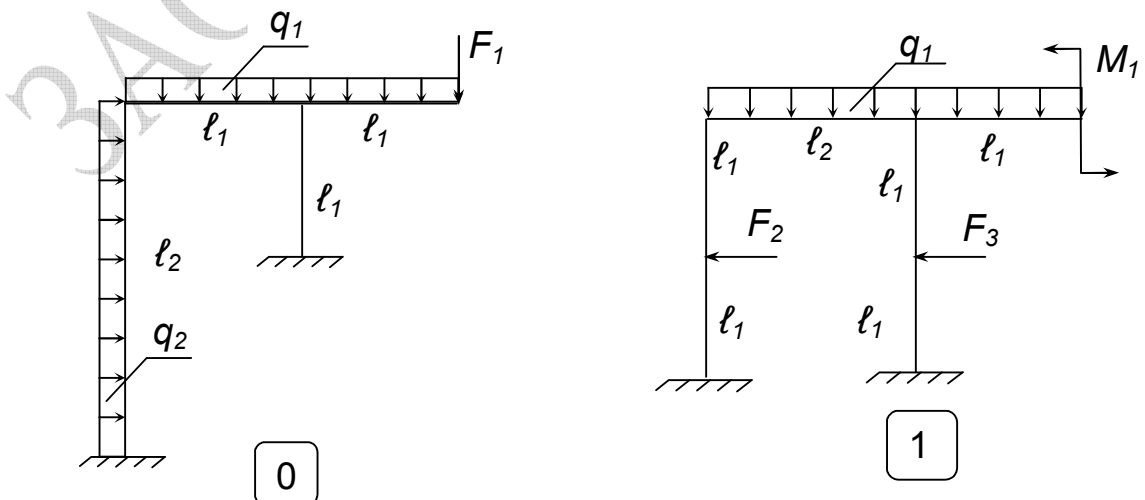
Исходные данные

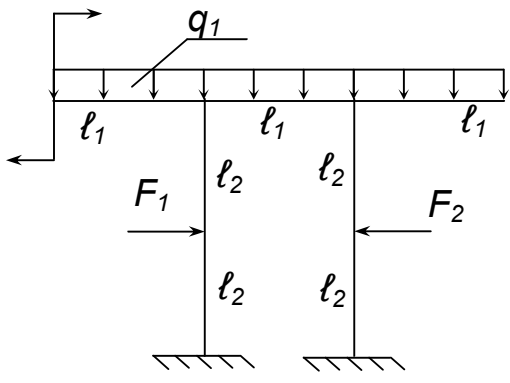
A	q_1	F_1	M_1	l_1 , М	B	q_2	F_2	M_2	l_2 , М	C	№ СХЕМЫ	l_3 , М
0	5	20	50	1	0	10	20	80	2	0	5	2
1	40	30	60	1	1	25	30	10	2	1	9	1
2	10	10	20	1	2	6	30	30	2	2	3	3
3	5	10	30	1	3	10	50	10	4	3	2	2
4	8	40	10	3	4	10	10	15	4	4	8	4
5	5	20	20	2	5	15	70	5	4	5	1	3
6	20	30	40	2	6	20	50	20	3	6	7	5
7	30	50	40	3	7	30	30	10	1	7	4	2
8	25	5	80	2	8	10	15	60	2	8	0	1
9	15	25	10	2	9	20	30	80	4	9	6	4

Контрольная работа № 3.

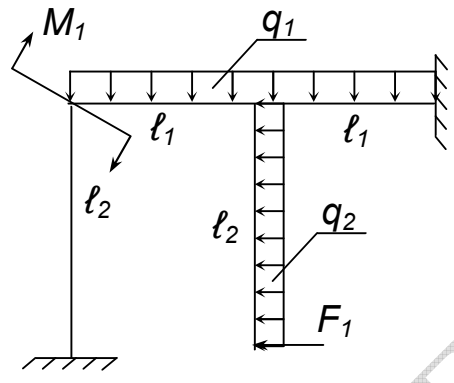
Раскрыть статическую неопределимость с помощью метода сил и построить эпюры внутренних силовых факторов в стержневых системах, приведенных ниже. Пример подробного решения аналогичной задачи рассмотрен в параграфе 8.3.

Расчетные схемы

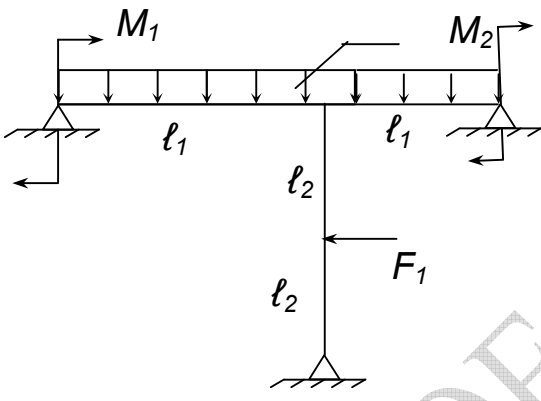




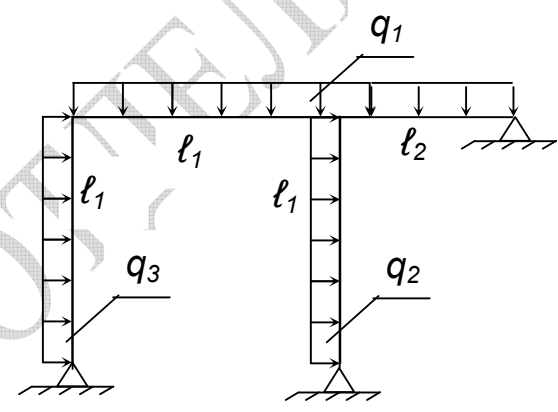
2



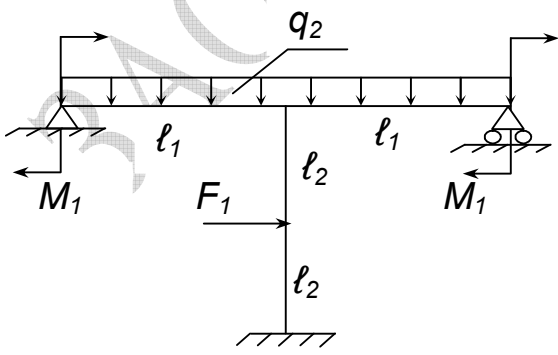
3



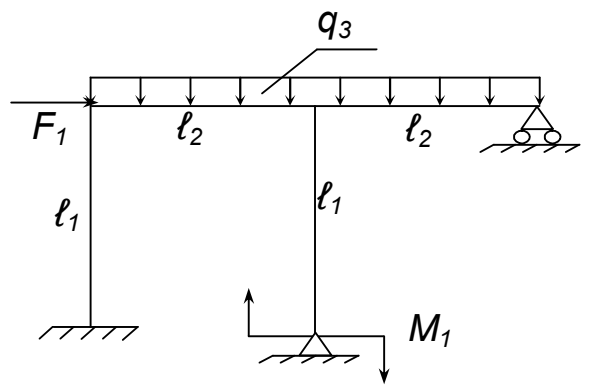
4



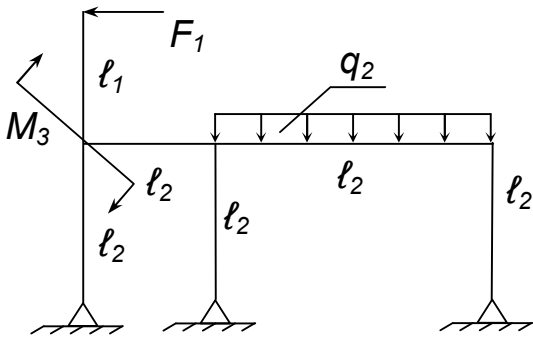
5



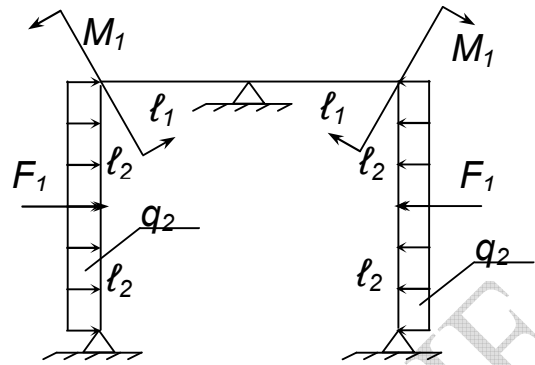
6



7



8



9

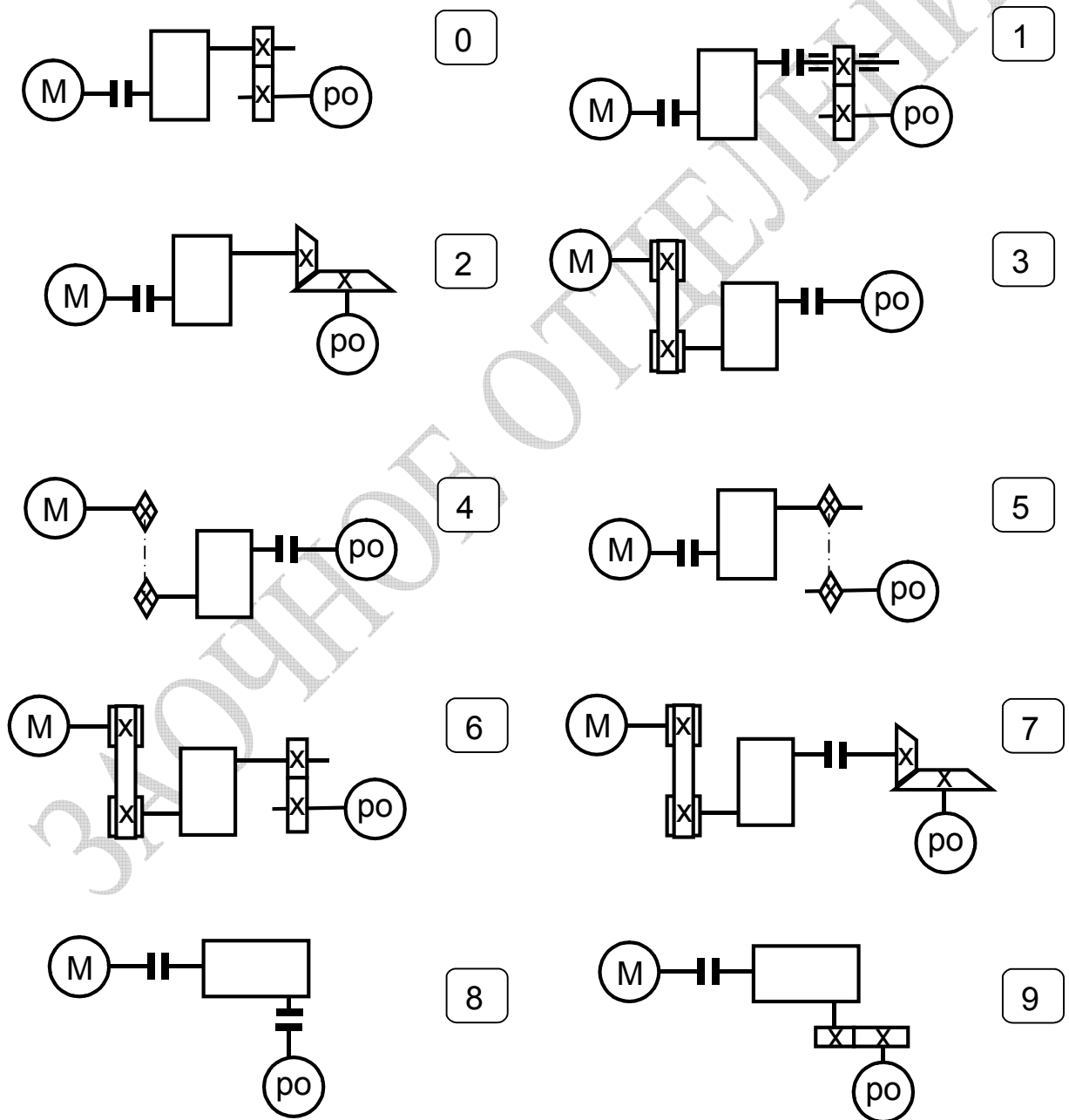
Исходные данные

Номер	$q_1,$ кН/м	$q_2,$ кН/м	$q_3,$ кН/м	$F_1,$ кН	$F_2,$ кН	$F_3,$ кН	$M_1,$ кН·м	$M_2,$ кН·м	$M_3,$ кН·м	$l_1,$ м	$l_2,$ м	$l_3,$ м
0	5	10	20	20	20	40	50	80	40	1	2	2
1	40	25	25	30	30	80	60	10	70	1	2	1
2	10	6	20	10	30	10	20	30	40	1	2	3
3	5	10	20	10	50	30	30	10	50	1	4	2
4	8	10	30	40	10	40	10	15	20	3	4	4
5	5	15	25	20	70	40	20	5	10	2	4	3
6	20	20	15	30	50	60	40	20	25	2	3	5
7	30	30	40	50	30	80	40	10	50	3	1	2
8	25	10	25	5	15	90	80	60	40	2	2	1
9	15	20	5	25	30	20	10	80	20	2	4	4

Контрольная работа №4. Кинематический расчёт привода

В задаче требуется выполнить кинематический расчёт привода, т.е. определить угловые скорости ω_i и вращающие моменты T_i на всех валах привода машины по следующим исходным данным: схеме привода, частоте вращения рабочего органа $n_{p.o.}$, мощности потребляемой рабочим органом $N_{p.o.}$, частоте вращения вала двигателя n_d .

Расчетные схемы приводов



Исходные данные

A	№ схемы	Тип машины	$n_{p.o}$, об/мин	B	$N_{p.o}$, кВт	C	n_d , об/мин
0	0	Мельница шаровая	4	0	8,6	0	1000
1	1	Сушилка барабанная	3	1	12	1	750
2	2	Бегуны мокрого помола	3	2	28	2	1500
3	3	Смеситель	80	3	5	3	3000
4	4	Транспортер цепной	10	4	2,6	4	1000
5	5	Шнек смесителя	29	5	3,5	5	1500
6	6	Вакуум-фильтр барабанный	6	6	4,4	6	750
7	7	Смеситель центробежный	70	7	14	7	3000
8	8	Каландр	24	8	31	8	1500
9	9	Бегуны сухого помола	80	9	12	9	3000

Расшифровка индексов элементов привода на схемах

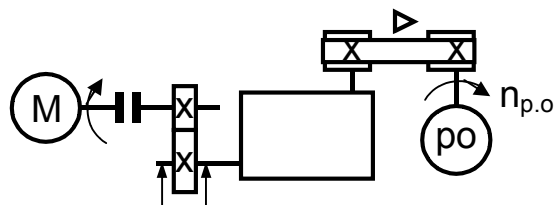
б - быстроходный	пр – привод
д - двигатель	р.о – рабочий орган
з.ц – зубчатая цилиндрическая	р.к – клиноременная передача
з.к – зубчатая коническая	р.п – плоскоременная передача
м.к – муфта компенсирующая	с – синхронный
п.к - подшипник качения	т – тихоходный
п.с – подшипник скольжения	ц.п – цепная передача
ред – редуктор	ф.п – фрикционная передача

Пример решения

Пусть требуется выполнить кинематический расчет закаточного устройства ИРО-1612 (см. рисунок) $N_{p.o}=8,2$ кВт, $n_{p.o}=12,5$ об/мин, $n_d=3000$ об/мин.

Расчетное значение передаточного отношения привода:

$$i_{np} = \frac{n_d}{n_{p.o}} = \frac{3000}{12,5} = 240$$



Из схемы устройства следует, что привод состоит из: фрикционной передачи, конического или коническо–цилиндрического редуктора и клиноременной передачи, Приложение Д. Общее передаточное отношение привода с учетом его структуры имеет вид:

$$i_{np} = i_{p.k} i_{ред} i_{ф.п} .$$

где $i_{p.k}$, $i_{ф.п}$, $i_{ред}$ – передаточные отношения клиноременной, фрикционной передач и редуктора.

Назначаем передаточные отношения дополнительных передач (кроме редуктора) по рекомендациям, приведенным в Приложении Е так, чтобы $i \leq i_{max}$. Например, для клиноременной передачи максимальное передаточное отношение равно 6, принимаем: $i_{p.k} = 4,0$; для фрикционной передачи – 7 принимаем: $i_{ф.п} = 5,0$.

Тогда предварительное значение передаточного отношения редуктора с учетом принятых $i_{p.k}$, $i_{ф.п}$:

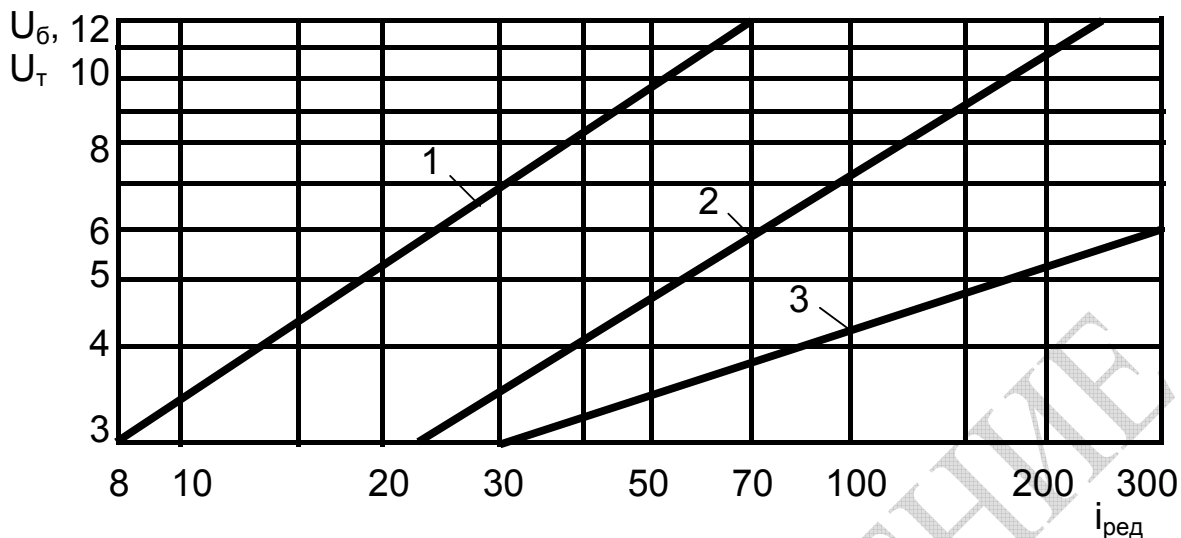
$$i_{ред} = \frac{i_{np}}{i_{p.k} i_{ф.п}} = \frac{240}{4 \cdot 5} = 12$$

По величине $i_{ред}$ уточняем его тип в соответствии с приведенной таблицей: двухступенчатый коническо-цилиндрический ($i_{ред max} = 28$).

Характеристики типовых конструкций передач, муфт, подшипников

Наименование механизма		N_{max} , кВт	i_{max}	КПД, %
Открытые механические передачи, механизмы				
Зубчатые передачи: (одна ступень)	цилиндрическая	50 000	10	93
	коническая	40 000	5	88
	червячная ($Z_1=1$)	60	40	30
Ременные передачи с ремнем	клиновым	50	6	95
	плоским	50	6	96
Цепная передача		120	8	94
Фрикционная передача		20	7	80
Подшипники качения (скольжения)				99 (98)
Муфты компенсирующие		50 000		97÷99
Редукторы				
Цилиндрические	одноступенчатый	50 000	8	98
	двухступенчатый		40	96
	трехступенчатый		400	94
Конический одноступенчатый		40 000	5	96
Коническо-цилиндрический	двухступенчатый		28	94
	трехступенчатый		180	91

Определяем передаточные числа ступеней: быстроходной ступени по графику, $U_6 = 3,8$. Вычисляем передаточное отношение для тихоходной ступени: т.к. передаточное отношение редуктора равно произведению передаточных чисел отдельных ступеней:



- 1 – U_b для двухступенчатого редуктора,
- 2 – U_b для трехступенчатого редуктора,
- 3 – U_n для трехступенчатого редуктора

Разбивка передаточного отношения по ступеням

$$i_{ред} = U_T U_b, \text{ то}$$

$$U_T = \frac{i_{ред}}{U_b} = \frac{12}{3,8} = 3,16$$

Окончательно по Приложению Е принимаем стандартные значения передаточных чисел: $U_b = 3,15$; $U_T = 3,55$. Таким образом, $i_{ред} = 3,15 \cdot 3,55 = 11,18$.

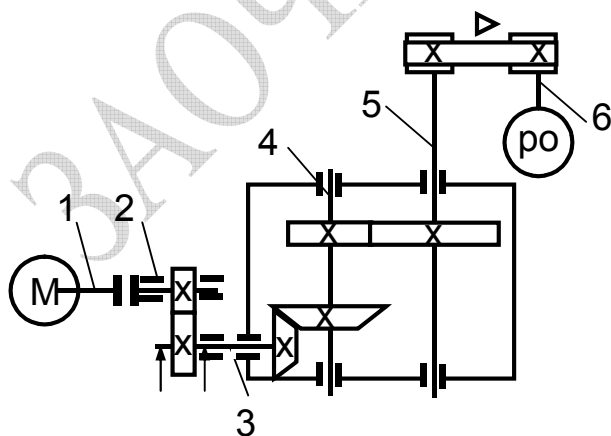
Перед выполнением расчетов составляется полная

кинематическая схема привода с нумерацией валов от электродвигателя к рабочему органу (см. рис).

Общий КПД привода $\eta_{пр}$ в соответствии:

$$\eta_{пр} = \eta_{р.к} \eta_{ред} \eta_{ф.п} \eta_{мф} = 0,95 \cdot 0,94 \cdot 0,80 \cdot 0,98 = 0,70.$$

Определяем потребляемую мощность двигателя:



$$N_{\text{д}} = \frac{N_{\text{р.о}}}{\eta_{\text{пр}}} = \frac{8200}{0,70} = 11712 \text{ В} = 11,7 \text{ кВт}.$$

По таблице приложения к данной задаче с учетом частоты вращения $n_{\text{д}} = 3000$ об/мин выбираем двигатель с номинальной мощностью $N \geq N_{\text{д}}$: 4А16082 с параметрами: $N = 15,0$ кВт; КПД = 88,0%.

Определяем угловые скорости и моменты на валах привода.

Угловая скорость 1-го вала (вала двигателя):

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_{\text{д}}}{30} = \frac{\pi \cdot 3000}{30} = 314 \text{ рад/с}.$$

Поскольку для клиноременной и фрикционной передачи:

$\omega_{\text{вых}} = \frac{\omega_{\text{вх}}}{i}$, а для зубчатых и червячных передач: $\omega_{\text{вых}} = \frac{\omega_{\text{вх}}}{U_i}$, то угловая скорость 2-го и следующих валов:

$$\omega_2 = \omega_1 = 314 \text{ рад/с};$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_2}{i_{\text{р.к}}} = \frac{314}{4,0} = 78,5 \text{ рад/с}; \quad \omega_4 = \frac{\omega_3}{U_6} = \frac{78,5}{3,15} = 24,93 \text{ рад/с};$$

$$\omega_5 = \frac{\omega_4}{U_{\text{т}}} = \frac{24,93}{3,55} = 7,02 \text{ рад/с}; \quad \omega_6 = \frac{\omega_5}{i_{\text{ф.п}}} = \frac{7,02}{5,0} = 1,4 \text{ рад/с}.$$

Таким образом, расчетное значение $n_{\text{р.о}}$:

$$n_{\text{р.о}}^{\text{р}} = \frac{30 \cdot \omega_6}{\pi} = \frac{30 \cdot 1,4}{\pi} = 13,4 \text{ об/мин}.$$

Отклонение от заданного значения:

$$\Delta n_{\text{р.о}} = \frac{n_{\text{р.о}}^{\text{р}} - n_{\text{р.о}}}{n_{\text{р.о}}^{\text{р}}} \cdot 100 = \frac{13,4 - 12,5}{13,4} \cdot 100 = 6,72\%$$

Т.к. отклонение от заданного значения $n_{\text{р.о}}$ больше допустимого 4%, следовательно, необходимо изменить разбивку по ступеням.

Принимаем $i_{\text{р.к}} = 5$; $i_{\text{ф.п}} = 5,0$, $U_6 = 3,15$; $U_{\text{т}} = 3,15$, тогда

$$\omega_1 = 314 \text{ рад/с}; \quad \omega_2 = \omega_1 = 314 \text{ рад/с}; \quad \omega_3 = 62,8 \text{ рад/с};$$

$$\omega_4 = 19,94 \text{ рад/с}; \quad \omega_5 = 6,33 \text{ рад/с}; \quad \omega_6 = 1,27 \text{ рад/с};$$

$$n_{\text{р.о}} = 12,09 \text{ об/мин}; \quad \Delta n_{\text{р.о}} = 3,39\%.$$

Крутящий момент 1-го вала (вала двигателя):

$$T_1 = \frac{N_d}{\omega_1} = \frac{11712}{314} = 37,3 \text{ Нм.}$$

Крутящий момент 2-го и следующих валов:

$$T_2 = T_1 \eta_{мф} = 37,3 \cdot 0,98 = 36,55 \text{ Нм;}$$

$$T_3 = T_2 i_{р.к} \eta_{р.к} = 36,55 \cdot 5,0 \cdot 0,95 = 173,63 \text{ Нм;}$$

$$T_4 = T_3 U_б \eta_{1ред} = 173,63 \cdot 3,15 \cdot 0,96 = 525,05 \text{ Нм;}$$

$$T_5 = T_4 U_т \eta_{2ред} = 525,05 \cdot 3,15 \cdot 0,98 = 1620,84 \text{ Нм;}$$

$$T_6 = T_5 i_{ф.н} \eta_{ф.н} = 1620,84 \cdot 5,0 \cdot 0,8 = 6483,35 \text{ Нм.}$$

Результаты расчета заносятся в таблицу.

№ вала	ω , рад/с	T, Н·м
1	314	37,3
2	314	36,6
3	62,8	173,63
4	19,94	525,05
5	6,33	1620,8
6	1,27	6483,4

Приложение к задаче 4

Электродвигатели серии 4А закрытые обдуваемые

N, кВт	$n_d = 3000$ об/мин		$n_d = 1500$ об/мин		$n_d = 1000$ об/мин		$n_d = 750$ об/мин	
	типо-размер	КПД, %	типо-размер	КПД, %	типо-размер	КПД, %	типо-размер	КПД, %
0,25	4A56B2	68,0	4A63A4	68,0	4A63B6	59,0	4A71B8	56,0
0,55	4A63B2	73,0	4A71A4	70,5	4A71B6	67,5	4A80B8	64,0
1,10	4A71B2	77,5	4A80A4	75,0	4A80B6	74,0	4A90L8	70,0
2,20	4A80B2	83,0	4A90L4	80,0	4A100L6	81,0	4A112M8	76,5
4,00	4A10082	86,5	4A100L4	84,0	4A112M6	82,0	4A132S8	83,0
7,50	4A112M2	87,5	4A132S4	87,5	4A132M6	85,5	4A160S8	86,0
11,0	4A132M2	88,0	4A132M4	87,5	4A160S6	86,0	4A160M8	87,0
15,0	4A16082	88,0	4A160S4	88,5	4A160M6	87,5	4A180M8	87,0
22,0	4A18082	88,5	4A180S4	90,0	4A200M6	90,0	4a200L8	38,5
37,0	4A200M2	90,0	4A200M4	91,0	4A225M6	91,0	4A250S8	90,0

Условные обозначения элементов кинематики на схемах

	Вал с подшипниками качения или скольжения
	Муфта (без уточнения типа)
	Передача клиноременная (\blacktriangleright - знак для клинового, — - для плоского ремня)
	Передача фрикционная с цилиндрическими катками
	Передача зубчатая цилиндрическая
	Передача зубчатая коническая
	Передача цепная
	Редуктор цилиндрический одно – или многоступенчатый (блок – схема)
	Редуктор конический или коническо – цилиндрический (блок – схема)
	Электродвигатель
	Рабочий орган исполнительного механизма

Номинальные передаточные отношения редукторов и передаточные числа их ступеней

1-й ряд	1,0	1,25	1,6	2,0	2,5	3,15	4,0	5,0	6,3	8,0	10,0
2-й ряд	1,12	1,4	1,8	2,24	2,8	3,55	4,5	5,6	7,1	9,0	11,2
1-й ряд	12,5	16	20	25	31,5	40	50	63	80	100	и т.д.
2-й ряд	14	18	22,4	28	35,5	45	56	71	90	112	и т.д.

Контрольная работа №5. Расчёт элементов механических передач

Задача 5.1 Расчёт цилиндрической зубчатой передачи

Определить геометрические параметры тихоходной ступени двухступенчатого цилиндрического редуктора (схема передачи 5, см. рис. 14.24); производство мелкосерийное. Проектные и проверочные расчёты выполнить по условиям контактной и изгибной усталостной прочности.

Исходными данными являются: характеристика передачи – передача общего машиностроения, не требующая особой точности; передаточное число ступени u ; частота вращения вала шестерни n_1 ; максимальный вращающий момент на валу колеса T_2 ; ресурс работы t ; степень точности передачи средняя (см. табл. 14.6), режим нагружения (номер режима нагружения, пояснения см. рис. 14.32.).

Исходные данные

A	u	t, час	B	n ₁ , об/мин	C	T ₂ ·10 ⁻³ , Нмм	Режим нагружения	
							наименование	№ режима
0	2	8000	0	146	0	1000	Тяжёлый	1
1	3,15	10000	1	192	1	2000	Средний	2
2	4	4000	2	284	2	3000	Нормальный	3
3	5,6	2000	3	570	3	4000	Лёгкий	4
4	6,3	5000	4	420	4	5000	Особо лёгкий	5
5	2	10000	5	352	5	2000	Тяжёлый	1
6	3,15	6000	6	102	6	6000	Средний	2
7	4	1000	7	154	7	1000	Нормальный	3
8	5,6	7000	8	460	8	3000	Лёгкий	4
9	6,3	3000	9	512	9	4000	Постоянный	0

Порядок решения задачи

1). Выбор материала колёс (см. раздел 14.6).

Для индивидуального и мелкосерийного производства передач назначаются материалы колёс из стали с твёрдостью ≤ 350 HB (число твёрдости по Бринеллю), зубья которых хорошо прирабатываются. Твёрдость шестерни на 30÷50 единиц выше верхнего предела твёрдости колеса, например, возможны следующие пары материалов (см. табл. 14.5):

сталь 40X, HB₁= 269 ÷ 302, улучшение;

сталь 45, HB₂= 235 ÷ 262, улучшение;

сталь 40ХН, HB₁= 235 ÷ 262, улучшение;

сталь 45, HB₂= 179 ÷ 207, нормализация;

сталь 35ХМ, HB₁= 235 ÷ 262, улучшение;

сталь 35, HB₂= 169 ÷ 192, нормализация.

Окончательно для выбранного материала шестерни и колеса принимают среднюю твёрдость из указанных диапазонов (например, $HВ_1=(269+302)/2=285,5$; $HВ_2=(235+262)/2=248,5$).

2). Определение допускаемых контактных напряжений $[\sigma_H]$ (см. раздел 14.14).

Допускаемые напряжения первоначально определяют отдельно для шестерни $[\sigma_{H1}]$ и колеса $[\sigma_{H2}]$.

2.1) Расчётное число циклов нагружения (наработка) (14.58) для шестерни и колеса

$$N_{K1} = 60n_1ct, N_{K2} = 60n_2ct/u,$$

здесь $c=1$; t – общее число часов работы.

2.2) Эквивалентное число циклов нагружения шестерни и колеса (14.59) при расчётах по контактным напряжениям в зависимости от режима нагружения (см. табл. 14.12, а также пояснения к рис. 14.32)

$$N_{HE1} = \mu_H N_{K1}, N_{HE2} = \mu_H N_{K2}.$$

2.3) Абсцисса точки перегиба кривой усталости (рис. 14.29) рассчитывается по формуле (14.57)

$$N_{GH1} = 30 (HВ_1)^{2,4}, N_{GH2} = 30 (HВ_2)^{2,4}.$$

2.4) Коэффициент долговечности (см. комментарии к формуле 14.56)

$$Z_{N1} = \sqrt[6]{N_{GH1}/N_{HE2}}, Z_{N2} = \sqrt[6]{N_{GH2}/N_{HE2}}, \text{ при условии } 1 \leq Z_N \leq Z_{Nmax}.$$

2.5) Пределы контактной выносливости для шестерни σ_{Hlim1} и колеса σ_{Hlim2} (табл. 14.11).

2.6) Допускаемые контактные напряжения для шестерни и колеса (см. комментарии к формуле (14.55), в частности, принимаем $Z_R Z_V = 1$)

$$[\sigma_{H1}] = \frac{\sigma_{Hlim1}}{S_{H1}} Z_{N1} Z_R Z_V, [\sigma_{H2}] = \frac{\sigma_{Hlim2}}{S_{H2}} Z_{N2} Z_R Z_V.$$

2.7) Допускаемые контактные напряжения $[\sigma_H]$ при расчёте косозубой передачи на усталость окончательно принимаются по условию (14.61).

3). Определение допускаемых напряжений изгиба для шестерни $[\sigma_{F1}]$ и колеса $[\sigma_{F2}]$ (см. раздел 14.14).

3.1) Эквивалентное число циклов нагружения шестерни и колеса (14.59) при расчётах на изгиб в зависимости от режима нагружения (см. табл. 14.12, а также пояснения к рис. 14.32)

$$N_{FE1} = \mu_F N_{K1}, N_{FE2} = \mu_F N_{K2}.$$

3.2) Коэффициенты долговечности (см. комментарии к формуле 14.63)

$$Y_{N1} = \sqrt[6]{4 \cdot 10^6 / N_{FE1}}, Y_{N2} = \sqrt[6]{4 \cdot 10^6 / N_{FE2}} \text{ при условии } 1 \leq Y_N \leq Y_{Nmax}.$$

3.3) Пределы изгибной выносливости σ_{Flim} и коэффициенты безопасности S_F для зубьев (см. табл. 14.13).

3.4) Расчёт допускаемых напряжений изгиба для шестерни и колеса (см. комментарии к формуле (14.62), в частности, для зубофрезерования и шлифования $Y_{R1} = Y_{R2} = 1$, для одностороннего приложения нагрузки $Y_{A1} = Y_{A2} = 1$, принимаем для поковок и штамповок $Y_{Z1} = Y_{Z2} = 1$)

$$[\sigma_{F1}] = \frac{\sigma_{Flim}}{S_{F1}} Y_{N1} Y_{R1} Y_{A1} Y_{Z1}, [\sigma_{F2}] = \frac{\sigma_{Flim}}{S_{F2}} Y_{N2} Y_{R2} Y_{A2} Y_{Z2}.$$

4). Проектный расчёт закрытой передачи по условию контактной прочности активных поверхностей зубьев (см. раздел 14.12).

4.1) Определение коэффициентов, входящих в расчётное уравнение (14.40):

- коэффициент ширины венца в данной задаче $\psi_{bd} \approx 1,1$ (см. табл. 14.10 и комментарии к ней);
- коэффициент ширины колеса относительно межосевого расстояния ψ_{ba} (14.41);
- для косозубой и шевронной передачи $K_a = 430$ (14.40);
- предварительное значение коэффициентов (распределения нагрузки между зубьями $K_{H\alpha} \approx 1,1$ (рис. 14.22,а); концентрации нагрузки $K_{H\beta} \approx 1,1$ (рис. 14.24, б); динамичности нагрузки $K_{Hv} \approx 1,07$ (табл. 14.8))
- коэффициент нагрузки в расчётах на контактную усталость $K_H = K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv}$ (14.28).

4.2) Расчёт предварительного межосевого расстояния из условия контактной усталости активных поверхностей зубьев (14.40)

$$a_w = K_a (u \pm 1) \sqrt[3]{\frac{K_H T_2}{\psi_{ba} u^2 [\sigma_H]^2}} ;$$

полученное значение межосевого расстояния a_w округляется до значения из стандартного ряда (см. раздел 14.2).

4.3) Определение ширины шестерни и колеса

$$b_2 = \psi_{ba} a_w, \quad b_1 \approx 1,12 b_2.$$

4.4) Определение модуля m_n зацепления (14.42÷14.44) и округление полученного значения до стандартной величины (табл. 14.2).

4.5) Расчёт угла наклона линии зуба для косозубого колеса

$$\beta_{\min} = \arcsin(3,5m/b_2).$$

4.6) Вычисление суммарного числа зубьев для косозубой передачи

$z_\Sigma = z_2 + z_1 = 2a_w \cos \beta_{\min} / m_n$ – результат округляется в меньшую сторону до целого числа.

4.7) Определение чисел зубьев шестерни z_1 и колеса z_2

$$z_1 = z_\Sigma / (u+1) \geq 17 \text{ – округляется до ближайшего целого числа;}$$

$$z_2 = z_\Sigma - z_1.$$

4.8) Определение фактического передаточного числа $u = z_2/z_1$ (отклонение от заданного не должно превышать 5%).

4.9) Уточнение действительной величины угла наклона зуба для косозубой передачи (расчёт до четвёртого знака после запятой; перевод значения в градусы, минуты, секунды)

$$\beta = \arccos(z_\Sigma m) / (2a_w).$$

4.10) Расчёт геометрических размеров цилиндрической передачи (табл. 14.4).

5). Проверка зубьев по фактическим контактным напряжениям.

5.1) Определение фактической окружной скорости (м/с)

$$V = (2\pi a_w n_1) / ((u+1)60);$$

5.2) Уточнение значения степени точности передачи в соответствии с фактической окружной скоростью (табл. 14.6).

5.3) Уточнение коэффициентов $K_{H\alpha}$, $K_{H\beta}$, K_{Hv} в соответствии с фактической скоростью и степенью точности.

5.4) Уточнение коэффициента нагрузки K_H (14.28).

5.5) Определение коэффициентов, входящих в формулу для проверочного расчёта колёс передачи на контактную усталость (14.38):

- коэффициент, учитывающий форму сопряжённых поверхностей $Z_H = 1,77 \cos \beta$;

- коэффициент, учитывающий механические свойства материалов зубчатых колёс $Z_M = 275 \text{ МПа}^{1/2}$;

- коэффициент торцового перекрытия ε_α (14.23) и коэффициент, учитывающий суммарную длину контактных линий, для косозубых передач

$$Z_\varepsilon = \sqrt{1/\varepsilon_\alpha}.$$

5.6) Проверка передачи на контактную усталость (14.38); допускается недогрузка передачи ($\sigma < [\sigma_H]$) не более 10% и перегрузка ($\sigma > [\sigma_H]$) до 5%; если условие прочности (14.38) не выполняется, то следует изменить ширину венца колеса b_2 , если этого недостаточно, то необходимо, либо увеличить межосевое расстояние a_w , или назначить другие материалы колёс, или другую термообработку, пересчитать допускаемые напряжения.

6) Проверка зубьев шестерни и колеса на сопротивление изгибной усталости.

6.1) Определение эквивалентного числа зубьев z_{v1}, z_{v2} (14.21).

6.2) Определение, входящих в расчётное уравнение (14.51), коэффициентов:

- формы зуба Y_{F1}, Y_{F1} (рис. 14.27);

- учитывающего влияние многопарности зацепления

$$Y_\varepsilon = 1/\varepsilon_\alpha;$$

- учитывающего влияние наклона зуба

$$Y_\beta \approx 1 - \beta^\circ/140.$$

6.3) Расчёт фактических изгибных напряжений σ_{F1} и σ_{F2} , проверка прочности зубьев на сопротивление изгибной усталости (14.51); если условие не выполняется, то необходимо увеличит модуль m , пересчитать число зубьев z и повторить расчёт.

Задача 5.2 Подбор подшипников ротора вентилятора

Подобрать по каталогу шарикоподшипники для двух опорного вала ротора вентилятора при известных осевой F_a и F_r нагрузках в наиболее нагруженной опоре и заданной долговечности $[L_h]$. Вычертить эскиз подшипникового узла.

Исходные данные

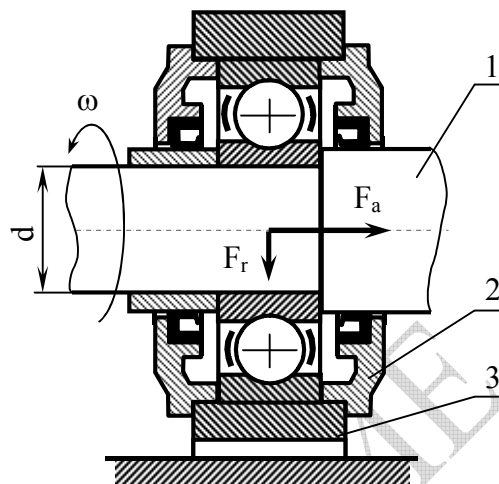
A	d, мм	Fr, кН	B	Fa, кН	C	ω , рад/с	$[L_h]$, час	t, °C
0	65	2,0	0	0,8	0	151	8000	20
1	45	3,0	1	1,0	1	131	10000	80
2	60	4,0	2	0,6	2	102	5000	100
3	55	5,0	3	2,0	3	84	6000	50
4	40	6,0	4	3,0	4	64	7000	130
5	80	8,0	5	0,5	5	84	4000	150
6	50	2,0	6	0,4	6	102	6500	30
7	35	9,0	7	1,2	7	310	8500	60
8	30	7,0	8	0,3	8	70	6300	110
9	70	1,5	9	1,5	9	205	4500	30

Порядок решения задачи

- 1) По диаметру цапфы вала принимается типоразмер подшипника лёгкой серии.
- 2) Определяется эквивалентная нагрузка на подшипник.
- 3) Определяется долговечность подшипника L_h .
- 4) Проверяется условие применимости выбранного типоразмера подшипника

$$L_h \geq [L_h].$$

Если условие не выполняется, то расчёт повторяют для подшипника другой серии.



Шарикоподшипниковая опора вала вентилятора: 1 - вал, 2 - крышка с манжетным уплотнением, 3 - корпус подшипника.

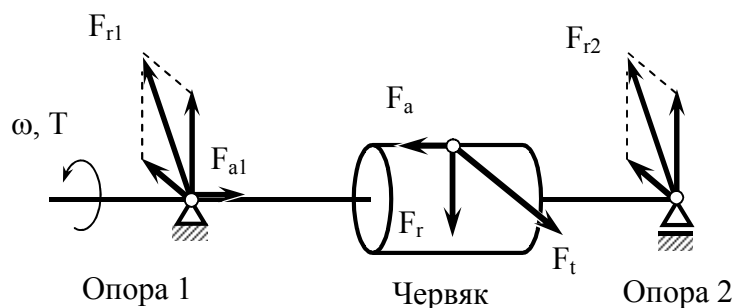
Рисунок

Задача 5.3 Расчёт долговечности конических роликоподшипников

Определить расчётную долговечность L_h конических роликоподшипников на валу червяка в приводе щёковой дробилки. Вычертить расчётную схему и эскиз подшипника.

Исходные данные								
A	Индекс подшипника	F_{r1} , кН	ω рад/с	B	F_{r2} , кН	C	F_a , кН	t, °C
0	7312	1,2	151	0	0,5	0	3,0	30
1	7304	1,3	40	1	0,1	1	0,8	60
2	7305	2,6	75	2	0,2	2	1,2	80
3	7607	1,1	102	3	0,3	3	2,5	30
4	7608	1,5	64	4	0,6	4	4,2	60
5	7610	2,0	40	5	1,0	5	6,0	105
6	7609	3,0	75	6	0,4	6	3,6	140
7	7304	1,4	102	7	0,9	7	1,8	80
8	7305	1,9	151	8	0,7	8	1,0	105
9	7308	2,5	140	9	0,8	9	4,5	130

Примечание. Для заданной расчётной схемы осевые нагрузки на подшипники с учётом дополнительных сил (22.14) $F_{a1}=F_a+S_2$; $F_{a2}=S_1$



F_t, F_a, F_r – окружная, осевая, радиальная силы в зацеплении червяка редуктора

Рисунок

Контрольная работа № 6. Расчет соединений деталей

Задача 6.1 Расчёт фланцевого соединения с плоской прокладкой из паронита

Определить необходимое количество шпилек для обеспечения герметичности фланцевого соединения (рис. А). Определить рабочую длину нарезной части резьбового стержня

Исходные данные

A	P_y , МПа	B	d, мм	C	D_y	D_n	D_r	D_6	l_0	L
					мм					
0	1,6	0	M20	0	400	412	428	495	30	54
1	1,0	1	M16	1	450	464	482	550	28	55
2	2,5	2	M18	2	500	522	542	600	40	70
3	1,6	3	M22	3	600	614	636	700	38	68
4	2,5	4	M20	4	700	728	754	810	48	85
5	1,0	5	M16	5	800	818	848	905	35	90
6	1,6	6	M20	6	900	922	958	1015	45	100
7	1,0	7	M18	7	1000	1020	1056	1105	45	98
8	1,6	8	M22	8	1100	1126	1168	1220	55	118
9	1,0	9	M20	9	600	614	636	700	38	68

Порядок решения задачи

1) Определение требуемого усилия F_3 сжатия уплотняющих элементов (рис. Б), обеспечивающих герметичность фланцевого соединения при давлении $P_y < 10$ МПа:

$$F_3 \geq \pi D_{\text{п}} b k P_y \quad (\text{для паронита } k = 2,5);$$

при давлениях $P \geq 10$ МПа;

$$F_3 \geq \pi D_{\text{п}} b q \quad (\text{для паронита } q = 20 \text{ МПа}).$$

2) Определение усилия F_6 , действующего на резьбовые стержни в рабочих условиях (в формуле 24.39, константа жесткости для плоской паронитовой прокладки – $\kappa = 1,45$).

3) Определение расчётного усилия с учётом деформации кручения стержня

$$F_p = 1,3 F_3.$$

4) Определение числа z шпилек из величины нагрузки F_1 , приходящейся на одну шпильку, и из условия прочности резьбового стержня на растяжение

$$F_1 = F_p / z, \quad F_1 / A_p \leq [\sigma_p],$$

$$A_p = (\pi d_1^2) / 4,$$

где d_1 – внутренний диаметр резьбы (параметры резьбы см. рис. 24.13, табл.

24.5); допустимое напряжение на растяжение (сжатие) для болтов, шпилек и других резьбовых стержней из стали 20 класса прочности 5.8 ($[\sigma]_{\text{p(сж)}} = 200$ МПа).

5) Определение рабочей длины нарезной части, как наибольшей из трёх значений, полученных из условий прочности на изгиб витка (24.40), срез витка (24.41), смятие витка (24.42); (в формулах принять допустимые напряжения на изгиб $[\sigma]_{\text{и}} = 200$ МПа, на срез $[\tau]_{\text{ср}} = 150$ МПа, на смятие $[\sigma]_{\text{см}} = 200$ МПа);

6) Вычерчивание конструкции по размерам.

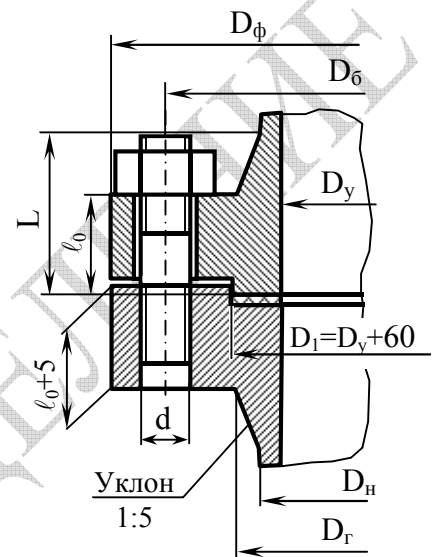


Рисунок А

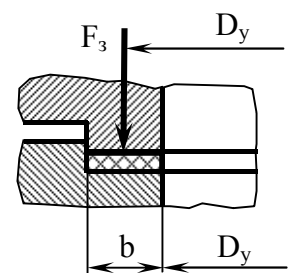


Рисунок Б

Задача 6.2 Расчёт фланцевого соединения с беспрокладочной обтюрацией

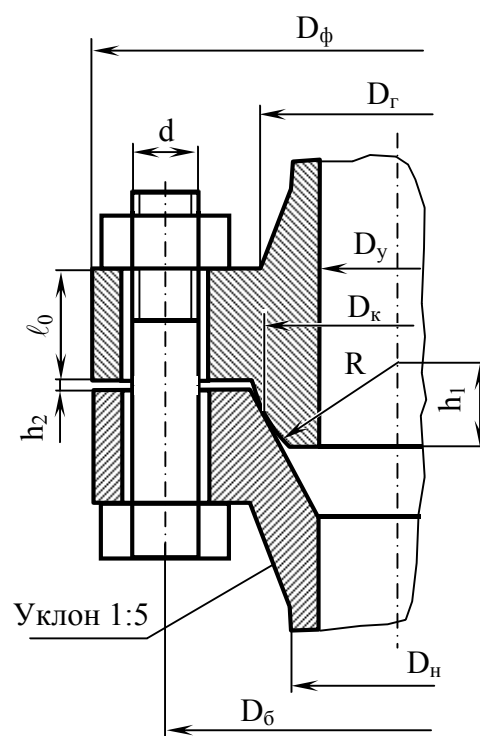
Определить необходимое количество болтов для обеспечения герметичности фланцевого соединения (рис). Определить рабочую длину нарезной части резьбового стержня.

Исходные данные

A	$[\sigma]_p$	$[\sigma]_и$	$[\tau]_{ср}$	$[\sigma]_{см}$	B	P_y , МПа	D_y	D_ϕ	D_r	D_b	l_0	d
	МПа											
0	200	200	150	200	0	0,25	10	75	22	50	8	M10
1	200	200	150	220	1	0,6	15	80	28	55	10	M10
2	210	210	155	210	2	1,0	20	105	42	75	14	M12
3	220	220	165	220	3	1,6	25	115	49	85	14	M12
4	220	220	165	250	4	2,5	32	135	62	100	16	M16
5	230	230	172	230	5	4,0	40	145	70	110	16	M16
6	240	240	165	240	6	6,4	50	175	80	135	22	M16
7	240	240	180	260	7	10	65	220	118	170	29	M20
8	210	210	155	220	8	10	80	230	132	180	33	M24
9	200	200	150	240	9	20	100	360	264	292	63	M36

Порядок решения задачи

- 1) Определение требуемого усилия F_3 сжатия уплотняющих элементов (см. рис. 24.22 и пояснения к формуле 24.28).
- 2) Определение усилия F_6 , действующего на резьбовое соединение после подачи давления равного P_y (24.9).
- 3) Определение расчётного усилия (см. п.3 задачи 6.1).
- 4) Определение числа шпилек (см. п.4 задачи 6.1, $[\sigma]_p$ в табл. исходных данных).
- 5) Определение рабочей длины нарезной части, как наибольшей из трёх значений, полученных из условий прочности на изгиб витка (24.40), срез витка (24.41), смятие витка (24.42) (допускаемые напряжения в таблице исходных данных)
- 6) Вычерчивание конструкции по размерам.



$$D_k = D_y + 1,5(0,05D_y + 5)$$

$$R = 0,587 D_k$$

$$h_1 = 0,5R + 0,4(0,05D_y + 5)$$

$$h_2 = 0,167(0,05D_y + 5) + 3$$

Рисунок

Основная литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: «Высшая школа», 2007. – 560 с.
2. Копнов В.А., Кривошапко С.Н. Сопротивление материалов: Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ. – М.: «Высшая школа», 2005. – 351 с.
3. Техническая механика, Часть I. Теоретическая механика, Теория механизмов и машин: Учебное пособие // Н.А.Марцулевич, Е.Г.Матюшин, В.В.Федотов, А.Н.Луцко, М.Д.Телепнев. – СПб. : Изд-во СПбГТИ (ТУ), 2009. – 330 с.
4. Детали машин: Учебник для вузов/ Л.А.Андриенко, Б.А.Байков, И.К.Ганулич и др.;Под ред. О.А.Ряховского, – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2007. – 520 с.
5. Иванов М.Н. Детали машин: Учебник для машиностроительных специальностей вузов/М.Н. Иванов, В.А. Финогенов. – 12-е изд. испр. – М.: Высш. шк., 2008. – 408 с: ил.
6. Дунаев П.Ф. Конструирование узлов и деталей машин: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений/П.Ф.Дунаев, О.П.Леликов. – 9-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2006, - 496 с.
7. Курмаз Л.В. Конструирование узлов и деталей машин: Справочное учебно-методическое пособие/Л.В. Курмаз, О.Л.Курмаз. – М.:Высш. шк., 2007. – 455 с.: ил.

Дополнительная литература

1. Бартенев Д.А., Марцулевич Н.А., Сташевская О.В. Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержней: Методические указания. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2004. – 60 с.
2. Бартенев Д.А., Марцулевич Н.А., Сташевская О.В. Расчет статически определимой балки на прочность и жесткость: Методические указания. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2005. – 25 с.
3. Бартенев Д.А., Василенко А.М., Марцулевич Н.А., Сташевская О.В. Расчет статически неопределимых рам методом сил: Методические указания. - СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2004. – 24 с.
4. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. – 591 с.
5. Иосилевич Г.Б. Детали машин: Учебник для студентов машиностроит. спец. вузов. – М.: Машиностроение, 1988. – 368 с.: ил.

6. Эрдеди А.А., Эрдеди Н.А. Техническая механика. Детали машин: Учеб. для машиностр. спец. техникумов. – М.: Высш. шк., 1992. – 272 с.: ил.
7. Шейнблит А.Е. Курсовое проектирование деталей машин: учебное пособие для средних специальных учебных заведений/ А.Е. Шейнблит. – 2-е изд., перераб. и доп. – Калининград: Янтарный сказ, 2005. – 455 с.:ил.
8. Биргер И.А. Расчёт на прочность деталей машин: Справочник/ И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, Г.Б. Иосилевич. – 3-е изд., перераб. и доп. – Мю: Машиностроение, 1979. 702 с., ил.
9. Заплетохин В.А. Конструирование деталей механических устройств: Справочник. – Л.: Машиностроение. Ленингр. Отд-ние, 1990. – 669 с.: ил.

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ЗАОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Кафедра теоретических основ химического машиностроения

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕАНИКА
Часть II.
Сопротивление материалов.
Детали машин

Коллектив авторов:
Николай Александрович МАРЦУЛЕВИЧ
Андрей Николаевич ЛУЦКО
Дмитрий Александрович БАРТЕНЕВ

Учебное пособие

Подписано в печать 28.06.2010
Формат 60×84 ¹/₁₆. Печать офсетная
Усл. 31п.л. Тир.200 экз. Зак.№156
Лицензия серия ЛП №000332 от 15.12.1999г.

Отпечатано с оригинал-макета
в ООО «Издательство ОМ-Пресс»
190031, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 117, тел.457-83-10