УДК 681.142.2(073)

ПРОГРАММНЫЕ ПРОДУКТЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ: Методические указания к расчетно-графическому заданию / Санкт-Петербургский государственный горный университет. Сост. *О.Г.Быкова*. СПб, 2011. 36 с.

Методические указания призваны оказать помощь студенту при выполнении расчетно-графических заданий с использованием табличного процессора Microsoft Excel и пакета математических расчетов MathCad. Приведены варианты заданий.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 131000 « Нефтегазовое дело».

Ил. 23. Библиогр.: 9 назв.

Научные редактор доц. *А.Б.Маховиков*

ВВЕДЕНИЕ

Студенты всех специальностей направления 131000 «Нефтегазовое дело» в рамках изучения предмета «Программные продукты в математическом моделировании» выполняют расчётно-графические задания, применяя средства табличного процессора Microsoft Excel и пакета математических расчётов MathCad. В данных «Методических указаниях ..» приведены варианты для выполнения расчётно-графических заданий и производится разбор возможных способов их выполнения.

Расчётно-графические задания выполняются на темы:

1. Интерполяция и аппроксимация функции, заданной таблично;
2. Численное решение обыкновенного дифференциального неоднородного линейного уравнения второго порядка;
3. Численное решение уравнения Лапласа.

Для вычислений и оформления расчётно-графических заданий используются знания, полученные при изучении курса «Информатика» (I и II семестры): текстовый процессор Microsoft Word, табличный процессор Microsoft Excel, пакет математических расчетов MathCAD. Для выполнения расчётно-графических заданий каждый студент получает индивидуальное задание.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ТАБЛИЧНО. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ №1

Функция задана таблично парами чисел (x, y)

X	0,5	0,86	0,93	1,02	1,41	1,6	1,78	1,8	1,91	2,03
Y	0,1	0,265	0,306	0,36	0,648	0,825	1,025	1,144	1,29	1,28

X	2,39	2,8	2,89	3	3,1	3,21	3,8	3,95	4	4,5
Y	1,75	2,31	2,44	2,61	2,75	2,96	4,03	4,1	4,42	5,2

Вычислить значение функции при x=2,57 с помощью интерполяционного полинома Лагранжа и аппроксимирующей

функции $y = a \cdot x^b$. Вычисление по интерполяционному полиному Лагранжа проводить, учитывая не менее 7 табличных значений. Для определения коэффициентов аппроксимирующей функции применить метод наименьших квадратов.

Вычисления провести в табличном процессоре Microsoft Excel и в пакете MathCAD.

<u>Указания к выполнению задания:</u>

- Выполнить вычисление функции по интерполяционному полиному Лагранжа;
- Произвести линеаризацию аппроксимирующей функции относительно искомых коэффициентов;
- Вывести систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых коэффициентов;
- Решить систему линейных алгебраических уравнений;
- Вычислить значения аппроксимирующей функции в заданных точках;
- Показать на графике положение заданных точек и значения аппроксимирующей функции в заданных точках;
- Вычислить значение функции, используя аппроксимирующую функцию;
- Сравнить значения, полученные этими способами.

<u>Требования к оформлению задания:</u>

Оформленную завершённую работу предваряют титульным листом. <u>За ним следует лист с полученным вариантом задания.</u> Далее приводят решения, полученные в табличном процессоре Microsoft Excel и пакете MathCAD.

Таблички с решением в Microsoft Excel следует привести в режиме отображения чисел и режиме отображения формул с сеткой и заголовками строк и столбцов.

Страницы работы пронумеровать. Текст выровнять по ширине листа.

<u>Рекомендуемая литература</u>

1. *Вержбицкий В.М.* Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения). М.: Высшая школа, 2000, 266 с.

2. *Волков Е.А.* Численные методы: учебн. пособие. 4-е изд., стереотипное. СПб.: Издательство «Лань», 2007, 256 с.
3. *Беляев В.В.* Информатика. Аппроксимация методом наименьших квадратов: методические указания по выполнению курсовой работы / В.В. Беляев, Г.Н. Журов. СПб, СПГГИ (ТУ), 2005, 52 с.
4. *Быкова О.Г.* Информатика. Работа в пакете MathCAD: методические указания к лабораторным работам. СПб, СПГГИ (ТУ), 2009, 71 с.
5. *Быкова О.Г.* Информатика. Вычисления в Microsoft Excel: методические указания к самостоятельной работе. СПб, СПГГИ (ТУ), 2008, 58 с.

Одно из центральных понятий в математике – функция. Для нахождения решения большинства функций используют численные методы. Большинство численных методов основано на замене более сложных объектов, уравнений и т.д. более простыми. Наиболее удобным в обращении на практике является алгебраический многочлен. Для задания требуется конечное число его коэффициентов. Значения многочлена просто вычисляются, легко дифференцируются, интегрируются.

Одной из основных задач численного анализа является задача об интерполяции функций. Часто требуется восстановить функцию $f(x)$ для всех значений x на отрезке $a \le x \le b$, если известны значения этой функции в некотором конечном числе точек этого отрезка. Такие значения могут быть найдены в результате наблюдений (измерений) в эксперименте или в результате вычислений. Кроме того, возможны случаи, когда функция $f(x)$ задана формулой, но вычисления ее значений по этой формуле очень трудоёмки, поэтому желательно получить для такой функции более простую (менее трудоёмкую для вычислений) формулу, которая позволяла бы находить приближенное значение рассматриваемой функции с приемлемой (заданной) точностью в любой точке отрезка значений.

Интерполяцией называется представление некоторой функции $y=f(x)$, заданной в виде таблицы, с помощью функции

$y=\varphi(x)$, которая идентична исходной в контролируемой области изменения аргумента. Очень часто интерполяцию используют исследователи для создания модели (моделей) физических объектов. В науке интерполяция применяется для планирования эксперимента, а также для статистической обработки результатов эксперимента. Интерполяционный многочлен записывают в формах, носящих имена ученых, их разработавших - Лагранжа, Ньютона, Стирлинга, Бесселя, Лапласа-Эверетта. Все эти и многие другие методы нахождения интерполяционного многочлена обычно являются вариациями одного-двух основных методов с незначительными преимуществами в разных задачах.

Основные этапы интерполяции:

1. Выбор вида функции интерполяции;
2. Линеаризация относительно неизвестных коэффициентов;
3. Определение коэффициентов функции интерполяции;
4. Определение адекватности функции интерполяции.

Существуют два основных метода интерполяции: точная в узлах и приближённая в узлах. Интерполяцией, точной в узлах, называется такая интерполяция, результатом которой является функция $y=\varphi(x)$, совпадающая в узлах с функцией $y=f(x)$ (рис. 1.1).

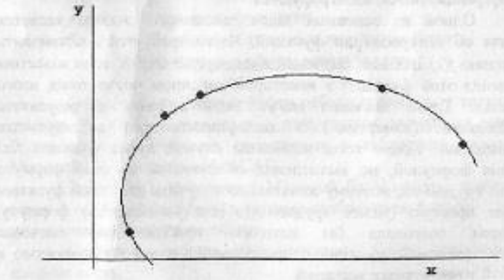


Рис. 1.1. Интерполяция, точная в узлах (интерполяция)

Точная в узлах интерполяция применяется главным образом в тех случаях, когда требуется определять неизвестные значения между известными точками в узком диапазоне изменения аргумента.

Интерполяцией, приближённой в узлах, называется такая интерполяция, при которой значения функции $y=\varphi(x)$ не совпадают в узлах интерполяции со значениями исходной функции $y=f(x)$. Она применяется для сглаживания неточностей исходных данных. В математике такая интерполяция называется аппроксимацией. Её геометрический смысл показан на рис. 1.2.

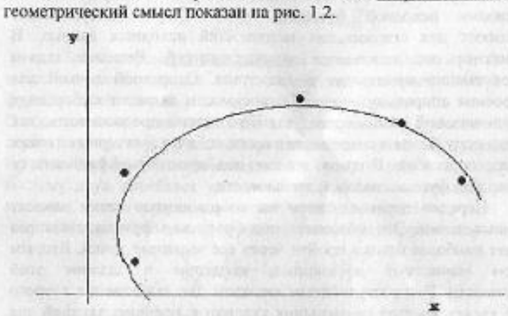


Рис. 1.2. Интерполяция, приближенная в узлах (аппроксимация)

АППРОКСИМАЦИЯ

Интерполяция позволяет легко аппроксимировать функцию, заданную таблично. Но точность такой аппроксимации гарантирована лишь в небольшом интервале порядка нескольких шагов сетки таблицы. Для другого интервала таблицы потребуется заново вычислять коэффициенты для такой интерполяционной формулы. В общем случае, задача аппроксимации состоит в том, чтобы получить такую формулу $y\approx\varphi(x)$, которая станет интерполяционной для более значительного интервала изменения аргумента x.

Обычно при интерполяции табличные значения точно приравнивают к значениям функции в отдельных точках. Если значения в таблице определены неточно – например, из эксперимента – то точное приравнивание лишено смысла. В таком случае рационально делать приближение не по измеренным точкам, а по усреднённым между ними значениям. Интерполяцией, приближенной в узлах, называется такая интерполяция, при которой значения функции $y=\varphi(x)$ не совпадают в узлах интерполяции со значениями исходной функции $y=f(x)$. Такую интерполяцию применяют для сглаживания неточностей исходных данных. В математике она называется аппроксимацией. Решение задачи аппроксимации производят в два этапа. Отправной точкой для построения аппроксимирующей зависимости является выбор вида функциональной зависимости, для чего нужно предположить, как именно получаемая кривая может вести себя в характерных точках (точках перегиба). Вторым этапом подбирают коэффициенты к намеченной функциональной зависимости.

Нередко первым этапом на координатную сетку наносят заданные точки. Это позволяет подобрать вид функции, которая сможет наиболее близко пройти через все заданные точки. Вторым этапом вычисляют постоянные, входящие в задание этой зависимости. Распространённым методом для выполнения второго этапа является метод наименьших квадратов, предписывающий для определения постоянных использовать условие минимальности суммы квадратов отклонений экспериментальных (заданных) значений от теоретических (вычисленных на основе аппроксимирующей функции). Этот метод впервые предложил К.Ф. Гаусс. Рассмотрим применение метода наименьших квадратов для случая аппроксимации экспериментальных точек линейной функцией вида

$$y=a\cdot x+b. \tag{1}$$

Пусть экспериментальные точки заданы таблицей 1.

Координата	Значения			
X	X_1	X_2	...	X_n
Y	Y_1	Y_2	...	Y_n

Чтобы определить линейную функцию, нужно определить её постоянные a и b. Экспериментальное значение ординаты первой точки Y_1. Аналитическое выражение значения в точке X_1: $a\cdot X_1+b$. Метод наименьших квадратов требует найти минимум суммы квадратов отклонений экспериментальных точек от их аналитических значений, т.е. для определения постоянных a и b нужно найти $\min\{S\}$, где

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[Y_i-(a\cdot X_i+b)\right]^2 . \tag{2}$$

Здесь переменными являются сами значения a и b. Как известно, необходимым и достаточным условием экстремума функции является равенство нулю первой производной в этой точке. Следовательно, для нахождения экстремума функции двух переменных (a и b) нужно найти частные производные функции по каждой переменной и приравнять их к нулю. В результате получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными, решив которую, можно получить значения постоянных a и b.

Итак, найдём частные производные S по переменным a и b:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial a}=\sum\limits_{i=1}^{n}2\cdot\left[Y_i-(a\cdot X_i+b)\right]\cdot(-X_i)\\ \dfrac{\partial S}{\partial b}=\sum\limits_{i=1}^{n}2\cdot\left[Y_i-(a\cdot X_i+b)\right]\cdot(-1)\end{cases} \tag{3}$$

Приравняем полученные уравнения к нулю и объединим их в систему, для поиска минимального значения функции S

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial a}=0\\ \dfrac{\partial S}{\partial b}=0\end{cases} \tag{4}$$

Подставим в левые части этих уравнений системы полученные значения частных производных

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot [Y_i - (a \cdot X_i - b)] = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} [Y_i - (a \cdot X_i - b)] = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Преобразовав эту систему для решения относительно неизвестных a и b, имеем

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{cases} \quad (6)$$

Решив систему (6), определим значения постоянных a и b в аппроксимирующей функции.

РЕШЕНИЕ В ТАБЛИЧНОМ ПРОЦЕССОРЕ MICROSOFT EXCEL

Дано задание вычислить функцию по интерполяционному полиному Лагранжа, учитывая не менее 7 табличных значений при x=2,57. Выбираем представленный ниже фрагмент таблицы, включающий значение x=2,57

X	1,91	2,03	2,39	2,8	2,89	3	3,1
Y	1,29	1,28	1,75	2,31	2,44	2,61	2,75

Формула Лагранжа имеет вид:

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_i)\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_2)\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)\cdot[(x-x_i)]} \quad (7)$$

где x_i, y_i – значения аргумента и функции из таблицы, x – значение аргумента, при котором вычисляется функция.

Вычисление функции по интерполяционному полиному Лагранжа подробно описано в «Методических указаниях…» [4].

Используем для решения данной задачи табличный процессор Microsoft Excel. В первую строку листа Excel заносим значения аргумента из заданной таблички, эти же данные

записываем и в первый столбец, как показано на рис. 1.3. В диапазоне ячеек B2:H7 записываем попарные разности из знаменателя формулы (7). Чтобы упростить заполнение ячеек B2:H7, можно формулу в ячейку B2 записать со смешанными ссылками (рис. 1.4), и скопировать ячейку B2 на диапазон B2:H7. Разумеется, на главной диагонали полученной таблицы стоят нули.

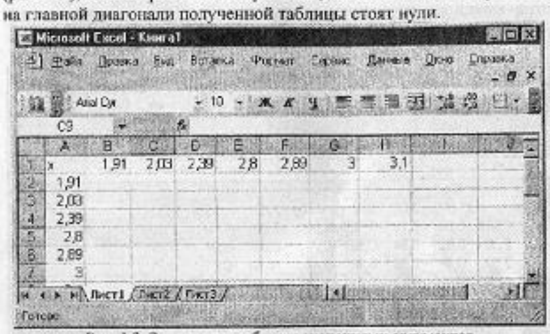


Рис. 1.3. Заполнение таблицы значениями аргументов

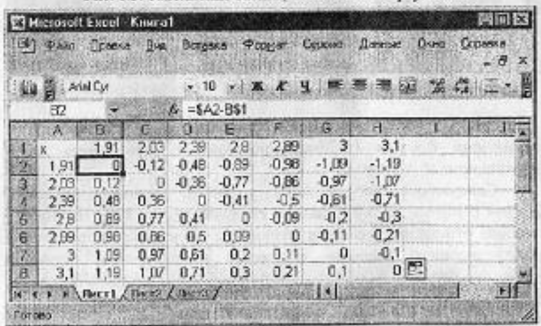


Рис. 1.4. Заполнение таблицы разностями из знаменателя (7)

В ячейки главной диагонали заносим (в каждую отдельно) разность между аргументом, при котором определяем значение функции (в рассматриваемом случае x=2,57) и значениями аргументов из таблицы. Таким образом, в каждой строке главной диагонали будет располагаться по одному сомножителю числителя интерполяционного полинома Лагранжа (7). Для этого поместим в ячейку A9 значение 2,57 и вычислим разности (рис. 1.5).

Рис. 1.5. Заполнение таблицы разностями из функции $L(x)$

На рис. 1.6 представлен фрагмент таблицы в режиме отображения формул (таблица целиком не приводится из-за значительного её размера).

Следующий шаг решения – ввести заданные значения функции (вторую строку заданной таблички) (рис. 1.7). Вычислим величины отношения значения функции к произведению разностей соответствующего значения аргумента и табличных значений аргумента. Для этого достаточно в ячейку J1 записать формулу «=I1/ПРОИЗВЕД(B2:H2)» и скопировать её на все строки решения (рис. 1.8).

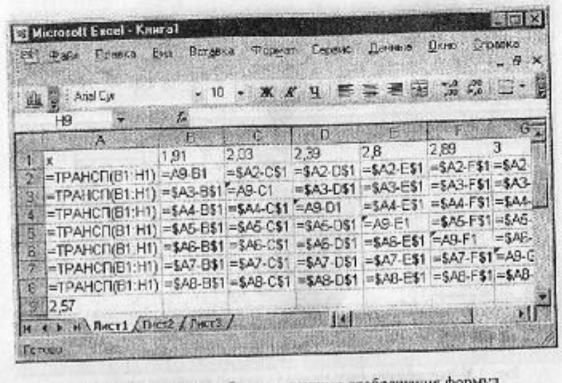


Рис. 1.6. Фрагмент таблицы в режиме отображения формул

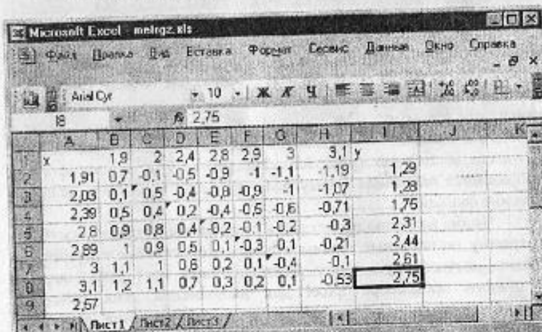


Рис. 1.7. Занесение в таблицу значений функции

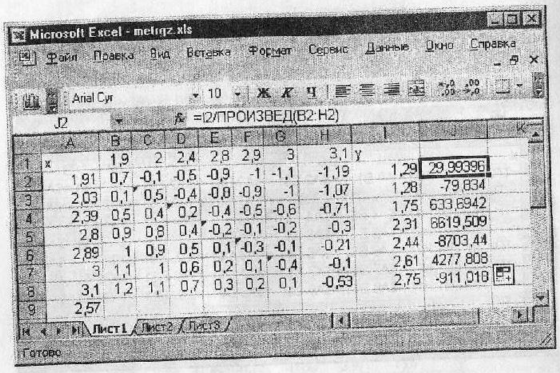


Рис. 1.8. Вычисление отношения значений функции к разностям знаменателя формулы (7)

Для завершения вычислений по формуле (7) следует выполнить последний шаг – найти сумму вычисленных отношений и помножить её на произведение разностей между значением аргумента, для которого вычисляется функция, и заданными значениями аргумента. Для этого нужно вычислить суммы чисел в столбце J и умножить их на значения разностей, стоящие на главной диагонали в таблице (рис. 1.9). На рис. 1.9 в строке формул отображается набранная формула. Полученное число есть искомое значение функции.

Чтобы наглядно представить полученное решение, построим диаграмму по заданные точкам в декартовой системе координат и добавим вычисленную точку. Воспользуемся мастером диаграмм табличного процессора Excel для выполнения этих действий. Выделим диапазоны, содержащие заданные значения аргумента (A2:A8) и функцию (I2:I8), вызовем «Мастер диаграмм», выберем тип «Точечная», вид – «Отдельные точки». Результат построения с примерным форматированием приведен на рис. 1.10.

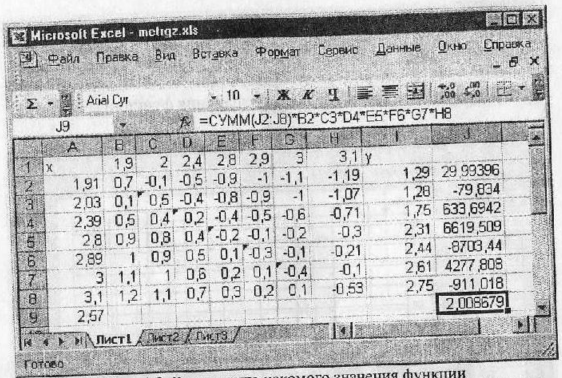


Рис. 1.9. Вычисление искомого значения функции

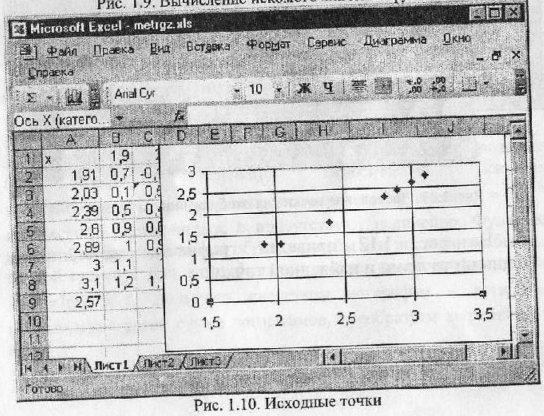


Рис. 1.10. Исходные точки

Добавим вычисленное значение на график. Для этого вызываем контекстное меню, выбираем пункт «Параметры диаграммы», делаем активной вкладку «Ряд», нажимаем кнопку «Добавить» и вводим в соответствующие окна адреса ячеек с значением аргумента и вычисленного значения функции (рис. 1.11).

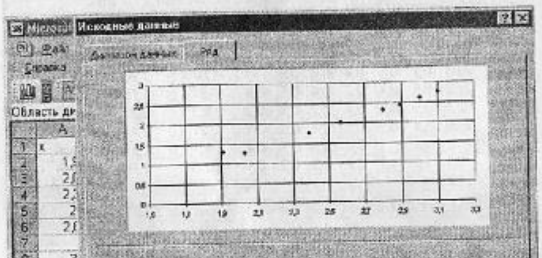


Рис. 1.11. Добавление точки для отображения на графике

На рис. 1.12 приведен график с нанесёнными исходными точками и найденной точкой.

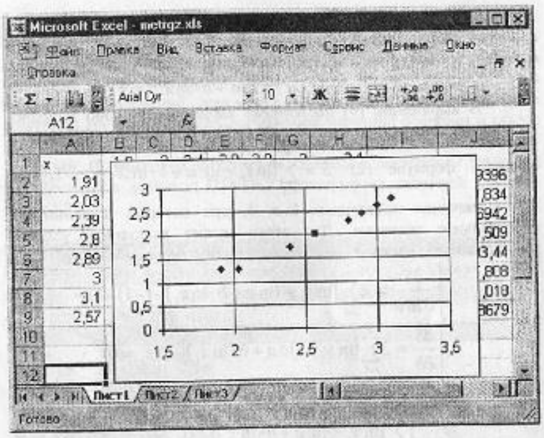


Рис. 1.12. Графическое представление решения

Второй шаг выполнения задания - произвести линеаризацию аппроксимирующей функции относительно искомых коэффициентов. В заданной аппроксимирующей функции $y = a \cdot x^b$ неизвестные постоянные a, b присутствуют нелинейно. Функцию нужно преобразовать таким образом, чтобы эти постоянные были в первой степени. Для этого функцию можно прологарифмировать: $\ln y = \ln\left(a \cdot x^b\right)$. Пользуясь свойством логарифма – логарифм произведения равен сумме логарифмов, преобразуем выражение к виду:

$$\ln y = \ln\left(a \cdot x^b\right) = \ln a + \ln x^b \qquad (8)$$

Для дальнейшего преобразования выражения (8) используем свойство логарифма: показатель степени числа, от которого вычисляется логарифм, можно вынести сомножителем логарифма этого числа, т.е. $\ln y = \ln a + \ln x^b = \ln a + b \cdot \ln x$ (9)

В выражении (9) постоянные входят в функцию линейно, хотя это не сама постоянная a, а её логарифм. Составим функцию S согласно формуле (2) $S = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln Y_i - (\ln a + b \cdot \ln X_i)\right]^2$. Нужно найти значения постоянных $\ln a$, b, при которых S принимает минимальное значение. Для этого нужно выполнить условие равенства нулю частных производных по постоянным $\ln a$, b (4)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \ln a} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[\ln y_i - (\ln a + b \cdot \ln x_i)\right] \cdot (-1) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[\ln y_i - (\ln a + b \cdot \ln x_i)\right] \cdot \ln x_i = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Преобразовываем систему (10)

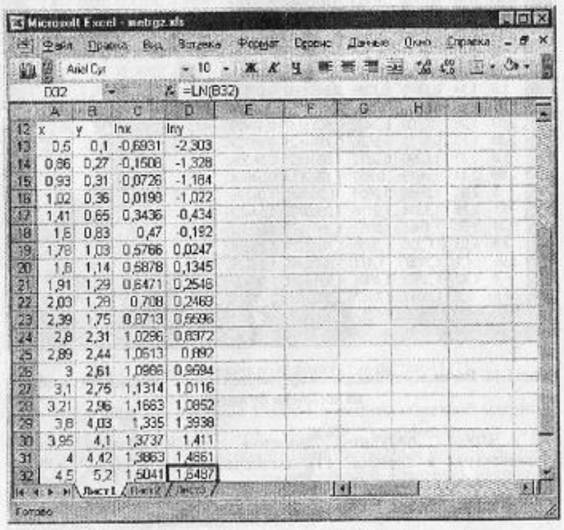
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left[\ln y_i - (\ln a + b \cdot \ln x_i)\right] = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\left[\ln y_i - (\ln a + b \cdot \ln x_i)\right] \cdot \ln x_i = 0 \end{cases}$$

и получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $\ln a$, b (11):

$$\begin{cases} \ln a \sum_{i=1}^{n} 1 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \\ \ln a \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln^2 x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \cdot \ln y_i \end{cases} \quad (11)$$

Системы линейных алгебраических уравнений в табличном процессоре Microsoft Excel можно решать по формулам Крамера или с помощью обратной матрицы.

Для определения величин $\ln a$, b в табличном процессоре Microsoft Excel заполним диапазоны ячеек A13:A32 и B13:B32 заданными значениями аргумента и функции. В систему (11) в качестве коэффициентов перед неизвестными входят сумма логарифмов значений аргумента, сумма квадратов логарифмов значений аргумента, сумма логарифмов значений функции и сумма попарных произведений значений аргументов на логарифмы функций. В диапазоне ячеек C13:C32 введём логарифмы значений аргументов, в диапазон D13:D32 – логарифмы значений функций (рис. 1.13).

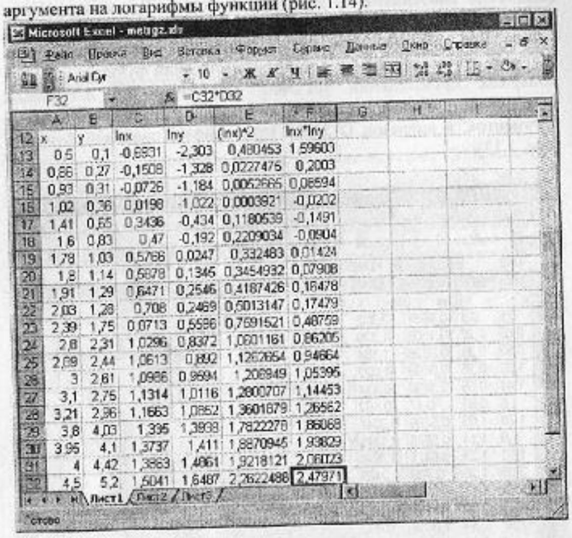


D32 =LN(B32)

	A	B	C	D
12	x	y	lnx	lny
13	0,5	0,1	-0,6931	-2,303
14	0,86	0,27	-0,1508	-1,328
15	0,93	0,31	-0,0726	-1,184
16	1,02	0,36	0,0198	-1,022
17	1,41	0,65	0,3436	-0,434
18	1,6	0,83	0,47	-0,192
19	1,78	1,03	0,5766	0,0247
20	1,8	1,14	0,5878	0,1345
21	1,91	1,29	0,6471	0,2546
22	2,03	1,28	0,708	0,2469
23	2,39	1,75	0,8713	0,5596
24	2,8	2,31	1,0296	0,8372
25	2,89	2,44	1,0613	0,892
26	3	2,61	1,0986	0,9594
27	3,1	2,75	1,1314	1,0116
28	3,21	2,96	1,1663	1,0852
29	3,8	4,03	1,335	1,3938
30	3,95	4,1	1,3737	1,411
31	4	4,42	1,3863	1,4861
32	4,5	5,2	1,5041	1,6487

Рис. 1.13. Занесение в диапазоны ячеек исходных данных и lny

В диапазон ячеек E13:E32 введём квадраты значений аргумента, в диапазон ячеек F13:F32 - произведения значений аргумента на логарифмы функции (рис. 1.14).

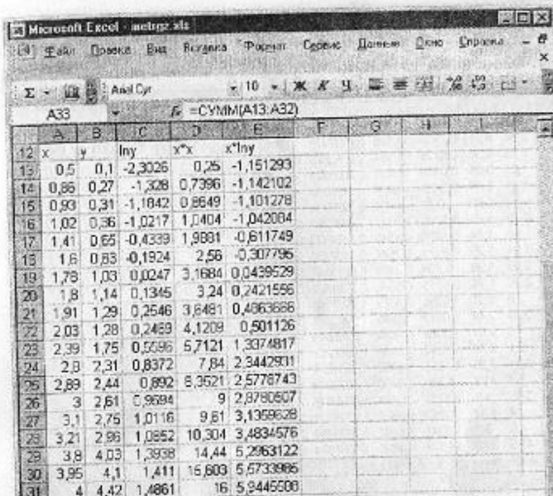


F32 =C32*D32

	A	B	C	D	E	F
12	x	y	lnx	lny	(lnx)^2	lnx*lny
13	0,5	0,1	-0,6931	-2,303	0,480453	1,59600
14	0,86	0,27	-0,1508	-1,328	0,0227475	0,2003
15	0,93	0,31	-0,0726	-1,184	0,0052665	0,08594
16	1,02	0,36	0,0198	-1,022	0,0003921	-0,0202
17	1,41	0,65	0,3436	-0,434	0,1180539	-0,1491
18	1,6	0,83	0,47	-0,192	0,2209034	-0,0904
19	1,78	1,03	0,5766	0,0247	0,332483	0,01424
20	1,8	1,14	0,5878	0,1345	0,3454932	0,07908
21	1,91	1,29	0,6471	0,2546	0,4187426	0,16478
22	2,03	1,28	0,708	0,2469	0,5013147	0,17479
23	2,39	1,75	0,0713	0,5596	0,7591521	0,48759
24	2,8	2,31	1,0296	0,8372	1,0601161	0,86205
25	2,89	2,44	1,0613	0,892	1,1262654	0,94664
26	3	2,61	1,0986	0,9594	1,206949	1,05395
27	3,1	2,75	1,1314	1,0116	1,2800707	1,14453
28	3,21	2,96	1,1663	1,0852	1,3601879	1,26562
29	3,8	4,03	1,335	1,3938	1,7822278	1,86068
30	3,95	4,1	1,3737	1,411	1,8870945	1,93829
31	4	4,42	1,3863	1,4861	1,9218121	2,06023
32	4,5	5,2	1,5041	1,6487	2,2622488	2,47971

Рис. 1.14. Вычисление квадратов аргументов и произведений аргументов на логарифм функции

Чтобы получить значения коэффициентов перед неизвестными в системе (11), вычисляем суммы чисел во всех заполненных диапазонах (рис. 1.15).



A33 =СУММ(A13:A32)

	A	B	C	D	E
12	x	y	lny	x*x	x*lny
13	0,5	0,1	-2,3026	0,25	-1,151293
14	0,86	0,27	-1,328	0,7396	-1,142102
15	0,93	0,31	-1,1842	0,8649	-1,101278
16	1,02	0,36	-1,0217	1,0404	-1,042084
17	1,41	0,65	-0,4339	1,9881	-0,611749
18	1,6	0,83	-0,1924	2,56	-0,307796
19	1,78	1,03	0,0247	3,1684	0,0439529
20	1,8	1,14	0,1345	3,24	0,2421556
21	1,91	1,29	0,2546	3,6481	0,4863666
22	2,03	1,28	0,2469	4,1209	0,501126
23	2,39	1,75	0,5596	5,7121	1,3374817
24	2,8	2,31	0,8372	7,84	2,3442931
25	2,89	2,44	0,892	8,3521	2,5778743
26	3	2,61	0,9594	9	2,8780607
27	3,1	2,75	1,0116	9,61	3,1359628
28	3,21	2,96	1,0852	10,304	3,4834576
29	3,8	4,03	1,3938	14,44	5,2963122
30	3,95	4,1	1,411	15,603	5,5733986
31	4	4,42	1,4861	16	5,9445508
32	4,5	5,2	1,6487	20,25	7,4189636
33	47,5	38,6	5,4826	138,73	35,907654

Сумма=267,4144643

Рис. 1.15. Вычисление коэффициентов системы (11)

Для решения системы с использованием обратной матрицы, в диапазон ячеек H13:J14 заносим коэффициенты перед неизвестными $\ln a$, b и значения столбца свободных членов системы уравнений (11) (рис. 1.16). Затем определяем обратную матрицу к матрице коэффициентов системы и умножаем её на столбец свободных членов системы (рис. 1.17).

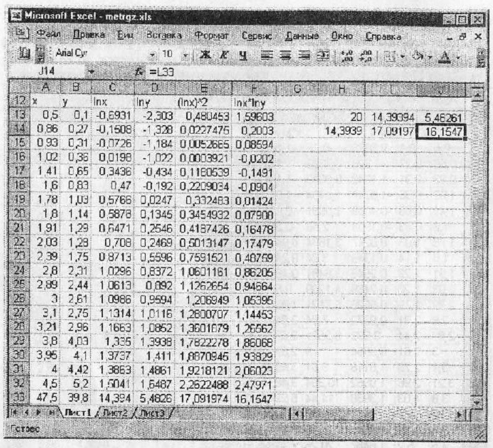


Рис. 1.16. Заполнение диапазона коэффициентами перед неизвестными системы (11)

Для получения значения постоянной a вычислим экспоненту полученного значения $\ln a$. Найденные значения постоянных при заданном значении аргумента x подставляем в формулу, аппроксимирующую функцию (рис. 1.18). Можно видеть, что полученное значение близко к величине, полученной с помощью интерполяционного полинома Лагранжа. На рис. 1.19-1.20 приведены фрагменты таблицы с решением в режиме отображения формул.

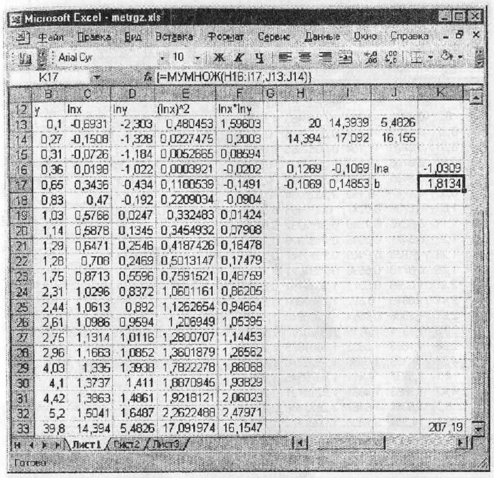


Рис. 1.17. Получение решения системы (11)

Чтобы убедиться, насколько удачно получена аппроксимирующая функция, нанесём заданные точки и точки, полученные по аппроксимирующей функции на общий график (рис. 1.21). Видно, что полученную аппроксимирующую функцию можно признать удачной.

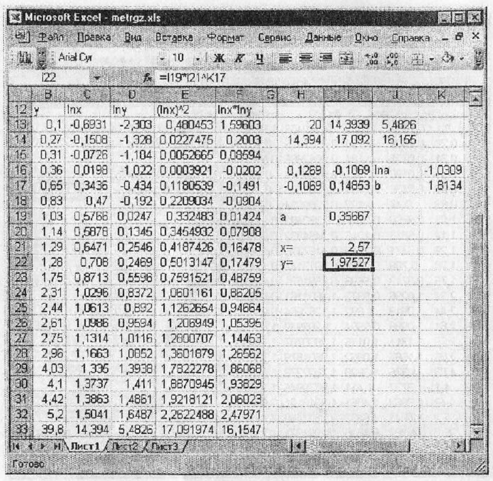


Рис. 1.18. Вычисление значения функции

	B	C	D	E	F
12	y	lnx	lny	(lnx)^2	lnx*lny
13	0.1	=LN(A13)	=LN(B13)	=C13^2	=C13*D13
14	0,265	=LN(A14)	=LN(B14)	=C14^2	=C14*D14
15	0,306	=LN(A15)	=LN(B15)	=C15^2	=C15*D15
16	0,36	=LN(A16)	=LN(B16)	=C16^2	=C16*D16
17	0,648	=LN(A17)	=LN(B17)	=C17^2	=C17*D17
18	0,825	=LN(A18)	=LN(B18)	=C18^2	=C18*D18
19	1,025	=LN(A19)	=LN(B19)	=C19^2	=C19*D19
20	1,144	=LN(A20)	=LN(B20)	=C20^2	=C20*D20
21	1,29	=LN(A21)	=LN(B21)	=C21^2	=C21*D21
22	1,28	=LN(A22)	=LN(B22)	=C22^2	=C22*D22
23	1,75	=LN(A23)	=LN(B23)	=C23^2	=C23*D23
24	2,31	=LN(A24)	=LN(B24)	=C24^2	=C24*D24
25	2,44	=LN(A25)	=LN(B25)	=C25^2	=C25*D25
26	2,61	=LN(A26)	=LN(B26)	=C26^2	=C26*D26
27	2,75	=LN(A27)	=LN(B27)	=C27^2	=C27*D27
28	2,96	=LN(A28)	=LN(B28)	=C28^2	=C28*D28
29	4,03	=LN(A29)	=LN(B29)	=C29^2	=C29*D29
30	4,1	=LN(A30)	=LN(B30)	=C30^2	=C30*D30
31	4,42	=LN(A31)	=LN(B31)	=C31^2	=C31*D31
32	5,2	=LN(A32)	=LN(B32)	=C32^2	=C32*D32
33	=СУММ(B13	=СУММ(C13:C32	=СУММ(D13:D32	=СУММ(E13:E32)	=СУММ(F13:F32)

Рис. 1.19. Фрагмент таблицы с промежуточными вычислениями в режиме отображения формул

	H	I	J	K
13	20	=C33	=D33	
14	=C33	=E33	=F33	
15				
16	=МОБР(H13:I14)	=МОБР(H13:I14)	lna	=МУМНОЖ(H16:I17;J13:J14)
17	=МОБР(H13:I14)	=МОБР(H13:I14)	b	=МУМНОЖ(H16:I17;J13:J14)
18				
19	a	=EXP(K16)		
20				
21	x=	2,57		
22	y=	=I19*I21^K17		
23				

Рис. 1.20. Фрагмент таблицы с вычислениями постоянных и значения функции в режиме отображения формул

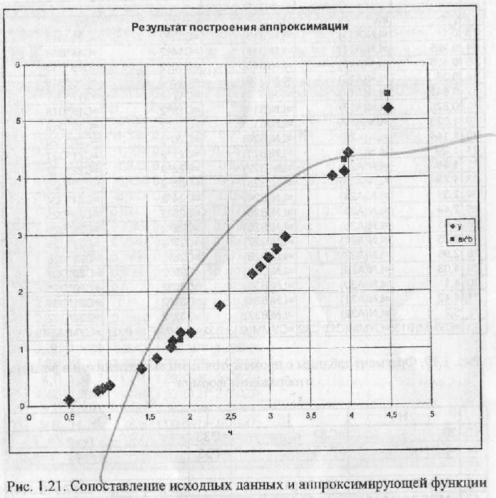


Рис. 1.21. Сопоставление исходных данных и аппроксимирующей функции

РЕШЕНИЕ В ПАКЕТЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ MATHCAD

Решим ту же задачу в пакете математических расчётов MathCAD. К сожалению, в пакете нет функции вычисления по интерполяционной формуле Лагранжа, однако в MathCAD имеется возможность вычисления функции линейной интерполяцией – полиномом первой степени, что создаёт довольно грубое приближение. Но возможен и другой вариант, дающий более точное значение. Высокая точность интерполяции в пакете MathCAD может быть достигнута за счёт интерполирования несколькими

полиномами невысокой степени. Такие полиномы называются **сплайны**. Они могут быть второго, третьего, четвёртого порядков. В системе MathCAD реализована интерполяция кубическими сплайнами с помощью функции ***interp(s,x,y,xx)***, где *x*, *y* – векторы значений аргумента и функции; *xx* – значение аргумента, при котором определяется функция; *s* - результат работы функции *cspline*(*x*,*y*). Эта функция предназначена для вычисления коэффициентов кубического сплайна, построенного по векторам *x*, *y*. Следовательно, вычислить функцию в точке *x* возможно с помощью функции *interp*(*cspline*(*x*,*y*),*x*,*y*,*xx*) (рис. 1.22).

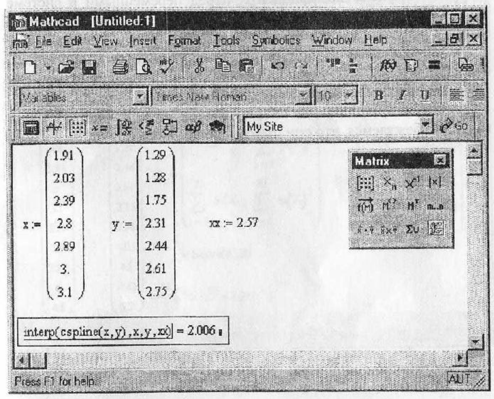


Рис. 1.22. Интерполяция в пакете MathCAD

Получение коэффициентов аппроксимирующей функции в пакете MathCAD можно реализовать с использованием функции lsolve, которая выполняет решение системы линейных

алгебраических уравнений методом Гаусса, для чего нужно задать вектора с исходными значениями аргумента и функции. В MathCAD вектора задают как матрицы, состоящие из одного столбца и числа строк, равного числу аргументов. Задание матриц в пакете выполняют с помощью палитры «Matrix» (матрица). Индексы в MathCAD отсчитываются от нуля, а привычнее от единицы, поэтому первой строкой записывают команду отсчёта индексов от единицы: ORIGIN:=1. Затем формируют матрицу коэффициентов и столбца свободных членов системы (11). Удобно использовать расширенные операторы пакета, которые позволяют явно писать суммы, через которые выражены коэффициенты перед переменными в системе (11). Расширенные операторы находятся в палитре «Calculus» (Матанализ). Решение приведено на рис. 1.23.

Кроме того, в пакете MathCAD имеются специальные функции для аппроксимации данных полиномами и экспонециальной зависимостью.

Сравнивая численные результаты, полученные в обоих пакетах, убеждаемся, что они практически совпадают.

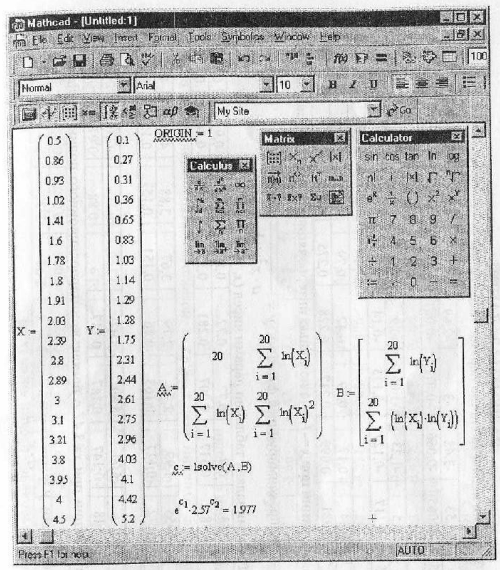


Рис. 1. 23. Поиск коэффициентов аппроксимации и вычисление функции

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Вариант 1. Функция задана таблично парами чисел (x, y)

X	-3,89	-3,56	-3,53	-3,42	-3	-2,69	-2,3	-2	-1,97	-1,7
Y	-0,061	-0,065	-0,065	-0,066	-0,075	-0,081	-0,091	-0,11	-0,11	-0,11

X	-1,67	-1,56	-1,5	-1,23	-1,05	-0,9	-0,67	-0,48	-0,31	-0,18
Y	-0,111	-0,115	-0,117	-0,127	-0,133	-0,14	-0,141	-0,13	-0,111	-0,077

X	-0,04	0,07	0,14	0,17	0,39	0,42	0,79	1		
Y	-0,02	0,039	0,081	0,099	0,217	0,228	0,275	0,256		

Вычислить значение функции при $x=-1,57$ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа и аппроксимирующей функции $y = \dfrac{x}{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$.

Вариант 2. Функция задана таблично парами чисел (x, y)

X	0,301	0,48	0,53	0,7	0,72	0,77	0,83	0,85	0,9	0,97
Y	-0,421	0,795	0,58	0,317	0,307	0,281	0,272	0,257	0,243	0,231

X	1,01	1,8	1,955	1,99	2,31	2,79	3,67	3,88	4,61	4,78
Y	0,226	0,175	0,172	0,127	0,163	0,16	0,151	0,153	0,151	0,149

X	4,94	5,2	5,1	5,71	5,89	5,92				
Y	0,149	0,148	0,148	0,147	0,147	0,147				

Вычислить значение функции при $x=3,47$ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа и аппроксимирующей функции $y = \dfrac{x}{a \cdot x + b}$.

Вариант 3. Функция задана таблично парами чисел (x, y)

X	-4,01	-3,89	-3,53	-3,57	-3,42	-3	-2,73	-2,35	-2	-1,97
Y	-0,061	-0,062	-0,068	-0,065	-0,07	-0,078	-0,086	-0,097	-0,12	-0,111

X	-1,71	-1,67	-1,55	-1,5	-1,23	-1,05	-0,9	-0,88	-0,61	-0,58
Y	-0,126	-0,127	-0,134	-0,137	-0,163	-0,176	-0,199	-0,205	-0,261	-0,269

X	-0,43	-0,32	-0,18	-0,17	-0,04	-0,02				
Y	-0,304	-0,351	-0,423	-0,427	-0,547	-0,564				

Вычислить значение функции при $x=-0,72$ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа и аппроксимирующей функции $y = \dfrac{x}{a \cdot x^2 + b \cdot x}$.

Вариант 4. Функция задана таблично парами чисел (x, y).

X	-4,01	-3,89	-3,52	-3,56	-3,42	-3,01	-2,7	-2,31	-2,02	-1,98
Y	-0,138	-0,142	-0,154	-0,065	-0,158	-0,178	-0,192	-0,215	-0,235	-0,237

X	-1,7	-1,67	-1,56	-1,51	-1,23	-1,05	-0,9	-0,88	-0,61	-0,58
Y	-0,261	-0,257	-0,267	-0,271	-0,288	-0,176	-0,199	-0,205	-0,261	-0,269

X	-0,43	-0,32	-0,18	-0,17	-0,04	-0,02	0			
Y	-0,304	-0,351	-0,423	-0,427	-0,547	-0,564	0,001			

Вычислить значение функции при $x=-0,72$ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа и аппроксимирующей функции $y = \dfrac{x}{a \cdot x^2 + c}$.

Вариант 5. Функция задана таблично парами чисел (x, y)

X	-1,01	0,48	0,53	0,86	0,93	1,02	1,41	1,6	1,79	1,8
Y	1,805	1,589	1,658	1,694	1,724	1,761	1,958	2,057	2,193	2,203

X	1,91	2,03	2,4	2,79	2,89	3,019	3,1	3,21	3,81	4,0
Y	2,276	2,354	2,607	2,891	2,955	3,034	3,105	3,185	3,615	3,759

X	4,14	4,18	4,71	5,71	6,01	6,2	6,5			
Y	3,831	3,889	4,268	5,014	5,213	5,576	5,576			

Вычислить значение функции при x=3,71 с помощью интерполяционного полинома Лагранжа и аппроксимирующей функции $y=\sqrt[3]{a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d}$.

Вариант 6. Функция задана таблично парами чисел (x, y).

X	-1,01	0,49	0,53	0,86	0,94	1,02	1,4	1,59	1,78	1,81
Y	1,815	1,8194	1,76	1,882	1,92	1,925	2,058	2,127	2,201	2,209

X	1,91	2,04	2,4	2,8	2,89	3,01	3,1	3,2	3,8	4,01
Y	2,256	2,308	2,473	2,658	2,701	2,751	2,798	2,85	3,125	3,218

X	4,11	4,18	4,7	5,7	6,	6,21	6,49	6,61		
Y	3,264	3,301	3,538	3,901	4,112	4,198	4,325	4,58		

Вычислить значение функции при x=2,38 с помощью интерполяционного полинома Лагранжа и аппроксимирующей функции $y=\sqrt[3]{a\cdot x^2+b\cdot x+c}$.

Вариант 7. Функция задана таблично парами чисел (x, y).

X	-2,01	-1,0	0,51	0,85	0,93	1,01	1,39	1,6	1,77	1,8
Y	-1,754	1,732	2,763	2,921	2,949	2,986	3,129	3,201	3,261	3,267

X	1,9	2,03	2,39	2,81	2,9	3,0	3,09	3,21	3,79	3,99
Y	3,303	3,342	3,455	3,568	3,594	3,624	3,651	3,681	3,828	3,875

X	4,1	4,17	4,69	5,2	5,9	6,2	6,5	6,61	7	7,3
Y	3,899	3,919	4,033	4,091	4,298	4,336	4,392	4,401	4,481	4,534

Вычислить значение функции при *x=4,17* с помощью интерполяционного полинома Лагранжа и аппроксимирующей функции $y=\sqrt[3]{a\cdot x+b}$.

Вариант 8. Функция задана таблично парами чисел (x, y).

X	-0,3	0,38	0,5	0,86	0,92	1,02	1,4	1,59	1,78	1,8
Y	1,971	2,285	2,97	3,524	3,658	3,844	4,799	5,801	6,015	6,086

X	1,91	2,03	2,4	2,63	2,8	2,89	3,01	3,1	3,58	3,81
Y	6,486	6,943	8,479	9,522	10,333	10,777	11,329	11,841	14,449	15,715

X	4,0	4,1	4,18	4,71	5,1	5,48	6,0	6,2	6,5	7,3
Y	16,901	17,519	18,005	21,332	24,033	26,708	30,532	32,051	34,379	40,861

Вычислить значение функции при x=2,29 с помощью интерполяционного полинома Лагранжа и аппроксимирующей функции $y=\sqrt{a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d}$.

Вариант 9. Функция задана таблично парами чисел (x, y).

X	-0,7	-0,59	-0,52	-0,4	-0,38	-0,32	0,49	0,86	0,93	1,08
Y	1,115	1,428	1,597	1,831	1,865	2,877	2,877	3,101	3,145	3,186

X	1,41	1,63	1,78	1,83	1,91	2,03	2,4	2,63	2,8	2,89
Y	3,33	3,381	3,413	3,416	3,428	3,437	3,429	3,398	3,349	3,336

X	3,0	3,1	3,21	3,21	3,58	3,8	4,0	4,12	4,18	5,1
Y	3,302	3,266	3,266	3,232	3,031	2,882	2,72	2,628	2,548	0,741

Вычислить значение функции при *x=1,82* с помощью интерполяционного полинома Лагранжа и аппроксимирующей функции $y = \sqrt{a \cdot x^2 + b \cdot x \ + c}$.

Вариант 10. Функция задана таблично парами чисел (x, y).

X	-1,9	-1,53	-0,7	-0,59	-0,52	-0,41	-0,38	-0,3	0,5	0,86
Y	1,165	2,042	3,237	3,364	3,442	3,572	3,597	3,677	4,427	4,728

X	0,93	1,03	1,4	1,63	1,79	1,83	1,94	2,03	2,4	2,63
Y	4,33	4,851	5,141	5,288	5,418	5,437	5,506	5,598	5,834	5,982

X	2,80	2,89	3,01	3,1	3,21	3,58	3,8	4,02	4.71	5,12
Y	6,082	6,216	6,216	6,274	6,31	6,858	6,672	6,798	7,178	7,381

Вычислить значение функции при *x=-0,23* с помощью интерполяционного полинома Лагранжа и аппроксимирующей функции $y = \sqrt{a \cdot x \ + b}$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Беляев В.В.* Информатика. Аппроксимация методом наименьших квадратов: методические указания по выполнению курсовой работы / В.В. Беляев, Г.Н. Журов. СПб.: СПГГИ (ТУ), 2005.
2. *Быкова О.Г.* Информатика. Вычисления в Microsoft Excel. СПб.: СПГГИ (ТУ), 2008.
3. *Быкова О.Г.* Информатика. Работа в пакете MathCAD. Методические указания к лабораторным работам. СПб.: СПГГИ (ТУ), 2009.
4. *Быкова О.Г.* Информатика. Приближенные методы вычислений. Методические указания к практическим и лабораторным работам. СПб.: СПГГИ (ТУ), 2009.
5. *Быкова О.Г.* Информатика. Решение нелинейных и дифференциальных уравнений. Методические указания к выполнению практических и лабораторных работ. СПб.: СПГГИ (ТУ), 2009.
6. *Быкова О.Г.* Информатика. Математические методы в процессах добычи нефти и газа: Методические указания по выполнению курсовой работы. СПб.: СПГГИ (ТУ), 2010.
7. *Бронштейн И.Н., Семендяев Н.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов (все издания)
8. *Вержбицкий В.М.* Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения). М.: Высшая школа, 2000.
9. *Волков Е.А.* Численные методы: Учебное пособие. 4-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2007.
10. *Демидович Б.П.* Основы вычислительной математики. 1963
11. *Половко А.М.* MathCAD для студента / А.М. Половко, И.В. Ганичев. СПб.: БХВ-Петербург, 2006.