

2. Интерполяция дискретных данных

2.1 Цель работы

Познакомиться с методами решения задачи интерполяции дискретных данных. Научиться пользоваться операторами интерполяции программы **MathCAD**.

2.2 Задание

1. Для заданной функции $y = f(x)$ построить ее дискретный аналог, разбив промежуток $[a, b]$ на 3 интервала. Для дискретного аналога найти интерполяционный полином следующими методами:

- Решением системы линейных алгебраических уравнений.
- По формуле Лагранжа.
- По формуле Ньютона.

Убедиться в идентичности полученных полиномов. Построить совмещенный график исходной функции, ее дискретного аналога и интерполяционного полинома. Найти относительную погрешность определения промежуточных значений заданной функции между узловыми точками с помощью интерполяционного полинома. Построить график относительной погрешности.

2. Построить интерполяционный полином с помощью встроенных функций **linterp** и **interp**. Найти относительную погрешность определения промежуточных значений заданной функции между узловыми точками с помощью интерполяционных полиномов. Построить график относительной погрешности.

3. Для формулы Лагранжа и встроенной функции **linterp** найти требуемое количество интервалов разбиения заданного промежутка для того, чтобы относительная погрешность определения промежуточных значений заданной функции между узловыми точками была менее 2%.

Варианты заданий

Вариант	Функция	a	b
1	$f(x) = 0,1x^2 + 3\sin x$	1	7
2	$f(x) = 3\cos(x - 2) + 0,2x^2$	1	10
3	$f(x) = 0,01x^4 - 2(x - 5)^2 - 25x$	-5	14
4	$f(x) = \sin x + 0,1\cos 4x + 3$	0	6
5	$f(x) = 15\cos x + 0,03x^3$	6	11
6	$f(x) = 5 + \sin(0,5x) + 4\cos(2x)$	0	4
7	$f(x) = 2\sin(0,25x) + \cos(4x)$	2	4
8	$f(x) = 0,8x^2 + 2\cos(x^2)$	1	3

9	$f(x) = 4 + \cos x + 2\sin(x^2)$	0	3
10	$f(x) = 1 + 2\sin(0,25x^2)$	0	3
11	$f(x) = 5 + 4\sin(0,5x^2)$	0	4
12	$f(x) = (\cos x - 2)^2 + \frac{4}{\sin x + 2}$	1	8
13	$f(x) = \frac{2\sin(x^2) + 3}{\cos(2x) + 2}$	1	3
14	$f(x) = \lg x \cdot (\cos x + 2)$	2	10
15	$f(x) = 0,1(x+1)^3 + 2\sin(x^2)$	0	2
16	$f(x) = \frac{x}{3} \cdot (\sin 4x + 2)$	2	4
17	$f(x) = 2 + \sin(2x + 2) + \cos x$	1	4
18	$f(x) = 3 + \sin 2x + \cos(x^2)$	1	3
19	$f(x) = 2 + \sin(2x^2) + 3\cos x$	0	2
20	$f(x) = \sin 2x + \frac{4}{x}$	2	5
21	$f(x) = \sin x + \frac{10}{x}$	2	10
22	$f(x) = \sin x + \frac{x+1}{\cos x + 2}$	0	7
23	$f(x) = 4 + \frac{\cos 2x}{x}$	1	6
24	$f(x) = \cos 2x + 2\sin\left(\frac{x}{x+1}\right)$	1	5
25	$f(x) = \cos(x^2) + 2\sin\left(\frac{2}{x+4}\right)$	0	3

2.3 Теоретические сведения

При обработке экспериментальных данных, аппроксимации сложных функций возникают задачи выбора непрерывной функции, точно проходящей через заданные точки. При помощи этой функции можно получить дополнительные данные при промежуточных значениях аргумента. Такая операция называется интерполированием. Она является частным случаем аппроксимации. В общем случае при аппроксимации данных не требуется, чтобы значения функции точно совпадали с исходными данными.

Решение задачи интерполирования не является однозначным. Решение

может быть получено при помощи различного вида функций. Можно соединить соседние точки прямыми линиями и использовать их для расчета промежуточных значений. Такая методика называется кусочно-линейной интерполяцией. Если весь промежуток интерполяции разделить на трёхточечные интервалы, то можно выполнить кусочно-квадратичную интерполяцию.

Разрывы непрерывности производных в узловых точках можно устранить при помощи сплайн-интерполяции. Кубическая интерполяция позволяет построить кривую, проходящую через заданные точки, таким образом, чтобы первые и вторые производные были бы непрерывными во всех точках. Такая кривая может быть построена разделением промежутка интерполяции на трёхточечные интервалы, внутри которых записываются полиномы третьей степени, проходящие через эти точки. Эти полиномы затем соединяются вместе и образуют общую кривую.

Интерполяция полиномами обеспечивает непрерывность производных во всех узлах, кроме граничных, и заключается в нахождении полинома низшей степени, принимающего заданное значение в исходных точках. Обычный полином

$$Q_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

в узлах интерполяции $x_0, x_1, \dots, x_n$ должен точно совпадать со значениями функции $y_0, y_1, \dots, y_n$. Как известно, существует единственный полином степени не выше n , принимающий в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ заданные значения. Поэтому $m = n$, при этом число узлов интерполирования на единицу больше, чем степень полинома. Степень полинома равна числу интервалов, на которые разделяется весь промежуток интерполирования. Коэффициенты a_i полинома $Q_n(x)$ можно определить различными способами.

1. Из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

Порядок системы равен числу узлов интерполирования, т.е. $n + 1$.

2. По формуле Лагранжа, позволяющей определить полином $Q_n(x)$ при произвольных узлах интерполяции:

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

3. По формуле Ньютона, позволяющей определить полином $Q_n(x)$ при

равноотстоящих с шагом h узлах интерполирования:

$$Q_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

где $q = \frac{x-x_0}{h}$, $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \dots$, $\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0$.

В **MathCAD** имеются операторы интерполяции дискретных данных: **linterp(x,y,t)** и **interp(s,x,y,t)**.

Оператор **linterp(x,y,t)** осуществляет кусочно-линейную интерполяцию векторов исходных данных x и y для точки t .

Оператор **interp(s,x,y,t)** возвращает интерполированное сплайном значение функции в точке t . Здесь s – вектор вторых производных, созданный одной из сопутствующих функций **cspline(x,y)**, **pspline(x,y)**, **lspline(x,y)**. Функция **lspline(x,y)** создает вектор значений коэффициентов линейного сплайна. Функция **pspline(x,y)** создает вектор значений коэффициентов квадратичного сплайна. Функция **cspline(x,y)** создает вектор значений коэффициентов кубического сплайна.

Кубическая интерполяция позволяет построить кривую, проходящую через заданные точки, таким образом, чтобы первые и вторые производные были бы непрерывными во всех точках. Такая кривая может быть построена разделением промежутка интерполяции на трехточечные интервалы, внутри которых записываются полиномы третьей степени, проходящие через эти точки. Эти полиномы затем соединяются вместе и образуют общую кривую.

При определении значений функции $f(x)$ в точке x по формулам Лагранжа или Ньютона в качестве начальной точки выгодно брать ближайший к x узел интерполирования. Тогда первое слагаемое в этой формуле будет главным членом, а остальные слагаемые будут носить характер поправки.

Вид интерполяционного полинома не зависит от способа его получения (из решения системы линейных алгебраических уравнений, по формуле Лагранжа или по формуле Ньютона).

2.4 Пример выполнения работы

$$y(x) = 0,3(x-2)^2 + 2\cos 2x + 4; \quad x \in [1;5]$$

Задание исходной функции, границ промежутка, числа интервалов:

$$f(t) := 0.3(t-2)^2 + 2 \cdot \cos(2t) + 4$$

$$a := 1 \quad b := 5 \quad n := 3$$

Задание шага:

$$h := \frac{b-a}{n} \quad h = 1.333$$

Создание дискретной модели:

```

i := 0..n
xi := a + i·h
yi := f(xi)
xT = (1 2.333 3.667 5)
yT = (3.468 3.942 5.828 5.022)

```

Нахождение коэффициентов интерполяционного полинома с помощью системы линейных алгебраических уравнений:

```

C :=
[ 1 x0 (x0)2 (x0)3
  1 x1 (x1)2 (x1)3
  1 x2 (x2)2 (x2)3
  1 x3 (x3)2 (x3)3 ]
B :=
[ y0
  y1
  y2
  y3 ]

A := lsolve(C,B)
AT = (6.508 -5.169 2.417 -0.289)

```

Получение интерполяционного полинома и его вид:

```

P3(t) := A0 + A1·t + A2·t2 + A3·t3

```

```

P3(t) → -5.1691163655416074899·t + 2.4174520340901585348·t2 - 0.28861478016980641133·t3 + 6.5079854385269705925

```

Программа для нахождения интерполяционного полинома по формуле Лагранжа и результат ее работы:

```

L(z) :=
  L ← 0
  for i ∈ 0..rows(x) - 1
    ai ← 1
    bi ← 1
    for j ∈ 0..rows(x) - 1
      if i ≠ j
        ai ← ai·(z - xj)
        bi ← bi·(xi - xj)
    L ← L + yi·ai/bi
  L

```

$$L(z) \text{ simplify} \rightarrow 2.4174520340901585348 \cdot z^2 - 0.28861478016980641133 \cdot z^3 - 5.1691163655416074899 \cdot z + 6.5079854385269705925$$

Другой способ реализации формулы Лагранжа:

$$L1(t) := \sum_{i=0}^{n-1} \left(y_i \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \text{if} \left(i \neq j, \frac{t - x_j}{x_i - x_j}, 1 \right) \right)$$

Эта формула позволяет получить промежуточные значения, но не позволяет увидеть вид многочлена:

$$L1(t) \rightarrow$$

$$L1(t) \text{ simplify} \rightarrow$$

$$L1(3) = 4.709$$

Нахождение интерполяционного полинома по формуле Ньютона:

$$\Delta y_0 := y_1 - y_0 \quad \Delta^2 y_0 := y_2 - 2y_1 + y_0 \quad \Delta^3 y_0 := y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$N(t) := y_0 + \frac{t - x_0}{h} \cdot \Delta y_0 + \frac{(t - x_0) \cdot (t - x_1)}{h^2 \cdot 2!} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{(t - x_0) \cdot (t - x_1) \cdot (t - x_2)}{h^3 \cdot 3!} \cdot \Delta^3 y_0$$

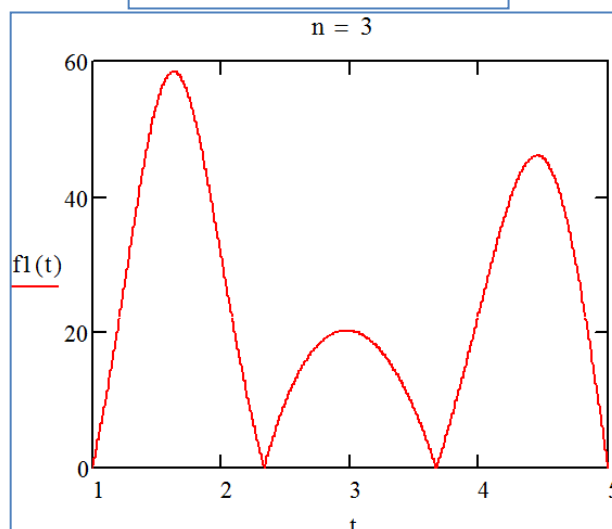
Вид интерполяционного полинома, полученного по формуле Ньютона:

$$N(t) \text{ simplify} \rightarrow 2.4174520340901585348 \cdot t^2 - 0.28861478016980641133 \cdot t^3 - 5.1691163655416074899 \cdot t + 6.5079854385269705925$$

Видно, что полученные интерполяционные полиномы имеют один и тот же вид. Далее будем использовать при интерполяции программу, реализующую формулу Лагранжа.

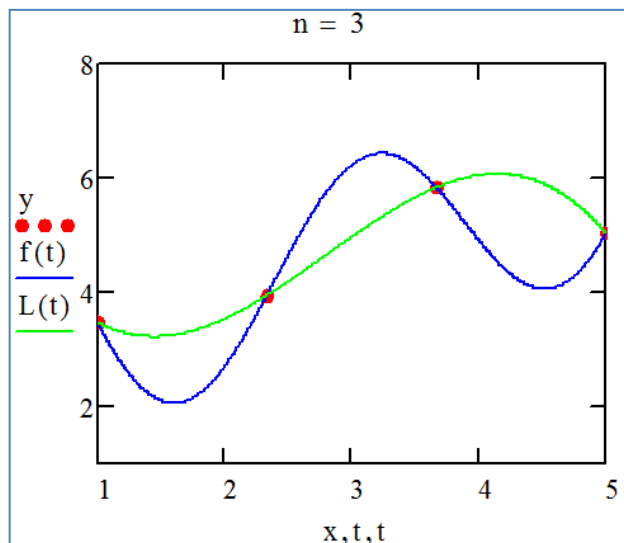
Нахождение относительной погрешности интерполирования по формуле Лагранжа и ее график:

$$f1(t) := \left| \frac{f(t) - L(t)}{f(t)} \right| \cdot 100$$



Из графика видно, что погрешности интерполирования достаточно велики (до 60%). Максимальные погрешности получаются приблизительно в серединах интервалов.

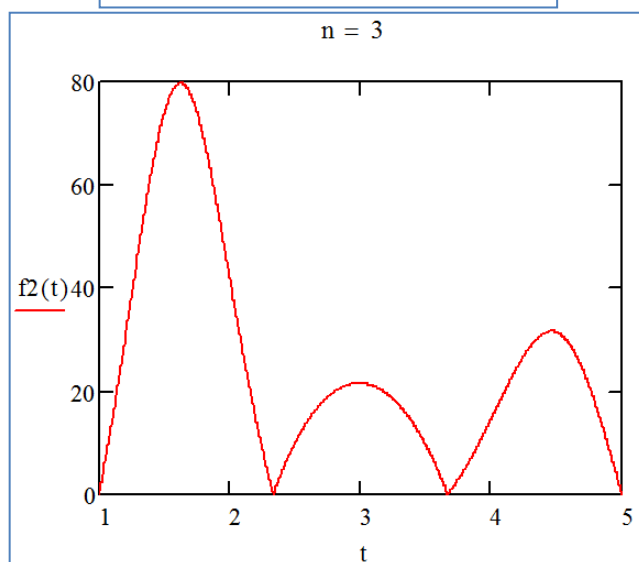
Совмещенный график исходной функции, узловых точек и интерполяционного полинома:



Нахождение относительной погрешности интерполирования встроенной функцией **linterp** и ее график:

$$\text{Linterp}(t) := \text{linterp}(x, y, t)$$

$$f2(t) := \left| \frac{f(t) - \text{Linterp}(t)}{f(t)} \right| \cdot 100$$



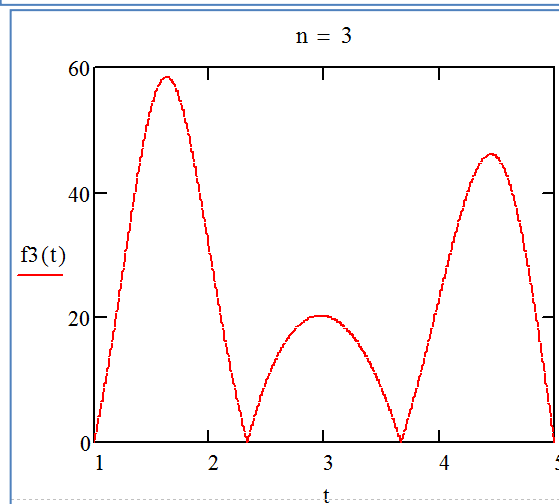
Из графика видно, что погрешности интерполирования достаточно велики (до 80%). Максимальные погрешности получаются приблизительно в серединах интервалов.

Нахождение относительной погрешности интерполирования встроенной

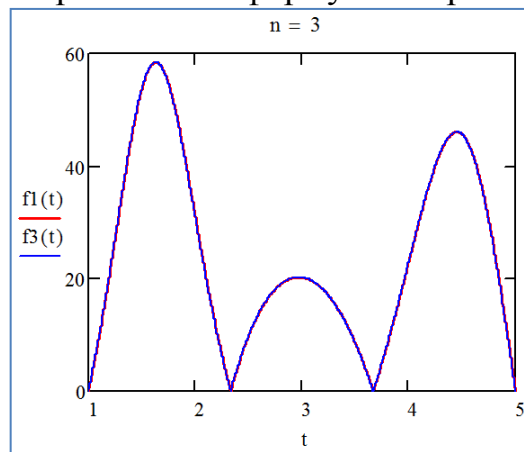
функцией **interp** и ее график:

$$\text{Interp}(t) := \text{interp}(\text{cspline}(x, y), x, y, t)$$

$$f3(t) := \left| \frac{f(t) - \text{Interp}(t)}{f(t)} \right| \cdot 100$$

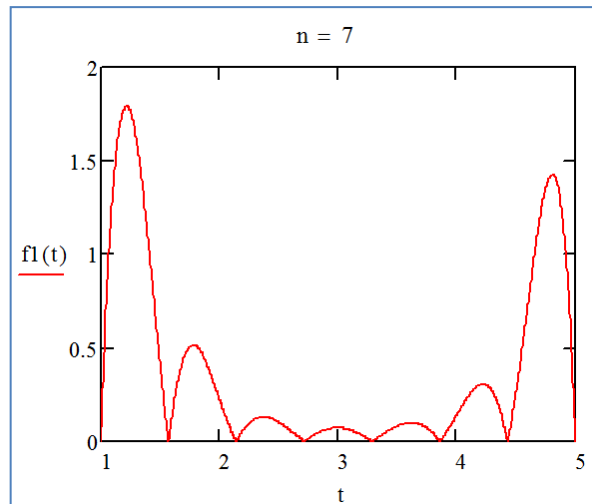


Из графика видно, что погрешности интерполирования встроенной функцией **interp** кубическим сплайном практически совпадают с погрешностями интерполирования по формуле Лагранжа:

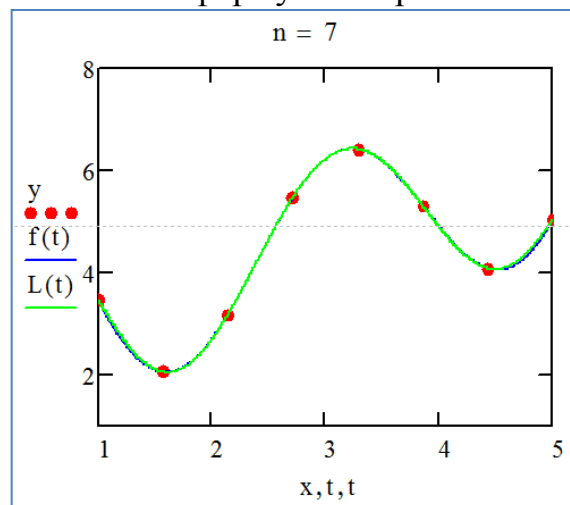


Для достижения требуемой точности интерполяции изменяем количество интервалов разбиения заданного промежутка (подбор требуемого числа промежутком осуществляется опытным путем).

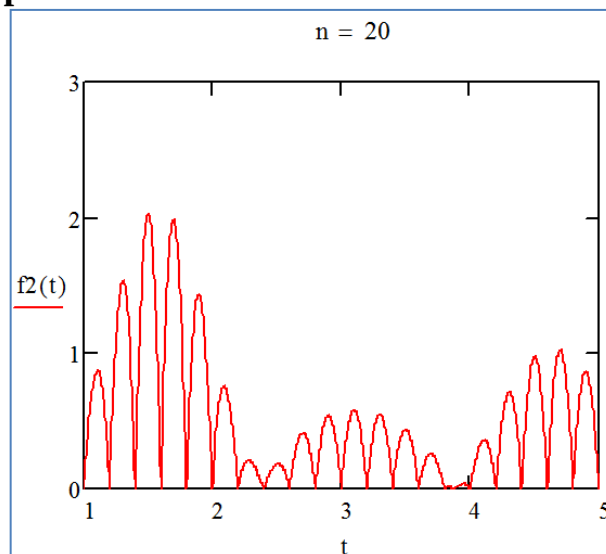
Формула Лагранжа:



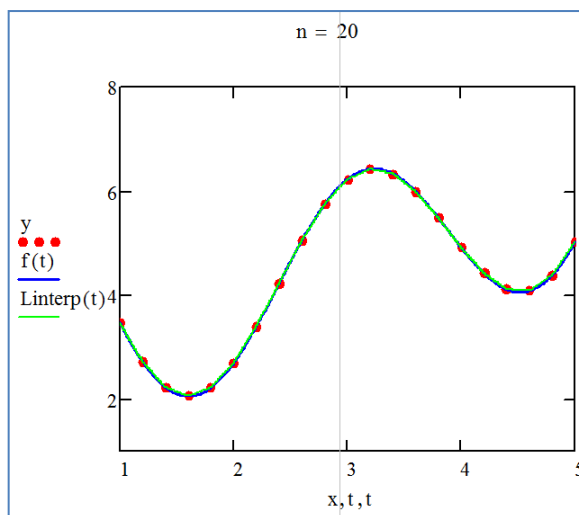
Совмещенный график исходной функции, узловых точек и интерполяционного полинома по формуле Лагранжа:



Функция **linterp**:



Совмещенный график исходной функции, узловых точек и функции **linterp**:



2.5 Содержание отчёта

1. Титульная страница с названием работы.
2. Задание.
3. Цель работы и краткие теоретические сведения.
4. Выполненные задания.
5. Выводы по проделанной работе (сделать самостоятельно).

2.6 Контрольные вопросы

1. В чем состоит постановка задачи интерполирования дискретных данных?
2. Чем отличается интерполяция от аппроксимации данных?
3. Какие существуют методы интерполяции дискретных данных?
4. В чем заключаются недостатки метода кусочно-линейной интерполяции?
5. Какие методы интерполяции обеспечивают получение непрерывной интерполирующей функции?
6. Какие существуют способы определения интерполяционного полинома?

2.7 Литература

1. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М., Наука, 1972.
2. Дьяконов В. П. **MathCAD** 8-12 для студентов. М.: СОЛОН-Пресс.- 2005.
3. Петраш В.И. Вычислительная система MathCAD Ч. 1. Учебное пособие: <http://elib.spbstu.ru/dl/2/s17-252.pdf>, 2017 год.