

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

П. А. Иванов М. С. Николаев

Теоретическая механика.
Кинематика. Динамика

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2018

УДК 531.31(07)

ББК В 21я7

И20

Иванов П. А., Николаев М. С. Теоретическая механика. Кинематика. Динамика: учебно-методическое пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018. 63 с.

ISBN 978-5-7629-2249-4

Индивидуальные домашние задания являются основной формой самостоятельной работы студентов по курсу «Теоретическая механика» и имеют целью закрепление навыков практического применения теории по разделам «Кинематика» и «Динамика». Приведены варианты и рассмотрены примеры выполнения индивидуальных заданий.

Предназначено для студентов всех факультетов и направлений СПбГЭТУ «ЛЭТИ», изучающих дисциплину «Теоретическая механика».

УДК 531.31(07)

ББК В 21я7

Рецензент – д-р физ.-мат. наук, проф. А. М. Лестев (ГУАП).

Утверждено

редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

ISBN 978-5-7629-2249-4

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – это наука, изучающая общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Механическим движением называется изменение с течением времени взаимного положения материальных тел в пространстве.

Механическим взаимодействием называется такое взаимодействие материальных тел, которое изменяет (или стремится изменить) характер механического движения этих тел.

Курс теоретической механики состоит из трех основных разделов: «Статика» (в данном курсе не рассматривается), «Кинематика» и «Динамика». Цель данного курса – дать студентам знание основных законов механического движения и механического взаимодействия материальных тел в пространстве под действием приложенных к ним сил, а также привить навыки к использованию данных законов при решении теоретических и практических задач в различных областях физики и техники.

В пособии приведены варианты и рассмотрены примеры выполнения трех индивидуальных заданий, целью которых является практическое применение законов кинематики и динамики при анализе движения точки и механической системы.

При выполнении студентами индивидуальных домашних заданий должны быть соблюдены следующие требования.

1. Работу необходимо оформить в соответствии с требованиями ГОСТ 7.32–2001. На титульном листе следует указать названия учебного заведения и факультета, полное наименование задачи, номер варианта, ФИО студента и группу, в которой он обучается.
2. Текст задания переписывается полностью или вкладывается в печатном виде на отдельном листе. Исходные данные на выполнение заданий должны быть приведены в виде таблицы.
3. Решение каждого задания сопровождается краткими пояснениями. Также необходимо дать названия буквенным обозначениям и привести единицы их измерения.
4. Все вычисления следует выполнять в общем виде, приводя производимые промежуточные преобразования. Численные значения величин приводятся с точностью до двух верных знаков.

5. Чертежи следует выполнять на миллиметровой бумаге формата А4 (или А3) с соблюдением выбранного масштаба, значение которого необходимо указать в нижней части чертежа для каждой величины отдельно. На чертеже должны быть обозначены все величины, используемые для решения задания, а также все найденные по ходу решения величины. При этом последние выделяются более жирными линиями или линиями другого цвета.
6. В конце каждого задания необходимо записать ответ и вывод по форме, представленной в примерах решения заданий.

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематика – это раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных объектов и систем в пространстве без учета причин, вызывающих это движение.

Материальная точка – это материальное тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Движущаяся точка описывает в пространстве некоторую линию. Эта линия, представляющая собой геометрическое место последовательных положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета, называется *траекторией точки*.

По виду *траектории* движение точки делится на прямолинейное и криволинейное.

Изучение движения точки заключается в определении положения точки в выбранной системе отсчета и основных характеристик этого движения (*кинематических характеристик*):

скорости точки в любой момент времени;

ускорения точки в любой момент времени.

Для определения положения точки и ее кинематических характеристик необходимо задать движение точки в пространстве. Существуют *три способа задания движения точки*:

векторный;

координатный;

естественный.

Векторный способ задания движения точки. Положение любой точки в пространстве однозначно определяется заданием радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из некоторого неподвижного центра O в данную точку M (рис. 1.1).

Для определения движения точки необходимо знать, как изменяется с течением времени радиус-вектор $\vec{r}$, т. е. должна быть задана функция

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

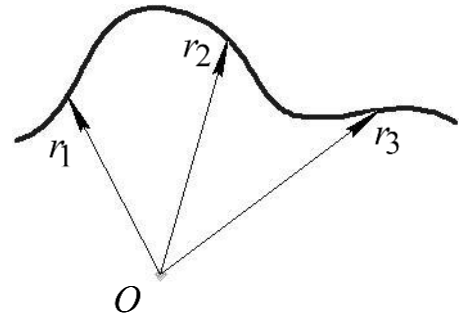


Рис. 1.1

Траектория движения точки в данном случае представляет собой годограф радиуса-вектора $\vec{r}$ (годограф вектора – линия, соединяющая концы переменного вектора, построенного из одного начала)

Скорость точки $\vec{v}$ – это векторная величина, характеризующая изменение радиуса-вектора $\vec{r}$ по величине и направлению с течением времени. Вектор скорости точки определяется как первая производная от ее радиуса-вектора по времени:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

он направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

Ускорение точки $\vec{a}$ характеризует изменение вектора скорости точки $\vec{v}$ по величине и направлению с течением времени. Вектор ускорения точки определяется как первая производная от ее скорости или вторая производная от ее радиуса-вектора по времени:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Вектор ускорения направлен по касательной к годографу вектора скорости.

Координатный способ задания движения точки. Рассмотрим движение точки $M(x; y; z)$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Положение точки в пространстве будет определяться тремя координатами $(x; y; z)$, значения которых при движении точки будут меняться с течением времени, т. е. уравнения движения точки будут представлены в виде:

$$\begin{cases} x = f_1(t); \\ y = f_2(t); \\ z = f_3(t). \end{cases}$$

Зависимости координат точки от времени являются параметрическими уравнениями ее траектории. Это значит, что при движении точки в простран-

стве, исключив параметр t из этих уравнений, получим уравнения *траектории* точки в выбранной системе отсчета.

Спроецируем точку M на плоскости декартовой системы координат (рис. 1.2):

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{OA} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей.

Скорость точки $\vec{v}$ – первая производная от ее радиуса-вектора по времени, следовательно,

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k},$$

где $v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$; $v_z = \frac{dz}{dt}$ – проекции скорости точки M на декартовы оси.

$$\text{Модуль скорости } |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Ускорение точки $\vec{a}$ – первая производная от ее скорости и вторая производная от ее радиуса-вектора по времени, следовательно:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$; $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$; $a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$ – проекции ускорения точки M на декартовы оси.

$$\text{Модуль ускорения } |\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Естественный способ задания движения точки. Естественный способ используется, когда полностью известна траектория движения точки.

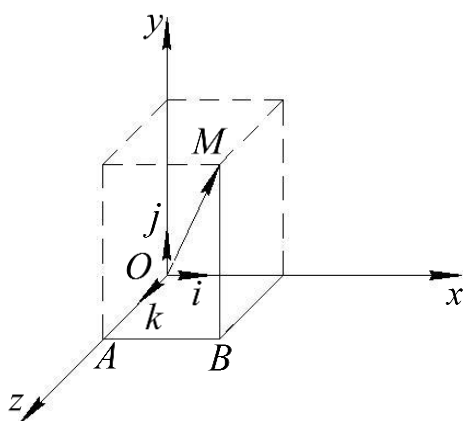


Рис. 1.2

Выберем на известной траектории неподвижную точку O , которую назовем началом отсчета дуговой координаты. Положение точки M на траектории определяется дуговой координатой σ , которая численно равна длине дуги от точки O до точки M (рис. 1.3). Расстояния, отложенные в одну сторону, будем считать положительными (+), в другую – отрицательными (–).

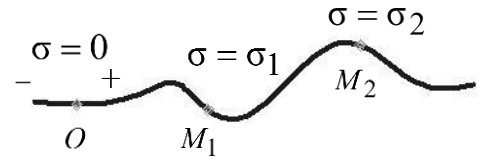


Рис. 1.3

При движении точки M по траектории расстояние от этой точки до начала отсчета будет меняться с течением времени, т. е. $\sigma = f(t)$. Уравнение, описывающее зависимость дуговой координаты от времени, называется уравнением движения точки при естественном способе его задания.

Модуль скорости точки $|\vec{v}|$ при естественном способе задания ее движения определяется как первая производная от дуговой координаты точки по времени:

$$|\vec{v}| = \dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt},$$

а направление определяется касательным ортом $\vec{\tau}$, который всегда направлен в сторону увеличения дуговой координаты:

$$\vec{v} = \dot{\sigma} \vec{\tau}.$$

Ускорение точки $\vec{a}$ определяется как первая производная по времени от ее скорости:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\sigma} \vec{\tau} + \dot{\sigma} \dot{\vec{\tau}},$$

где $\ddot{\sigma} \vec{\tau} = \left| \dot{\vec{v}} \right|' \vec{\tau} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} = \vec{a}_\tau$ – касательное ускорение точки, характеризующее изменение вектора скорости по величине с течением времени, и $\dot{\sigma} \dot{\vec{\tau}} = \dot{\sigma} \left(\dot{\sigma} \frac{1}{\rho} \vec{n} \right) = \dot{\sigma}^2 \frac{1}{\rho} \vec{n} = \frac{v^2}{\rho} \vec{n} = \vec{a}_n$ – нормальное ускорение точки, характеризующее изменение вектора скорости по направлению с течением времени (здесь ρ – радиус кривизны траектории в данный момент времени, $\vec{n}$ – нормальный орт).

При этом, если $\vec{a}_\tau \uparrow \vec{v}$, движение точки ускоренное, если $\vec{a}_\tau \downarrow \vec{v}$ – замедленное. Нормальное ускорение $\vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau, \vec{v}$ и всегда направлено в сторону вогнутости кривой.

Таким образом, ускорение точки определяется как геометрическая сумма ее касательного и нормального ускорений, а его модуль будет равен:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}.$$

Задача 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

1.1. Условие задачи

По данным кинематическим уравнениям движения точки (табл. 1.1) определить следующее.

1. Траекторию точки.
2. Положение точки на траектории ее движения в начальный момент времени.
3. Положение точки на траектории ее движения в момент времени $t_1 = t_0 + \Delta t$, где $t_0 > 0$ определяется по указанному в столбце 4 табл. 1.1 условию, а величина Δt задается преподавателем.
4. Кинематические характеристики точки (вектор линейной скорости, векторы полного, касательного и нормального ускорений) в момент времени t_1 .
5. Радиус кривизны траектории движения точки в момент времени t_1 .

1.2. Порядок решения задачи

1. Построить траекторию точки, исследуя ее уравнение средствами математического анализа.
2. Определить момент времени $t_1 = t_0 + \Delta t$ в соответствии с заданными в табл. 1.1 (t_0) и преподавателем (Δt) условиями.
3. Найти и указать положение точки на траектории ее движения в начальный момент времени ($t = 0$) и в момент времени t_1 .
4. Определить и построить по составляющим $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$ вектор $\vec{v}$ линейной скорости точки в расчетный момент времени.

Таблица 1.1

Номер варианта	Кинематические уравнения движения точки		t_0 – момент времени, когда впервые после начала движения точки выполняется условие, с
	$x = x(t)$, м	$y = y(t)$, м	
1	$2 + 4\sin \frac{\pi t}{2}$	$5 + 2\cos \frac{\pi t}{2}$	Траектория пересекает ось Oy
2	$4\cos \frac{3\pi t}{4}$	$7\sin \frac{3\pi t}{4}$	$y(t_0) = y_{\max}$
3	$5\cos \frac{3\pi t}{2} - 2,5$	$5\sin \frac{3\pi t}{2} + 5$	$x(t_0) = x_{\min}$
4	$4\sin \frac{\pi t}{2}$	$2 - 3\sin^2 \frac{\pi t}{2}$	$v_x(t_0) = 0$
5	$3\sin^2 \frac{\pi t}{2}$	$\frac{t^2}{4}$	$x(t_0) = x_{\max}$
6	$1 - 2\cos^2 \frac{\pi t}{4}$	$6 - 2\cos^2 \frac{\pi t}{4}$	$x(t_0) = x_{\max}$
7	$5\cos 2t - 2$	$8\sin 2t + 4$	Траектория пересекает ось Ox
8	$4\cos 6t$	$1 + 6\sin 3t$	Траектория пересекает ось Oy
9	$8\cos 4t$	$7\sin^2 2t$	$a_x(t_0) = [a_x]_{\max}$
10	$8\sin 3t$	$15\cos 3t + 16$	Расстояние от точки на траектории до начала координат - наимень- шее
11	$\cos t$	$\cos 2t$	Траектория пересекает ось Ox .
12	$10\cos(\pi t)$	$\frac{10}{11 - 10\sin^2(\pi t)}$	$y(t_0) = y_{\max}$
13	$2\sin 3t$	$\frac{7}{1 + \sin^2 3t}$	$v_x(t_0) = [v_x]_{\min}$
14	$\frac{e^{\frac{t-1}{4}} - e^{-\frac{t-1}{4}}}{2}$	$\frac{e^{\frac{t-1}{4}} + e^{-\frac{t-1}{4}}}{2}$	Расстояние от точки на траектории до начала координат равно 1 м
15	$\frac{3}{4}\cos^2 \frac{\pi t}{2}$	$2\sin \frac{\pi t}{2} + 3$	$y(t_0) = y_{\min}$

Окончание табл. 1.1

Номер варианта	Кинематические уравнения движения точки		t_0 – момент времени, когда впервые после начала движения точки выполняется условие, с
	$x = x(t)$, м	$y = y(t)$, м	
1	2	3	4
16	$\frac{1}{2 - \cos t}$	$\cos t$	Траектория пересекает ось Ox
17	$11 \sin 4t$	$12 + 5 \cos 8t$	$v_y(t_0) = [v_y]_{\max}$
18	t	$2(e^{\frac{t}{4}} + e^{-\frac{t}{4}}) - 12$	Траектория пересекает ось Ox
19	$2 \cos t + t$	$2t$	$v_x(t_0) = 0$
20	$\cos^2 t$	$\sin 2t$	$v_y(t_0) = 0$
21	$1 - 2 \cos(2\pi t)$	$1 + \cos(\pi t)$	$a_y(t_0) = 0$
22	$1 - \frac{3}{5} \sin \frac{\pi t}{3}$	$\cos \frac{\pi t}{3}$	$v_x(t_0) = [v_x]_{\max}$
23	$\frac{1}{5} - \sin^2 t + 2 \sin t$	$-\frac{3}{4} \sin t$	$y(t_0) = y_{\min}$
24	$\cos t + \cos 2t$	$2 \cos t$	$x(t_0) = x_{\min}$
25	$\sin t$	$\sin t + \cos 2t$	$v_x(t_0) = 0$
26	$\frac{1}{3}(t^2 + 3)$	$3 \sin \frac{\pi t}{2}$	$a_y(t_0) = [a_y]_{\min}$
27	$-3t$	$\frac{e^{(t-1)} - e^{-(t-1)}}{2}$	$v_y(t_0) = [v_y]_{\min}$
28	$4 \sin 6t$	$\frac{4}{2 - \cos 12t}$	$v_x(t_0) = 0$
29	$2 \cos t - 1$	$\frac{2}{2 - \cos t + \cos 2t}$	Траектория пересекает ось Oy
30	$3 \sin \frac{7\pi t}{6} + 7$	$6 \sin \frac{7\pi t}{6} - 2$	$v_y(t_0) = 0$

5. Определить и построить по составляющим $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ вектор $\vec{a}$ линейного ускорения точки в расчетный момент времени.
6. Определить и построить векторы касательного $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений в расчетный момент времени.
7. Вычислить радиус кривизны ρ траектории в расчетный момент времени.
8. Все графические построения произвести в соответствующих масштабах.
9. Расчетные значения определяемых величин представить в следующей форме (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Время $t_1, \text{с}$	Координаты, м				Скорость, м/с			Ускорение, м/с ²					Радиус кривизны $\rho, \text{м}$
	x_0	y_0	x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a_τ	a_n	a	

10. В конце работы представить вывод о характере движения точки.

1.3. Пример решения задачи

Условие задачи. По заданным кинематическим уравнениям движения точки (x и y – в метрах, t – в секундах)

$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 - 1; \\ y(t) = \frac{1}{2}t^4 + 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

определить: траекторию точки; кинематические характеристики точки (вектор линейной скорости, векторы полного, касательного и нормального ускорений соответственно); а также радиус кривизны траектории в момент времени $t_1 = t_0 + \Delta t$, где t_0 – момент времени, когда траектория пересекает ось Oy , а $\Delta t = 0,29 \text{с}$.

Решение.

1. Определим траекторию движения точки.

Для определения траектории движения точки, заданного координатным способом, исключим из системы уравнений (1.1) время t . Для этого из первого уравнения системы (1.1) выразим t^2 :

$$t^2 = \frac{x+1}{2}$$

и подставим во второе уравнение (1.1):

$$y(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1.$$

Тем самым получим уравнение траектории движения точки:

$$y(x) = \frac{1}{8}(x+1)^2 + 1. \quad (1.2)$$

Для построения траектории движения точки необходимо исследовать функцию (1.2). Для этого выполним следующие действия:

Определим области значений функций $x(t)$ и $y(t)$ при $t \geq 0$. Из системы уравнений (1.1) следует, что

$$\begin{cases} -1 \leq x(t) < +\infty; \\ 1 \leq y(t) < +\infty. \end{cases} \quad (1.3)$$

Определим точки пересечения с осями координат. Функция (1.2) имеет точку пересечения с осью Oy . Следовательно, в уравнение (1.2) необходимо подставить $\tilde{x} = 0$ и вычислить: $\tilde{y}(\tilde{x}) = \frac{1}{8}(0+1)^2 + 1 = 1,13$. Таким образом, точка $\tilde{M}(\tilde{x}; \tilde{y})$ будет иметь координаты $\tilde{M}(0; 1,13)$.

Найдем экстремумы и исследуем уравнение (1.2) на монотонность. Вычислим первую производную от функции (1.2) и найдем критические точки из условия, что $y'(x) = 0$:

$$y'(x) = \left(\frac{1}{8}(x+1)^2 + 1 \right)' = \frac{1}{4}(x+1) = 0. \quad (1.4)$$

Из выражения (1.4) следует, что точка экстремума функции (1.2) имеет координаты $M_{\exists}(x_{\exists}; y_{\exists}) = M_{\exists}(-1; 1)$.

Вычислим вторую производную от функции (1.2):

$$y''(x) = \left(\frac{1}{8}(x+1)^2 + 1 \right)'' = \frac{1}{4}.$$

Поскольку $y''(x) > 0$, то точка $M_{\exists}(-1; 1)$ – минимум функции (1.2).

Кроме того, из условия $y'(x) > 0$ при $x > x_{\exists}$ следует, что функция (1.2) возрастающая.

Для уточнения вида кривой определим по выражению (1.2) с учетом условия (1.3) несколько промежуточных точек.

Таблица 1.3

Данные, необходимые для построения траектории движения точки, приведены в табл. 1.3, а сама траектория изображена на рис. 1.4.

x	$y(x) = \frac{1}{8}(x+1)^2 + 1$
1	1,5
3	3
5	5,5

2. Определим момент времени t_1 .

Определим момент времени t_0 , когда траектория пересекает ось Oy , т. е. когда выполняется условие $x(t_0) = 2t_0^2 - 1 = 0$. При условии, что $t_0 > 0$, получим $t_0 = 0,71$ с.

Тогда

$$t_1 = t_0 + \Delta\tau = 0,71 + 0,29 = 1 \text{ с.}$$

3. Найдем и укажем на рис. 1.4 положение точки на траектории ее движения в начальный момент времени ($t = 0$) и в момент времени t_1 .

Точка $M_0(x_0; y_0)$ характеризует положение точки на траектории ее движения в начальный момент времени. Определим координаты этой точки, для чего в выражение (1.1) подставим $t = 0$:

$$\begin{cases} x(0) = 2 \cdot 0^2 - 1 = -1 \text{ м;} \\ y(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^4 + 1 = 1 \text{ м.} \end{cases}$$

Точка $M_1(x_1; y_1)$ характеризует положение точки на траектории ее движения в момент времени t_1 . Определим координаты этой точки, для чего в выражение (1.1) подставим найденное ранее значение $t_1 = 1$ с:

$$\begin{cases} x(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1 \text{ м;} \\ y(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^4 + 1 = 1,5 \text{ м.} \end{cases}$$

Укажем на рис. 1.4 найденные точки $M_0(-1; 1)$ и $M_1(1; 1,5)$.

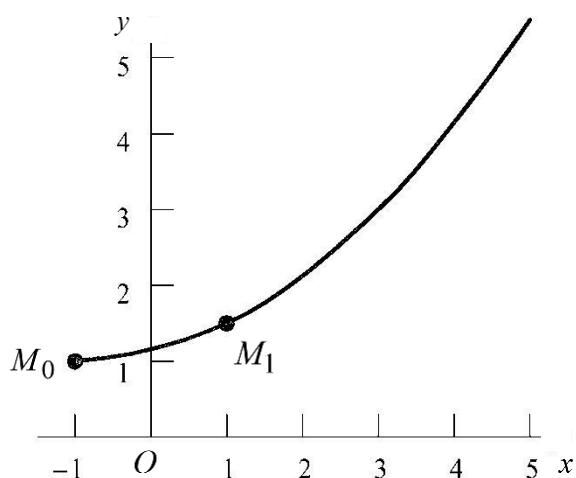


Рис. 1.4

4. Определим и построим по составляющим $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$ вектор $\vec{v}$ линейной скорости точки M_1 .

Проекции вектора линейной скорости на координатные оси и его модуль определим по формулам:

$$v_x(t) = \dot{x}(t); \quad v_y(t) = \dot{y}(t); \quad v(t) = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}.$$

Для заданных кинематических уравнений (1.1) получим:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \dot{x}(t) = (2t^2 - 1)' = 4t; \\ v_y(t) &= \dot{y}(t) = \left(\frac{1}{2}t^4 + 1\right)' = 2t^3; \\ v(t) &= \sqrt{(4t)^2 + (2t^3)^2} = 2t\sqrt{4 + t^4}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Используя выражения (1.5), определим проекции вектора линейной скорости на координатные оси и его модуль в момент времени $t_1 = 1$ с (т. е. для точки M_1):

$$v_x(1) = 4 \cdot 1 = 4 \text{ м/с}; \quad v_y(1) = 2 \cdot 1^3 = 2 \text{ м/с}; \quad v(1) = 2 \cdot 1 \sqrt{4 + 1^4} = 2\sqrt{5} \approx 4,47 \text{ м/с}.$$

Построим в масштабе (рис. 1.5) составляющие $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$ вектора линейной скорости и вектор $\vec{v}$ полной скорости, являющийся геометрической суммой векторов $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y.$$

Направление вектора линейной скорости $\vec{v}$ по касательной к траектории свидетельствует о корректности произведенных аналитических вычислений.

5. Определим и построим по составляющим $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ вектор $\vec{a}$ линейного ускорения точки M_1 .

Проекции вектора линейного ускорения на координатные оси и его модуль определим по формулам:

$$a_x(t) = \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t); \quad a_y(t) = \dot{v}_y(t) = \ddot{y}(t); \quad a(t) = \sqrt{(\ddot{x}(t))^2 + (\ddot{y}(t))^2}.$$

Для заданных кинематических уравнений (1.1) получим:

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \dot{v}_x(t) = (4t)' = 4; \\ a_y(t) &= \dot{v}_y(t) = (2t^3)' = 6t^2; \\ a(t) &= \sqrt{4^2 + (6t^2)^2} = 2\sqrt{4 + 9t^4}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Используя (1.6), определим проекции вектора линейного ускорения на координатные оси и его модуль в момент времени $t_1 = 1$ с (т. е. для точки M_1):

$$a_x(1) = 4 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y(1) = 6 \cdot 1^2 = 6 \text{ м/с}^2;$$

$$a(1) = 2\sqrt{4 + 9 \cdot 1^4} = 2\sqrt{13} \approx 7,21 \text{ м/с}^2.$$

Построим в масштабе (см. рис. 1.5) составляющие $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ вектора линейного ускорения, а также вектор полного ускорения $\vec{a}$, равный геометрической сумме векторов $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y.$$

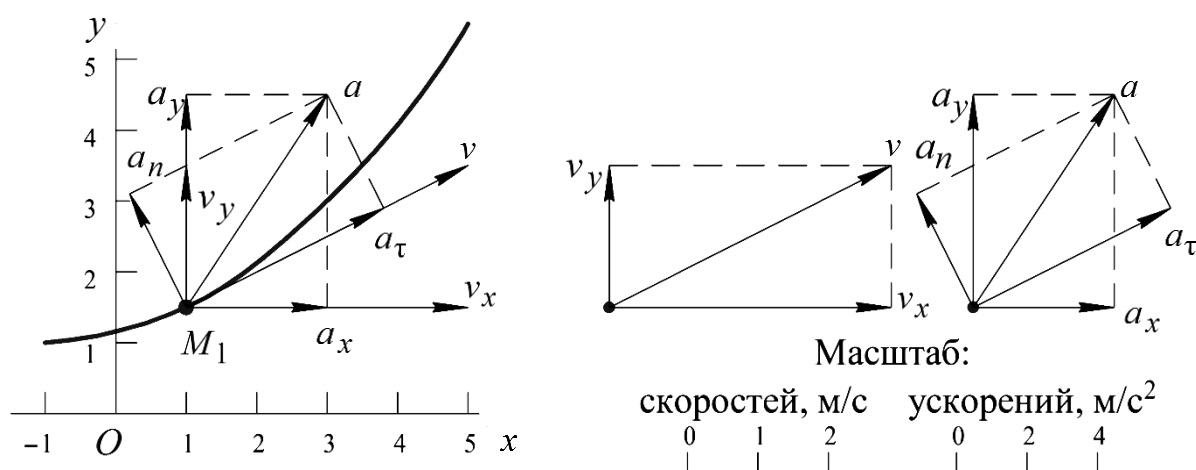


Рис. 1.5

6. Определим и построим векторы касательного $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений точки M_1 .

Касательное и нормальное ускорения определим по формулам:

$$\begin{cases} a_\tau(t) = \frac{dv(t)}{dt}; \\ a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \end{cases} \quad (1.7)$$

В соответствии с (1.5) и (1.7) получим:

$$\begin{aligned} a_\tau(t) &= \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(2t\sqrt{4+t^4} \right) = 2\sqrt{4+t^4} + 2t \cdot \frac{2t^3}{\sqrt{4+t^4}} = \\ &= 2\sqrt{4+t^4} + \frac{4t^4}{\sqrt{4+t^4}} = \frac{8+6t^4}{\sqrt{4+t^4}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Когда функция линейной скорости от времени $v(t)$ является сложным для дифференцирования выражением, для определения касательного ускорения удобнее рассматривать вектор касательного ускорения $\vec{a}_\tau$ как проекцию полного ускорения $\vec{a}$ на направление движения (рис. 1.6).

Из данных рис. 1.6 видно, что $a_\tau = a \cos \alpha$, где α – угол между вектором скорости и вектором ускорения. Умножив и разделив это выражение на v , получим

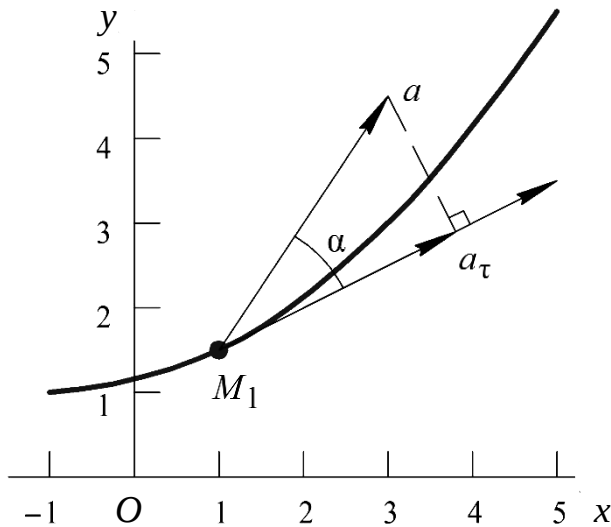


Рис. 1.6

$$a_\tau = \frac{a v \cos \alpha}{v}. \quad (1.9)$$

Числитель выражения (1.9) представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{v}$, которое может быть записано в проекциях на координатные оси в виде $\vec{v} \cdot \vec{a} = v_x a_x + v_y a_y$. Таким образом, зная проекции скорости и ускорения на координатные оси, для нахождения касательного ускорения можно использовать выражение

$$a_\tau(t) = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \quad (1.10)$$

В соответствии с (1.5), (1.6) и (1.10), получим:

$$\begin{aligned} a_\tau(t) &= \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} = \frac{4t \cdot 4 + 2t^3 \cdot 6t^2}{2t\sqrt{4+t^4}} = \\ &= \frac{16t + 12t^5}{2t\sqrt{4+t^4}} = \frac{2t(8 + 6t^4)}{2t\sqrt{4+t^4}} = \frac{8 + 6t^4}{\sqrt{4+t^4}}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Используя (1.8) или (1.11), определим касательное ускорение в момент времени $t_1 = 1$ с (т. е. для точки M_1):

$$a_\tau(1) = \frac{8 + 6 \cdot 1^4}{\sqrt{4 + 1^4}} = 6,26 \text{ м/с}^2.$$

Из выражения (1.7) определим нормальное ускорение в момент времени $t_1 = 1$ с (т. е. для точки M_1):

$$a_n(1) = \sqrt{(a(1))^2 - (a_\tau(1))^2} = \sqrt{7,21^2 - 6,26^2} = 3,58 \text{ м/с}^2.$$

Построим в масштабе (см. рис. 1.5) составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ вектора линейного ускорения. Геометрическая сумма векторов $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ должна быть равной вектору линейного ускорения $\vec{a}$, т. е. выполняется равенство

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

7. Вычислим радиус кривизны ρ траектории движения точки M_1 :

$$\rho = \frac{(v(t_1))^2}{a_n(t_1)} = \frac{4,47^2}{3,58} = 5,58 \text{ м.}$$

8. Полученные значения кинематических величин для расчетного момента времени t_1 занесем в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Время $t_1, \text{с}$	Координаты, м				Скорость, м/с			Ускорение, м/с ²					Радиус кривизны $\rho, \text{м}$
	x_0	y_0	x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a_τ	a_n	a	
1	-1	1	1	1,5	4	2	4,47	4	6	6,26	3,58	7,21	5,58

Равенство геометрических сумм векторов $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$, а также векторов $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$, одному и тому же вектору $\vec{a}$ (при построении в одном масштабе) свидетельствует о корректности проведенных аналитических вычислений.

9. Опишем характер движения точки.

Точка M перемещается по траектории $y(x) = \frac{1}{8}(x+1)^2 + 1$ вправо от точки $M_0(-1; 1)$. В момент времени t_1 точка на траектории займет положение $M_1(1; 1,5)$. Линейная скорость точки в расчетный момент времени меняется по закону $v(t) = 2t\sqrt{4+t^4}$, а ее линейное ускорение – по закону $a(t) = 2\sqrt{4+9t^4}$. Характер движения точки – движение криволинейное и ускоренное, так как $a_n \neq 0$ и $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{a}_\tau$.

2. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Твердое тело – система материальных точек, расстояния между которыми в процессе движения остаются неизменными.

Три точки тела, не лежащие на одной прямой, называются *формальной моделью* твердого тела.

Различают пять видов движения твердого тела:

- 1) поступательное;
- 2) вращательное вокруг неподвижной оси;
- 3) плоское (плоскопараллельное);
- 4) сферическое (вращательное вокруг неподвижной точки);
- 5) общий случай движения.

Поступательным движением называют такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной своему первоначальному положению (рис. 2.1).

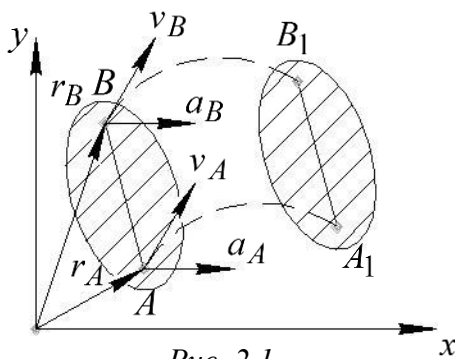


Рис. 2.1

Теорема. Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют равные по величине и направлению скорости и ускорения:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B, \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Поскольку все точки твердого тела движутся по одинаковым траекториям с одинаковыми скоростями и ускорениями, изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения любой его точки (т. е. к задачам кинематики точки).

Вращательным движением твердого тела называют такое движение, при котором в теле имеются как минимум две неподвижные точки.

Проходящая через эти точки прямая называется осью вращения (скорости всех точек, лежащих на этой прямой, равны нулю). Расстояния между точками твердого тела должны оставаться неизменными, поэтому очевидно, что при вращательном движении все точки тела будут описывать окружности, плоскости которых перпендикулярны оси вращения, а центры лежат на этой оси.

При вращении твердого тела угол его поворота φ меняется с течением времени, т. е. зависимость $\varphi = f(t)$ является уравнением вращательного движения твердого тела.

Угловая скорость $\vec{\omega}$ – это векторная величина, характеризующая изменение угла поворота φ тела с течением времени. Численное значение угловой скорости определяется как первая производная от угла поворота тела по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi},$$

при этом:

- если $\frac{d\varphi}{dt} > 0$, то угол поворота φ увеличивается, т. е. вращение тела происходит в положительном направлении отсчета угла поворота;
- если $\frac{d\varphi}{dt} < 0$, то угол поворота φ уменьшается, т. е. вращение тела происходит в обратную сторону.

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ – это векторная величина, характеризующая изменение угловой скорости тела с течением времени. Алгебраическое значение углового ускорения твердого тела определяется как первая производная от его угловой скорости или как вторая производная от его угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi},$$

при этом:

- если $\frac{d\omega}{dt} > 0$, то движение ускоренное и $\vec{\omega} \uparrow\uparrow \vec{\varepsilon}$;
- если $\frac{d\omega}{dt} < 0$, то движение замедленное и $\vec{\omega} \uparrow\downarrow \vec{\varepsilon}$.

Если угловая скорость во все время движения постоянна $\omega = \text{const}$, то вращение тела называется равномерным и $\varphi(t) = \varphi_0 \pm \omega t$.

Если угловое ускорение во все время движения постоянно $\varepsilon = \text{const}$, то вращение тела называется равнопеременным и закон такого движения описывается следующим образом:

$$\begin{cases} \omega(t) = \omega_0 \pm \varepsilon t; \\ \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \end{cases}$$

Рассмотрим вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Тело вращается вокруг оси Oy с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и угловым ускорением $\vec{\epsilon}$.

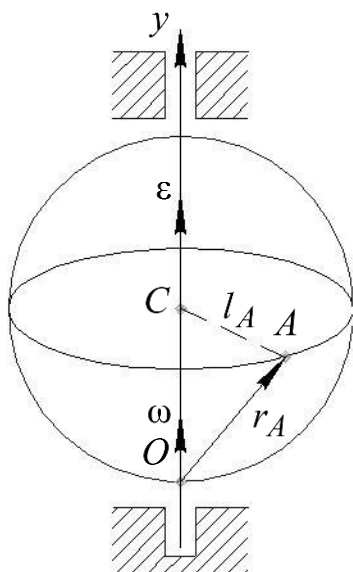


Рис. 2.2

Возьмем произвольную точку A (рис. 2.2), принадлежащую твердому телу и не лежащую на оси его вращения. Траекторией движения точки A при вращательном движении твердого тела будет окружность. Точка A смещена от оси вращения Oy на некоторое расстояние l_A . В системе координат $Oxyz$ положение точки A будет определяться радиусом-вектором $\vec{r}_A$, длина которого постоянна (из определения твердого тела).

Скорость точки A направлена по касательной к траектории ее движения и определяется как производная от радиуса-вектора $\vec{r}_A$ по времени:

$$\vec{v}_A = \dot{\vec{r}}_A.$$

Применив формулу Бура и учитывая определение твердого тела, получим формулу Эйлера:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \dot{\vec{r}}_A = \dot{r}_A \cdot \vec{e} + \vec{\omega} \times \vec{r}_A \\ |\vec{r}_A| = \text{const} \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A,$$

где $\vec{e}$ – единичный базис неподвижной системы отсчета.

Производная радиуса-вектора постоянной длины, заданного во вращающейся системе отсчета, определяется по формуле Эйлера как векторное произведение угловой скорости вращения на сам вектор.

Иначе говоря, скорость любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки.

Тогда модуль скорости точки A :

$$\begin{cases} v_A = \omega r_A \sin [\vec{\omega}, \vec{r}_A] \\ \sin [\vec{\omega}, \vec{r}_A] = \frac{l_A}{r_A} \end{cases} \Rightarrow v_A = \omega l_A,$$

т. е. модуль скорости любой точки вращающегося твердого тела равен произведению угловой скорости его вращения на расстояние от этой точки до оси вращения.

Определим ускорение точки A как производную от ее скорости по времени:

$$\vec{a}_A = \dot{\vec{v}}_A = [\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_A] = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_A + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_A = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A + \vec{\omega} \times \vec{v}_A = \vec{a}_{A\text{вр}} + \vec{a}_{A\text{ц}}.$$

$\vec{a}_{A\text{вр}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A$ – вращательное ускорение точки A , характеризующее изменение по величине ее скорости с течением времени. При этом $|\vec{a}_{A\text{вр}}| = \varepsilon r_A \sin \left[\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_A \right] = \varepsilon l_A$, т. е. модуль вращательного ускорения точки твердого тела равен произведению углового ускорения его вращения на расстояние от этой точки до оси вращения.

Кроме того, $\vec{a}_{A\text{вр}} \perp \vec{\varepsilon}, \vec{r}_A$, причем:

- если $\vec{\omega} \uparrow \vec{\varepsilon}$, то $\vec{a}_{A\text{вр}} \uparrow \vec{v}_A$, и движение точки ускоренное (рис. 2.3);
- если $\vec{\omega} \updownarrow \vec{\varepsilon}$, то $\vec{a}_{A\text{вр}} \updownarrow \vec{v}_A$, и движение точки замедленное.

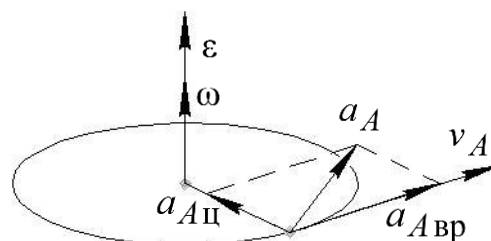


Рис. 2.3

$\vec{a}_{A\text{ц}} = \vec{\omega} \times \vec{v}_A$ – центростремительное ускорение точки A , характеризующее изменение по направлению ее скорости с течением времени. При этом $|\vec{a}_{A\text{ц}}| = \omega v_A \sin [\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A] = \omega v_A = \omega^2 l_A$, т. е. модуль центростремительного ускорения точки твердого тела равен произведению квадрата угловой скорости его вращения на расстояние от этой точки до оси вращения.

Кроме того, вектор $\vec{a}_{A\text{ц}} \perp \vec{a}_{A\text{вр}}$ и направлен к центру описываемой точкой окружности.

Тогда модуль ускорения точки A будет равен:

$$|\vec{a}_A| = \sqrt{(\vec{a}_{A\text{вр}})^2 + (a_{A\text{ц}})^2} = l_A \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Плоским или плоскопараллельным движением твердого тела называют такое движение, при котором все точки тела движутся во взаимно параллельных плоскостях, параллельных в свою очередь некоторой неподвижной плоскости.

Движение каждой точки плоской фигуры, образованной сечением тела неподвижной плоскостью, определяет движение всех точек твердого тела, т. е.

изучение плоского движения тела сводится к изучению движения плоской фигуры.

Из геометрии известно, что положение плоской фигуры в ее плоскости однозначно определяется положением двух ее точек или положением отрезка.

Теорема. *Плоское движение твердого тела может быть представлено как совокупность поступательного движения вместе с некоторой точкой, принятой за полюс, и вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через этот полюс.*

За полюс принято брать точку, кинематические характеристики которой известны или легко находимы в условиях данной задачи.

Если принять некоторую точку A за полюс, тогда уравнения плоского движения принимают вид:

$$\begin{cases} x_A = f_1(t); \\ y_A = f_2(t); \\ \varphi = f_3(t). \end{cases}$$

где φ – угол поворота тела (плоской фигуры) вокруг оси, проходящей через полюс A .

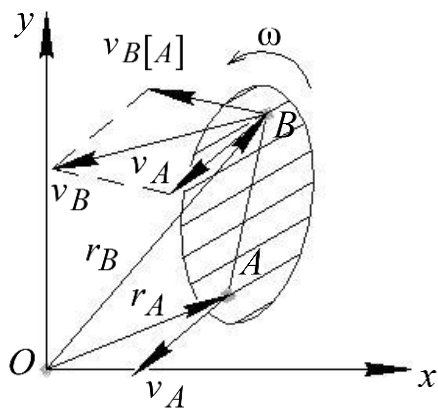


Рис. 2.4

Теорема. *Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки при ее вращательном движении относительно полюса.*

Рассмотрим движение плоской фигуры, заданной отрезком AB (рис. 2.4), и вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Приняв точку A за полюс с известной скоростью $\vec{v}_A$, определим скорость $\vec{v}_B$ точки B .

Из $\triangle OAB \Rightarrow \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$, тогда:

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_A = \vec{v}_A + \vec{v}_{B[A]},$$

где $\vec{v}_{B[A]} = \vec{\omega} \times \vec{r}_A$ – вращательная скорость точки B относительно полюса.

Теорема. *Проекции скоростей точек плоской фигуры на линию, их соединяющую, равны между собой:*

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta.$$

Зная величину и направление скорости одной точки плоской фигуры, можно определить величину скорости любой другой ее точки (рис. 2.5), при условии, что известно направление ее вектора.

$$v_B = v_A \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

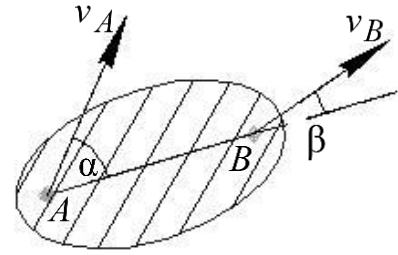


Рис. 2.5

При плоском движении твердого тела в каждый момент времени существует точка, неизменно с ним связанная (но не обязательно ему принадлежащая), скорость которой в этот момент времени равна нулю. Такая точка называется *мгновенным центром скоростей* P .

Мгновенный центр скоростей находится на перпендикуляре к направлению скорости $\vec{v}_O$ полюса O плоской фигуры, вращающейся с угловой скоростью ω , на расстоянии от этого полюса:

$$OP = \frac{v_O}{\omega}.$$

Определим скорости точек A , B и C плоской фигуры (рис. 2.6), приняв мгновенный центр скоростей P за полюс.

По теореме о скоростях точек плоской фигуры для точек A , B и C получим:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{A[P]} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{B[P]} \\ \vec{v}_C = \vec{v}_P + \vec{v}_{C[P]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A = v_{A[P]} = \omega \cdot AP, \vec{v}_A \perp \overline{AP}; \\ v_B = v_{B[P]} = \omega \cdot BP, \vec{v}_B \perp \overline{BP}; \\ v_C = v_{C[P]} = \omega \cdot CP, \vec{v}_C \perp \overline{CP}, \end{cases}$$

т. е. скорость любой точки плоской фигуры в каждый момент времени имеет модуль, равный произведению угловой скорости вращения фигуры на длину отрезка, соединяющего точку с мгновенным центром скоростей, и направление, перпендикулярное этому отрезку в сторону вращения плоской фигуры.

Таким образом, модули скоростей точек плоской фигуры в каждый момент времени пропорциональны расстояниям от этих точек до мгновенного центра скоростей.

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}, \frac{v_A}{v_C} = \frac{AP}{CP}, \frac{v_B}{v_C} = \frac{BP}{CP}.$$

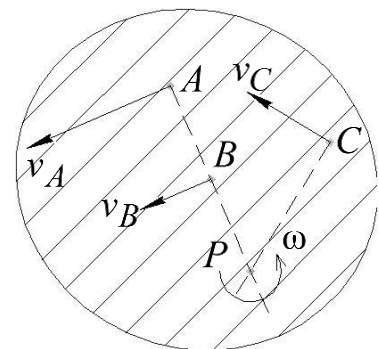


Рис. 2.6

Теорема. Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки при ее вращении вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс.

Рассмотрим движение плоской фигуры, заданной отрезком AB (рис. 2.7), и вращающейся ускоренно с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$. Приняв точку A за полюс с известным ускорением $\vec{a}_A$, определим ускорение $\vec{a}_B$ точки B :

$$\vec{a}_B = \dot{\vec{v}}_B = \dot{\vec{v}}_A + [\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}] = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times (\overrightarrow{AB})' = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{B[A]}.$$

$\vec{a}_{B[A]вр} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB}$ – вращательное ускорение точки B относительно

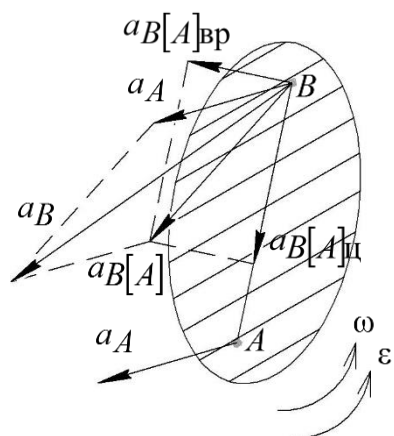


Рис. 2.7

полюса A . При этом $\vec{a}_{B[A]вр} \perp \vec{\varepsilon}, \overrightarrow{AB}$, причем:

- если $\vec{\omega} \uparrow \uparrow \vec{\varepsilon}$, то $\vec{a}_{B[A]вр} \uparrow \uparrow \vec{v}_{B[A]}$, и движение точки ускоренное (см. рис. 2.7);
- если $\vec{\omega} \uparrow \downarrow \vec{\varepsilon}$, то $\vec{a}_{B[A]вр} \uparrow \downarrow \vec{v}_{B[A]}$, и движение точки замедленное.

$\vec{a}_{B[A]ц} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{B[A]}$ – центростремительное ускорение точки B относительно полюса A . При этом вектор $\vec{a}_{B[A]ц} \perp \vec{a}_{B[A]вр}$ и направлен к полюсу A .

Таким образом, ускорение $\vec{a}_{B[A]}$ точки B относительно полюса A :

$$\vec{a}_{B[A]} = \vec{a}_{B[A]вр} + \vec{a}_{B[A]ц},$$

а общее ускорение точки B плоской фигуры:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B[A]}.$$

Сферическим движением твердого тела называют такое движение, при котором в теле существует одна неподвижная точка, а все остальные точки тела движутся по сферическим поверхностям, центры которых совпадают с неподвижной точкой.

Общий случай движения твердого тела – это такой вид движения, при котором тело в пространстве движется произвольным образом (движение свободного тела).

Задача 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

2.1. Условие задачи

В шарнирном четырехзвенном плоском механизме $OABO_1DE$ (рис. 2.8) ведущее звено OA равномерно вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O . Звено O_1B имеет неподвижную ось вращения, проходящую через точку O_1 . Точка E движется прямолинейно по вертикали вдоль оси ξ . Каток радиуса r движется без скольжения по неподвижной поверхности.

Номер схемы механизма, размеры звеньев, угловая скорость ведущего звена ω_{OA} и его положение для каждого из вариантов приведены в табл. 2.1. Для выданного варианта задания необходимо в указанном положении механизма найти линейные скорости точек A, B, D, E и диаметрально противоположных точек G, H обода катка, линейное ускорение точки B , а также угловые скорости всех звеньев и угловые ускорения звеньев AB и O_1B .

2.2. Порядок решения задачи

1. Определить линейную скорость точки A .
2. Определить направление векторов линейных скоростей точек B, D, E .
3. Найти мгновенные центры скоростей P_{AB}, P_{DE}, P_{GH} звеньев AB, DE и GH . После чего, оценив их приблизительное местоположение относительно механизма, выбрать масштаб длин таким образом, чтобы все мгновенные центры скоростей располагались в пределах чертежа.
4. Начертить в выбранном масштабе схему механизма, указав на ней мгновенные центры скоростей P_{AB}, P_{DE} и P_{GH} .
5. Определить и показать на схеме векторы линейных скоростей всех указанных ранее точек. Масштаб линейных скоростей может отличаться от масштаба длин.
6. Применяя способ мгновенного центра скоростей, определить и показать на схеме векторы угловых скоростей всех звеньев механизма.

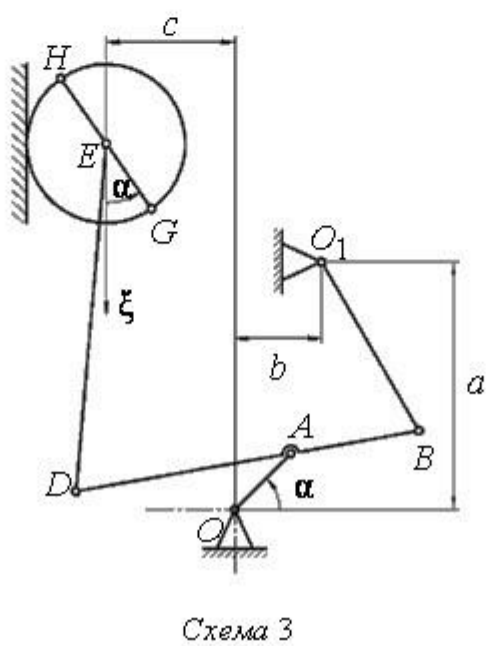
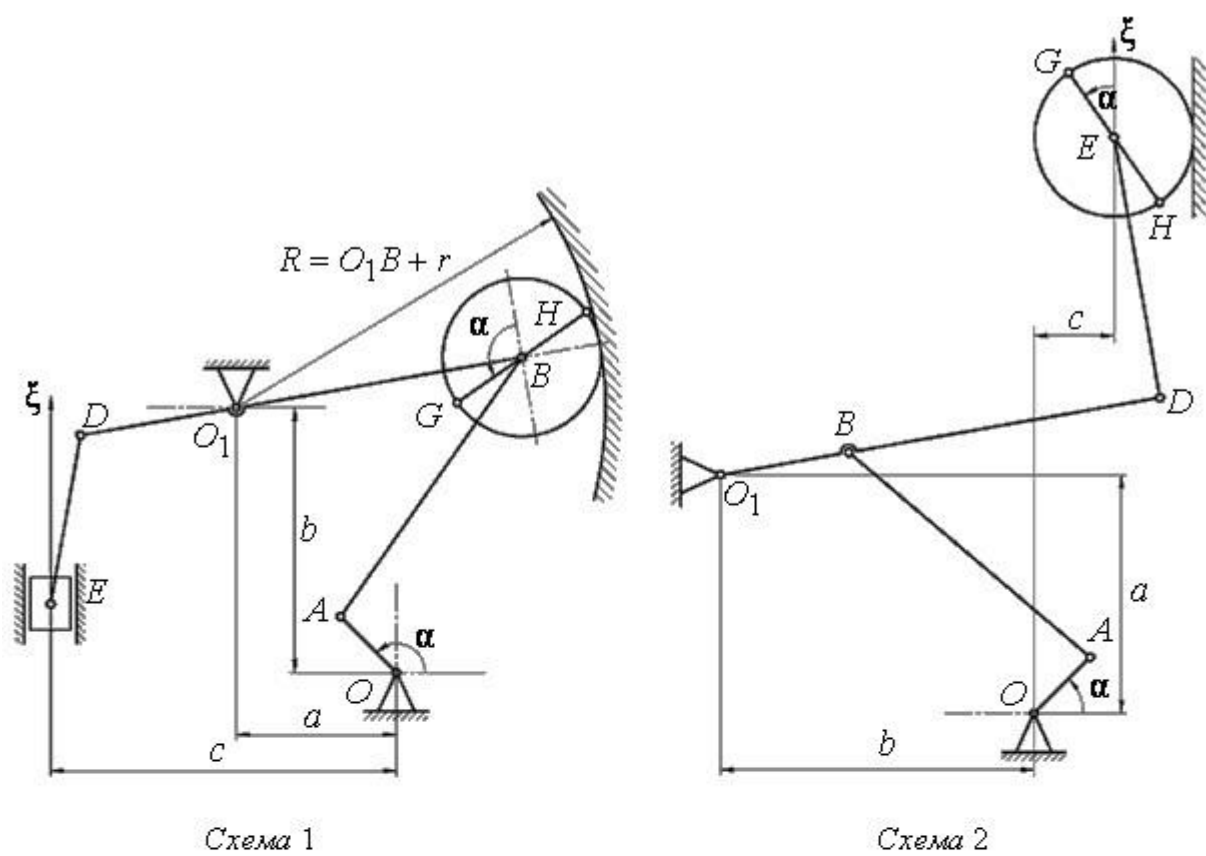


Рис. 2.8

Таблица 2.1

Номер		Размер, м								α , ...°	ω_{OA} , с ⁻¹	r , м
варианта	схемы	OA	AB	O_1B	BD	DE	a	b	c			
1	1	3,0	10,0	14,0	18,5	18,5	8,5	18,5	13,5	180	50	3,0
2	2	4,0	17,5	8,0	4,0	18,0	20,5	5,0	5,0	255	30	6,0
3	3	4,0	7,5	9,0	10,0	14,0	11,0	4,5	7,0	60	40	4,0
4	1	5,5	13,0	11,5	18,0	13,5	14,0	11,5	9,5	75	20	4,5
5	2	4,5	18,0	8,0	5,5	17,0	13,0	5,0	6,5	150	50	6,0
6	3	3,5	5,5	9,0	8,0	20,5	15,5	3,5	7,0	120	30	3,5
7	1	5,0	15,0	15,5	22,5	11,0	8,5	12,5	9,0	120	10	4,5
8	2	3,0	15,0	10,0	8,0	13,5	19,5	5,0	5,5	210	20	4,0
9	3	3,5	3,5	13,5	8,0	11,0	8,0	2,5	6,0	240	10	5,5
10	1	5,0	19,5	9,5	16,0	10,5	8,0	12,5	12,0	0	20	3,5
11	2	5,0	18,5	9,5	5,0	17,5	18,5	5,5	7,0	120	30	4,5
12	3	5,0	6,0	14,5	12,5	12,5	13,0	2,5	5,5	240	50	3,5
13	1	4,5	12,0	15,5	24,0	12,0	15,0	16,5	21,0	210	50	5,5
14	2	5,5	15,5	8,5	5,0	19,5	14,0	4,0	5,0	300	50	6,0
15	3	5,0	7,5	16,5	12,0	16,0	11,5	2,5	5,0	330	50	6,0
16	1	6,0	19,5	8,0	12,0	10,0	14,5	18,0	17,5	90	10	5,0
17	2	5,5	17,0	9,0	7,0	18,5	16,5	6,0	4,5	210	50	5,0
18	3	5,0	7,5	17,5	10,0	10,0	11,5	5,0	5,5	135	50	4,0
19	1	3,0	13,5	13,0	20,0	8,5	6,5	17,5	12,0	195	30	4,0
20	2	4,5	14,0	10,0	6,0	19,0	15,5	5,0	5,5	195	50	3,5
21	3	3,0	7,0	14,5	9,5	17,5	15,5	2,0	6,5	75	20	4,5
22	1	4,0	12,5	8,5	25,0	17,5	9,5	12,5	17,0	240	40	4,0
23	2	6,0	20,0	9,5	5,0	20,0	16,0	6,0	4,5	150	30	3,0
24	3	5,0	7,5	9,5	13,5	18,5	13,0	2,0	5,0	75	50	5,0
25	1	5,5	19,0	10,0	16,5	10,0	14,0	19,5	14,0	150	50	6,0
26	2	3,5	19,5	8,0	4,0	22,5	16,5	5,0	7,0	120	30	5,5
27	3	5,0	6,0	15,5	13,0	10,5	13,0	2,5	6,5	225	30	3,5
28	1	4,5	7,5	14,5	18,0	18,5	9,5	15,5	12,5	180	40	3,0
29	2	6,0	14,5	9,5	7,0	12,0	18,5	5,5	6,0	195	40	3,5
30	3	4,5	4,0	11,5	14,5	16,5	16,0	5,0	6,5	105	50	5,0

7. Проверить корректность определения линейной скорости $\vec{v}_B$ точки B , применяя графические способы полюса и проекций.
8. Определить линейное ускорение точки A и, используя способ полюса, найти линейное ускорение точки B .
9. Показать на схеме в выбранном масштабе линейное ускорение $\vec{a}_A$ и линейное ускорение $\vec{a}_B$ с его составляющими. Указать масштаб ускорений.
10. Определить и показать на схеме векторы угловых ускорений $\vec{\epsilon}_{O_1B}$ и $\vec{\epsilon}_{AB}$ звеньев O_1B и AB .
11. Проверить корректность определения линейного ускорения $\vec{a}_B$ построением многоугольника ускорений.

2.3. Пример решения задачи

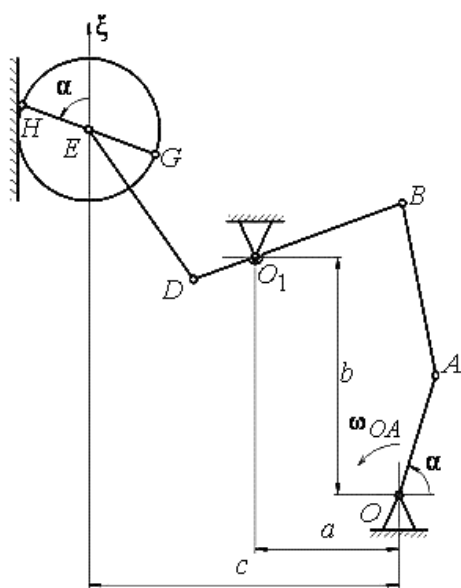


Рис. 2.9

Условие задачи. В шарнирном плоском механизме $OABO_1DE$ (рис. 2.9) ведущее звено OA вращается с постоянной скоростью ω_{OA} вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O . Звено O_1B имеет неподвижную ось вращения, проходящую через точку O_1 . Точка E движется прямолинейно по вертикали вдоль оси ξ . Каток радиуса r движется без скольжения по неподвижной поверхности.

Данные для решения задачи приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Номер		Размер, м								α , ...°	ω_{OA} , с ⁻¹	r , м
варианта	схемы	OA	AB	O_1B	BD	DE	a	b	c			
31	4	5,3	7,4	6,6	9,4	7,8	6,1	10,0	13,0	75	15	3,0

Решение.

1. Определим линейную скорость точки A :

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{OA} \times \vec{OA}. \quad (2.1)$$

Из (2.1) и того, что $\vec{\omega}_A \perp \overrightarrow{OA}$, следует:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA \sin 90^\circ = 15 \cdot 5,3 \cdot 1 = 79,5 \text{ м/с}.$$

Поскольку звено OA вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O , вектор линейной скорости точки A будет направлен в сторону вращения перпендикулярно звену OA (рис. 2.10).

2. Определим направления векторов линейных скоростей точек B, D, E .

Звено BD имеет неподвижную ось вращения, проходящую через точку O_1 , следовательно, для векторов линейных скоростей точек B и D выполняется условие $\vec{v}_B, \vec{v}_D \perp \overrightarrow{BD}$, $\vec{v}_B \uparrow \downarrow \vec{v}_D$.

Звено DE совершает плоское движение, при этом точка E движется прямолинейно по вертикали вниз.

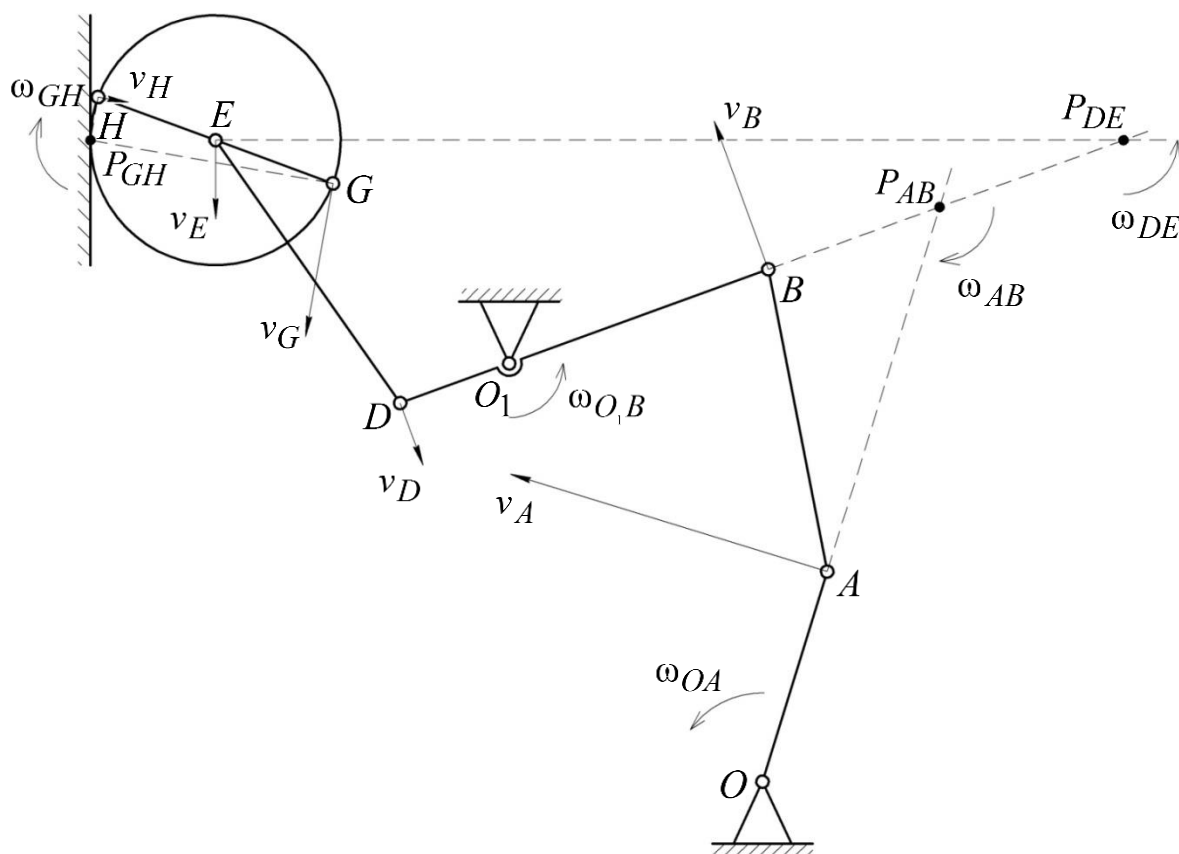


Рис. 2.10

3. Определим положения мгновенных центров скоростей P_{AB} , P_{DE} , P_{GH} .

Для звена AB , совершающего плоское движение, известен вектор $\vec{v}_A$ линейной скорости точки A и линия вектора линейной скорости точки B . Положение мгновенного центра скоростей P_{AB} звена AB определяется точкой пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к направлениям линейных скоростей этих точек (см. рис. 2.10).

Для звена DE , совершающего плоское движение, известны линии векторов линейных скоростей точек D и E . Положение мгновенного центра скоростей P_{DE} звена DE определяется точкой пересечения перпендикуляров, проведенных из точек D и E к направлениям линейных скоростей этих точек (см. рис. 2.10).

Звено GH принадлежит катку, вместе с которым совершает плоское движение. При этом мгновенный центр скоростей P_{GH} звена GH будет находиться в точке соприкосновения катка с поверхностью, по которой он движется (см. рис. 2.10). Определив положение мгновенного центра скоростей P_{GH} , покажем линии векторов линейных скоростей точек G и H перпендикулярно к соответствующим мгновенным радиусам-векторам $P_{GH}G$ и $P_{GH}H$ в сторону движения катка (см. рис. 2.10).

4. Определим векторы линейных скоростей всех указанных ранее точек.

Звено AB вращается вокруг мгновенно-неподвижной оси, проходящей через мгновенный центр скоростей P_{AB} с угловой скоростью $\vec{\omega}_{AB}$.

Тогда, используя формулу Эйлера, получим

$$\begin{cases} v_A = \omega_{AB} \cdot P_{AB}A; \\ v_B = \omega_{AB} \cdot P_{AB}B, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $P_{AB}A$ и $P_{AB}B$ – мгновенные радиусы-векторы точек A и B .

В результате графических построений получим следующие значения мгновенных радиусов-векторов:

$$P_{AB}A = 9,16 \text{ м};$$

$$P_{AB}B = 4,37 \text{ м}.$$

Как видно из (2.2), линейные скорости точек A и B пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{P_{AB}A}{P_{AB}B}. \quad (2.3)$$

Таким образом, линейную скорость точки B определим как

$$v_B = v_A \frac{P_{AB}B}{P_{AB}A} = 79,5 \cdot \frac{4,37}{9,16} = 37,93 \text{ м/с}.$$

Звено BD имеет неподвижную ось вращения, проходящую через точку O_1 , следовательно, для линейных скоростей точек B и D получим:

$$\begin{cases} v_B = \omega_{O_1B} \cdot O_1B; \\ v_D = \omega_{O_1B} \cdot (BD - O_1B), \end{cases} \quad (2.4)$$

где ω_{O_1B} – угловая скорость звена BD .

Аналогично отношению (2.3) из выражения (2.4) получим:

$$\frac{v_B}{v_D} = \frac{O_1B}{BD - O_1B},$$

откуда, зная линейную скорость точки B , определим линейную скорость точки D :

$$v_D = v_B \frac{BD - O_1B}{O_1B} = 37,93 \cdot \frac{9,4 - 6,6}{6,6} = 16,09 \text{ м/с}.$$

Звено DE вращается вокруг мгновенно-неподвижной оси, проходящей через мгновенный центр скоростей P_{DE} с угловой скоростью $\vec{\omega}_{DE}$.

Тогда, используя формулу Эйлера, получим:

$$\begin{cases} v_D = \omega_{DE} \cdot P_{DE}D; \\ v_E = \omega_{DE} \cdot P_{DE}E, \end{cases} \quad (2.5)$$

где $P_{AB}D$ и $P_{AB}E$ – мгновенные радиусы-векторы точек D и E .

В результате графических построений получены следующие значения мгновенных радиусов-векторов:

$$P_{DE}D = 18,45 \text{ м};$$

$$P_{DE}E = 21,76 \text{ м}.$$

Аналогично отношению (2.3), из (2.5) получим:

$$\frac{v_D}{v_E} = \frac{P_{DE}D}{P_{DE}E},$$

откуда, зная линейную скорость точки D , определим линейную скорость точки E :

$$v_E = v_D \frac{P_{DE}E}{P_{DE}D} = 16,09 \cdot \frac{21,76}{18,45} = 18,98 \text{ м/с}.$$

Звено GH вращается вокруг мгновенно-неподвижной оси, проходящей через мгновенный центр скоростей P_{GH} с угловой скоростью $\vec{\omega}_{GH}$.

Тогда, используя формулу Эйлера и учитывая, что точка E также принадлежит звену GH , получим:

$$\begin{cases} v_E = \omega_{GH} \cdot P_{GH}E; \\ v_G = \omega_{GH} \cdot P_{GH}G; \\ v_H = \omega_{GH} \cdot P_{GH}H, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $P_{GH}E = r$, $P_{GH}G$ и $P_{GH}H$ – мгновенные радиусы-векторы точек E , G и H .

В результате графических построений получены следующие значения мгновенных радиусов-векторов:

$$P_{GH}G = 5,91 \text{ м};$$

$$P_{GH}H = 1,05 \text{ м}.$$

Аналогично отношению (2.3), из выражения (2.6) получим:

$$\frac{v_E}{v_G} = \frac{r}{P_{GH}G};$$

$$\frac{v_E}{v_H} = \frac{r}{P_{GH}H},$$

откуда, зная линейную скорость точки E , определим линейные скорости точек G и H :

$$v_G = v_E \frac{P_{GH}G}{r} = 18,98 \cdot \frac{5,91}{3} = 37,39 \text{ м/с};$$

$$v_H = v_E \frac{P_{GH}H}{r} = 18,98 \cdot \frac{1,05}{3} = 6,64 \text{ м/с}.$$

Покажем на схеме все найденные ранее векторы линейных скоростей (см. рис. 2.10). Масштаб линейных скоростей может отличаться от масштаба длин.

5. Применив способ мгновенного центра скоростей, определим и условно покажем на схеме векторы угловых скоростей всех звеньев механизма.

Угловую скорость ω_{AB} звена AB определим по любой из формул (2.2):

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{P_{AB}A} = \frac{v_B}{P_{AB}B} = \frac{79,5}{9,16} = \frac{37,93}{4,37} = 8,68 \text{ с}^{-1}.$$

Определим направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}_{AB}$ звена AB как направление кратчайшего поворота вектора линейной скорости какой-либо точки, принадлежащей соответствующему звену, к его мгновенному центру

скоростей. На схеме (см. рис. 2.10) видно, что кратчайший поворот к мгновенному центру скоростей P_{AB} векторов линейных скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ осуществляется по ходу часовой стрелки. Следовательно, вектор угловой скорости $\vec{\omega}_{AB}$ направлен в плоскость рисунка («от нас»).

Угловую скорость ω_{O_1B} звена BD определим по любой из формул выражения (2.4):

$$\omega_{O_1B} = \frac{v_B}{O_1B} = \frac{v_D}{BD - O_1B} = \frac{37,93}{6,6} = \frac{16,09}{9,4 - 6,6} = 5,75 \text{ с}^{-1}.$$

Поскольку звено BD вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O_1 , то направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}_{O_1B}$ определим по правилу «правой руки». На схеме (см. рис. 2.10) видно, что вектор угловой скорости $\vec{\omega}_{O_1B}$ направлен от плоскости рисунка («на нас»).

Угловую скорость ω_{DE} звена DE определим по любой из формул выражения (2.5):

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{P_{DE}D} = \frac{v_E}{P_{DE}E} = \frac{16,09}{18,45} = \frac{18,98}{21,76} = 0,87 \text{ с}^{-1}.$$

На схеме (см. рис. 2.10) видно, что кратчайший поворот к мгновенному центру скоростей P_{DE} векторов линейных скоростей $\vec{v}_D$ и $\vec{v}_E$ осуществляется против хода часовой стрелки. Следовательно, вектор угловой скорости $\vec{\omega}_{DE}$ направлен от плоскости рисунка («на нас»).

Угловую скорость ω_{GH} звена GH определим по любой из формул выражения (2.6):

$$\omega_{GH} = \frac{v_E}{r} = \frac{v_G}{P_{GH}G} = \frac{v_H}{P_{GH}H} = \frac{18,98}{3} = \frac{37,39}{5,91} = \frac{6,64}{1,05} = 6,33 \text{ с}^{-1}.$$

На схеме (см. рис. 2.10) видно, что кратчайший поворот к мгновенному центру скоростей P_{GH} векторов линейных скоростей $\vec{v}_E$, $\vec{v}_G$ и $\vec{v}_H$ осуществляется по ходу часовой стрелки. Следовательно, вектор угловой скорости $\vec{\omega}_{GH}$ направлен в плоскость рисунка («от нас»).

Покажем на схеме все найденные ранее векторы угловых скоростей. На схеме направление вектора угловой скорости показывается дуговой стрелкой вокруг соответствующего мгновенного центра скоростей или оси вращения (см. рис. 2.10).

6. Проверим корректность определения линейной скорости $\vec{v}_B$ точки B , применив графические способы.

Определим линейную скорость точки B способом полюса.

Для определения линейной скорости точки B звена AB за полюс выбираем точку A , так как для нее известны величина и направление линейной скорости, найденные по (2.1). Тогда линейная скорость точки B определяется выражением

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B[A]}, \quad (2.7)$$

где $\vec{v}_{B[A]}$ – линейная скорость точки B при ее вращении относительно полюса A , следовательно, $\vec{v}_{B[A]} \perp \vec{\omega}_{AB}, \overrightarrow{AB}$.

В (2.7) известны величина и направление вектора $\vec{v}_A$; линия вектора $\vec{v}_B$; линия вектора $\vec{v}_{B[A]}$.

Построим треугольник векторов (2.7). Из произвольной точки O_2 (рис. 2.11, а) в выбранном масштабе построим вектор $\vec{v}_A$ и прямую, параллельную линии вектора $\vec{v}_B$. Чтобы определить вершину треугольника, из конца вектора $\vec{v}_A$ проведем прямую, параллельную линии вектора $\vec{v}_{B[A]}$. Точка пересечения этой линии с линией вектора $\vec{v}_B$ определит вершину треугольника и, следовательно, конец вектора $\vec{v}_B$.

Из полученных графических построений, пользуясь масштабом, найдем:

$$v_B = 38,67 \text{ м/с}.$$

Применив теорему о проекциях линейных скоростей, определим линейную скорость точки B , проецируя векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ на звено AB :

$$v_A \cdot \cos \gamma_1 = v_B \cdot \cos \gamma_2.$$

Углы γ_1 и γ_2 определим из схемы механизма (см. рис. 2.11, б). Получим

$$\gamma_1 = 62^\circ; \gamma_2 = 9^\circ. \text{ Тогда } v_B = v_A \cdot \frac{\cos \gamma_1}{\cos \gamma_2} = 79,5 \cdot \frac{0,4695}{0,9877} = 37,79 \text{ м/с}.$$

Сравнив полученные двумя графическими способами значения линейных скоростей $\vec{v}_B$, убеждаемся, что относительная погрешность не превышает допустимой – 5 % (способ полюса – 1,95 %, способ проекций – 0,37 %).

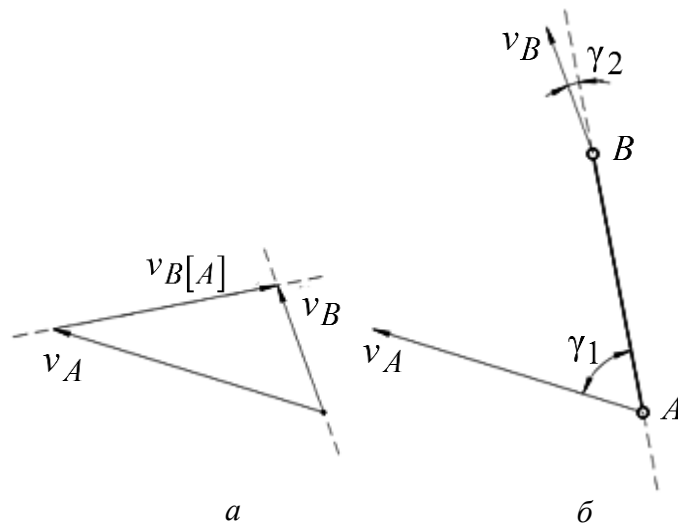


Рис. 2.11

Полученные результаты приведем в виде таблицы (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Способ определения	Линейная скорость, м/с						Угловая скорость, с ⁻¹			
	v_A	v_B	v_D	v_E	v_G	v_H	ω_{AB}	ω_{O_1B}	ω_{DE}	ω_{GH}
Аналитический	79,5	37,93	16,09	18,98	37,39	6,64	8,68	5,75	0,87	6,33
Графический	—	38,67 37,79	—	—	—	—	—	—	—	—

7. Определим линейное ускорение точки B .

Линейное ускорение $\vec{a}_B$ точки B определяется выражением

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B[A]}, \quad (2.8)$$

где $\vec{a}_A = \vec{a}_{A_{вр}} + \vec{a}_{A_{ц}}$ – линейное ускорение точки A звена OA , которая принята за полюс; $\vec{a}_{B[A]}$ – линейное ускорение точки B при вращательном движении звена AB вокруг оси, проходящей через полюс A . Вектор $\vec{a}_{B[A]}$ представим в виде

$$\vec{a}_{B[A]} = \vec{a}_{B[A]_{вр}} + \vec{a}_{B[A]_{ц}}, \quad (2.9)$$

где $\vec{a}_{B[A]_{вр}}$ – вращательная составляющая линейного ускорения $\vec{a}_{B[A]}$;

$\vec{a}_{B[A]_{ц}}$ – центростремительная составляющая линейного ускорения $\vec{a}_{B[A]}$.

Получим:

$$a_{B[A] \text{ вр}} = \varepsilon_{AB} \cdot AB; \quad (2.10)$$

$$a_{B[A] \text{ ц}} = \omega_{AB}^2 \cdot AB. \quad (2.11)$$

Однако, поскольку точка B принадлежит звену BD , вращающемуся вокруг оси, проходящей через точку O_1 , то линейное ускорение точки B складывается из вращательного ускорения $\vec{a}_{B \text{ вр}}$ и центростремительного ускорения $\vec{a}_{B \text{ ц}}$, т. е.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_{B \text{ вр}} + \vec{a}_{B \text{ ц}}.$$

При этом

$$a_{B \text{ вр}} = \varepsilon_{O_1 B} \cdot O_1 B; \quad (2.12)$$

$$a_{B \text{ ц}} = \omega_{O_1 B}^2 \cdot O_1 B. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.8) с учетом (2.9) – (2.13) представим в виде

$$\vec{a}_{B \text{ вр}} + \vec{a}_{B \text{ ц}} = \vec{a}_{A \text{ вр}} + \vec{a}_{A \text{ ц}} + \vec{a}_{B[A] \text{ вр}} + \vec{a}_{B[A] \text{ ц}}. \quad (2.14)$$

По полученным ранее кинематическим величинам определим модули линейных ускорений в выражении (2.14):

$$a_{A \text{ ц}} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 15^2 \cdot 5,3 = 1192,5 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{A \text{ вр}} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 0,$$

так как $\omega_{OA} = \text{const}$ (движение звена OA равномерное);

$$a_{B \text{ ц}} = \omega_{O_1 B}^2 \cdot O_1 B = 5,75^2 \cdot 6,6 = 218,21 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{B[A] \text{ ц}} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 8,68^2 \cdot 7,4 = 557,53 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{A \text{ ц}}$ направлен от точки A к точке O . Вектор $\vec{a}_{B \text{ ц}}$ направлен от точки B к точке O_1 . Вектор $\vec{a}_{B[A] \text{ ц}}$ направлен от точки B к точке A .

Векторы $\vec{a}_{B \text{ вр}}$ и $\vec{a}_{B[A] \text{ вр}}$ известны только по линиям действия. Определим их величины аналитическим способом.

Проведем перпендикулярно к звену AB координатную ось Bx и перпендикулярно к неизвестному вектору $\vec{a}_{B[A] \text{ вр}}$ координатную ось By (рис. 2.12). Неизвестные векторы $\vec{a}_{B \text{ вр}}$ и $\vec{a}_{B[A] \text{ вр}}$ направляем по линиям их действия условно. Спроецировав обе части уравнения (2.14) на оси Bx и By , получим

$$\begin{cases} Bx: -a_{B \text{ вр}} \sin \varphi_1 - a_{B \text{ ц}}^{\text{ц}} \cos \varphi_1 = -a_{A \text{ ц}} \sin \varphi_3 - a_{B[A] \text{ вр}}; \\ By: a_{B \text{ вр}} \cos \varphi_1 - a_{B \text{ ц}}^{\text{ц}} \cos \varphi_2 = -a_{A \text{ ц}} \cos \varphi_3 - a_{B[A] \text{ ц}}^{\text{ц}}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Необходимые для вычислений углы φ_1 , φ_2 и φ_3 определяем по рис. 2.12: $\varphi_1 = 9^\circ$, $\varphi_2 = 81^\circ$ и $\varphi_3 = 28^\circ$.

Из второго уравнения системы (2.15) выразим $a_{B \text{ вр}}$ и, подставив определенные ранее величины, получим его значение:

$$\begin{aligned} a_{B \text{ вр}} &= \frac{a_{B \text{ ц}}^{\text{ц}} \cos \varphi_2 - a_{A \text{ ц}} \cos \varphi_3 - a_{B[A] \text{ ц}}^{\text{ц}}}{\cos \varphi_1} = \\ &= \frac{218,21 \cdot 0,156 - 1192,5 \cdot 0,883 - 557,53}{0,988} = -1595,61 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Полученный знак «—» указывает, что направление вектора $\vec{a}_{B \text{ вр}}$ было выбрано неправильно, следовательно, при построении данного вектора необходимо изменить его первоначальное направление на противоположное.

Определим модуль линейного ускорения точки B :

$$a_B = \sqrt{(a_{B \text{ вр}})^2 + (a_{B \text{ ц}}^{\text{ц}})^2} = \sqrt{(-1595,61)^2 + (218,21)^2} = 1610,46 \text{ м/с}^2.$$

8. Определим угловые ускорения звеньев AB и O_1B .

Из формулы (2.12) получим:

$$\varepsilon_{O_1 B} = \frac{a_{B \text{ вр}}}{O_1 B} = \frac{1595,61}{6,6} = 241,76 \text{ с}^{-2}.$$

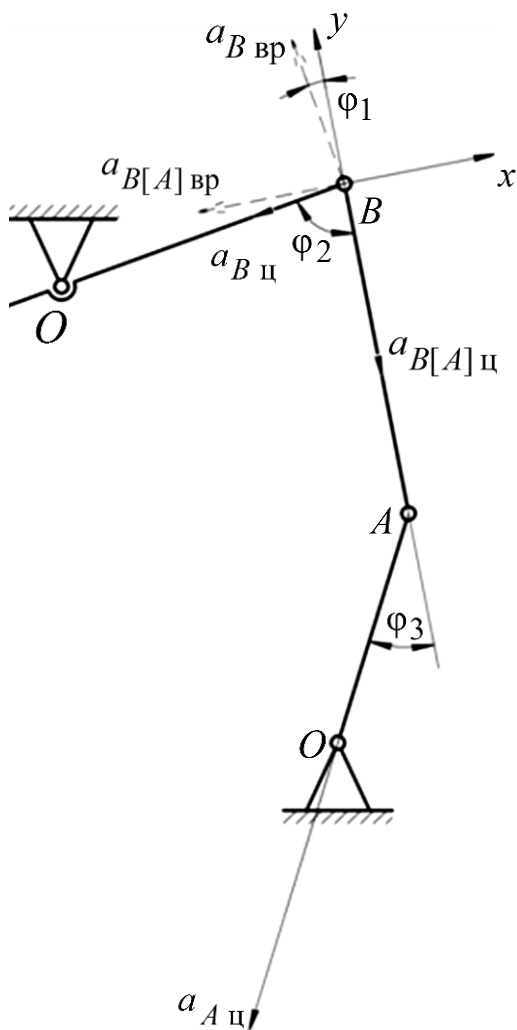


Рис. 2.12

Поскольку $\vec{v}_B \uparrow \downarrow \vec{a}_{B\text{вр}}$, вращение точки B замедленное, следовательно, $\vec{\omega}_{AB} \uparrow \downarrow \vec{\epsilon}_{AB}$. Ранее определено, что вектор угловой скорости $\vec{\omega}_{O_1B}$ направлен от плоскости рисунка («на нас»), следовательно, вектор углового ускорения $\vec{\epsilon}_{O_1B}$ направлен в плоскость рисунка («от нас»).

Для определения углового ускорения $\vec{\epsilon}_{AB}$ звена AB по (2.10) необходимо сначала найти линейное ускорение $a_{B[A]\text{вр}}$. Из первого уравнения системы (2.15) получим:

$$\begin{aligned} a_{B[A]\text{вр}} &= a_{B\text{вр}} \sin \varphi_1 + a_{B\text{ц}} \cos \varphi_1 - \\ &- a_{A\text{ц}} \sin \varphi_3 = (-1595,61) \cdot 0,156 + \\ &+ 218,21 \cdot 0,988 - 1192,5 \cdot 0,469 = \\ &= -592,61 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Полученный знак «—» указывает, что направление вектора $\vec{a}_{B[A]\text{вр}}$ было вы-

брано неправильно, следовательно, при построении данного вектора необходимо изменить его первоначальное направление на противоположное.

Из (2.10) получим:

$$\epsilon_{AB} = \frac{a_{B[A]\text{вр}}}{AB} = \frac{592,61}{7,4} = 80,08 \text{ с}^{-2}.$$

Если $\vec{v}_{B[A]} \uparrow \uparrow \vec{a}_{B[A]\text{вр}}$, вращение точки B вокруг полюса A ускоренное, то $\vec{\omega}_{AB} \uparrow \uparrow \vec{\epsilon}_{AB}$. Ранее определено, что вектор угловой скорости $\vec{\omega}_{AB}$ направлен в плоскость рисунка («от нас»), следовательно, вектор углового ускорения $\vec{\epsilon}_{AB}$ также направлен в плоскость рисунка («от нас»).

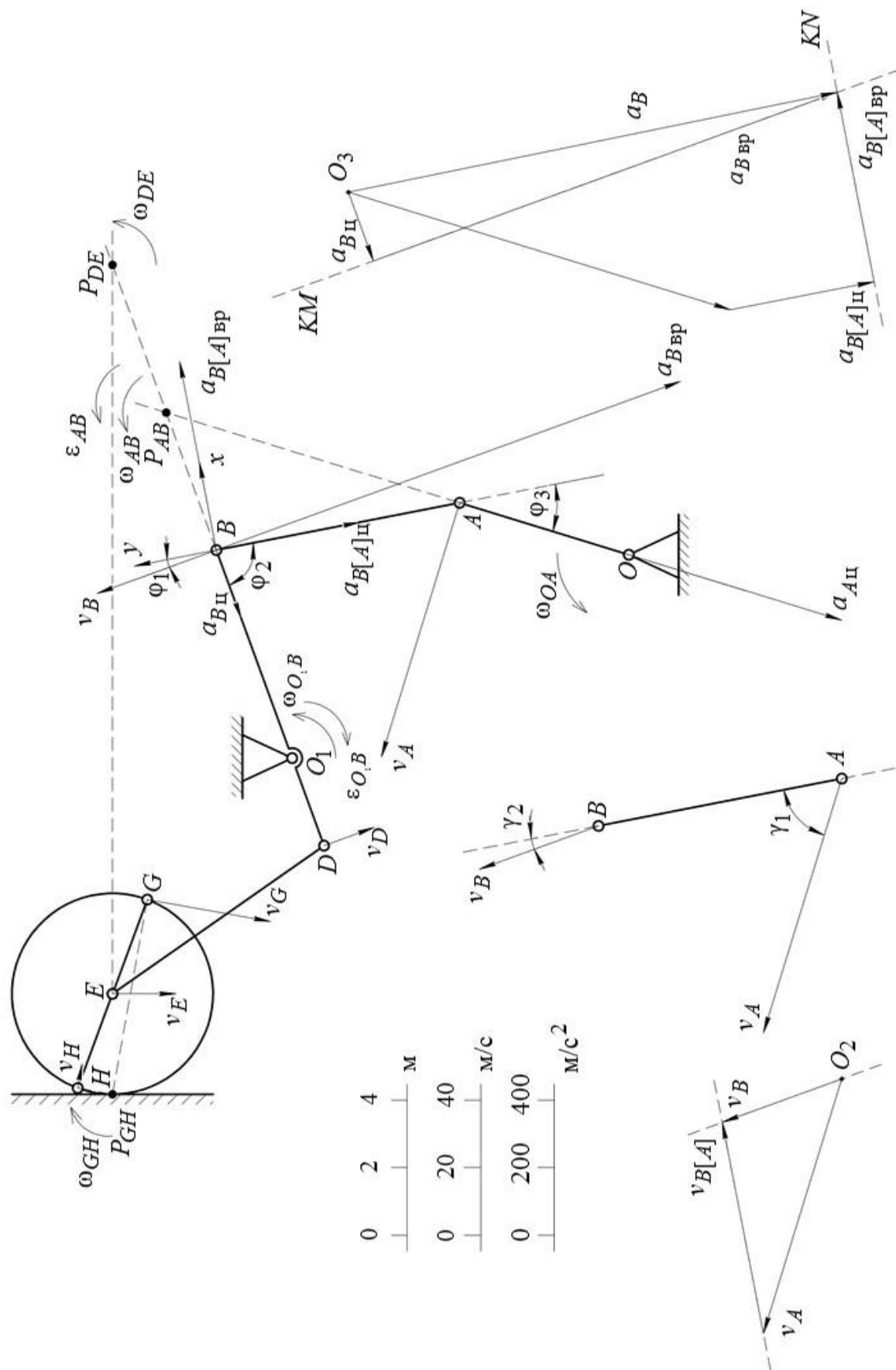


Рис. 2.13

На схеме направление вектора углового ускорения показывается дуговой стрелкой вокруг соответствующего мгновенного центра скоростей или вокруг оси вращения (рис. 2.13).

9. Проверим корректность определения линейного ускорения $\vec{a}_B$ точки B , применив графический способ. Для этого представим векторное равенство (2.14) графически (см. рис. 2.13):

а) из произвольной точки O_3 отложим вектор линейного ускорения $\vec{a}_{A\text{ц}}$ полюса A ;

б) из конца вектора $\vec{a}_{A\text{ц}}$ отложим вектор $\vec{a}_{B[A]\text{ц}}$;

в) из конца вектора $\vec{a}_{B[A]\text{ц}}$ проведем прямую KN , параллельную линии вектора $\vec{a}_{B[A]\text{вр}}$;

г) из точки O_3 отложим вектор $\vec{a}_{B\text{ц}}$;

д) из конца вектора $\vec{a}_{B\text{ц}}$ проведем прямую KM , параллельную линии вектора $\vec{a}_{B\text{вр}}$;

е) точка пересечения прямых KN и KM позволит определить величины и направления векторов $\vec{a}_{B\text{вр}}$, $\vec{a}_{B[A]\text{вр}}$ и $\vec{a}_B$. Измерив их на схеме (см. рис. 2.13), получим:

$$a_B = 1615,29 \text{ м/с}^2; a_{B\text{вр}} = 1605,18 \text{ м/с}^2; a_{B[A]\text{вр}} = 590,24 \text{ м/с}^2.$$

Сравнив полученные графическим способом значения линейных ускорений, убеждаемся, что относительная погрешность не превышает допустимой – 5 % (a_B – 0,3 %; $a_{B\text{вр}}$ – 0,6 % и $a_{B[A]\text{вр}}$ – 0,4 %).

Полученные результаты приведем в виде таблицы (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Способ определения	Линейное ускорение точек, м/с ²						Угловое ускорение звеньев, с ⁻²	
	a_A	$a_{B\text{ц}}$	$a_{B\text{вр}}$	a_B	$a_{B[A]\text{ц}}$	$a_{B[A]\text{вр}}$	ε_{O_1B}	ε_{AB}
Аналитический	1192,5	218,21	1595,61	1610,46	557,53	592,61	241,76	80,08
Графический	—	—	1605,18	1615,29	—	590,24		

3. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Системой материальных точек (*механической системой*) называется система, в которой положение и перемещение каждой ее точки зависит от положения и перемещения остальных точек системы.

Центром масс механической системы, состоящей из n материальных точек, называется геометрическая точка C , радиус-вектор которой

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_i\vec{r}_i}{m_1 + m_2 + \dots + m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i}{m},$$

где $m = \sum_{i=1}^n m_i$ – масса всей системы (приведенная масса); $\vec{r}_i$ – радиус-вектор

точки механической системы.

Моментом инерции J_y механической системы, состоящей из n материальных точек, относительно некоторой оси Oy называется сумма произведений масс m_i точек системы на квадраты расстояний l_i от этих точек до оси Oy :

$$J_y = \sum_{i=1}^n m_i l_i^2.$$

Момент инерции механической системы является мерой ее инертности при ее вращательном движении.

Теорема (Гюйгенса–Штейнера). Момент инерции J_y твердого тела (механической системы) относительно некоторой оси Oy (рис. 3.1) равен моменту инерции J_{y_1} тела относительно параллельной оси Cy_1 , проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния d между осями:

$$J_y = J_{y_1} + md^2,$$

где C – центр масс тела.

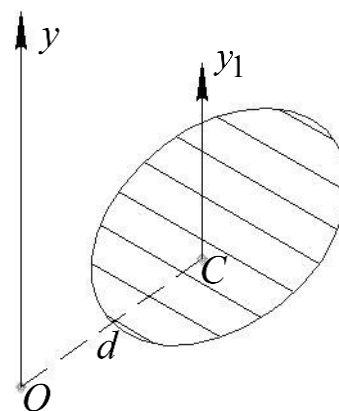


Рис. 3.1

Все силы, действующие на точки механической системы, разделяют на *внешние* $\vec{F}_i^E$ и *внутренние* $\vec{F}_i^J$; внешними силами $\vec{F}_i^E$ называют силы, действующие на точки механической системы со стороны точек, не входящих в эту систему; внутренними $\vec{F}_i^J$ – силы взаимодействия между точками системы.

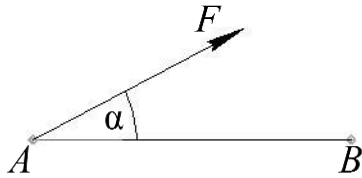


Рис. 3.2

Работа силы A – это скалярная физическая величина, равная произведению вектора силы на перемещение, пройденное точкой приложения силы.

Если некоторая точка под действием постоянной силы $\vec{F}$ перемещается по прямой из положения A в положение B (рис. 3.2), тогда:

$$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cos \left[\vec{F} \wedge \overrightarrow{AB} \right] = F \cdot AB \cos \alpha.$$

Примеры работ, совершаемых некоторыми силами.

1. Если тело массы m падает вертикально вниз под действием силы тяжести $\vec{G}$ из положения M_1 в положение M_2 (рис. 3.3), тогда работа силы на конечном участке пути:

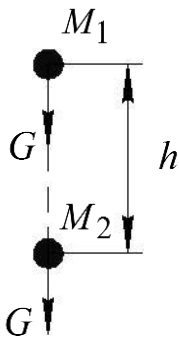


Рис. 3.3

$$A_G = \vec{G} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} = G \cdot M_1 M_2 = mgh,$$

где g – ускорение свободного падения на поверхности Земли; h – вертикальное перемещение точки приложения силы.

При подъеме тела значение работы силы тяжести $\vec{G}$ будет отрицательным.

2. Если тело массы m совершает перемещение S по негладкой наклонной поверхности (рис. 3.4), тогда работа силы сухого трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ на этом перемещении определяется как

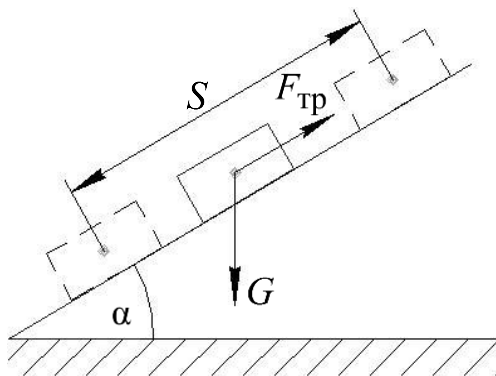


Рис. 3.4

$$A_{F_{\text{тр}}} = \vec{F}_{\text{тр}} \cdot \vec{S} = -\mu mg \cos \alpha \cdot S,$$

где μ – коэффициент трения скольжения тела о поверхность.

3. Если тело жестко связано с пружиной, другой конец которой закреплен неподвижно, тогда при деформации пружины на расстояние x в ней возникают силы упругости и на

тело, вызывающее растяжение, действует реакция пружины. Работа силы упругости на перемещении тела x (на расстоянии равном полной деформации пружины) определяется как

$$A_{F \text{ упр}} = -\frac{cx^2}{2},$$

где c – коэффициент упругости пружины (жесткость пружины).

4. Если под действием некоторой силы, приложенной к центру C круглого тела массы m , оно катится по горизонтальной плоскости без скольжения, то две взаимно уравнивающиеся силы образуют пару сил $\vec{G}$ и $\vec{N}$, препятствующую качению тела (рис. 3.5).

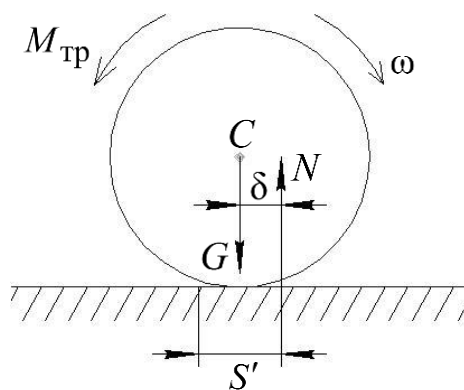


Рис. 3.5

Момент этой пары сил называется моментом трения качения $\vec{M}_{\text{тр}}$, величина которого определяется как

$$M_{\text{тр}} = \delta N,$$

где δ – коэффициент трения качения (половина пятна контакта S' , которое возникает из-за неабсолютной твердости тела и плоскости); $\vec{N}$ – реакция плоскости на тело.

Работа момента трения качения $A_{M \text{ тр}}$ определяется как произведение величины момента $M_{\text{тр}}$ на угол поворота φ круглого тела:

$$A_{M \text{ тр}} = M_{\text{тр}} \varphi = -\delta mg \varphi$$

или

$$A_{M \text{ тр}} = M_{\text{тр}} \varphi = -\delta mg \frac{S_C}{R},$$

где S_C – перемещение центра круглого тела радиуса R .

Кинетическая энергия T механической системы определяется как алгебраическая сумма кинетических энергий T_i всех входящих в эту систему n материальных точек:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2,$$

где m_i – масса точки системы; v_i – скорость точки системы.

Теорема Кенига. *Кинетическая энергия T механической системы в общем случае ее движения равна сумме кинетической энергии $T_c = \frac{mv_c^2}{2}$ ее центра масс, масса которого m_c равна массе всей системы m и кинетической энергии $T_{\text{отн}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{i[c]}^2$ этой системы в ее относительном движении относительно центра масс:*

$$T = T_c + T_{\text{отн}} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_{i[c]}^2,$$

где v_c – скорость центра масс C механической системы; $v_{i[c]}$ – скорость точки системы относительно ее центра масс C .

Кинетическая энергия твердого тела при различных видах его движения.

1. При поступательном движении твердого тела его кинетическая энергия $T_{\text{пост}}$ вычисляется как кинетическая энергия любой его точки, масса которой равна массе m всего тела:

$$T_{\text{пост}} = \frac{1}{2} mv_c^2 = \frac{1}{2} mv_i^2,$$

где v_i – скорость любой точки тела.

2. При вращательном движении твердого тела его кинетическая энергия $T_{\text{вр}}$ определяется половиной произведения момента инерции тела J_x относительно оси вращения x на квадрат угловой скорости ω_x вращения тела относительно той же оси:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} J_x \omega_x^2.$$

3. При плоском движении твердого тела его кинетическая энергия $T_{\text{пл}}$ определяется как сумма кинетической энергии поступательного движения тела массы m и кинетической энергии вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через его центр масс C перпендикулярно плоскости движения, т. е.

$$T_{\text{пл}} = T_c + T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2,$$

где v_c – скорость центра масс тела; J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения; ω – угловая скорость вращения тела при его плоском движении.

Теорема. *Изменение кинетической энергии механической системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех внешних ΣA_i^E и внутренних ΣA_i^J сил, действующих на точки системы на этом же перемещении:*

$$T - T_0 = \Sigma A_i^E + \Sigma A_i^J,$$

где T_0 и T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; ΣA_i^E – сумма работ внешних сил и моментов сил, действующих на элементы системы на ее перемещении из начального положения в конечное; ΣA_i^J – сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Задача 3. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ К ИЗУЧЕНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

3.1. Условие задачи

Механическая система, состоящая из абсолютно твердых тел, под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя с недеформированной невесомой пружиной; начальное положение системы показано на рис. 3.6. Учитывая силу сухого трения, упругую силу и момент сопротивления качению определить скорость v_1 тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным S_1 . Другими силами сопротивления пренебречь.

Один из блоков механической системы считать состоящим из двух, жестко соединенных между собой тонких однородных дисков одинаковой толщины и плотности. Второй блок считать однородным тонким диском с одним из вариантов конфигурации, показанной на рис. 3.7.

Нити, соединяющие элементы механической системы, считать нерастяжимыми, невесомыми и параллельными соответствующим плоскостям.

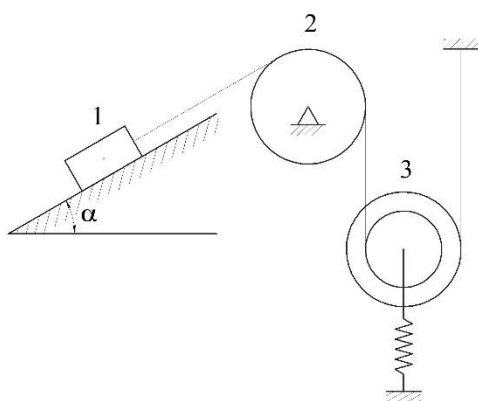


Схема 1

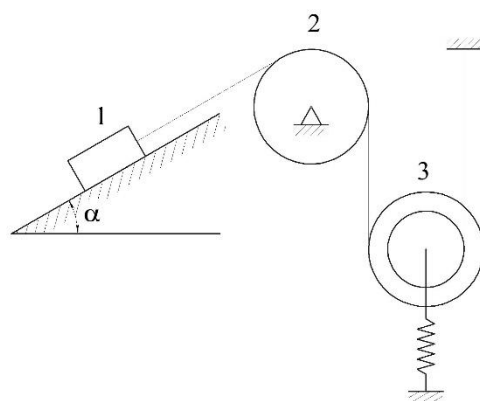


Схема 2

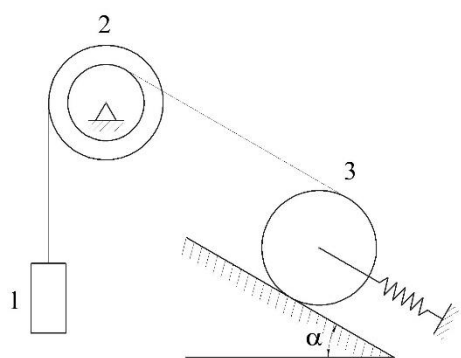


Схема 3

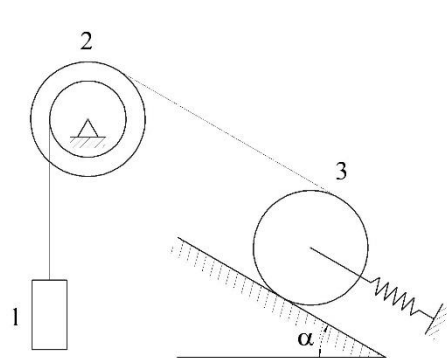


Схема 4

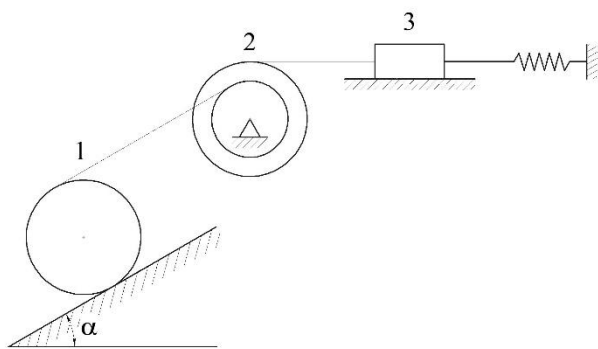


Схема 5

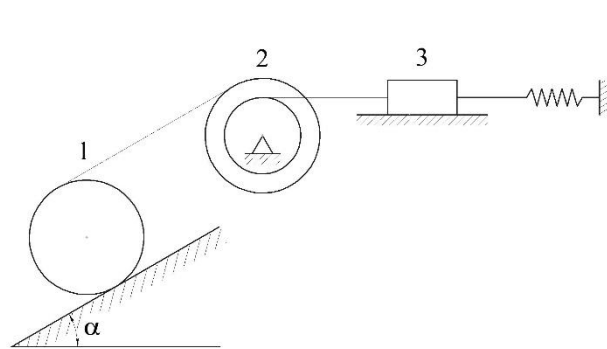


Схема 6

Рис. 3.6

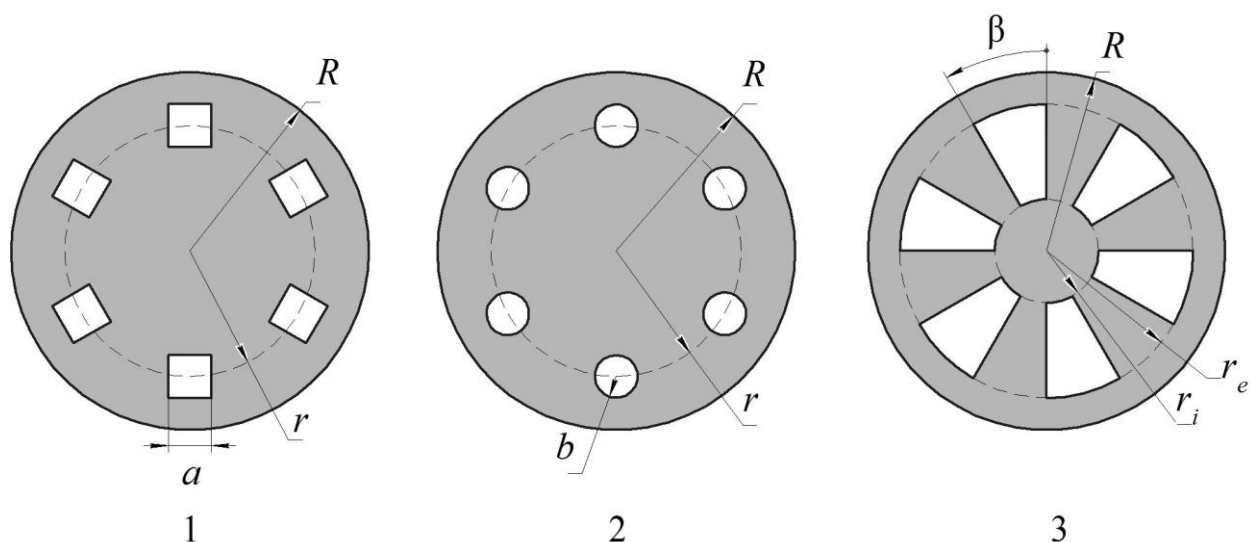


Рис. 3.7

Исходные данные для выполнения задачи приведены в табл. 3.1 и 3.2.

В задании приняты следующие обозначения: m_1 , m_2 , m_3 – массы тел 1, 2 и 3; R_1 , R_2 , R_3 – радиусы больших окружностей тел 1, 2 и 3; r_1 , r_2 , r_3 – радиусы малых окружностей тел 1, 2 и 3, либо радиусы, на которых по concentric сетке расположены геометрические центры отверстий заданной формы в соответствии с конфигурациями дисков (рис. 3.7); r_e , r_i – радиусы внешней и внутренней окружностей, ограничивающих вырезанные в диске секторы (для вариантов с конфигурацией диска 3, рис. 3.7); n – количество элементов, вырезанных в диске; a – длина стороны квадратного отверстия; b – радиус круглого отверстия; β – угол между боковыми сторонами сектора (для вариантов с конфигурацией диска 3, рис. 3.7); α – угол наклона плоскости к горизонту; μ – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения; c – коэффициент упругости пружины.

3.2. Порядок решения задачи

1. В соответствии с вариантом выбрать схему механической системы (см. рис. 3.6) и конфигурацию диска (см. рис. 3.7).
2. Представить в виде таблицы исходные данные для решения задачи, руководствуясь содержимым табл. 3.1 и табл. 3.2.
3. Изобразить механическую систему в конечном ее положении (т. е. после прохождения телом 1 пути S_1).

Таблица 3.1

Вар.	Схема	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	α , °	μ	δ , м	c , Н/м	S_1 , м
			,5	14,5	50	0,25	—	58	
		34,0	20,0	29,0	70	0,13	—	75	9,0
		9,0	26,5	13,0	25	—	1,3	142	3,5
		37,0	12,5	16,5	75	—	0,5	54	3,0
			42,5	25,5	40	0,08	0,2	39	2,0
		34,0	46,0	28,5	60	0,19	0,9	73	9,0
		34,5	35,0	24,0	50	0,14	—	71	4,5
		49,0	16,0	14,5	65	0,04	—	271	3,0
		25,5	40,0	17,0	35	—	3,1	63	7,5
		25,5	25,5	6,5	50	—	2,2	224	2,5
		38,5	14,0	14,0	50	0,28	2,4	15	1,5
		16,5	36,5	5,5	70	0,29	0,3	479	4,0
		38,0	1,5	21,5	65	0,07	—	86	4,5
		22,0	4,5	5,0	70	0,08	—	254	8,5
		28,0	33,5	17,0	55	—	0,6	332	5,0
		49,0	9,5	25,5	55	—	0,7	59	4,0
		40,0	42,0	24,5	65	0,08	1,9	12	2,5
		29,5	36,5	29,5	60	0,23	1,1	21	8,5
		34,5	13,0	23,0	50	0,21	—	105	3,5
		33,5	38,5	22,0	20	0,11	—	731	2,5
		42,0	12,5	29,5	35	—	1,9	877	5,5
		48,5	35,5	7,5	65	—	0,4	21	6,5
		46,0	44,5	16,0	60	0,18	1,7	11	7,5
		24,0	13,5	15,0	40	0,21	1,1	960	8,5
		47,0	40,5	15,5	60	0,26	—	314	3,5
		28,0	41,5	4,5	60	0,18	—	284	9,0
		29,0	36,5	23,0	65	—		161	3,0
		46,5	46,0	23,5	55	—	0,3	83	3,0
		44,5	47,5	3,5	55	0,06	0,9	33	1,5
		25,5	9,0	29,0	55	0,01	0,2	347	3,5

Таблица 3.2

Вар.	Диск	R_1 , м	R_2 , м	R_3 , м	r_1 , м	r_2 , м	r_3 , м	r_i , м	r_e , м	a , м	b , м	β , °	
		—	12,5	1	—	5,0	3	—	—		—	—	
		—		20,0	—		1	—	—	—		—	
		—	5	4	—	3	—	4	8	—	—	1	20
		—	9	9	—	6	3	—	—	—	2	—	
		5,5	8,0	—	—	7,5	—	2,0	4	—	—	2	17
		9,0	7	—	4	8,0	—	—	—	4	—	—	
		—	4	9	—	—	8	6	4	—	—	35	7
		—	8,5	8	—	3	1	—	—	4	—	—	
		—	1	3	—	7	1	—	—	—	7	—	
		—	6	6	—	4	2	—	—	1	—	—	
		2	1	—	1	1	—	—	—	—	6	—	
		1	2	—	—	5	—	7	1	—	—	2	6
		—	1	1	—	4	1	—	—	—	2	—	
		—	9	5	—	—	2	5	7	—	—	1	1
		—	8	0	—	6	4	—	—	4	—	—	
		—	2		—	1	—	3	6	—	—	1	17
		20,0	9	—	9	7	—	—	—	8	—	—	
		12,0	1	—	4	2,0	—	—	—	—	2	—	
		—	3	2	—	1	23,0	—	—	1	—	—	
		—	19,0	2	—	8	6,0	—	—	—	4,5	—	
		—	1	4	—	9,5	—	1,5	3	—	—	20	15
		—	17,5	1	—	16,0	5,0	—	—	—	2	—	
		46,5	24,5	—	—	2	—	6	3	—	—	1	20
		0	1	—	6	1	—	—	—	6	—	—	
		—	44,5	7	—	—	4,0	8	2	—	—	0	4
		—	9	1	—	7	0	—	—	7	—	—	
		—	2	6	—	1		—	—	—		—	
		—	1	5	—	3	5	—	—	6	—	—	
		2	6	—	5	5	—	—	—	—	0	—	
		6	6	—	—	3	—	4	5	—	—	3	8

4. Показать на рисунке с механической системой кинематические характеристики всех ее элементов (линейные и угловые скорости).
5. Показать на рисунке с механической системой внешние силы и моменты сил, действующие на ее элементы.
6. Определить значения кинетических энергий T_1 , T_2 и T_3 элементов механической системы в ее конечном положении; представить полученные выражения через скорость v_1 тела 1. Определить кинетическую энергию T механической системы в ее конечном положении как алгебраическую сумму кинетических энергий ее элементов.
7. Определить работы A_1 , A_2 и A_3 внешних сил и моментов сил, приложенных к элементам механической системы на ее конечном перемещении; представить полученные выражения через путь S_1 тела 1. Определить суммарную работу ΣA_i^E внешних сил и моментов сил, приложенных к элементам механической системы на конечном перемещении.
8. Используя теорему об изменении кинетической энергии механической системы, выразить скорость v_1 тела 1 через пройденный им путь S_1 и определить численное значение этой скорости.
9. Записать ответ.

3.3. Пример решения задачи

Условие задачи. Механическая система, состоящая из абсолютно твердых тел, под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя с недеформированной невесомой пружиной; начальное положение системы показано на рис. 3.8. Учитывая силу сухого трения, упругую силу и момент сопротивления качению, определить скорость v_1 тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным S_1 . Другими силами сопротивления пренебречь.

Неподвижный блок 2 считать состоящим из двух, жестко соединенных между собой тонких однородных дисков одинаковой толщины и плотности. Подвижный блок 3 считать однородным тонким диском с конфигурацией, показанной на рис. 3.9.

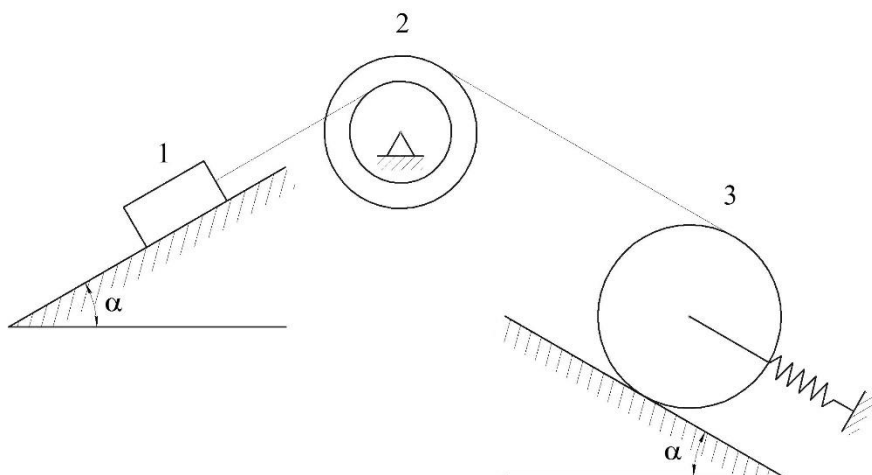


Рис. 3.8

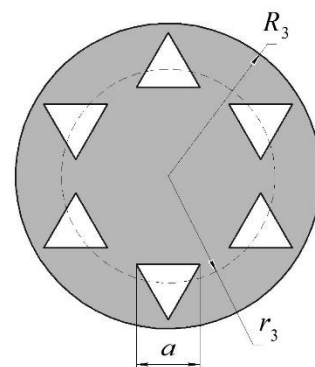


Рис. 3.9

Нити, соединяющие элементы механической системы, считать нерастяжимыми, невесомыми и параллельными соответствующим плоскостям.

Исходные данные для выполнения задачи приведены в табл. 3.3.

В задании приняты следующие обозначения: m_1 , m_2 , m_3 – массы тел 1, 2 и 3; R_2 , R_3 – радиусы больших окружностей тел 2 и 3; r_2 – радиус малой окружности тела 2; r_3 – радиус, на котором по концентрической сетке расположены геометрические центры отверстий в форме правильных треугольников с длиной стороны a (рис. 3.9); n – количество элементов, вырезанных в диске; α – угол наклона плоскости к горизонту; μ – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения; c – коэффициент упругости пружины.

Таблица 3.3

m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	R_2 , м	r_2 , м	R_3 , м	r_3 , м	μ	δ , м	c , Н/м	α , °	n	a , м	S_1 , м
16	7	12	3	2	3,6	1,5	0,14	0,06	2,5	30	6	1,5	5

Решение.

1. Изобразим на рисунке механическую систему в конечном ее положении (рис. 3.10), покажем кинематические характеристики всех ее элементов после прохождения телом 1 пути S_1 , а также обозначим внешние силы и моменты сил, действующие на систему на данном участке пути.

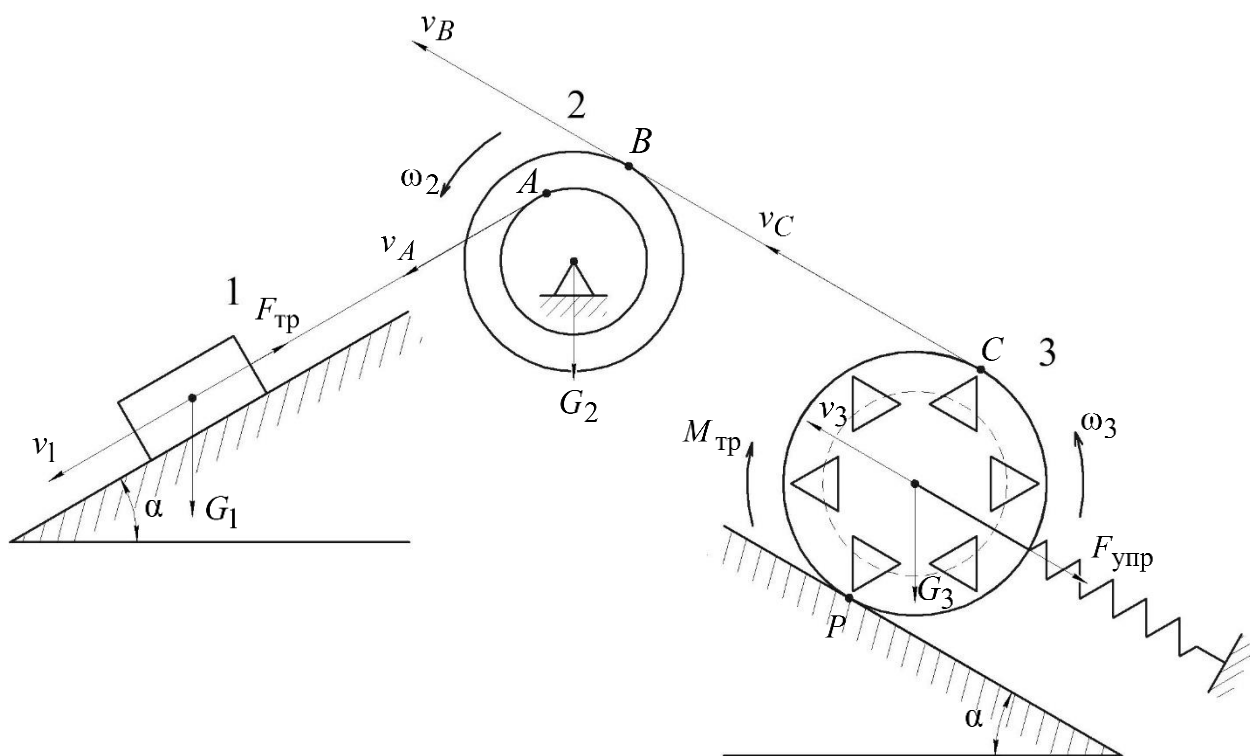


Рис. 3.10

2. Для определения значения скорости v_1 тела 1 применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \Sigma A_i^E + \Sigma A_i^J, \quad (3.1)$$

где T_0 и T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; ΣA_i^E – сумма работ внешних сил и моментов сил, действующих на элементы системы на ее перемещении из начального положения в конечное; ΣA_i^J – сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении.

Поскольку система приходит в движение из состояния покоя, то $T_0 = 0$. Для механической системы, состоящей из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями,

$$\Sigma A_i^J = 0.$$

Следовательно, (3.1) принимает вид

$$T = \Sigma A_i^E. \quad (3.2)$$

3. Определим кинетическую энергию механической системы в ее конечном положении и представим полученное выражение через скорость v_1 тела 1.

Кинетическая энергия T механической системы определяется как алгебраическая сумма кинетических энергий всех входящих в эту систему элементов:

$$T = \sum T_i = T_1 + T_2 + T_3, \quad (3.3)$$

где T_1 , T_2 и T_3 – значения кинетических энергий тел 1, 2 и 3.

Кинетическая энергия T_1 тела 1, движущегося поступательно:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = 8v_1^2. \quad (3.4)$$

Кинетическая энергия T_2 тела 2, совершающего вращательное движение вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости рисунка, и проходящей через центр масс тела:

$$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2}, \quad (3.5)$$

где J_2 – момент инерции тела 2 относительно оси его вращения; ω_2 – угловая скорость вращения тела 2.

Поскольку тело 2 является блоком, состоящим из двух, жестко соединенных между собой тонких однородных дисков одинаковой толщины и плотности, момент инерции

$$J_2 = J_{21} + J_{22}, \quad (3.6)$$

где $J_{21} = \frac{m_{21} r_2^2}{2}$ и $J_{22} = \frac{m_{22} R_2^2}{2}$ – моменты инерции малого и большого однородных тонких дисков, образующих тело 2.

При этом

$$m_2 = m_{21} + m_{22}, \quad (3.7)$$

где m_{21} и m_{22} – массы этих дисков.

Определим значения m_{21} и m_{22} , руководствуясь тем, что диски имеют одинаковую толщину h и изготовлены из одного и того же материала с плотностью ρ . Тогда:

$$\begin{cases} m_{21} = \rho h \pi r_2^2 \\ m_{22} = \rho h \pi R_2^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{m_{21}}{m_{22}} = \frac{r_2^2}{R_2^2}. \quad (3.8)$$

Из уравнений (3.7) и (3.8) получим:

$$\begin{cases} m_{21} + m_{22} = 7 \\ \frac{m_{21}}{m_{22}} = \frac{2^2}{3^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{21} + m_{22} = 7 \\ m_{21} = 0,44 m_{22} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,44m_{22} + m_{22} = 1,44m_{22} = 7 \Rightarrow \begin{cases} m_{21} = 2,14 \text{ кг}; \\ m_{22} = 4,86 \text{ кг}. \end{cases}$$

Определим момент инерции J_2 тела 2 по (3.6):

$$J_2 = J_{21} + J_{22} = \frac{m_{21}r_2^2}{2} + \frac{m_{22}R_2^2}{2} = \frac{2,14 \cdot 2^2}{2} + \frac{4,86 \cdot 3^2}{2} = 26,15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (3.9)$$

Угловую скорость ω_2 тела 2 представим через линейную скорость v_1 тела 1. Линейная скорость v_A точки A , лежащей на ободу малого диска тела 2, алгебраически равна скорости v_1 тела 1 (см. рис. 3.10), следовательно по формуле Эйлера:

$$\begin{cases} \omega_2 = \frac{v_A}{r_2} \\ v_A = v_1 \end{cases} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{r_2} = \frac{v_1}{2}. \quad (3.10)$$

Подставим (3.9) и (3.10) в (3.5) и получим значение кинетической энергии T_2 тела 2 через скорость v_1 тела 1:

$$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 26,15 \cdot \left(\frac{v_1}{2} \right)^2 \Rightarrow T_2 = 3,27 v_1^2. \quad (3.11)$$

Кинетическая энергия T_3 тела 3, совершающего плоское движение:

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2}, \quad (3.12)$$

где v_3 – скорость центра масс тела 3; J_3 – момент инерции тела 3 относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости его движения; ω_3 – угловая скорость вращения тела 3.

Поскольку тело 3 является однородным тонким диском с конфигурацией, показанной на рис. 3.9, момент инерции

$$J_3 = J_O - 6J_\Delta, \quad (3.13)$$

где $J_O = \frac{m_O R_3^2}{2}$ – момент инерции однородного тонкого диска радиуса R_3 относительно оси, проходящей через центр масс тела 3 перпендикулярно плоскости его движения; J_Δ – момент инерции вырезанного в теле 3 элемента (треугольной пластины) относительно оси, проходящей через центр масс тела 3 перпендикулярно плоскости его движения; при этом, учитывая, что $J_{\Delta C} = \frac{m_\Delta a^2}{12}$ – момент инерции треугольной пластины относительно оси, проходящей через центр масс пластины, перпендикулярной ее плоскости, и используя теорему Гюйгенса–Штейнера, получим:

$$J_\Delta = \frac{m_\Delta a^2}{12} + m_\Delta r_3^2.$$

Видно, что для определения моментов инерции J_O и J_Δ , необходимо определить массу m_O тела 3 без вырезанных элементов (массу сплошного диска) и массу m_Δ одного вырезанного элемента (треугольной пластины).

Масса m_3 тела 3 (см. рис. 3.9):

$$m_3 = m_O - 6m_\Delta. \quad (3.14)$$

Определим значения m_O и m_Δ , руководствуясь тем, что диск и треугольная пластина имеют одинаковую толщину h и изготовлены из одного и того же материала плотности ρ , тогда:

$$\begin{cases} m_O = \rho h \pi R_3^2 \\ m_\Delta = \rho h \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{m_O}{m_\Delta} = \frac{4\pi R_3^2}{\sqrt{3}a^2}. \quad (3.15)$$

Из (3.14) и (3.15) получим:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} m_O - 6m_\Delta = 12 \\ \frac{m_O}{m_\Delta} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 3,6^2}{\sqrt{3} \cdot 1,5^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_O - 6m_\Delta = 12 \\ \frac{m_O}{m_\Delta} = 41,77 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow 41,77m_\Delta - 6m_\Delta = 35,77m_\Delta = 12 \Rightarrow \begin{cases} m_O \approx 14,04 \text{ кг;} \\ m_\Delta \approx 0,34 \text{ кг.} \end{cases} \end{aligned}$$

Определим момент инерции J_3 тела 3 по (3.13):

$$\begin{aligned}
J_3 &= J_O - 6J_\Delta = \frac{m_O R_3^2}{2} - 6\left(\frac{m_\Delta a^2}{12} + m_\Delta r_3^2\right) = \\
&= \frac{14,04 \cdot 3,6^2}{2} - 6\left(\frac{0,34 \cdot 1,5^2}{12} + 0,34 \cdot 1,5^2\right) = 86,01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Угловую скорость ω_3 тела 3 представим через линейную скорость v_1 тела 1. По формуле Эйлера и с учетом (3.10) линейная скорость v_B точки B , лежащей на ободе большого диска тела 2 (см. рис. 3.10), равна:

$$\begin{cases} v_B = \omega_2 \cdot R_2 \\ \omega_2 = \frac{v_1}{2} \end{cases} \Rightarrow v_B = \frac{v_1}{2} \cdot R_2 = \frac{3}{2} v_1. \tag{3.17}$$

Кроме того, линейная скорость v_B точки B алгебраически равна скорости v_C точки C , лежащей на ободе диска 3, и угловая скорость ω_3 определяется как

$$\omega_3 = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_B}{CP}, \tag{3.18}$$

где точка P – мгновенный центр скоростей движущегося плоского тела 3.

Из (3.17) и (3.18) получим:

$$\omega_3 = \frac{v_B}{CP} = \frac{3}{2} v_1 \cdot \frac{1}{2R_3} = \frac{3v_1}{4 \cdot 3,6} = 0,21v_1. \tag{3.19}$$

С учетом выражения (3.19) определим скорость v_3 центра тела 3:

$$v_3 = \omega_3 R_3 = 0,21v_1 \cdot 3,6 = 0,76v_1. \tag{3.20}$$

Подставим (3.16), (3.19) и (3.20) в (3.12) и получим значение кинетической энергии T_3 тела 3 через скорость v_1 тела 1:

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} = \frac{12 \cdot (0,76v_1)^2}{2} + \frac{86,01 \cdot (0,21v_1)^2}{2} = 5,36v_1^2. \tag{3.21}$$

Подставим (3.4), (3.11) и (3.21) в (3.3) и получим значение кинетической энергии T механической системы через скорость v_1 тела 1:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 8v_1^2 + 3,27v_1^2 + 5,36v_1^2 = 16,63v_1^2. \tag{3.22}$$

4. Определим суммарную работу ΣA_i^E внешних сил и моментов сил, приложенных к элементам механической системы на конечном перемещении, и представим полученное выражение через путь S_1 тела 1.

Суммарная работа ΣA_i^E определяется как алгебраическая сумма работ внешних сил и моментов сил, приложенных к элементам механической системы на том же перемещении:

$$\Sigma A_i^E = A_1 + A_2 + A_3, \quad (3.23)$$

где A_1 , A_2 и A_3 – значения работ внешних сил и моментов сил, приложенных к телам 1, 2 и 3 на конечном перемещении.

Тело 1 проходит путь S_1 под действием двух внешних сил, силы тяжести $\vec{G}_1$ и силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$, тогда работа этих сил на данном перемещении:

$$A_1 = A_{G1} + A_{F_{\text{тр}}}, \quad (3.24)$$

где A_{G1} – работа силы тяжести, приложенной к телу 1; $A_{F_{\text{тр}}}$ – работа силы трения скольжения, приложенной к телу 1.

Тело 1 пройдя путь S_1 под действием силы тяжести $\vec{G}_1$, совершает вертикальное перемещение $h_1 = S_1 \sin \alpha$ вниз (рис. 3.11), тогда работа этой силы:

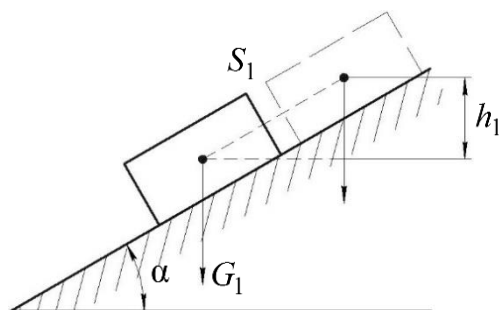


Рис. 3.11

$$A_{G1} = G_1 h_1 = m_1 g h_1 = m_1 g S_1 \sin \alpha, \quad (3.25)$$

где g – ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Определим работу $A_{F_{\text{тр}}}$ силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ на перемещении S_1 :

$$\begin{cases} A_{F_{\text{тр}}} = -F_{\text{тр}} S_1 \\ F_{\text{тр}} = \mu N_1 = \mu m_1 g \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow A_{F_{\text{тр}}} = -\mu m_1 g \cos \alpha S_1, \quad (3.26)$$

где N_1 – величина реакции наклонной плоскости, действующей на тело 1.

Подставим (3.25) и (3.26) в (3.24) и получим значение работы, совершенной над телом 1 на перемещении S_1 :

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{G1} + A_{F_{\text{тр}}} = m_1 g S_1 \sin \alpha - \mu m_1 g \cos \alpha S_1 = m_1 g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) S_1 = \\ &= 16 \cdot 9,81 (0,5 - 0,14 \cdot 0,87) S_1 = 59,36 S_1 = 59,36 \cdot 5 = 296,8 \text{ Дж.} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Сила тяжести $\vec{G}_2$, приложенная к телу 2, работу не совершает, так как тело 2 совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси (отсутствует вертикальное перемещение), следовательно:

$$A_2 = 0. \quad (3.28)$$

Тело 3 проходит путь S_3 под действием двух внешних сил, силы тяжести $\vec{G}_3$ и силы упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$, а также под действием момента сопротивления к качению $\vec{M}_{\text{тр}}$, тогда работа совершенная над телом 3 на данном перемещении:

$$A_3 = A_{G3} + A_{F_{\text{упр}}} + A_{M_{\text{тр}}}, \quad (3.29)$$

где A_{G3} – работа силы тяжести, приложенной к телу 3; $A_{F_{\text{упр}}}$ – работа силы упругости пружины, приложенной к телу 1; $A_{M_{\text{тр}}}$ – работа момента сопротивления к качению тела 3.

При прохождении телом 1 пути S_1 тело 3 переместится на расстояние S_3 . Выразим расстояние S_3 , пройденное телом 3, через путь S_1 . Для этого представим (3.20) в виде:

$$\frac{dS_3}{dt} = 0,76 \frac{dS_1}{dt}. \quad (3.30)$$

Тогда, проинтегрировав выражение (3.30) при нулевых начальных условиях, получим соотношение для путей S_1 и S_3 , пройденных телами 1 и 3:

$$S_3 = 0,76S_1. \quad (3.31)$$

Тело 3 пройдя путь S_3 под действием силы тяжести $\vec{G}_3$, совершает вертикальное перемещение $h_3 = S_3 \sin \alpha$, тогда, с учетом (3.31), работа этой силы:

$$A_{G3} = -G_3 h_3 = -m_3 g h_3 = -m_3 g S_3 \sin \alpha = -0,76 m_3 g S_1 \sin \alpha. \quad (3.32)$$

Определим работу $A_{F_{\text{упр}}}$ силы упругости пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$ при ее деформации на величину S_3 , учитывая (3.31):

$$A_{F_{\text{упр}}} = -\frac{cS_3^2}{2} = -\frac{c(0,76S_1)^2}{2}. \quad (3.33)$$

Работа $A_{M_{\text{тр}}}$ момента сопротивления к качению $\vec{M}_{\text{тр}}$ тела 3:

$$\begin{cases} A_{M_{\text{тр}}} = -M_{\text{тр}} \varphi_3 \\ M_{\text{тр}} = \delta N \end{cases} \Rightarrow A_{M_{\text{тр}}} = -\delta N \varphi_3, \quad (3.34)$$

где φ_3 – угол, на который повернется тело 3, когда тело 1 пройдет путь S_1 .

Для определения φ_3 представим (3.19) в следующем виде:

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = 0,21 \frac{dS_1}{dt}. \quad (3.35)$$

Тогда, проинтегрировав (3.35) при нулевых начальных условиях, получим соотношение для угла φ_3 и пути S_1 :

$$\varphi_3 = 0,21S_1. \quad (3.36)$$

С учетом (3.36) определим работу $A_{M \text{ тр}}$ момента сопротивления к качению $\vec{M}_{\text{тр}}$ тела 3:

$$A_{M \text{ тр}} = -\delta N \varphi_3 = -\delta N 0,21S_1 = -\delta m_3 g \cos \alpha \cdot 0,21S_1. \quad (3.37)$$

Подставим (3.32), (3.33) и (3.37) в (3.29) и получим значение работы, совершенной над телом 3 при перемещении тела 1 на величину S_1 :

$$\begin{aligned} A_3 &= A_{G3} + A_{F \text{ упр}} + A_{M \text{ тр}} = \\ &= -0,76m_3gS_1 \sin \alpha - \frac{c(0,76S_1)^2}{2} - \delta m_3g \cos \alpha \cdot 0,21S_1 = \\ &= -m_3g(0,76 \sin \alpha + 0,21\delta \cos \alpha)S_1 - \frac{c(0,76S_1)^2}{2} = \\ &= -12 \cdot 9,81(0,76 \cdot 0,5 + 0,21 \cdot 0,06 \cdot 0,87) \cdot 5 - \frac{2,5 \cdot (0,76 \cdot 5)^2}{2} = -248,17 \text{ Дж}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Подставим (3.27), (3.28) и (3.38) в (3.23) и получим значение работы ΣA_i^E , совершенной механической системой на конечном перемещении:

$$\Sigma A_i^E = A_1 + A_2 + A_3 = 296,8 - 248,17 = 48,63 \text{ Дж}. \quad (3.39)$$

Используя полученные значения кинетической энергии (3.22) и работы (3.39) механической системы и учитывая их соотношение (3.2), получим значение скорости v_1 тела 1:

$$T = \Sigma A_i^E \Rightarrow 16,63v_1^2 = 48,63 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{48,63}{16,63}} = 1,71 \text{ м/с}.$$

Примечание. Определим момент инерции тела, являющегося однородным тонким диском (см. рис. 3.9), из выражения:

$$J = J_O - nJ_{\nabla}, \quad (3.40)$$

где $J_O = \frac{m_O R^2}{2}$ – момент инерции однородного тонкого диска радиуса R относительно оси его вращения; J_∇ – момент инерции вырезанного в теле элемента (сектора) относительно оси вращения тела.

Тело в форме сектора не является телом простейшей формы, поэтому выведем выражение для определения его момента инерции. Для этого зададим сектор в виде плоской фигуры в полярной системе координат, как показано на рис. 3.12. При этом r_e и r_i – радиусы внешней и внутренней окружностей, ограничивающих сектор.

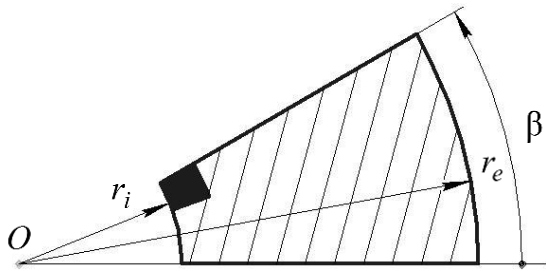


Рис. 3.12

Разобьем сектор на малые элементы площадью $s_k = dr \cdot r_k d\phi$, где r и ϕ – полярные координаты, а dr и $r_k d\phi$ – стороны малого элемента (радиальное и поперечное перемещение).

Тогда площадь сектора, состоя-

щего из j малых элементов $s_\nabla = \sum_{k=1}^j s_k$;

переходя к пределу суммы, получим:

$$s_\nabla = \int_{r_i}^{r_e} \int_0^\beta r_k dr d\phi = \beta \left. \frac{r_k^2}{2} \right|_{r_i}^{r_e} = \frac{\beta(r_e^2 - r_i^2)}{2}. \quad (3.41)$$

Если тело толщиной h выполнено в форме сектора и изготовлено из материала плотности ρ , масса такого тела $m_\nabla = \rho h s_\nabla$, и с учетом (3.41):

$$m_\nabla = \rho h \frac{\beta(r_e^2 - r_i^2)}{2}. \quad (3.42)$$

Определим момент инерции J_∇ тела в форме сектора как момент инерции тела произвольной формы:

$$J_\nabla = \sum_{k=1}^j m_k r_k^2, \quad (3.43)$$

где m_k – масса малого элемента площадью $s_k = dr \cdot r_k d\phi$.

Тогда:

$$J_\nabla = \sum_{k=1}^j m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^j \rho h r_k^3 dr d\phi = \rho h \sum_{k=1}^j r_k^3 dr d\phi.$$

Переходя к пределу суммы, получим:

$$J_{\nabla} = \rho h \sum_{k=1}^j r_k^3 dr d\varphi = \rho h \int_{r_i}^{r_e} \int_0^{\beta} r_k^3 dr d\varphi = \rho h \beta \frac{r_k^4}{4} \Big|_{r_i}^{r_e} = \rho h \frac{\beta(r_e^4 - r_i^4)}{4}.$$

Учитывая (3.42), получим момент инерции J_{∇} тела в форме сектора относительно оси вращения, проходящей через центры окружностей, радиусы которых ограничивают его габариты:

$$J_{\nabla} = \frac{m_{\nabla}(r_e^4 - r_i^4)}{2(r_e^2 - r_i^2)}. \quad (3.44)$$

Видно, что для определения моментов инерции J_O и J_{∇} , необходимо определить массу m_O тела 3 без вырезанных элементов (массу сплошного диска) и массу m_{∇} одного вырезанного элемента (сектора).

Масса m тела:

$$m = m_O - nm_{\nabla}. \quad (3.45)$$

Определим значения m_O и m_{∇} , руководствуясь тем, что диск и вырезанные в форме сектора элементы имеют одинаковую толщину h и изготовлены из одного и того же материала плотности ρ . Тогда, с учетом (3.42):

$$\begin{cases} m_O = \rho h \pi R_3^2 \\ m_{\nabla} = \rho h \frac{\beta(r_e^2 - r_i^2)}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{m_O}{m_{\nabla}} = \frac{2\pi R_3^2}{\beta(r_e^2 - r_i^2)}. \quad (3.46)$$

Определив массы m_O и m_{∇} диска и сектора, рассчитаем момент инерции J_O и, используя (3.44), момент инерции J_{∇} ; подставим полученные значения в (3.40) и определим момент инерции тела, являющегося однородным тонким диском (см. рис. 3.9).

Список рекомендуемой литературы

Кинематика: метод. указания к выполнению курсовой работы / сост.: Н. Б. Новиков, В. Ю. Скворцов, В. А. Евгеньев. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2002.

Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. 16-е изд., стер. М.: КНОРУС, 2011.

Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: учеб. пособие: в 2 т. М.: Наука, 1982.

Бутенин Н. В. Курс теоретической механики. СПб: Лань, 2002.

Никитин Н. И. Курс теоретической механики: учебник для машиностр. и приборостр. специальностей вузов. М.: Высш. шк. 2003.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	3
1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ	4
Задача 1. Исследование движения точки при координатном способе задания ее движения	8
1.1. Условие задачи	8
1.2. Порядок решения задачи	8
1.3. Пример решения задачи	11
2. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА	18
Задача 2. Исследование движения звеньев плоского механизма	25
2.1. Условие задачи	25
2.2. Порядок решения задачи	25
2.3. Пример решения задачи	28
3. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ	41
Задача 3. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы.....	45
3.1. Условие задачи	45
3.2. Порядок решения задачи	47
3.3. Пример решения задачи	50
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	62

Иванов Павел Алексеевич
Николаев Максим Сергеевич

Теоретическая механика. Кинематика. Динамика
Учебно-методическое пособие

Редактор М. Б. Шишкова

Подписано в печать Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 4,0.
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 142 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5