Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра информатики и компьютерных технологий

ИНФОРМАТИКА

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания по выполнению курсовой работы
для студентов специальности 21.05.04

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2019

УДК 004.67(073)

ИНФОРМАТИКА. Обработка результатов геодезических измерений. Методические указания по выполнению курсовой работы / Санкт-Петербургский горный университет. Сост.: *Т.Р. Косовцева, Л.Г. Муста.* СПб, 2019. 30 с.

Применительно к программе курсовой работы по учебной дисциплине «Информатика» предложена задача о вычислении площади земельного участка. Изложена технология применения метода наименьших квадратов для аппроксимации результатов замеров границ участков, представленных в виде таблиц. Даны общие указания по выполнению и оформлению курсовой работы, приведены расчетные формулы метода наименьших квадратов для построения эмпирических формул в виде полинома n-й степени, показана возможность линеаризации экспоненциальной зависимости. Приведены примеры выполнения задания в MS Excel, Mathcad и указания к созданию программы в среде программирования Visual Basic for Applications. Предложены задания для выполнения курсовой работы. Методические указания предназначены для студентов специальности 21.05.04 «Горное дело» специализации «Маркшейдерское дело”.

Научный редактор доц. *А.Б. Маховиков*
Рецензент к.т.н. *К.В. Столяров*

Рис. 29., табл. 2, библиогр. 5.

ВВЕДЕНИЕ

Целью курсовой работы по информатике является углубление знаний по информатике и программированию, полученных студентами при изучении дисциплины на I курсе. Курсовая работа дает возможность студенту овладеть основными принципами построения алгоритмов, методами вычислений и их реализации на ЭВМ, приобрести навыки постановки задач, построения математических моделей, получения физических закономерностей при обработке экспериментальных данных и их анализ. Получить представление о применении персонального компьютера и наиболее распространенных пакетов программ при решении задач из предметной области.

Применение математических моделей, их реализация на ЭВМ позволяет проанализировать наиболее существенные взаимосвязи различных показателей, получить оптимальное решение и сравнить его с другими, наметить пути устранения недостатков и показать, к каким качественно новым выводам можно прийти, используя математические модели и ЭВМ.

Из курса информатики известно, что весь процесс получения результатов с применением персонального компьютера требует значительных усилий и умения планировать свои действия.

Применение персонального компьютера (ПК) позволяет сократить работу, затрачиваемую на вычисления, увеличить количество рассматриваемых вариантов с целью выбора оптимального решения, а также повысить достоверность и точность результатов.

Отчет должен начинаться с титульного листа и оформляется в виде пояснительной записки.

ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ ПО РАБОТЕ

Порядок изложения материала следующий:

— задание;

— введение;

— постановка задачи;

— расчетные формулы;
— таблицы, выполненные средствами Microsoft Excel, с пояснениями;
— результаты расчета;
— представление результатов в виде графиков;
— алгоритмы и блок-схемы;
— макет формы, разработанной для решения задачи в среде программирования VBA с необходимыми пояснениями;
— программа на языке VBA с комментариями;
— результаты расчета по программе;
— результаты расчета в пакете Mathcad;
— заключение;
— библиографический список.

На титульном листе указывается официальное название института, вид работы, наименование кафедры и название дисциплины, тема курсовой работы, фамилия и инициалы студента, шифр группы, дата оформления отчета, должность, фамилия и инициалы руководителя работы, место для выставления оценки.

В аннотации приводятся краткие сведения о содержании работы (на русском и иностранном языках).

Введение должно содержать информацию о наиболее часто используемых программных средствах при решении математических и прикладных задач.

Сроки прохождения каждого этапа контролируются руководителем курсовой работы. Последовательное выполнение курсовой работы способствует формированию навыков проведения любого исследования.

ЗАДАЧА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ УЧАСТКА

Площадь участка *S* должна ограничиваться осью *X*, двумя отрезками, проведенными из точек *a* и *b* перпендикулярно оси *X*, и произвольной кривой $f(x)$, соединяющей концы отрезков (рис.1).

Задачу вычисления площади участка сведем к задаче вычисления определенного интеграла вида: $S = \int_a^b f(x)\, dx$.

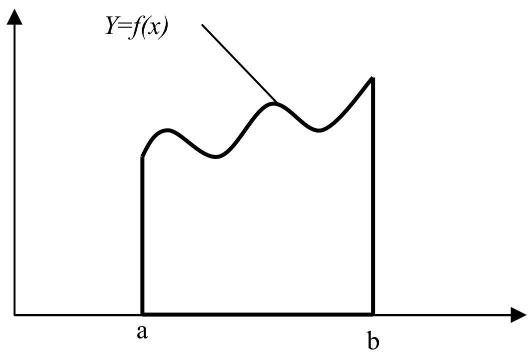

Рис.1 Схема участка для вычисления площади

В реальной жизни подобная площадь может быть площадью садового участка, ограниченного просекой и боковыми линиями разграничения с соседями, а с тыльной стороны - ручьем или оврагом, или склоном холма и т.п.

Для вычисления площади подобного участка первоначально необходимо определить математическую функцию *f(x)*, описывающую линию ручья (оврага). Найти математическую функцию, абсолютно точно описывающую произвольную кривую, как правило, невозможно, поэтому постараемся найти функцию, вид которой максимально приближается к фактической кривой.

Нахождение такой математической зависимости называется *аппроксимацией функции*. Найденную математическую функцию называют *эмпирической*, а значения, вычисленные по этой функции, называют *теоретическими*.

Искомую функцию построим в декартовых координатах (для упрощения построения можно считать, что начало координат находится на линии пересечения просеки с боковой стороной).

Первоначально необходимо выполнить несколько замеров от линии просеки до границы участка по ручью (оврагу). При этом, чем сложнее линия границы, тем большее должно быть количество замеров. Линии замеров должны быть строго параллельны оси Y. Результаты замеров сведем в таблицу 1:

Таблица 1

Точки по просеке, X	X_o	X_1	X_2	…	X_{n-1}	X_n
Расстояние до ручья, Y	Y_o		Y_2	…	Y_{n-1}	Y_n

В этом случае нахождение математической функции, описывающей наши данные, называется аппроксимацией функции заданной таблично.

Чаще всего для аппроксимации таблично заданной функции используется метод наименьших квадратов.

В случае аппроксимации табличных данных простыми, широко известными математическими зависимостями, для построения графика эмпирической функции и вычисления коэффициентов a_i можно воспользоваться средствами табличного процессора MS Excel. Решение этой задачи в MS Excel называется *построением линии тренда*. Построив в MS Excel на точечном графике огибающую линию, выбрав тип аппроксимирующей функции и построив линию тренда с выводом на экран аппроксимирующей функции, мы получаем фактически график нашего участка и подынтегральную функцию для вычисления площади участка.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Очень часто, особенно при анализе эмпирических данных возникает необходимость найти в явном виде функциональную зависимость между величинами x и y, полученными в результате измерений.

Общая теория построения эмпирических формул со строгим аналитическим выводом формул приведена в работах [1-3]. При аналитическом исследовании взаимосвязи между двумя величинами x и y производят ряд наблюдений и в результате получают таблицу значений:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_n

Для установления функциональной зависимости между величинами x и y (аналитический вид ее, как правило, неизвестен), необходимо решить практически важную задачу – найти эмпирическую формулу этой зависимости

$$y = f(x; a_1, a_2, \ldots, a_m), \tag{1}$$

где $a_1, a_2, ..., a_m$ - неизвестные параметры, значения которой в точках x_i мало отличались бы от опытных значений y_i $(i = 1,2,...,n)$.

Обычно указывают класс функций (например, множество линейных, степенных, показательных и т.п.) из которого выбирается функция $f(x)$, и далее определяются наилучшие значения параметров.

Если в эмпирическую формулу (1) подставить исходные x_i, то получим теоретические значения $y_i = f(x_i; a_1, a_2, ..., a_m)$, где $i = 1,2,...,n$.

Разности $y_i - y_i$ называются отклонениями и представляют собой расстояния по вертикали от точек с координатами (x_i, y_i) (точка M_i на рис. 2) до графика эмпирической функции.

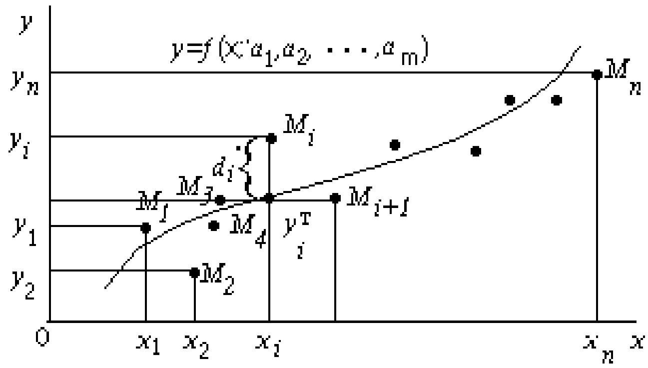

Рис. 2. Схема к методу наименьших квадратов

Согласно методу наименьших квадратов наилучшими коэффициентами $a_1, a_2, ..., a_m$ считаются те, для которых сумма квадратов отклонений найденной эмпирической функции от заданных значений будет минимальной:

$$S(a_1, a_2, ..., a_m) = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i; a_1, a_2, ..., a_m) - y_i \right]^2 \to min. \qquad (2)$$

Поясним геометрический смысл метода наименьших квадратов.

Каждая пара чисел (x_i, y_i) из исходной таблицы определяет точку M_i на плоскости XOY. Используя формулу (1) при различных значениях коэффициентов $a_1, a_2, ..., a_m$ можно построить ряд кривых, которые являются графиками функции (1). Задача состоит в определении коэффициентов $a_1, a_2, ..., a_m$ таким образом, чтобы сумма квадратов расстояний по вертикали от точек $M_i(x_i, y_i)$ до графика функции (1) была наименьшей (рис.2).

Построение эмпирической формулы (1) состоит из двух этапов: выяснение общего вида этой формулы и определение ее наилучших параметров.

Если неизвестен характер зависимости между данными величинами x и y , то вид эмпирической зависимости является произвольным. Предпочтение отдается простым формулам, обладающим хорошей точностью. Удачный выбор эмпирической формулы в значительной мере зависит от знаний исследователя в предметной области, используя которые, он может указать класс функций из теоретических соображений. Большое значение имеет изображение полученных данных в декартовых или в специальных системах координат (полулогарифмической, логарифмической и т.д.). По положению точек можно примерно угадать общий вид зависимости путем установления сходства между построенным графиком и образцами известных кривых.

Определение наилучших коэффициентов $a_1, a_2, ..., a_m$ входящих в эмпирическую формулу производят хорошо известными аналитическими методами.

Для того, чтобы найти набор коэффициентов $a_1, a_2, ..., a_m$, которые доставляют минимум функции S , определяемой формулой (2), используем необходимое условие экстремума функции нескольких переменных - равенство нулю частных производных. В результате получим нормальную систему для определения коэффициентов $a_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0; \ldots; \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \qquad (3)$$

Таким образом, нахождение коэффициентов a_i сводится к решению системы (3).

Эта система упрощается, если эмпирическая формула (1) линейна относительно параметров a_i, тогда система (3) - будет линейной.

Конкретный вид системы (3) зависит от того, из какого класса эмпирических формул мы ищем зависимость (1). В случае линейной зависимости $y = a_1 + a_2 x$ система (3) примет вид:

$$\begin{cases} a_1 n + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \quad (4)$$

Эта линейная система может быть решена любым известным методом (Гаусса, простых итераций, формулами Крамера).

В случае квадратичной зависимости $y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ система (3) примет вид:

$$\begin{cases} a_1 n + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases} \quad (5)$$

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

В ряде случаев в качестве эмпирической формулы берут функцию, в которую неопределенные коэффициенты входят нелинейно. При этом иногда задачу удается линеаризовать, т.е. свести к линейной. К числу таких зависимостей относится экспоненциальная зависимость

$$y = a_1 \cdot e^{a_2 x}, \quad (6)$$

где a_1 и a_2 неопределенные коэффициенты.

Линеаризация достигается путем логарифмирования равенства (6), после чего получаем соотношение

$$\ln y = \ln a_1 + a_2 x \quad (7)$$

Обозначим $\ln y$ и $\ln a_1$ соответственно через t и c , тогда зависимость (6) может быть записана в виде $t = c + a_2 x$, что позволяет применить формулы (4) с заменой a_1 на c и y_i на t_i .

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

График восстановленной функциональной зависимости $y(x)$ по результатам измерений $(x_i, y_i),\ i = 1,2,\ldots,n$ называется кривой регрессии.

Для описания уравнения регрессии рассмотрим следующие величины.

$S_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$ - общая сумма квадратов отклонений, где $\bar{y}$ среднее значение y_i .

Для линейной регрессии можно доказать следующее равенство

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^{\text{т}})^2 + \sum_{i=1}^{n} (y_i^{\text{т}} - \bar{y})^2 .$$

Первое слагаемое, равное $S_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^{\text{т}})^2$ и называемое остаточной суммой квадратов отклонений, характеризует отклонение экспериментальных данных от теоретических.

Второе слагаемое, равное $S_{\text{факт}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i^{\text{т}} - \bar{y})^2$ и называемое факторной суммой квадратов отклонений объясненной регрессией, характеризует разброс данных.

Очевидно, что справедливо следующее равенство

$$S_{\text{общ}} = S_{\text{ост}} + S_{\text{факт}} .$$

Коэффициент детерминированности (детерминации) определяется по формуле: $$R^2 = 1 - \frac{S_{\text{ост}}}{S_{\text{общ}}}\ . \qquad (8)$$

Поскольку $S_{\text{ост}} \le S_{\text{общ}}$, то R^2 может изменяться в пределах от 0 до 1. Чем меньше остаточная сумма квадратов по сравнению с общей суммой квадратов, тем больше значение коэффициента детерминированности R^2, который показывает, насколько хорошо уравнение, полученное с помощью регрессионного анализа, объясняет взаимосвязи между переменными.

Коэффициент детерминированности служит показателем тесноты связи между независимой переменной. Иногда показателям тесноты связи можно дать качественную оценку (шкала Чеддока):

Количественная мера тесноты связи	Качественная характеристика силы связи
0,1-0,3	Слабая
0,3-0,5	Умеренная
0,5-0,7	Заметная
0,7-0,9	Высокая
0,9-0,99	Весьма высокая

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Вычисление интеграла следует провести численным методом (методом трапеции или методом Симпсона). Проверить правильность вычисления, проведя ручной счет или вычислив интеграл в среде MathCad (MathSoft Apps).

Существует довольно много численных методов вычисления определенного интеграла. Предлагаемые методы: метод трапеций и метод Симпсона сводятся к вычислению конечных сумм и, с точки зрения вычислительного алгоритма, являются довольно простыми.

Как известно, величина определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной функцией $f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$.

При вычислении интеграла **методом трапеций** отрезок интегрирования [a, b] разбивается на ***n*** равных частей, площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей образовавшихся прямолинейных трапеций и вычисляется, соответственно, по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right], \tag{9}$$

где величина отрезка разбиения $h=(b-a)/n$, значение аргумента в i-той точке определяется по формуле $x_i = a + i\cdot h$, значение подынтегральной функции в точках разбиения $f(x_i)$.

Таким образом, вычисление приближенного значения определенного интеграла по методу трапеций при заданном числе разбиений ***n*** сводится к вычислению конечной суммы.

При вычислении приближенного значения интеграла **методом Симпсона** отрезок интегрирования [a, b] также разбивается на ***n*** равных частей, при этом количество частей должно быть обязательно <u>четным</u>, и на каждом отрезке $[x_{i-1},\ x_{i+1}]$ подынтегральная функция заменяется параболой, проходящей через точки $f(x_{i-1}),\ f(x_i),\ f(x_{i+1})$.

Записав уравнение параболы в виде интерполяционной формулы Ньютона и проинтегрировав это выражение, окончательно получим формулу:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{3n}\left[f(a)+f(b)+\sum_{i=1}^{n-1}(k_i+3)\,f(x_i)\right], \tag{10}$$

известную под названием *формулы Симпсона*.

Как и в методе трапеций, величина отрезка разбиения $h=(b-a)/n$, значение аргумента в i-той точке определяется по формуле $x_i = a + i\cdot h$, значение подынтегральной функции в точках разбиения $f(x_i)$. Значения подынтегральной функции в точках разбиения должны суммироваться (по формуле Симпсона) с различными коэффициентами: в четных точках с коэффициентом 2, а в нечетных с коэффициентом 4. Это достигается за счет использования переменной k_i, которая принимает значения по правилу:

$$k_i = \begin{cases} 1 & \text{при нечетных } i \\ -1 & \text{при четных } i \end{cases}$$

Можно видеть, что вычисление приближенного значения определенного интеграла по методу Симпсона при заданном числе разбиений ***n*** сводится к вычислению конечной суммы.

ПРИМЕР

РАСЧЕТ АППРОКСИМАЦИИ В EXCEL

В табл. 2 приведены данные замеров от линии просеки до границы участка по ручью (оврагу) Определить тип и параметры аналитической зависимости, аппроксимирующей результаты замеров. Вычислить площадь участка.

Таблица 2

X	6	8	10	13	16	18	21	24	27	29
Y	58,146	52,362	47,355	42,283	39,146	38,634	36,849	35,564	35,143	34,215

Сначала проведем расчеты, используя средства табличного процессора Microsoft Excel. Для проведения расчетов данные целесообразно расположить в виде, показанном на рис. 3 и 4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	Y	X^2	XY	X^3	X^4	X^2Y	t=ln(Y)
2	6	58,146	36	348,876	216	1296	2093,26	4,06
3	8	52,362	64	418,896	512	4096	3351,17	3,96
4	10	47,355	100	473,55	1000	10000	4735,50	3,86
5	13	42,283	169	549,679	2197	28561	7145,83	3,74
6	16	39,146	256	626,336	4096	65536	10021,38	3,67
7	18	38,634	324	695,412	5832	104976	12517,42	3,65
8	21	36,849	441	773,829	9261	194481	16250,41	3,61
9	24	35,564	576	853,536	13824	331776	20484,86	3,57
10	27	35,143	729	948,861	19683	531441	25619,25	3,56
11	29	34,215	841	992,235	24389	707281	28774,82	3,53
12	172	419,697	3536	6681,21	81010	1979444	130993,88	37,21
13	$y_{ср}$	41,9697					$lny_{ср}$	3,72

Рис. 3. Фрагмент листа MS Excel в режиме отображения данных (начало)

	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	X*ln(Y)	y1=a1+a2x	$y2=a1+a2x+a3x^2$	$y3=a1*e^{a2x}$	$(Y-y1)^2$	$(Y-y2)^2$	$(Y-y_{ср})^2$	$(lnY-lny3)^2$	$(lnY-lny_{ср})^2$
2	24,38	52,39	56,77	52,50	33,09	1,89	261,67	0,010	0,117
3	31,67	50,53	52,43	50,30	3,35	0,00	108,00	0,002	0,056
4	38,58	48,67	48,56	48,20	1,73	1,45	29,00	0,000	0,019
5	48,68	45,88	43,64	45,21	12,93	1,84	0,10	0,004	0,001
6	58,68	43,09	39,79	42,40	15,53	0,42	7,97	0,006	0,003
7	65,77	41,23	37,82	40,63	6,71	0,67	11,13	0,003	0,005
8	75,74	38,43	35,74	38,10	2,51	1,22	26,22	0,001	0,013
9	85,71	35,64	34,73	35,74	0,01	0,69	41,03	0,000	0,023
10	96,10	32,85	34,79	33,52	5,26	0,12	46,60	0,002	0,026
11	102,45	30,99	35,42	32,12	10,42	1,46	60,14	0,004	0,036
12	627,76	419,70	419,70	418,71	91,54	9,77	591,87	0,033	0,297
13					$S_{ост}$	$S_{ост}$	$S_{общ}$	$S_{ост\ для\ exp}$	$S_{общ\ для\ exp}$

Рис. 4. Фрагмент листа MS Excel в режиме отображения данных (продолжение)

На рис. 5 – 7 показаны формулы, по которым производился расчет.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	Y	X^2	XY	X^3	X^4	X^2Y	t=ln(Y)
2	6	58,146	=A2^2	=A2*B2	=A2^3	=A2^4	=C2*B2	=LN(B2)
3	8	52,362	=A3^2	=A3*B3	=A3^3	=A3^4	=C3*B3	=LN(B3)
4	10	47,355	=A4^2	=A4*B4	=A4^3	=A4^4	=C4*B4	=LN(B4)
5	13	42,283	=A5^2	=A5*B5	=A5^3	=A5^4	=C5*B5	=LN(B5)
6	16	39,146	=A6^2	=A6*B6	=A6^3	=A6^4	=C6*B6	=LN(B6)
7	18	38,634	=A7^2	=A7*B7	=A7^3	=A7^4	=C7*B7	=LN(B7)
8	21	36,849	=A8^2	=A8*B8	=A8^3	=A8^4	=C8*B8	=LN(B8)
9	24	35,564	=A9^2	=A9*B9	=A9^3	=A9^4	=C9*B9	=LN(B9)
10	27	35,143	=A10^2	=A10*B10	=A10^3	=A10^4	=C10*B10	=LN(B10)
11	29	34,215	=A11^2	=A11*B11	=A11^3	=A11^4	=C11*B11	=LN(B11)
12	=СУММ(А	=СУММ(В	=СУММ(С2	=СУММ(D2:D	=СУММ(Е2	=СУММ(F:	=СУММ(G2:	=СУММ(Н
13	$y_{ср}$	=B12/10					$lny_{ср}$	=H12/10

Рис. 5. Фрагмент листа MS Excel в режиме отображения формул (начало)

	I	J	K	L
1	X*ln(Y)	y1=a1+a2x	y2=a1+a2x+a3x^2	y3=a1*e^{a2x}
2	=A2*H2	=$B$19+$B$20*A2	=$B$27+$B$28*A2+$B$29*A2^2	=$E$35*EXP($B$36*A2)
3	=A3*H3	=$B$19+$B$20*A3	=$B$27+$B$28*A3+$B$29*A3^2	=$E$35*EXP($B$36*A3)
4	=A4*H4	=$B$19+$B$20*A4	=$B$27+$B$28*A4+$B$29*A4^2	=$E$35*EXP($B$36*A4)
5	=A5*H5	=$B$19+$B$20*A5	=$B$27+$B$28*A5+$B$29*A5^2	=$E$35*EXP($B$36*A5)
6	=A6*H6	=$B$19+$B$20*A6	=$B$27+$B$28*A6+$B$29*A6^2	=$E$35*EXP($B$36*A6)
7	=A7*H7	=$B$19+$B$20*A7	=$B$27+$B$28*A7+$B$29*A7^2	=$E$35*EXP($B$36*A7)
8	=A8*H8	=$B$19+$B$20*A8	=$B$27+$B$28*A8+$B$29*A8^2	=$E$35*EXP($B$36*A8)
9	=A9*H9	=$B$19+$B$20*A9	=$B$27+$B$28*A9+$B$29*A9^2	=$E$35*EXP($B$36*A9)
10	=A10*H10	=$B$19+$B$20*A10	=$B$27+$B$28*A10+$B$29*A10^2	=$E$35*EXP($B$36*A10)
11	=A11*H11	=$B$19+$B$20*A11	=$B$27+$B$28*A11+$B$29*A11^2	=$E$35*EXP($B$36*A11)
12	=СУММ(I2:I11)	=СУММ(J2:J11)	=СУММ(K2:K11)	=СУММ(L2:L11)

Рис. 6. Фрагмент листа MS Excel в режиме отображения формул (продолжение 1)

	M	N	O	P	Q
1	(Y-y1)^2	(Y-y2)^2	(Y-y$_{ср}$)^2	(lnY-lny3)^2	(lnY-lny$_{ср}$)^2
2	=(B2-J2)^2	=(B2-K2)^2	=(B2-$B$13)^2	=(H2-LN(L2))^2	=(H2-$H$13)^2
3	=(B3-J3)^2	=(B3-K3)^2	=(B3-$B$13)^2	=(H3-LN(L3))^2	=(H3-$H$13)^2
4	=(B4-J4)^2	=(B4-K4)^2	=(B4-$B$13)^2	=(H4-LN(L4))^2	=(H4-$H$13)^2
5	=(B5-J5)^2	=(B5-K5)^2	=(B5-$B$13)^2	=(H5-LN(L5))^2	=(H5-$H$13)^2
6	=(B6-J6)^2	=(B6-K6)^2	=(B6-$B$13)^2	=(H6-LN(L6))^2	=(H6-$H$13)^2
7	=(B7-J7)^2	=(B7-K7)^2	=(B7-$B$13)^2	=(H7-LN(L7))^2	=(H7-$H$13)^2
8	=(B8-J8)^2	=(B8-K8)^2	=(B8-$B$13)^2	=(H8-LN(L8))^2	=(H8-$H$13)^2
9	=(B9-J9)^2	=(B9-K9)^2	=(B9-$B$13)^2	=(H9-LN(L9))^2	=(H9-$H$13)^2
10	=(B10-J10)^2	=(B10-K10)^2	=(B10-$B$13)^2	=(H10-LN(L10))^2	=(H10-$H$13)^2
11	=(B11-J11)^2	=(B11-K11)^2	=(B11-$B$13)^2	=(H11-LN(L11))^2	=(H11-$H$13)^2
12	=СУММ(M2:M11)	=СУММ(N2:N11)	=СУММ(O2:O11)	=СУММ(P2:P11)	=СУММ(Q2:Q11)
13	$S_{ост}$	$S_{ост}$	$S_{общ}$	$S_{ост\ для\ exp}$	$S_{общ\ для\ exp}$

Рис. 7. Фрагмент листа MS Excel в режиме отображения формул (продолжение 2)

Нахождение коэффициентов аппроксимирующей функции сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. На рис. 8-10 представлены решения СЛАУ для линейной, квадратичной и экспоненциальной функции, а на рис. 11 – решения СЛАУ для линейной функции в режиме отображения формул.

	A	B	C	D	E	F	G	H
14		A1		B1				
15	10	172		419,697				
16	172	3536		6681,21				
17								
18				R^2				
19	a1	57,97792105		0,8453				
20	a2	-0,930710526						

$$\begin{cases} a_1 n + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad , \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \quad . \end{cases}$$

Рис. 8. Поиск коэффициентов линейной функции

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
22		A2			B2				
23	10	172	3536		419,697				
24	172	3536	81010		6681,21				
25	3536	81010	1979444		130993,878				
26									
27	a1	72,6433							
28	a2	-3,0008			R^2				
29	a3	0,0592			0,9835				

$$\begin{cases} a_1 n + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i + a_3\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \ , \\ a_1\sum_{i=1}^{n} x_i + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_3\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \\ a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_3\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \ . \end{cases}$$

Рис. 9. Поиск коэффициентов квадратичной функции

	A	B	C	D	E	F	G	H
30		$\ln y = \ln a_1 + a_2 x$		t=c+a2x				
31		A3						
32	10	172		37,215				
33	172	3536		627,755				
34								
35	c=ln(a1)	4,089		a1=exp(c)	59,679	R^2		
36	a2	-0,021				0,8884		

$$\begin{cases} cn + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i , \\ c\sum_{i=1}^{n} x_i + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i . \end{cases}$$

Рис. 10. Поиск коэффициентов экспоненциальной функции

	A	B	C	D
14		A1		B1
15	=10	=A12		=B12
16	=A12	=C12		=D12
17				
18				R^2
19	a1	=МУМНОЖ(МОБР(A15:B16);D15:D16)		=1-M12/P12
20	a2	=МУМНОЖ(МОБР(A15:B16);D15:D16)		

Рис. 11. Поиск коэффициентов линейной функции в режиме отображения формул

	A	B	C	D	E	F
31		A3				
32	10	=A12		=H12		
33	=A12	=C12		=I12		
34						
35	c=ln(a1)	=МУМНОЖ(МОБР(A32:B33);D32:D33)		a1=exp(c)	=EXP(B35)	R^2
36	a2	=МУМНОЖ(МОБР(A32:B33);D32:D33)				=1-P12/Q12

Рис. 12. Поиск коэффициентов экспоненциальной функции в режиме отображения формул

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ТРЕНДА

Программа MS Excel позволяет по исходным точкам построить линии тренда и вывести на график аппроксимирующую функцию и коэффициент детерминации. Результаты представлены на рис. 13-15.

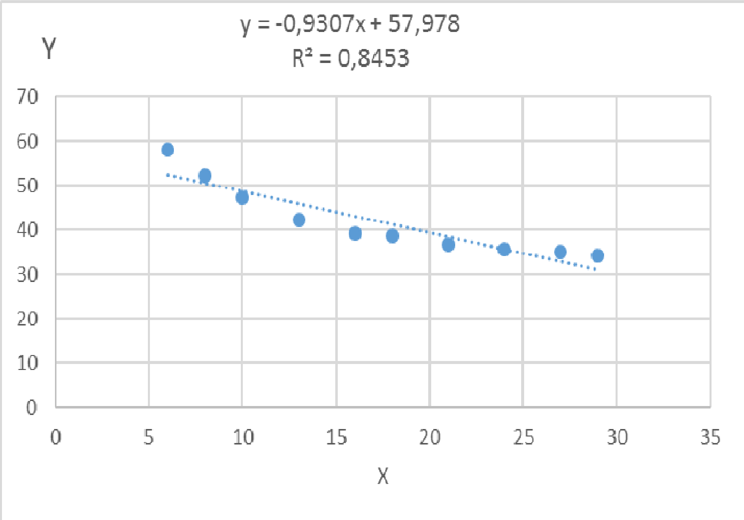

Рис. 13. Исходные точки и линия тренда для линейной аппроксимации.

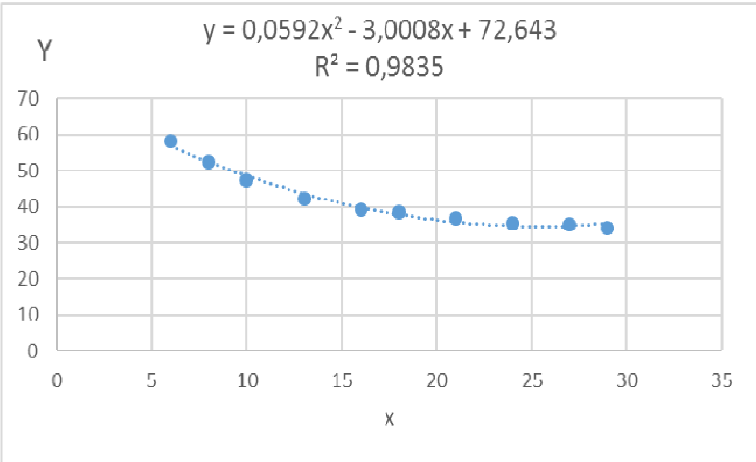

Рис. 14. Исходные точки и линия тренда для квадратичной аппроксимации.

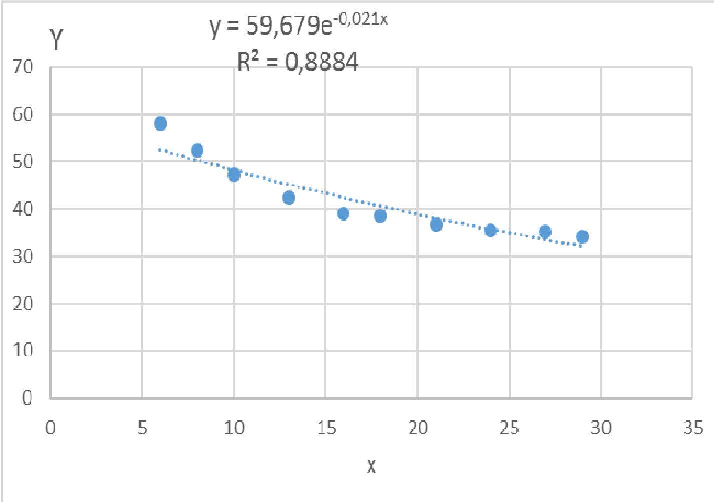

Рис. 15. Исходные точки и линия тренда для экспоненциальной аппроксимации.

Сравнивая данные результаты с результатами, полученными вручную ранее с использованием основных расчетных формул, видим, что они полностью совпадают. Это указывает на то, что вычисления верны.

Анализируя коэффициенты детерминации, можно сделать вывод, что квадратичная зависимость описывает наши измерения на местности наилучшим образом, и при вычислении определенного интеграла мы будем использовать именно её.

Расчет площади участка сводится к вычислению определенного интеграла. Воспользуемся формулой трапеций:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right],\ h = \frac{b-a}{n},$$

где n – число точек разбиения отрезка [a, b]. Чем больше n, тем точнее будет вычисление интеграла. Пусть n=20. На рис.16–18 представлено вычисление определенного интеграла в MS Excel.

	A	B
37	n=	20
38	h=	1,15
39	x	f(x)
40	6	56,77
41	7,15	54,22
42	8,3	51,82
43	9,45	49,57
44	10,6	47,49
45	11,75	45,56
46	12,9	43,79
47	14,05	42,17
48	15,2	40,71
49	16,35	39,41
50	17,5	38,27
51	18,65	37,28
52	19,8	36,44
53	20,95	35,77
54	22,1	35,25
55	23,25	34,89
56	24,4	34,68
57	25,55	34,63
58	26,7	34,74
59	27,85	35,00
60	29	35,42
61	S=	940,45

Рис. 16. Вычисление определенного интеграла в режиме отображения данных

	A	B
37	n=	20
38	h=	=(29-6)/B37
39	x	f(x)
40	6	=$B$27+$B$28*A40+$B$29*A40^2
41	=A40+$B$38	=$B$27+$B$28*A41+$B$29*A41^2
42	=A41+$B$38	=$B$27+$B$28*A42+$B$29*A42^2
43	=A42+$B$38	=$B$27+$B$28*A43+$B$29*A43^2
44	=A43+$B$38	=$B$27+$B$28*A44+$B$29*A44^2
45	=A44+$B$38	=$B$27+$B$28*A45+$B$29*A45^2
46	=A45+$B$38	=$B$27+$B$28*A46+$B$29*A46^2
47	=A46+$B$38	=$B$27+$B$28*A47+$B$29*A47^2
48	=A47+$B$38	=$B$27+$B$28*A48+$B$29*A48^2
49	=A48+$B$38	=$B$27+$B$28*A49+$B$29*A49^2
50	=A49+$B$38	=$B$27+$B$28*A50+$B$29*A50^2
51	=A50+$B$38	=$B$27+$B$28*A51+$B$29*A51^2
52	=A51+$B$38	=$B$27+$B$28*A52+$B$29*A52^2
53	=A52+$B$38	=$B$27+$B$28*A53+$B$29*A53^2
54	=A53+$B$38	=$B$27+$B$28*A54+$B$29*A54^2
55	=A54+$B$38	=$B$27+$B$28*A55+$B$29*A55^2
56	=A55+$B$38	=$B$27+$B$28*A56+$B$29*A56^2
57	=A56+$B$38	=$B$27+$B$28*A57+$B$29*A57^2
58	=A57+$B$38	=$B$27+$B$28*A58+$B$29*A58^2
59	=A58+$B$38	=$B$27+$B$28*A59+$B$29*A59^2
60	=A59+$B$38	=$B$27+$B$28*A60+$B$29*A60^2
61	S=	=B38/2*(B40+B60+2*СУММ(B41:B59))

Рис. 17. Вычисление определенного интеграла в режиме отображения формул

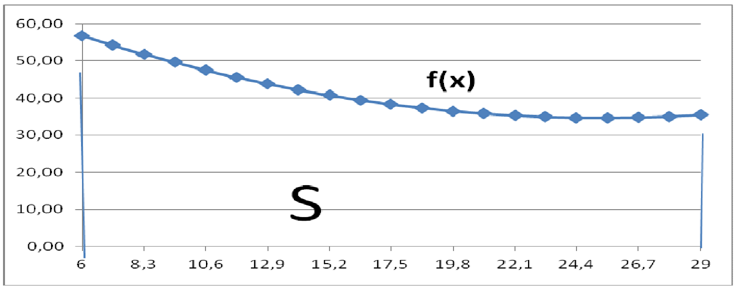

Рис. 18. График подынтегральной функции

РАСЧЕТ В ПАКЕТЕ MATHCAD

В седьмой главе книги [5] представлена методика обработки экспериментальных данных с помощью встроенных в Matcad функций. На рис. 21-27 приведено решение и графическое представление результатов расчетов в Mathcad.

$ORIGIN := 1$

$X := (6\ \ 8\ \ 10\ \ 13\ \ 16\ \ 18\ \ 21\ \ 24\ \ 27\ \ 29)$

$Y := (58.146\ \ 52.362\ \ 47.355\ \ 42.283\ \ 39.146\ \ 38.634\ \ 36.849\ \ 35.564\ \ 35.143\ \ 34.215)$

$n := 10$

Аппроксимация линейной функцией

$a := \mathrm{line}\left(X^T, Y^T\right) \qquad a = \begin{pmatrix} 57.978 \\ -0.931 \end{pmatrix}$

$a_1 = 57.978 \qquad a_2 = -0.931$

$Yline(x) := a_1 + a_2 \cdot x$

Рис. 21. Аппроксимация линейной функцией в Mathcad

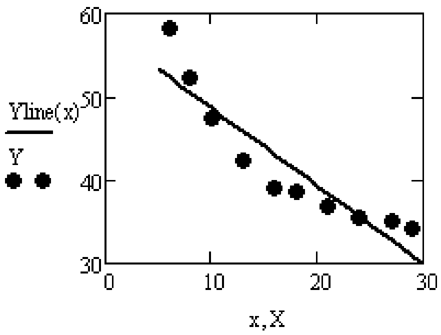

Рис. 22. График результата аппроксимации линейной функцией в Mathcad

Аппроксимация экспоненциальной функцией

$$\underset{\sim}{a} := \mathrm{line}\left(X^T, \ln\left(Y^T\right)\right) \quad a = \begin{pmatrix} 4.089 \\ -0.021 \end{pmatrix}$$

$$ae_1 := \exp\left(a_1\right) \quad ae_1 = 59.679 \quad ae_2 := a_2$$

$$Yexp(x) := ae_1 \cdot e^{ae_2 \cdot x}$$

Рис. 23. Аппроксимация экспоненциальной функцией в Mathcad

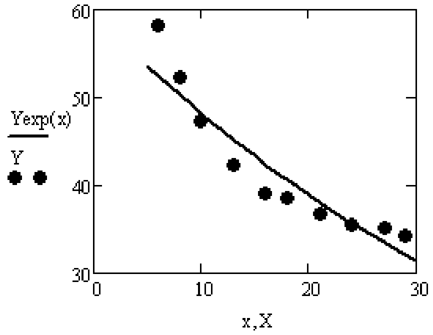

Рис. 24. График результата аппроксимации экспоненциальной функцией в Mathcad

Аппроксимация квадратичной функцией

$$akv := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(x, a1, a2, a3) := a1 + a2 \cdot x + a3 \cdot x^2$$

$$\underset{\sim}{F}(x, a1, a2, a3) := \begin{pmatrix} f(x, a1, a2, a3) \\ 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{a} := \mathrm{genfit}\left(X^T, Y^T, akv, F\right)$$

$$Ykvadr(x) := a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 \qquad a = \begin{pmatrix} 72.643 \\ -3.001 \\ 0.059 \end{pmatrix}$$

Рис. 25. Аппроксимация квадратичной функцией в Mathcad

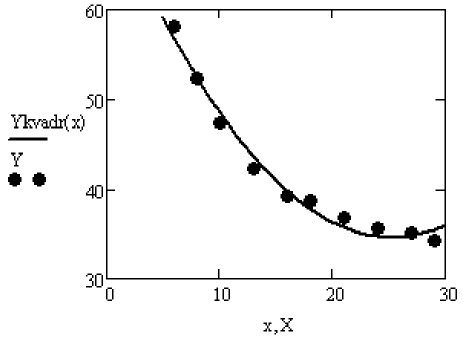

Рис. 26. График результата аппроксимации квадратичной функцией в Mathcad

Сравнивая результаты расчетов, полученных ранее с результатами расчетов в Mathcad, видим, что они полностью совпадают. Это указывает на то, что вычисления верны.

Проверим также вычисление определенного интеграла в Mathcad. Мы выяснили, что наилучшим образом нашу зависимость описывает квадратичная функция, поэтому для расчета площади участка будем использовать её. На рис. 26 представлено вычисление определенного интеграла от квадратичной функции.

Вычисление определенного интеграла

$$\int_{6}^{29} Ykvadr(x)\,dx = 940.149$$

Рис. 27. Вычисление определенного интеграла в Mathcad

Таким образом, задача о нахождении площади земельного участка решена. Его площадь составляет приблизительно 940 м2.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО СОСТАВЛЕНИЮ ПРОГРАММ

При разработке программы нужно следовать принципам структурного программирования: поэтапная детализация, использование только базовых структур (следование, ветвление, цикл), повышение наглядности программы.

Уже на стадии разработки программы нужно продумать мероприятия по ее отладке (подготовка тестов, включение в программу операторов вывода промежуточных результатов, учет особых случаев, ошибок вывода).

В общем случае нужно быть готовым к неожиданностям при запуске программы и поэтому иметь твердые копии (распечатки текста) программы и исходной информации для их восстановления в случае необходимости.

Разрабатывая программу, нужно помнить о целесообразности оформления некоторых важных ее частей в виде подпрограмм. Метод подпрограмм облегчает написание и отладку программы.

РАСЧЕТ АППРОКСИМАЦИИ В ПРОГРАММЕ, РАЗРАБОТАННОЙ В СРЕДЕ VBA MS EXCEL

Для наглядности представления результатов рекомендуется использовать форму. Пример такой формы предложен на рис.28. При разработке формы были использованы следующие компоненты:

– поясняющие надписи Label;

– поля для вывода результатов расчета: компоненты TextBox;

– список для просмотра исходных данных ListBox1;

– кнопки CommandButton;

– компоненты Frame для группирования сходных по назначению объектов.

В окне свойств компонентов (Propertis Window) следует настроить необходимые свойства каждого компонента.

При нажатии на кнопку **Читать**, программа считывает исходные данные с листа MS Excel и записывает их в форму. При нажатии на кнопку **Пуск** вычисляет коэффициенты аппроксимирующих функций и коэффициенты детерминации для каждой из них. При нажатии на кнопку **Выход** – завершает работу.

На рис.29 представлены результаты вычисления.

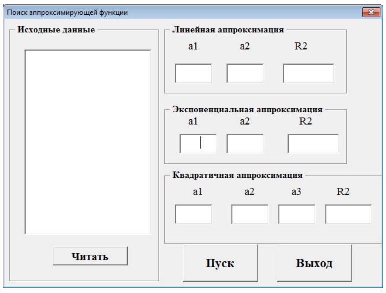

Рис. 28. Вид пользовательской формы

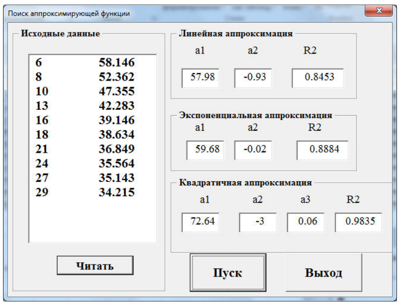

Рис. 29. Вид пользовательской формы с результатами вычислений

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

Во всех вариантах требуется:

1. Используя метод наименьших квадратов результаты замеров, представленные в виде таблицы, аппроксимировать:

а) многочленом первой степени $y = P_1(x) \equiv a_1 + a_2 x$;

б) многочленом второй степени $y = P_2(x) \equiv a_1 + a_2 x + a_3 x^2$;

в) экспоненциальной зависимостью $y = a_1 e^{a_2 \cdot x}$.

2. Для каждой зависимости вычислить коэффициент детерминированности.
3. Для каждой зависимости построить линию тренда.
4. Написать программу в среде VBA MS Excel,
5. Привести решение в пакете Mathcad.
6. Сравнить результаты работы программы с вычислениями, выполненными вручную.
7. Сделать вывод, какая из полученных формул наилучшим образом аппроксимирует результаты замеров.
8. Вычислить площадь участка, используя выбранную формулу, методом трапеций или Симпсона в MS Excel, результаты вычисления проверить в Mathcad.

В таблицах приведены результаты измерений участков в метрах.

Вариант 1

X	Y
0	26,382
3	33,568
6	35,425
9	39,546
13	42,215
17	40,524
21	37,500
25	35,185
28	33,427
31	29,845

Вариант 2

X	Y
13	9,852
17	12,538
22	14,912
26	19,286
30	23,974
34	23,153
38	22,542
42	29,483
46	36,561
50	43,758

Вариант 3

X	Y
0	10,536
2	20,814
5	29,530
7	38,486
10	45,731
12	48,500
14	50,334
16	49,515
18	47,244
20	43,377

Вариант 4

X	Y
6	47,552
10	38,526
14	32,442
18	27,137
23	23,250
26	21,254
29	21,832
33	20,875
38	21,325
40	21,350

Вариант 5

X	Y
2	44,333
4	41,425
7	38,812
11	37,538
14	39,243
17	42,525
20	38,126
24	29,433
29	31,143
32	27,278

Вариант 6

X	Y
1	15,148
3	20,234
6	24,654
9	27,660
11	29,050
13	30,480
16	32,146
19	32,960
21	34,165
26	35,918

Вариант 7

X	Y
3	28,154
5	45,237
7	56,355
10	65,892
13	73,216
16	78,562
20	82,513
23	81,733
25	87,299
27	91,915

Вариант 8

X	Y
2	39,780
5	36,280
8	32,345
11	28,526
14	24,834
17	21,875
20	18,819
23	15,824
27	17,837
31	23,259

Вариант 9

X	Y
2	24,45
4	32,87
6	48,45
8	52,21
10	63,31
12	67,45
14	81,34
20	97,77
24	112,6
26	121,3

Вариант 10

X	Y
0	9,852
3	12,538
6	14,912
9	19,286
13	23,974
17	23,153
21	22,542
25	29,483
28	36,561
31	43,758

Вариант 11

X	Y
13	26,382
17	33,568
22	35,425
26	39,546
30	42,215
34	40,524
38	37,5
42	35,185
46	33,427
50	29,845

Вариант 12

X	Y
0	47,552
2	38,526
5	32,442
7	27,137
10	23,25
12	21,254
14	21,832
16	20,875
18	21,325
20	21,35

Вариант 13

X	Y
6	10,536
10	20,814
14	29,53
18	38,486
23	45,731
26	48,5
29	50,334
33	49,515
38	47,244
40	43,377

Вариант 14

X	Y
2	24,45
5	32,87
8	48,45
11	52,21
14	63,31
17	67,45
20	81,34
23	97,77
27	112,6
31	121,3

Вариант 15

X	Y
0	47,552
3	38,526
6	32,442
9	27,137
13	23,25
17	21,254
21	21,832
25	20,875
28	21,325
31	21,35

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Демидович Б.П.* Численные методы анализа: Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: Учебное пособие для вузов (под. ред. Демидовича Б.П.). Изд. 5-е, стереотип./ Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. СПб.: Издательство «Лань», 2010. - 400 с.
2. *Елисеева И.И.* Эконометрика: Учебник / Елисеева И.И., Курышева С.В., Нерадовская Ю.В. М.: Проспект, 2009.- 576 с.
3. *Елисеева И.И.* Общая теория статистики: Учебник для вузов (под ред. Елисеевой И.И.) изд. 5-е, перераб., доп. /Елисеева И.И., Юзбашев М.М. М.: Финансы и статистика, 2008. – 656.
4. Информатика. Методические указания по выполнению курсовой работы для студентов специальностей 130408, 130403 и 130404 / Санкт-Петербургский государственный горный институт. Составители: *Г.Н. Журов, В.В. Беляев, Г.П. Парамонов.* СПб, 2010. - 62 с.
5. *Макаров Е.Г.* Инженерные расчеты в Mathcad: Учебный курс. / Е.Г. Макаров - СПб.: Питер, 2011. - 400 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ ПО РАБОТЕ 3
ЗАДАЧА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ УЧАСТКА 4
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ 6
  ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ 6
  ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ. 10
  ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ 11
  ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА 12
ПРИМЕР 14
  РАСЧЕТ АППРОКСИМАЦИИ В EXCEL 14
  ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ТРЕНДА 17
  РАСЧЕТ В ПАКЕТЕ MATHCAD 21
РЕКОМЕНДАЦИИ ПО СОСТАВЛЕНИЮ ПРОГРАММ 23
  РАСЧЕТ АППРОКСИМАЦИИ В ПРОГРАММЕ, РАЗРАБОТАННОЙ В СРЕДЕ VBA MS EXCEL 24
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ 25
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 29