

I. Колебательное движение материальной точки

Груз массой m (материальная точка) прикреплен к пружине жесткости c . Начальная деформация пружины λ_0 , начальная скорость груза v_0 . Массой пружины пренебречь. Начало координат взять в положении статического равновесия груза на пружине. Принять $g=10 \text{ м/с}^2$.

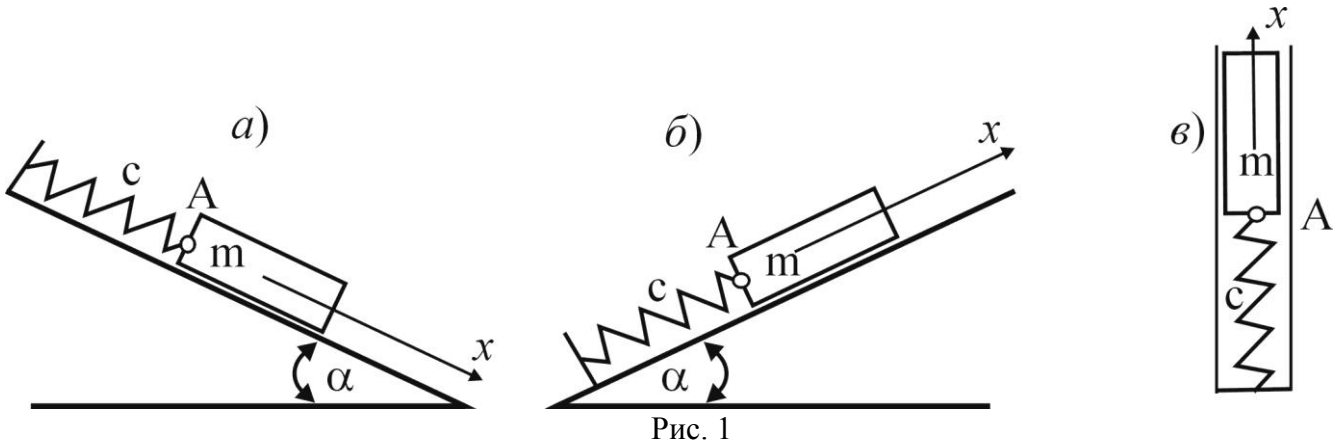


Рис. 1

На груз действует возмущающая сила $Q = Q_0 \sin p_1 t$, направление которой совпадает с осью x .

Для определения начальных условий в каждом варианте следует использовать условия крепления груза к концу А пружины:

Варианты 1-5: К концу А недеформированной пружины прикрепляют груз и опускают без толчка.

Варианты 6-10: К концу А недеформированной пружины прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вниз.

Варианты 11-15: К концу А недеформированной пружины прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вверх.

Варианты 16-20: К концу А сжатой пружины прикрепляют груз и опускают без толчка.

Варианты 21-25: К концу А растянутой пружины прикрепляют груз и опускают без толчка.

Варианты 26-27: Грузу, находящемуся в положении статического равновесия, сообщают скорость, направленную вниз.

Варианты 28-30: Грузу, находящемуся в положении статического равновесия, сообщают скорость, направленную вверх.

Задание состоит из двух, последовательно выполняемых, частей:

1) Составить закон свободных и вынужденных (на частоте возмущения p_1) колебаний груза на пружине без сопротивления. Привести график процесса колебаний.

2) На груз дополнительно действует еще и сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости: $F_c = \mu v$.

Определить значение резонансной амплитуды и построить, пользуясь формулой для амплитуды вынужденных колебаний, резонансную кривую в интервале изменения частоты возмущающей силы $p \in [0,5 k ; 1,5 k]$, k – собственная частота свободных колебаний точки в конкретном варианте. Коэффициент сопротивления μ (или коэффициент динамичности $\beta = A_{рез}/A_{ст}$), амплитуда возмущающей силы Q_0 и ее частота p_1 даны в таблице 1.

Таблица 1

Номер задачи	Номер рисунка	m , кг	c , Н/см	v_0 , см/с	λ_0 , см	α	p_1 , с^{-1}	Q_0 , Н	μ , Н с/м	β
1.1	1.1.a	$7\sqrt{2}$	10	-	-	45°	9	100	20	-
1.2	1.1.a	$16\sqrt{3}$	10	-	-	60°	9	1	-	20
1.3	1.1.б	$28\sqrt{2}$	10	-	-	45°	4	0,1	0,1	-
1.4	1.1.б	20	10	-	-	30°	10	20	-	10
1.5	1.1.в	20	40	-	-	-	15	10	1	-
1.6	1.1.a	$14\sqrt{2}$	20	240	-	45°	11	200	-	5
1.7	1.1.a	$16\sqrt{3}$	40	96	-	60°	11	100	-	10
1.8	1.1.б	$7\sqrt{2}$	10	240	-	45°	11	50	1	-

Номер задачи	Номер рисунка	m, кг	c, Н/см	v ₀ , см/с	λ ₀ , см	α	p ₁ , с ⁻¹	Q ₀ , Н	μ, Н с/м	β
1.9	1.1.б	5	5	120	-	30°	10,5	0,5	0,1	-
1.10	1.1.в	16	8	105	-	-	8	0,1	-	5
1.11	1.1.а	7√2	10	240	-	45°	12	0,5	-	10
1.12	1.1.а	36√3	90	96	-	60°	8	0,1	2	-
1.13	1.1.б	14√2	20	240	-	45°	1	1	1	-
1.14	1.1.б	10	10	120	-	30°	0,95	2	2	-
1.15	1.1.а	32	16	105	-	-	0,7	2	0,5	-
1.16	1.1.а	14√2	20	-	5	45°	0,95	0,1	0,1	-
1.17	1.1.а	36√3	10	-	48	60°	2	0,1	1	-
1.18	1.1.б	28√2	40	-	3	45°	11	5	1	-
1.19	1.1.б	10	20	-	3,5	30°	11	5	-	20
1.20	1.1.в	10	10	-	5	-	11	5	-	10
1.21	1.1.а	7√2	10	-	3	45°	9,5	5	0,1	-
1.22	1.1.а	4√3	10	-	4	60°	11	5	0,2	-
1.23	1.1.б	28√2	10	-	18	45°	4,95	5	2	-
1.24	1.1.б	10	20	-	7,5	30°	15	5	2	-
1.25	1.1.в	20	20	-	10	-	12	20	10	-
1.26	1.1.б	20	10	42	λ _{ст}	30°	0,65	10	-	10
1.27	1.1.в	20	20	40	λ _{ст}	-	11	10	-	10
1.28	1.1.б	10	5	28	λ _{ст}	30°	7	10	-	5
1.29	1.1.в	10	10	30	λ _{ст}	-	7	100	-	5
1.30	1.1.в	20	40	42	λ _{ст}	-	15	100	-	10

Пример. Пружина жесткостью $2 \cdot 10^4$ Н/м расположена на плоскости, наклоненной к горизонту под углом 30° . В некоторый момент пружину сжимают на $\lambda_0 = 0,005$ м, прикрепляют груз 10 кг и сообщают ему скорость 0,5 м/с, направленную вверх вдоль наклонной плоскости. Колебания возбуждаются гармонической силой $Q = Q_0 \sin p_1 t$: $Q_0 = 1$ Н, $p_1 = 30$ с⁻¹. Коэффициент вязкого сопротивления $\mu = 2$ Нс/м.

Задание.1) Составить закон свободных и вынужденных (на частоте возмущения 30 с⁻¹) колебаний груза на пружине без сопротивления. Привести график процесса колебаний.

2) Считая, что на груз дополнительно действует еще и сила сопротивления, пропорциональная первой степени скорости: $F_c = \mu v$, построить резонансную кривую.

Решение. 1) Найдем положение статического равновесия груза – точку О (Рис.2). Пусть А – точка, соответствующая концу недеформированной пружины. Тогда $AO = \lambda_{ст}$ – статическая деформация, которой соответствует сила упругости $F_{cm} = c \cdot \lambda_{cm}$.

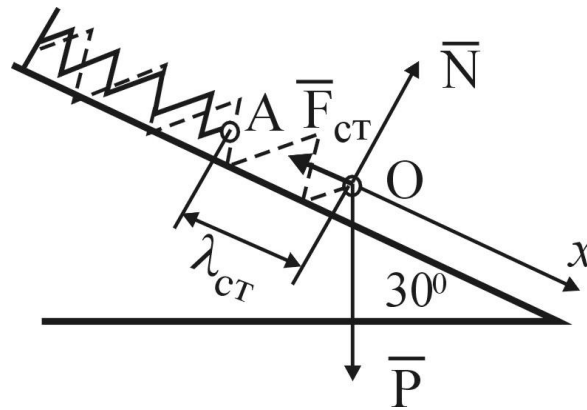


Рис.2

Рассмотрим равновесие груза (на Рис. 2 и далее положения груза будем отождествлять с соответствующими точками). На него действуют три силы: \bar{P} , \bar{N} и \bar{F}_{cm} . Выберем ось x , направленную вдоль наклонной плоскости вниз, и напишем уравнение равновесия в проекциях на эту ось:

$$\sum X_i = P \sin 30^\circ - F_{cm} = 0 \quad \text{или} \quad P \sin 30^\circ - c \cdot \lambda_{cm} = 0,$$

$$\text{откуда } \lambda_{cm} = \frac{P \sin 30^\circ}{c} = \frac{mg \sin 30^\circ}{c} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^4} = 2,5 \cdot 10^{-3}, \text{ м.}$$

Начало координат на оси x поместим в положение O статического равновесия груза. В этом положении $x=0$.

$$\text{Определим частоту свободных колебаний груза } k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{10}} = 44,7 \text{ с}^{-1}.$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$m\ddot{x} + cx = Q_0 \sin p_1 t,$$

Q_0 - амплитуда возмущающей силы.

Его решение имеет вид:

$$x(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + A \sin p_1 t, \quad (1)$$

C_1, C_2 – произвольные постоянные интегрирования.

Здесь первые два слагаемых представляют собой свободные колебания груза, третье слагаемое – вынужденные; $A = \frac{Q_0/m}{k^2 - p_1^2}$ - амплитуда вынужденных колебаний. Таким образом,

$$A = \frac{p_1^2 \eta_0}{k^2 - p_1^2} = \frac{30^2 \cdot 0,001}{44,7^2 - 30^2} = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Для определения постоянных C_1, C_2 необходимо поставить начальные условия, т.е. определить смещение и скорость груза при $t=0$. В начальный момент груз находится в положении M_0 (Рис. 3), т.к. пружина была предварительно сжата на λ_0 . Тогда $x_0 = -OM_0 = -\lambda_{cm} - \lambda_0 = -2,5 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3} = -7,5 \cdot 10^{-3}$, м.

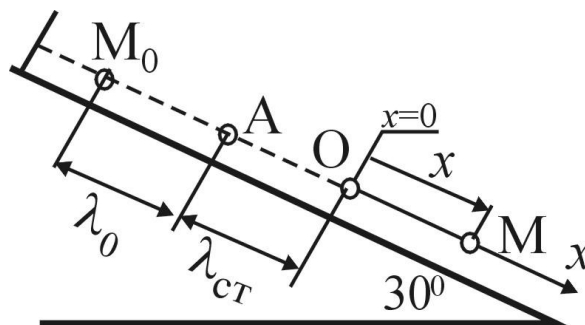


Рис. 3

Таким образом, имеем начальные условия: $x|_{t=0} = x_0 = -7,5 \cdot 10^{-3}$, м; $\dot{x}|_{t=0} = v_0 = -0,5$, м/с.

Подставляя в эти начальные условия решение (1) и его производную по времени $\dot{x}(t)$, получим уравнения для определения постоянных C_1 и C_2

$$C_1 = x_0, \quad v_0 = k \cdot C_2 - p_1 \cdot A,$$

откуда $C_1 = -7,5 \cdot 10^{-3}$, м; $C_2 = -10 \cdot 10^{-3}$, м и закон колебаний (1) приобретает вид

$$x(t) = (-7,5 \cos 44,7t - 10 \sin 44,7t + 0,8 \sin 30t) \cdot 10^{-3}, \text{ м.} \quad (2)$$

График процесса (2) приведен на Рис. 3.

2) Считая теперь, что на груз действует также сила сопротивления пропорциональная первой степени скорости, а частота возмущающей силы p является величиной переменной, построим резонансную кривую $A(p)$ в интервале $22,3 \leq p \leq 67$, с^{-1} (Рис. 4). По формуле для резонансной амплитуды определим $A_{\text{рез}} \approx 0,01$ м.

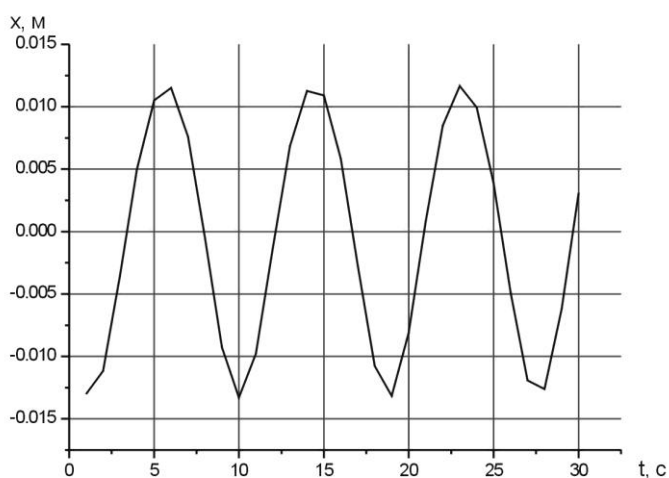


Рис. 3

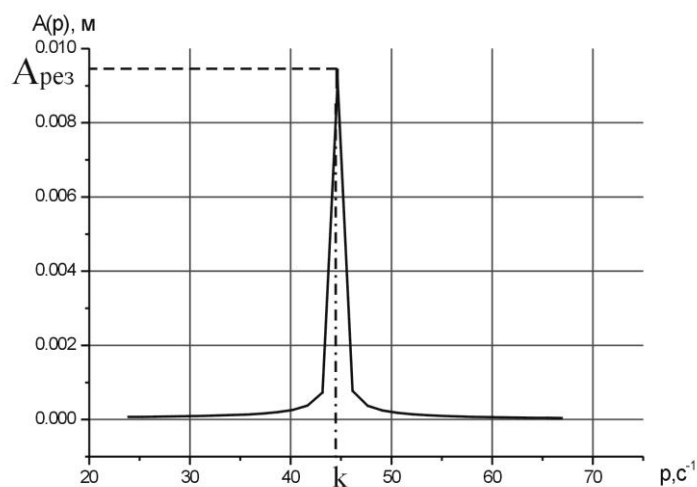


Рис. 4