

Министерство образования Российской Федерации
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.Д. Максимов Б.А. Кукин Ю.А. Хватов

МАТЕМАТИКА

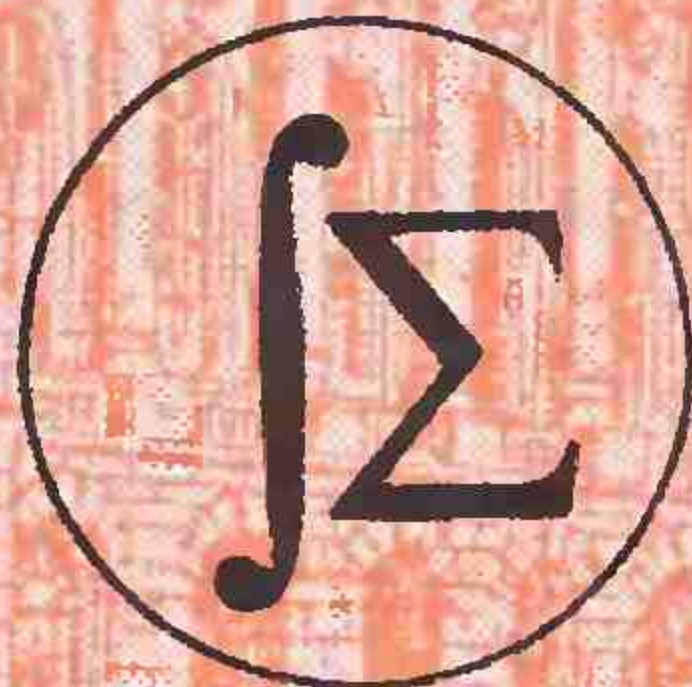
В ы п у с к 6

Теория вероятностей

Контрольные задания с образцами решений

Т е с т ы

Конспект-справочник



Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
2002

Ю.Д. Максимов Б.А. Куклин Ю.А. Хватов

МАТЕМАТИКА

Выпуск 6

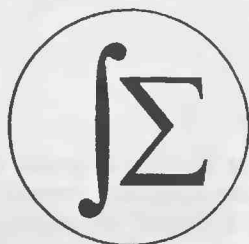
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Контрольные задания с образцами решений

Тесты

Конспект-справочник

Под ред. *Ю.Д. Максимова*



Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
2002

Максимов Ю.Д., Куклин Б.А., Хватов Ю.А. Математика. Выпуск 6. Теория вероятностей. Контрольные задания с образцами решений. Тесты. Конспект-справ. / Под ред. Ю.Д. Максимова. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2002, 96 с.

Соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Математика». Состоит из четырех частей. Первая часть содержит перечень базисных понятий, задач, методов, знаний и умений, которыми должен овладеть студент, изучив теорию вероятностей. Вторая часть включает тридцать контрольных заданий по девять задач с подзадачами по тематике, указанной в первой части. Имеются два образца заданий с подробными решениями. Ко всем задачам даны числовые ответы. Третья часть — четыре варианта тестов из двадцати вопросов для зачетно-экзаменационного контроля. Четвертая часть — справочный материал в виде конспекта-справочника.

Предназначено для студентов технических и экономических специальностей технического университета.

Табл. 1. Ил. 19.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного технического университета.

Предисловие

Данное издание по теории вероятностей предназначено для студентов технических и экономических специальностей технического университета. Оно включает в себя 4 части.

1-ю часть составляет перечень базисных понятий, основных задач, методов, знаний и умений, которыми должен овладеть студент, изучив теорию вероятностей.

2-ю часть составляют контрольные задания, насчитывающие 30 вариантов, и 2 образца с решениями по 9 задач с подзадачами.

3-я часть – это тесты в четырех вариантах по 20 вопросов для зачетно-экзаменационного контроля.

4-я часть – конспект-справочник, включающий программные определения и формулы.

Назначение 1-й части – сосредоточить внимание учащихся и преподавателей на разделах и базисе теории – базисных понятиях, задачах, методах, а также знаниях и умениях.

Основную часть пособия составляют контрольные задания. Они предназначены для выдачи их студентам в качестве индивидуальных домашних заданий и для проведения аудиторных контрольных работ. 9 задач каждого варианта охватывают следующие 9 тем:

1. Классическое определение вероятности.
2. Правила сложения и умножения вероятностей.
3. Формулы полной вероятности и Байеса.
4. Схема Бернулли проведения независимых испытаний, формула биномиальной вероятности и приближенная формула Пуассона для ее вычисления.
5. Одномерная дискретная случайная величина.
6. Одномерная непрерывная случайная величина.
7. Нормальный одномерный закон распределения.
8. Двумерная дискретная случайная величина.
9. Двумерная непрерывная случайная величина.

Эти задачи условно можно разделить на 3 части: 1–4 задачи относятся к алгебре событий и алгебре вероятностей; 5–7 задачи охватывают тематику одномерных случайных величин, а 8–9 – двумерных случайных величин. Эти части и являются заданиями или контрольными работами. Если на полный курс теории вероятностей не хватает времени, то некоторые из задач могут быть опущены.

Например, 1-я и 3-я, а также 8-я и 9-я. Остальные задачи являются более ценными для будущих приложений в математической статистике и в специальных курсах.

Все задачи составлены авторами, многократно перерабатывались и улучшались в процессе более чем 25-летнего преподавания. В основном они имеют практическое содержание, чтобы учащиеся уже здесь знакомились с кругом возможных приложений вероятностных методов, хотя и в адаптированном виде. 2 образца заданий снабжены достаточно подробными решениями всех задач. Они могут быть использованы преподавателями для проведения практических занятий. Для облегчения работы студентов и преподавателей ко всем задачам остальных 30 вариантов даны числовые ответы в конце пособия.

Справочный материал 4-й части охватывает всю тематику контрольных заданий и тестов, т. е. обеспечивает изучение всех требуемых разделов теории вероятностей.

В конце пособия помещена таблица значений приведенной функции Лапласа, применяемая для решения 7-й задачи.

При решении всех задач требуется применение вычислительных средств.

В вариантах заданий и тестах содержится 320 задач. Всего, вместе с подзадачами, их более 640.

Вся тематика учебного пособия соответствует государственным образовательным стандартам (ГОС) и действующим программам.

Март 2001 г.

Авторы

РАЗДЕЛ КУРСА МАТЕМАТИКИ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

Темы раздела

1. Алгебра событий. 2. Вероятность. 3. Алгебра вероятностей.
4. Одномерные случайные величины. 5. Двумерные случайные величины. 6. n -мерные случайные величины. 7. Предельные теоремы.

ЧАСТЬ I

ПЕРЕЧЕНЬ БАЗИСНЫХ ПОНЯТИЙ, ЗАДАЧ, МЕТОДОВ, ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ, КОТОРЫМИ ДОЛЖЕН ОВЛАДЕТЬ СТУДЕНТ, ИЗУЧИВ ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Базисные понятия теории

Событие. Вероятность. Случайная величина.

Основные задачи, возникающие на основе базисных понятий

1. Выражение одних событий через другие.
2. Нахождение вероятностей одних событий по вероятностям других.
3. Нахождение и преобразование законов распределения случайных величин.
4. Нахождение числовых характеристик случайной величины на основе ее закона распределения.
5. Нахождение вероятности попадания случайной величины в заданное множество на основе ее закона распределения.

Базисные методы решения основных задач

1. Применение формул алгебры событий.
2. Применение комбинаторики для нахождения вероятностей событий на основе классического определения.
3. Применение формул и правил алгебры вероятностей.
4. Применение операций математического анализа (дифференцирование, интегрирование, суммирование рядов) для преобразования законов распределения случайных величин и отыскания числовых характеристик.

Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

1. Классификация событий.
2. Сумма, произведение событий, их свойства; графическое представление.
3. Различные определения вероятности.
4. Зависимые и независимые, совместные и несовместные события.
5. Условная вероятность.
6. Формулы сложения и умножения вероятностей событий.
7. Схема Бернулли проведения испытаний. Биномиальная вероятность.
8. Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайные величины.

Функция распределения.

9. Закон распределения дискретной случайной величины. Полигон.
10. Дифференциальный и интегральный законы распределения непрерывной случайной величины. Связь между плотностью вероятности и функцией распределения.
11. Формулы для вероятности попадания случайной величины на отрезок на основе плотности вероятности или функции распределения.
12. Свойства плотности вероятности и функции распределения.
13. Законы распределения: биномиальный, Пуассона, равномерный, показательный, нормальный.
14. Функция Лапласа; ее производная, графики.
15. Числовые характеристики случайной величины: положения (математическое ожидание, медиана, мода, квантили), рассеяния (дисперсия, среднее квадратическое отклонение).
16. Двумерная случайная величина дискретного типа; закон ее распределения. Формулы согласованности (маргинальные законы распределения).
17. Двумерная случайная величина непрерывного типа; закон ее распределения. Плотность вероятности и функция распределения. Связь между ними.
18. Зависимость и независимость двух случайных величин.
19. Корреляционный момент (ковариация) и коэффициент корреляции двух случайных величин; его свойства.
20. Начальные и центральные моменты одномерной и двумерной случайных величин.
21. Понятие об n -мерой случайной величине.
22. Центральная предельная теорема для случая одинаково распределенных слагаемых.

Знания на уровне доказательств и выводов

1. Формула сложения вероятностей для двух любых событий.
2. Формула умножения вероятностей для любых событий.
3. Формула сложения вероятностей для взаимно независимых событий.

4. Формулы полной вероятности и Байеса.
5. Формула Бернулли для биномиальной вероятности.
6. Предельная теорема Пуассона.
7. Общие свойства математического ожидания и дисперсии (выборочно).
8. Математическое ожидание и дисперсия для законов распределения: биномиального, Пуассона, равномерного, показательного, нормального (выборочно).
9. Свойства коэффициента корреляции двух случайных величин (выборочно).
10. Неравенство Чебышева.
11. Предельная теорема Бернулли для относительной частоты события.

Умения, необходимые в решении задач

Студент должен уметь:

1. Выражать одни события через другие на основе алгебры событий.
2. Вычислять вероятности событий на основе классического определения.
3. Вычислять вероятности событий по заданным вероятностям на основе алгебры вероятностей.
4. Вычислять вероятности событий на основе закона распределения.
5. По плотности вероятности находить функцию распределения и наоборот для одномерного и двумерного законов.
6. Находить математическое ожидание и дисперсию одномерной случайной величины по ее закону распределения.

ЧАСТЬ 2 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

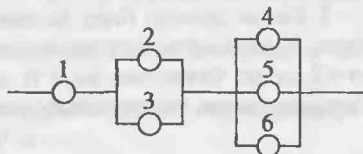
Образец 1 контрольного задания

1. Партия автомашин содержит 10 автомашин марки M и 10 автомашин марки N . Из этой партии случайным образом отбираются 4 автомашины для испытаний. Найти вероятность того, что для испытаний будут отобраны автомашины обеих марок поровну.

2. Вероятность безотказной работы каждого элемента в течение времени T равна p . Элементы работают независимо и включены в цепь по приведенной схеме. Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером i ($i=1, 2, 3, \dots$), а событие B – безотказную работу цепи. Требуется:

2.1. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i .

2.2. Найти вероятность события B .



2.3. Вычислить $P(B)$ при $p = 1/2$.

3. Ремонтно-наладочная бригада завода обслуживает станки трех типов – 1-го, 2-го, 3-го, которые находятся на заводе в соотношении 1:2:3. Вероятности обращения к бригаде за время T для станков каждого типа соответственно равны 0.5, 0.3, 0.2.

3.1. Найти среднюю (полную) вероятность того, что за время T для произвольно выбранного станка потребуется ремонтно-наладочная работа бригады.

3.2. Поступил вызов в ремонтно-наладочную бригаду (событие A). Какого типа станок вероятнее всего потребовал вызова бригады?

4. За период в 131 год с 1865 по 1995 г. в Санкт-Петербурге 10-го января среднесуточная температура от минус 10° до минус 5° (событие A) наблюдалась 35 раз, а в пределах от минус 6° до минус 5° (событие B) – 10 раз. Исходя из этих статистических данных примем $P(A) = 35/131 = 0.27$, $P(B) = 10/131 = 0.076$.

4.1. Найти вероятность того, что в следующие 5 лет событие A будет наблюдаться не менее трех раз.

4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона найти вероятность того, что хотя бы в одном году из предстоящих 50-ти последовательных лет событие B произойдет.

5. По статистическим данным хотя бы один пожар, требующий выезда пожарной команды, может возникнуть в трех обслуживаемых районах города с номерами 1, 2, 3 в течение времени T соответственно с вероятностями $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$. Пусть X – количество районов из числа трех обслуживаемых, в которых за время T случился хотя бы один пожар. Предполагается, что пожары возникают независимо. Требуется:

5.1. Составить ряд (таблицу) распределения случайной величины X .

5.2. Найти m_X .

5.3. Вычислить $P(X > m_X)$.

6. Дана плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ C/(x+1)^4, & x \geq 0. \end{cases}$$

Найти:

6.1. C . 6.2. $F(x)$. 6.3. m_X . 6.4. D_X . 6.5. σ_X . 6.6. $P(X > m_X)$. 6.7. Me . 6.8. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

7. Каким должно быть среднее квадратическое отклонение σ , чтобы толщина X металлического листа, выпускаемого заводом, отличалась от номинала $m = 2 \text{ мм}$ не более чем на 5 % номинала с вероятностью, не меньшей 0.99. Предполагается, что случайная величина X распределена нормально.

8. X, Y – индикаторы событий A, B , означающих положительные ответы соответственно на вопросы α, β социологической анкеты. По данным социологического опроса двумерная случайная величина (X, Y) имеет следующую таблицу распределения. Положительному ответу присвоен ранг 1, отрицательному – 0. $p_{11} = 0.3, p_{12} = 0.1, p_{21} = 0.2, p_{22} = 0.4$. Найти коэффициент корреляции ρ_{XY} .

$X \backslash Y$	0	1
0	p_{11}	p_{12}
1	p_{21}	p_{22}

9. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в области D . D – четверть круга: $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

9.1. Составить плотность вероятности $f_{XY}(x, y)$.

9.2. Найти $f_X(x), f_Y(y)$.

Вычислить:

9.3. m_X, m_Y . 9.4. σ_X, σ_Y . 9.5. ρ_{XY} .

9.6. Выяснить, зависимы или нет X, Y .

Образец 2 контрольного задания

1. В каждом из двоичных разрядов датчика случайных чисел с равной вероятностью могут оказаться «0» или «1». Найти вероятность того, что в случайно зарегистрированном числе, имеющем 8 двоичных разрядов, в половине разрядов будут нули.

2. Вероятность отказа каждого элемента в течение времени T равна p .

Элементы работают независимо и включены в цепь по приведенной схеме. Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером i ($i = 1, 2, 3, \dots$), а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Требуется:

2.1. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i .

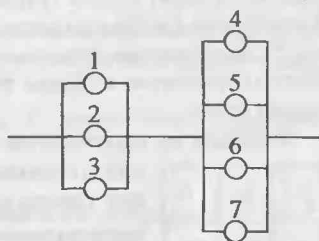
2.2. Найти вероятность события B .

2.3. Вычислить $P(B)$ при $p = 1/2$.

3. Заготовки для серийного производства поступают из 1-го и 2-го литейных цехов в соотношении 3:2 и могут быть как стандартными, так и нестандартными. Для 1-го цеха нестандартные заготовки составляют 5%, а для второго цеха – 10% от всей продукции. При изготовлении детали из стандартной заготовки вероятность брака равна 0.02, а из нестандартной – 0.25.

3.1. Какова вероятность изготовления бракованной детали из случайно выбранной заготовки?

3.2. Из какой случайно выбранной заготовки, стандартной или нестандартной, более вероятно изготовление бракованной детали?



4. Испытываются независимо n приборов. Вероятность выхода из строя любого прибора равна p . По условию партия приборов принимается, если выйдет из строя не более одного прибора. Найти вероятность приема партии.

4.1. Вычислить эту вероятность при $n = 50$ и $p = 0.02$ с помощью точной формулы Бернулли.

4.2. Вычислить ту же вероятность с помощью приближенной формулы Пуассона.

4.3. Указать абсолютную Δ и относительную δ погрешности приближенно-го вычисления.

5. Число X заявок на ремонт станков в цеху за время $t = 1$ час распределено по закону Пуассона с параметром $a = 2$. Найти вероятность того, что за первый час работы заявок будет меньше двух, а за второй час – не меньше двух.

6. Дана плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} Cx & \text{при } x \in [0, 1], \\ C & \text{при } x \in [1, 2], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Найти:

6.1. C . 6.2. $F(x)$. 6.3. m_X . 6.4. D_X . 6.5. σ_X . 6.6. $P(|X - m_X| < \sigma_X)$. 6.7. $x_{1/4}$ – нижнюю квартиль. 6.8. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

7. По количеству X содержащейся примеси продукт разделяется на две группы. Продукт первой группы содержит примесь в количестве, меньшем 1 %. В противном случае продукт относят ко второй группе. X – случайная величина, распределенная нормально с параметрами $m = 1.5\%$ и $\sigma = 0.5\%$. Найти, сколько процентов в общем объеме продукции составляют продукты первой и второй групп.

8. Детали на производстве сортируются на 4 группы по величине отклонений от номиналов двух существенных параметров. Отклонения ранжируются. Ранги X, Y отклонений могут принимать лишь значения 0 и 1. Распределение двумерной случайной величины (X, Y) задано таблицей. Здесь $p_{11} = 0.94$, $p_{12} = 0.01$, $p_{21} = 0.02$, $p_{22} = 0.03$. Найти коэффициент корреляции ρ_{XY} , называемый ранговым.

$X \backslash Y$	0	1
0	p_{11}	p_{12}
1	p_{21}	p_{22}

9. Дана плотность вероятности $f_{XY}(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) :

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} C(x^2 + y^2) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти:

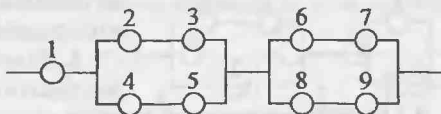
9.1. C . 9.2. $f_X(x)$, $f_Y(y)$. 9.3. m_X , m_Y . 9.4. σ_X , σ_Y . 9.5. ρ_{XY} .

9.6. Выяснить, зависимы или нет X, Y .

Вариант 1

1. На 10 карточках написаны все натуральные числа от 1 до 10. Из этих 10 карточек случайно выбираются две (без возвращения). Найти вероятность того, что на каждой из них окажутся числа, меньшие 7.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.



3. Детали изготавливаются на двух станках. На первом станке – 40 %, на втором – 60 %. Среди деталей, изготовленных на первом станке, брак составляет 2 %, на втором – 1.5 %. Случайным образом взята одна деталь для контроля. Найти вероятности событий:

3.1. Деталь бракованная.

3.2. Деталь изготовлена на первом станке, если она при проверке оказалась без брака.

4. Вероятность появления опечатки на странице книги, содержащей 100 страниц, равна 0.03. Найти вероятность того, что в книге имеется не более двух опечаток:

4.1. По точной биномиальной формуле.

4.2. По приближенной формуле Пуассона.

4.3. Вычислить абсолютную Δ и относительную δ погрешности приближенного вычисления.

5. Три одинаковых прибора совместно, но независимо, испытываются до тех пор, пока хотя бы один из них не даст отказ. Вероятность отказа одного прибора при одном испытании равна 0.1. Найти:

5.1. Закон распределения случайной величины X , равной числу испытаний.

5.2. $P(X < 3)$. 5.3. m_X .

6.
$$f(x) = \begin{cases} C/(1+x^2), & x \in [0, \sqrt{3}]; \\ 0, & x \notin [0, \sqrt{3}]. \end{cases}$$
 Условие задачи см. в образце 1, п. 6.

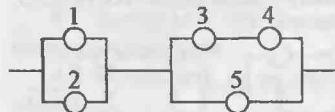
7. Автоматическая линия изготавливает игольчатые ролики с диаметром, отличным от номинального на величину X , подчиняющуюся нормальному закону с $m_X = -0.005 \text{ мм}$. Ролик считается стандартным, если $-0.01 \text{ мм} < X < 0 \text{ мм}$, в противном случае – бракованным. Каким должно быть σ_X , чтобы брак не превышал 1%?

8. $p_{11} = 0.8$, $p_{12} = 0.05$, $p_{21} = 0.1$, $p_{22} = 0.05$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

9. D – треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$. Условие задачи см. в образце 1, п. 9.

Вариант 2

1. От каждой из двух групп людей путем жеребьевки выбираются по одному представителю. В первой группе 5 мужчин и 4 женщины, во второй группе 3 мужчины и 7 женщин. Найти вероятность того, что представители будут разного пола.



2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.

3. Счетчик регистрирует частицы трех типов: α , β , γ . Вероятности появления этих частиц соответственно равны: 0,2, 0,5, 0,3. Частицы каждого из этих типов счетчик улавливает с вероятностями соответственно равными: 0,8, 0,2, 0,4. Найти вероятности событий:

3.1. A – появившуюся частицу счетчик зарегистрирует.

3.2. Зарегистрированная частица есть частица типа β .

4. Каждый прибор проходит два независимых испытания. Вероятность выхода из строя прибора при первом испытании равна p_1 , при втором – p_2 . Испытано независимо n приборов. Найти вероятность выхода из строя не более одного прибора.

4.1. Вычислить эту вероятность при $n=5$, $p_1=0,2$, $p_2=0,3$.

4.2. Вычислить ту же вероятность при $n=100$, $p_1=0,02$, $p_2=0,03$ по приближенной формуле Пуассона.

5. Три орудия залпом, но при независимой наводке, стреляют в цель до первого попадания хотя бы одним орудием. Вероятность попадания с одного выстрела для первого орудия равна 0,1, для второго – 0,08, для третьего – 0,06. Найти:

5.1. Вероятность того, что число X сделанных залпов не меньше трех.

5.2. m_X .

$$6. f(x) = \begin{cases} C/\sqrt{1-x^2}, & x \in [-1; 1]; \\ 0, & x \notin [-1; 1]. \end{cases} \quad \text{Условие задачи см. в образце 2, п. 6.}$$

7. По процентному содержанию фосфора в стали выделено две группы плавок. Первая группа содержит фосфор в пределах 0,025 % – 0,035 %, вторая – в количестве менее 0,025 %. Процентное содержание фосфора в стали есть случайная величина X , распределенная нормально с $m_X=0,03\%$ и $\sigma_X=0,01\%$. Найти процент плавок, попадающих в каждую из выделенных групп.

8. $p_{11}=0,92$, $p_{12}=0,02$, $p_{21}=0,04$, $p_{22}=0,02$. Условие задачи см. в образце 2, п. 8.

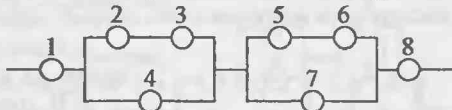
$$9. f_{XY}(x, y) = \begin{cases} C(x^3 + y^3) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad \text{Условие задачи см. в}$$

образце 2, п. 9.

Вариант 3

1. На 12 карточках написаны все натуральные числа от 1 до 12. Из этих 12 карточек одновременно случайным образом выбираются две. Найти вероятность того, что на одной из них написано число, большее 9, а на другой – меньшее 9.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.



3. Детали партии выпущены двумя заводами, причем детали, выпущенные первым заводом, составляют 40 % партии. Вероятность выпуска стандартной детали для первого завода равна 0.9, для второго – 0.95. Найти вероятности того, что случайным образом взятая деталь из партии:

3.1. Окажется стандартной. 3.2. Изготовлена первым заводом, если при проверке она оказалась нестандартной.

4. Устройство содержит n одинаковых деталей 1-го типа и столько же одинаковых деталей 2-го типа. По прошествии времени T каждая деталь 1-го типа выходит из строя с вероятностью p_1 , а каждая деталь 2-го типа – с вероятностью p_2 . Найти вероятность того, что через время T выйдет из строя не более одной детали 1-го типа и ни одной детали 2-го типа. Предполагается, что детали работают независимо друг от друга.

4.1. Вычислить эту вероятность с помощью точной формулы Бернулли при $n=100$, $p_1=0.02$, $p_2=0.01$. 4.2. Вычислить ту же вероятность с помощью приближенной формулы Пуассона. 4.3. Укажите абсолютную Δ и относительную δ погрешности вычисления.

5. Два орудия залпом, но при независимой наводке, стреляют в цель до первого попадания хотя бы одним орудием. Вероятность попадания в цель первым орудием при одном выстреле равна 0.2, вторым – 0.3. Найти:

5.1. Закон распределения числа X сделанных залпов. 5.2. $P(X > 2)$. 5.3. m_X .

6.
$$f(x) = \begin{cases} C/x, & x \in [1/e, e]; \\ 0, & x \notin [1/e, e]. \end{cases}$$
 Условие задачи см. в образце 1, п. 6.

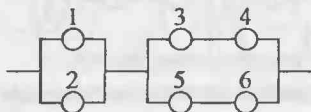
7. Ошибка X измерительного прибора распределена нормально. Систематической ошибки прибор не имеет ($m_X = 0$). Каким должно быть среднее квадратическое отклонение σ_X , чтобы с вероятностью не меньшей 0.9 ошибка измерения не превышала 20 микрон ($\mu\text{м}$) по модулю?

8. $p_{11}=0.03$, $p_{21}=0.05$, $p_{12}=0.02$, $p_{22}=0.9$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

9. D – четверть эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$; $x \geq 0$, $y \geq 0$. Условие задачи см. в образце 1, п. 9.

Вариант 4

1. Каждый билет из 25 экзаменационных билетов содержит по 2 вопроса, причем вопросы в билетах не повторяются. Студент подготовил 45 вопросов. Найти вероятность того, что в билете, доставшемся студенту, он знает только один из двух вопросов (либо первый, либо второй).



2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.

3. В пункт связи поступают сигналы типов α, β, γ соответственно с вероятностями 0.1, 0.4, 0.5. Вследствие помех они могут быть зарегистрированы лишь с вероятностями 0.90, 0.95, 0.92 соответственно. 3.1. Найти вероятность регистрации поступившего сигнала (событие A). 3.2. Если сигнал зарегистрирован, то какова при этом вероятность, что это сигнал типа α ?

4. Вероятность брака детали равна p . После изготовления деталь осматривается контролером, который обнаруживает брак с вероятностью p_1 . Найти вероятность того, что из n проверенных деталей забракованных окажется не более одной. 4.1. Вычислить эту вероятность при $n=100$, $p=0.05$, $p_1=0.95$ по точной формуле Бернулли. 4.2. Вычислить ту же вероятность по приближенной формуле Пуассона. 4.3. Укажите абсолютную Δ и относительную δ погрешности вычисления.

5. Качество отливок контролируется двумя контролерами. Первый оценивает трещины, второй – усадочные раковины, причем предполагается, что вторые образуются независимо от первых. Вероятность брака от трещин равна 0.02, а от усадочных раковин – 0.05. Найти математическое ожидание числа X осмотренных отливок до обнаружения первой бракованной отливки, а также математическое ожидание числа Y бракованных отливок, если всего их проверено $n=100$ штук.

$$6. f(x) = \begin{cases} C(1 - 0.5|x|), & x \in [-2, 2]; \\ 0, & x \notin [-2, 2]. \end{cases} \quad \text{Условие задачи см. в образце 2, п. 6.}$$

7. Два самолёта, заходя вдоль длинного моста шириной 30 м, независимо друг от друга сбрасывают на него по одной бомбе, причем прицеливание происходит по продольной средней линии моста. Считая поперечные отклонения бомб от этой средней линии для обоих самолетов нормальной случайной величиной X с $m_X = 0$ и $\sigma_X = 25$ м, найти вероятность разрушения моста, если для этого достаточно одного попадания.

8. $p_{11} = 0.96$, $p_{12} = 0.01$, $p_{21} = 0.02$, $p_{22} = 0.01$. Условие задачи см. в образце 2, п. 8.

$$9. f_{XY}(x, y) = \begin{cases} Cxy & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad \text{Условие задачи см. в образце}$$

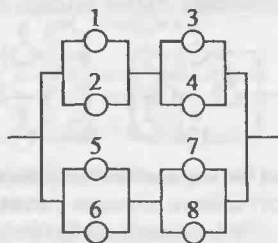
2, п. 9.

Вариант 5

1. На книжной полке случайным образом расставлены 4 учебника и 3 задачника. Найти вероятность того, что все учебники окажутся рядом.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.

3. Прибор содержит два независимо работающих блока. Исправность каждого из них необходима для работы прибора. Вероятности отказа блоков за время T : для первого – $p_1 = 0.1$, для второго – $p_2 = 0.2$. Прибор испытывался в течение времени T и вышел из строя. Найти:



3.1. Вероятность $P(A)$ отказа прибора за время

T . 3.2. Вероятность того, что при отказе прибора за время T отказал только первый блок (применяя формулу Байеса).

4. По каналу связи посылаются n сообщений. Помехами каждое сообщение может быть искажено с вероятностью p .

4.1. Каким должно быть n , чтобы хотя бы одно сообщение дошло не искаженным до адресата с вероятностью не меньшей 0.99 при $p = 0.3$? 4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона найти вероятность искажения не более одного сообщения при $n = 100$, $p = 0.02$.

5. Число неисправностей сложного устройства, обнаруживаемых при профилактическом осмотре, распределено по закону Пуассона с параметром $a = 2$. Если неисправностей нет, то устройство запускается в работу немедленно. Если есть одна неисправность, то в течение времени T она устраняется с вероятностью 0.9. Если неисправности более одной, то устройство ставится на ремонт на время, большее T , до устранения всех неисправностей. Найти вероятность того, что после профилактического осмотра устройство простоят без работы время, большее T .

$$6. f(x) = \begin{cases} C \cos x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \\ 0, & x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases} \quad \text{Условие задачи см. в образце 1, п. 6.}$$

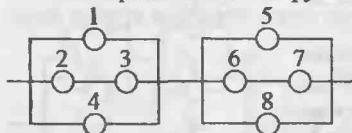
7. Параметр X детали распределен нормально с $m_X = 2$, равным номиналу. Каким должно быть σ_X , чтобы с вероятностью 0.9 отклонение X от номинала по модулю не превышало 1 % номинала?

8. $p_{11} = 0.2$, $p_{12} = p_{21} = 0.1$, $p_{22} = 0.6$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

9. D – четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$; $x \geq 0$, $y \geq 0$. Условие задачи см. в образце 1, п. 9.

Вариант 6

1. На книжной полке случайным образом расставлены 10 томов одного справочного издания. Найти вероятность того, что все четные тома окажутся стоящими рядом в одной группе, а все нечетные – рядом в другой группе.



2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.

3. Партия резисторов изготовлена двумя заводами, причем продукции первого завода в 2 раза больше, чем второго. Вероятность брака на первом заводе равна 0.04, на втором – 0.06. Найти вероятности того, что случайным образом взятая деталь партии:

3.1. Оказалась бракованной. 3.2. Изготовлена первым заводом, если при проверке она оказалась бракованной.

4. При однократном забросе спиннинга рыба попадается (событие A) с вероятностью $P(A)$.

4.1. Сколько требуется сделать забросов, чтобы с вероятностью не меньшей 0.8 поймать хотя бы одну рыбу при $P(A) = 0.1$? 4.2. С помощью интегральной приближенной формулы Муавра – Лапласа найти вероятность того, что событие A произойдет не более пяти раз при числе опытов $n = 100$ и $P(A) = 0.02$.

5. Цель поражается при попадании одного осколка разорвавшегося снаряда с вероятностью 0.5, при попадании двух – с вероятностью 0.8, при попадании трех и более – с вероятностью 1. Количество осколков, попавших в цель, – случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром 2. Найти вероятность поражения цели.

$$6. f(x) = \begin{cases} C(2x - x^2), & x \in [0, 1]; \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases} \quad \text{Условие задачи см. в образце 2, п. 6.}$$

Указание. В 6.7. ограничиться проверкой, что $x_{1/4} = 0.442$.

7. На станке изготавливаются болты с номинальным значением диаметра 26 мм. Отклонение X диаметра от номинала есть случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием $m_X = -0.01$ мм и средним квадратическим отклонением $\sigma_X = 0.002$ мм. Болт считается годным, если его диаметр попадает в промежуток $[25.985 \text{ мм}, 25.995 \text{ мм}]$ (иначе говоря, выполняются неравенства $-0.015 \text{ мм} \leq X \leq -0.005 \text{ мм}$). Найти процент брака.

8. $p_{11} = 0.8$, $p_{21} = 0.02$, $p_{12} = 0.1$, $p_{22} = 0.08$. Условие задачи см. в образце 2, п. 8.

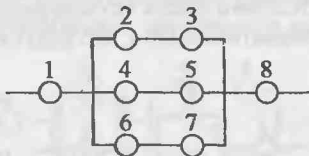
$$9. f_{XY}(x, y) = \begin{cases} Cx^2 y^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad \text{Условие задачи см. в образце 2, п. 9.}$$

Вариант 7

1. 10 гостей путем жеребьевки занимают места в ряду из 10 стульев. Найти вероятность того, что два конкретных лица A и B не окажутся рядом.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.

3. Сообщение состоит из сигналов «1» и «0». Свойства помех таковы, что искажаются в среднем 5 % сигналов «0» и 3 % сигналов «1». При искажении вместо сигнала «0» принимается сигнал «1» и наоборот. Известно, что среди передаваемых сигналов «0» и «1» встречаются в отношении 3:2. Найти вероятности того, что:



3.1. Отправленный сигнал будет принят как «1». 3.2. Отправлен сигнал «0», если принят сигнал «1».

4. В партии $n = 100$ деталей. Вероятность брака детали равна $p = 0.02$.

4.1. С помощью точной формулы Бернулли найти вероятность того, что в партии не более двух бракованных деталей.

4.2. Найти ту же вероятность с помощью приближенной формулы Пуассона.

4.3. Вычислить абсолютную Δ и относительную δ погрешности приближенного вычисления.

5. Число полупроводниковых элементов прибора, отказавших за время T , распределено по закону Пуассона. При этом за время T в среднем отказывает 1 элемент. Часть элементов зарезервирована, поэтому отказ элемента не влечет за собой с необходимостью отказ прибора. Установлено, что при отказе одного элемента прибор отказывает с вероятностью 0.05, двух – с вероятностью 0.1, трех и более – с вероятностью 0.5. Найти вероятность отказа прибора за время T .

$$6. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ Cxe^{-x}, & x \geq 0. \end{cases} \text{ Условие задачи см. в образце 1, п. 6.}$$

Указание. В 6.7. ограничиться проверкой, что $Me = 1.68$.

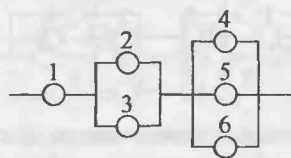
7. Ошибка X измерительного прибора распределена нормально. Систематической ошибки прибор не имеет ($m_X = 0$). Среднее квадратическое отклонение $\sigma_X = 12 \text{ мкм}$ (микрометров). Найти вероятность того, что ошибка измерения по модулю не превысит 20 мкм.

8. $p_{11} = 0.2$, $p_{12} = 0.2$, $p_{21} = 0.1$, $p_{22} = 0.5$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

9. D – треугольник с вершинами $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$. Условие задачи см. в образце 1, п. 9.

Вариант 8

1. Автомобили и карточки пронумерованы от 1 до 10. Для проведения испытаний из партии 10 автомобилей выбираются 3 путем случайного последовательного выема без возвращения трех карточек из колоды в 10 карточек. Найти вероятность того, что будут выбраны четные номера.



2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.

3. Количество грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит автозаправочная станция, относится к количеству легковых, проезжающих по тому же шоссе, как 5:2. Вероятность того, что проезжающая грузовая машина будет заправляться горючим, равна 0.02. Для легковой машины эта вероятность равна 0.05. Найти вероятности событий:

3.1. Случайным образом выбранная проезжающая автомашина будет заправляться горючим (событие A).

3.2. Подъехавшая на заправку автомашина – грузовая (событие H_1).

4. Вероятность брака детали в партии из n деталей равна p .

4.1. Каким должно быть число m проверенных деталей, чтобы попалась хотя бы одна бракованная деталь с вероятностью не меньшей 0.9, при $p = 0.05$?

4.2. По приближенной формуле Пуассона найти вероятность p_1 того, что в партии не более двух бракованных деталей при $n = 200$, $p = 0.01$.

5. Число импульсов помехи за время t распределено по закону Пуассона с параметром 0.5. Информация, передаваемая по радиоканалу в течение времени t , принимается правильно при наличии хотя бы одного импульса помехи с вероятностью 0.5 и с вероятностью 1 при отсутствии импульсов. Найти вероятность того, что переданная за время t информация будет правильно принята.

$$6. f(x) = \begin{cases} Cx(1-x), & x \in [0, 1]; \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases} \quad \text{Условие задачи см. в образце 2, п. 6.}$$

Указание. В 6.7. ограничиться проверкой, что $x_{1,4} = 0.326$.

7. Параметр X детали распределен нормально с $m_X = 2$, равным номиналу, и $\sigma_X = 0.012$. Найти вероятность того, что отклонение X от номинала по модулю не превысит 1 % номинала.

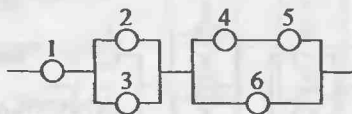
8. $p_{11} = 0.92$, $p_{12} = 0.01$, $p_{21} = 0.02$, $p_{22} = 0.05$. Условие задачи см. в образце 2, п. 8.

$$9. f_{XY}(x, y) = \begin{cases} C(x+y)(1-x)(1-y) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad \text{Условие задачи см. в образце 2, п. 9.}$$

Вариант 9

1. Каждый из пяти студентов, пользующихся транспортом, с равной вероятностью может выбрать любой из видов транспорта – автобус, трамвай, троллейбус. Найти вероятность того, что трое из них воспользуются автобусом, а остальные поедут в трамвае.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.



3. Произведено два выстрела по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.7. Цель поражается с одного попадания с вероятностью 0.5, при двух попаданиях – с вероятностью 0.9.

3.1. Найти вероятность поражения цели при двух выстрелах.

3.2. Найти вероятность того, что оба снаряда попали в цель, если оказалось, что цель поражена.

4. На каждом станке за смену выпускается n деталей. Вероятность брака для первого станка равна p_1 , для второго – p_2 . Найти вероятность p того, что в сменной продукции обоих станков не более одной бракованной детали.

4.1. Вычислить эту вероятность при $n = 8$, $p_1 = 0.05$, $p_2 = 0.03$.

4.2. Вычислить ту же вероятность с помощью приближенной формулы Пуассона при $n = 100$, $p_1 = 0.005$, $p_2 = 0.003$.

5. Изделие проходит контроль по двум параметрам. Вероятность того, что оно является стандартным по первому параметру, равна $p_1 = 0.9$, по второму – $p_2 = 0.95$. Проверено $n = 100$ деталей. Найти:

5.1. Закон распределения X .

5.2. Математическое ожидание m_X числа X нестандартных деталей. (Деталь считается нестандартной, если хотя бы один параметр не удовлетворяет стандарту.)

$$6. f(x) = \begin{cases} 0.5, & x \in [0, 1]; \\ C, & x \in [1, 4]; \\ 0, & x \notin [0, 4]. \end{cases} \quad \text{Условие задачи см. в образце 1, п. 6.}$$

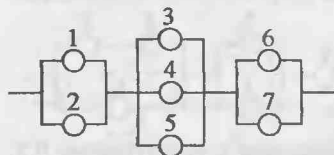
7. Предполагается, что предел текучести некоторого сорта стали разных плавок есть случайная величина X , распределенная нормально с математическим ожиданием $m_X = 32 \text{ кГ/мм}^2$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_X = 1.5 \text{ кГ/мм}^2$. Найти процент плавок, для которых предел текучести отличается от номинала m_X по модулю не более, чем на 5 %, от 5 % до 10 %, свыше 10 %.

8. $p_{11} = 0.2$, $p_{12} = 0.2$, $p_{21} = 0.1$, $p_{22} = 0.5$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

9. D – треугольник с вершинами $A(-1, 0)$, $O(0, 0)$, $B(0, -1)$. Условие задачи см. в образце 1, п. 9.

Вариант 10

1. Билеты на стадион разделены на 7 категорий – по секторам. Найти вероятность того, что 4 конкретных покупателя приобретут билеты разных категорий, если считать, что приобретение билета в любой сектор каждым покупателем равновероятно.



2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.

3. На любой из позиций импульсного кода могут быть с равной вероятностью переданы «0» (отсутствие импульса) и «1» (импульс). Помехами «1» преобразуется в «0» с вероятностью 0.02 и «0» в «1» с вероятностью 0.04.

3.1. Найти вероятность приема «0» на конкретной позиции кода.

3.2. Найти вероятность того, что был передан «0», если принят «0».

4. В первой партии – n_1 деталей. Вероятность брака в этой партии – p_1 . Во второй партии – n_2 деталей, вероятность брака – p_2 . Найти вероятность того, что в обеих партиях нет бракованных деталей.

4.1. Вычислить эту вероятность по точной формуле при $n_1 = 100$, $n_2 = 200$, $p_1 = 0.01$, $p_2 = 0.005$. 4.2. Вычислить ту же вероятность с помощью приближенной формулы Пуассона. 4.3. Вычислить абсолютную Δ и относительную δ погрешности приближенного вычисления.

5. Готовые детали проверяются последовательно двумя контролерами. Вероятность брака равна p_0 . Первый контролер обнаруживает бракованную деталь с вероятностью p_1 , второй – с вероятностью p_2 . Проверено n деталей.

5.1. Найти закон распределения числа X деталей, забракованных контролерами. 5.2. Найти математическое ожидание X . 5.3. Вычислить m_X при $n = 50$, $p_0 = 0.1$, $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.8$.

$$6. f(x) = \begin{cases} 2x/3, & x \in [0, 1]; \\ C(3-x), & x \in [1, 3]; \\ 0, & x \notin [0, 3]. \end{cases} \text{ Условие задачи см. в образце 2, п. 6.}$$

7. Номинальное значение толщины X установочного кольца, вытачиваемого на токарном автомате, равно $m_X = 10$ мм. Среднее квадратическое отклонение равно 0.15 мм. Предполагается, что случайная величина X распределена нормально. Найти вероятность того, что изготовленное кольцо будет иметь толщину, отличающуюся от номинала m_X более, чем на 3 % номинала.

8. $p_{11} = 0.9$, $p_{12} = 0.03$, $p_{21} = 0.02$, $p_{22} = 0.05$. Условие задачи см. в образце 2, п. 8.

$$9. f_{XY}(x, y) = \begin{cases} Cxy & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \text{ Условие задачи см. в образце 2, п. 9.}$$

1. В десятиэтажном доме лифт может останавливаться на девяти этажах, начиная со второго. В лифт вошли 3 пассажира, каждый из которых с одинаковой вероятностью может выйти на любом этаже. Найти вероятность того, что пассажиры выйдут на разных этажах.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.

3. В цепь включены элементы двух типов. Элементы 1-го типа составляют 30 % от общего числа, второго – 70 %. При перегрузке элементы первого типа выходят из строя с вероятностью 0.08, второго – с вероятностью 0.04 каждый.

3.1. Найти вероятность того, что при перегрузке наблюдаемый элемент выйдет из строя (событие A).

3.2. В результате перегрузки один элемент вышел из строя. К какому типу он вероятнее всего принадлежит?

4. Вероятность брака детали равна p_1 . После изготовления деталь проверяется контролером, который может пропустить бракованную деталь в готовую продукцию с вероятностью p_2 . Изготовлено n деталей. Найти вероятность того, что в партии готовой продукции не более одной бракованной детали.

4.1. Вычислить эту вероятность по точной формуле при $n = 1000$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.01$.

4.2. Вычислить ту же вероятность по приближенной формуле Пуассона.

4.3. Вычислить абсолютную Δ и относительную δ погрешности приближенного вычисления.

5. Два орудия залпом стреляют по цели до первого попадания хотя бы одним орудием. Вероятность попадания каждого равна 0.1.

5.1. Записать закон распределения числа X залпов.

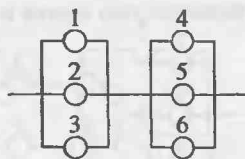
5.2. Вычислить математическое ожидание X .

6.
$$f(x) = \begin{cases} C\sqrt[3]{1-x}, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$
 Условие задачи см. в образце 1, п. 6.

7. Величина X сопротивления резистора подчиняется нормальному закону с центром $m_X = 8$ килоом, равным номиналу. Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma_X = 150$ Ом. Определить вероятность, что у случайно взятого резистора партии сопротивление будет отличаться от номинала менее чем на 5 % по модулю.

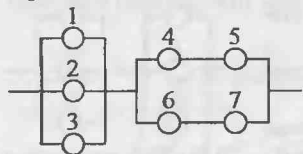
8. $p_{11} = 0.2$, $p_{12} = 0.2$, $p_{21} = 0.1$, $p_{22} = 0.5$. Условие задачи см. в образце 1.

9. D – полукруг, $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$. Условие задачи см. в образце 1, п. 9.



Вариант 12

1. В семизэтажном доме лифт может останавливаться на шести этажах, начиная со второго. В лифт вошли 4 пассажира, каждый из которых с одинаковой вероятностью может выйти на любом этаже. Какова вероятность того, что пассажиры выйдут парами на разных этажах?



2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.

3. В водоеме обитают три вида хищных рыб: судаки, щуки и окуни в соотношении 1:2:4. Для поимки хищной рыбы на некоторое время выставляется живцовая снасть. Оказавшийся в поле зрения хищника живец бывает им схвачен с вероятностью 0.4 – для судака, 0.3 – для щуки, 0.2 – для окуня.

3.1. Какова вероятность захвата живца хищником за время ловли (событие A), если вероятность обнаружения живца судаком, щукой или окунем пропорциональна их численности?

3.2. К какому виду вероятнее всего принадлежит рыба, схватившая живца?

4. Вероятность брака изделия равна 0.02. Контролер-автомат обнаруживает брак с вероятностью 0.95. Найти вероятность того, что из n изделий, признанных контролером-автоматом годными, бракованных не более одного.

4.1. Вычислить эту вероятность при $n = 500$.

4.2. Вычислить ту же вероятность в помощь приближенной формулы Пуассона.

4.3. Вычислить абсолютную Δ и относительную δ погрешности приближенного вычисления.

5. Каждая из 100 деталей подвергается двум испытаниям. Вероятность выхода из строя каждой детали при первом испытании равна 0.1, при втором – 0.2. Найти закон распределения и математическое ожидание числа X вышедших из строя деталей.

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 1]; \\ C/(x+1)^2, & x \in [0, 1]. \end{cases}$ Условие задачи см. в образце 2, п. 6.

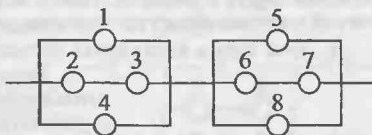
7. Ошибка X измерительного прибора распределена нормально. Систематическая ошибка прибора отсутствует ($m_X = 0$). Средняя квадратическая ошибка равна $\sigma_X = 8 \text{ мкм}$ (микрометров). Найти вероятность того, что при очередном измерении ошибка превысит по модулю 8 мкм .

8. $p_{11} = 0.4$, $p_{12} = 0.2$, $p_{21} = 0.1$, $p_{22} = 0.3$. Условие задачи см. в образце 2, п. 8.

9. $f_{XY}(x, y) = \begin{cases} C(1+xy) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$ Условие задачи см. в образце 2, п. 9.

1. Имеется серия из 20 образцов данного вида продукции. Из них 10 образцов первого сорта, 8 – второго и 2 нестандартных. Найти вероятность того, что среди пяти образцов, отобранных случайным образом из серии, 3 окажутся первого сорта и 2 – второго.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.



3. Вероятность брака изготовленной детали (событие H_1) равна p_1 . Контролер-автомат обнаруживает этот брак с вероятностью p_2 , но и исправную деталь ошибочно бракует с вероятностью p_3 .

3.1. Найти вероятность того, что деталь будет забракована (событие A).

3.2. Найти вероятность $P(H_2/A)$ того, что забракованная деталь исправна ($H_2 = \bar{H}_1$).

3.3. Вычислить эти вероятности при $p_1 = 0.01$, $p_2 = 0.95$, $p_3 = 0.005$.

4.1. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.3. При одном попадании цель не подавляется. При двух – подавляется с вероятностью 0.5. При трех и более попаданиях – подавляется с вероятностью 1. По цели произведено 4 выстрела. Найти вероятность подавления цели.

4.2. Вероятность смертельного исхода в автомобильной аварии в рассматриваемом регионе равна $p = 0.005$. С помощью приближенной формулы Пуассона найти вероятность того, что в течение месяца смертельных исходов будет более одного, принимая среднее число аварий в месяц равным 300.

5. Испытываются 3 прибора на надежность. Вероятности выхода из строя каждого прибора соответственно равны 0.1, 0.2, 0.3. Пусть X – число вышедших из строя приборов. Составить таблицу распределения случайной величины X . Найти:

5.1. m_X . 5.2. D_X . 5.3. $P(X > m_X)$.

6. $f(x) = \begin{cases} 1 - Cx, & x \in [0, 2]; \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$ Условие задачи см. в образце 1, п. 6.

7. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку $m_X = 1$ В (вольт) и среднюю квадратическую ошибку $\sigma_X = 3$ В. Найти вероятность того, что ошибка измерения X по абсолютной величине превзойдет 5 В (ошибка распределена нормально).

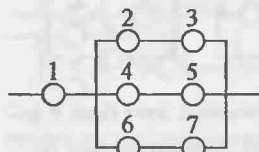
7.1. Как изменится эта вероятность, если ликвидировать систематическую ошибку прибора?

8. $p_{11} = 0.5$, $p_{12} = 0.1$, $p_{21} = 0.2$, $p_{22} = 0.2$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

9. D – круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Условие задачи см. в образце 1, п. 9.

1. На погрузочной площадке 15 одинаковых ящиков с изделиями двух типов. Известно, что в 8-ми ящиках находятся изделия первого типа. Случайным образом берут 5 ящиков. Найти вероятность того, что только в двух ящиках из взятой пятерки окажутся изделия первого типа.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.



3. Вероятность брака детали равна 0.05. После изготовления деталь проходит автоматический контроль, в результате которого брак обнаруживается с вероятностью 0.95. Кроме того, при автоматическом контроле исправная деталь может быть забракована с вероятностью 0.01.

3.1. Найти вероятность того, что очередная изготовленная деталь будет забракована. 3.2. Найти вероятность того, что забракованная деталь исправна.

4.1. Каждая выпущенная торпеда попадает в корабль в данной ситуации с вероятностью 0.6. Вероятность потопления корабля при одном попадании торпеды равна 0.5, при двух – 0.8, при трех и более – 1. По кораблю выпущено 4 торпеды. Найти вероятность его потопления.

4.2. В книге 200 страниц. Опечатка на каждой странице встречается с вероятностью 0.01. Найти с помощью приближенной формулы Пуассона вероятность того, что в книге более одной опечатки.

5. Независимые испытания проводятся до наступления второго успеха. Вероятность успеха в каждом испытании равна p . Пусть случайная величина X – общее число проведенных испытаний. Найти вероятность $P(X = k)$. Вычислите ее при $k = 4$, $p = 0.6$.

Указание. В k испытаниях было 2 успеха и $k - 2$ неудач, причем второй успех был в k -м испытании, а первый – в одном из $k - 1$ предыдущих. Примените теоремы сложения и умножения вероятностей.

$$6. f(x) = \begin{cases} (x+1)/2, & x \in [-1, 0]; \\ (C-x)/(2C), & x \in [0, C]; \\ 0, & x \notin [-1, C]. \end{cases} \text{ Условие задачи см. в образце 2, п. 6.}$$

7. Номинальное значение контролируемого линейного размера детали (длины цилиндрического болта) $m_X = 20$ мм. Среднее квадратическое отклонение равно 0.05 мм. Найти процент деталей, для которых контролируемый размер X отклоняется от номинала по модулю не более чем на 0.5 %, от 0.5 % до 1 % и свыше 1 %. Предполагается, что случайная величина X распределена нормально.

8. $p_{11} = 0.2$, $p_{12} = 0.2$, $p_{21} = 0.1$, $p_{22} = 0.5$. Условие задачи см. в образце 2, п. 8.

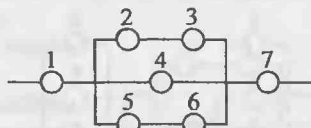
$$9. f_{XY}(x, y) = \begin{cases} C(x-y)^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \text{ Условие задачи см. в образце 2, п. 9.}$$

разце 2, п. 9.

1. В каждом из 5 рядов сидений автобуса имеется по 4 места. Автобус заполнен весь случайным образом. Найти вероятность того, что 2 конкретных пассажира окажутся в одном из рядов.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.

3. Установлено, что в данном русском тексте после гласной буквы стоит гласная с вероятностью 0.2, а после согласной – согласная с вероятностью 0.3. (Буква “й” считается гласной, а буквы “ь” и “ъ” в расчет не принимаются).



3.1. Найти вероятность того, что в этом тексте третья буква является согласной, если первая – согласной (событие A).

3.2. С помощью формулы Байеса найти вероятность того, что вторая буква является гласной, если первая и третья – согласными.

Указание. Рассмотрите две гипотезы: H_1 – средняя буква – гласная, H_2 – средняя буква – согласная при общем условии, что первая буква – согласная.

4. По радиоканалу передано $n = 200$ сообщений. Вероятность искажения каждого сообщения помехами равна 0.005.

4.1. С помощью точной формулы Бернулли вычислить вероятность того, что будет искажено более двух сообщений.

4.2. Вычислить ту же вероятность с помощью приближенной формулы Пуассона.

4.3. Вычислить абсолютную Δ и относительную δ погрешности вычислений.

5. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.6, при втором – 0.7, при третьем – 0.8. Стрельба по цели ведется до получения одного попадания, но производится не более трех выстрелов. Найти ряд распределения числа X выстрелов, m_X , D_X , σ_X .

$$6. f(x) = \begin{cases} C(1 - |x|), & x \in [-1, 1]; \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases} \text{ Условие задачи см. в образце 1, п. 6.}$$

Указание. В п. 6.7 вместо $Me = 0$ найти нижнюю квантиль $x_{1/4}$.

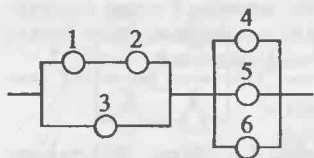
7. Используя таблицу для нормального распределения, выразить интерквартильную широту $Q = x_{3/4} - x_{1/4}$ через σ . Здесь $x_{1/4}$ и $x_{3/4}$ – соответственно нижняя и верхняя квантили нормального распределения $N(m, \sigma)$.

8. $p_{11} = 0.4$, $p_{12} = 0.2$, $p_{21} = 0.3$, $p_{22} = 0.1$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

9. D – полукруг $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

Вариант 16

1. Экзамены в учебной группе принимают 2 экзаменатора. Каждый из экзаменаторов должен проэкзаменовать по 12 студентов. Найти вероятность того, что при случайном распределении студентов два конкретных студента попадут к одному экзаменатору.



2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.

3. Установлено, что в данном русском тексте после гласной буквы стоит гласная с вероятностью 0.15, а после согласной – согласная с вероятностью 0.3. (Буква «й» считается гласной, а буквы «ь», «ъ» в расчет не принимаются.)

3.1. Найти вероятность того, что в этом тексте третья буква является гласной, если первая – тоже гласной (событие A).

3.2. С помощью формулы Байеса найти вероятность того, что вторая буква была согласной, если первая и третья являются гласными.

Указание. Рассмотрите две гипотезы: H_1 – средняя буква – гласная, H_2 – средняя буква – согласная при общем условии, что первая буква – гласная.

4.1. По каналу связи передана информация, закодированная пятью знаками. Вероятность искажения каждого знака помехами равна 0.2. При искажении одного знака информация восстанавливается полностью, при искажении двух знаков – с вероятностью 0.5, при искажении трех и более знаков – не восстанавливается. Помехи действуют на каждый знак независимо. Найти вероятность того, что переданная информация будет принята правильно или восстановлена.

4.2. Среди пожаров города очень сильные происходят с вероятностью 0.01. С помощью приближенной формулы Пуассона найти вероятность того, что в очередных $n = 100$ пожарах очень сильных будет более одного.

5. В партии из 5 изделий 2 нестандартных. Случайным образом отобраны 3 изделия. Пусть X – число стандартных изделий в отобранной тройке. Найти закон распределения случайной величины X , m_X , σ_X , $P(X < m_X)$.

$$6. f(x) = \begin{cases} C, & x \in [0, 1]; \\ C(2-x), & x \in [1, 2]; \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases} \text{ Условие задачи см. в образце 2, п. 6.}$$

7. Для нормального распределения $N(m, \sigma)$ выразить через σ число E , называемое средним отклонением, из условия его определения: $P(|X - m| < E) = 0.5$.

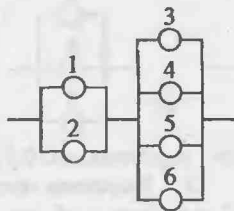
8. $p_{11} = 0.45$, $p_{12} = 0.3$, $p_{21} = 0.1$, $p_{22} = 0.15$. Условие задачи см. в образце 2, п. 8.

$$9. f_{XY}(x, y) = \begin{cases} C(x^4 + y^4) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \text{ Условие задачи см. в образце 2, п. 9.}$$

1. Из группы, состоящей из 10 юношей и 15 девушек, случайным образом выбираются 3 представителя. Найти вероятность того, что среди выбранных будут двое юношей и одна девушка.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.

3. Противник может применить в налете самолеты одного из двух типов α и β с вероятностями соответственно 0.7 и 0.3. Самолет типа α сбивается ракетой с вероятностью 0.7, типа β – с вероятностью 0.9. По появившемуся самолету выпущены одновременно две раке-



ты.

3.1. Найти вероятность того, что он будет сбит (событие A).

3.2. Найти вероятность того, что сбитый самолет был типа α .

4. Испытываются n одинаковых приборов. Вероятность выхода из строя каждого прибора равна p . Найти вероятность $P(A)$ выхода из строя не более трех приборов.

4.1. Вычислить эту вероятность при $n = 10$, $p = 0.1$.

4.2. Вычислить эту вероятность при $n = 100$, $p = 0.005$, применив приближенную формулу Пуассона.

5. Радиостанция через определенные промежутки времени посылает позывные сигналы (не более четырех) до установления двусторонней связи. Вероятность получения ответа на позывной сигнал равна 0.3. Пусть X – число посланных позывных. Составить таблицу распределения X , найти m_X и $P(X < m_X)$.

$$6. f(x) = \begin{cases} C\left(|x| + \frac{1}{4}\right), & x \in [-1, 1]; \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases} \text{ Условие задачи см. в образце 1, п. 6.}$$

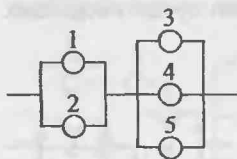
7. Используя таблицу, выразить через σ расстояние между квантилями (децилями) $x_{0.4}$ и $x_{0.6}$ для нормального распределения $N(m, \sigma)$.

8. $p_{11} = 0.1$, $p_{12} = 0.2$, $p_{21} = 0.1$, $p_{22} = 0.6$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

9. D – треугольник с вершинами $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 0)$. Условие задачи см. в образце 1, п. 9.

Вариант 18

1. В лотерее 100 билетов. Из них 15 выигрышных. Куплено 3 билета. Найти вероятность точно одного выигрыша.
2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.
3. Противник может применить ракеты одного из двух типов α и β с вероятностью соответственно 0.6 и 0.4 при каждом запуске. Каждая ракета типа α сбивается с вероятностью 0.8, типа β – с вероятностью 0.9.



3.1. Запущены последовательно две ракеты. Найти вероятность того, что обе будут сбиты (событие A).

3.2. Обе запущенные ракеты сбиты. Найти вероятность того, что обе были типа α .

4. Блок электронного устройства содержит n одинаковых элементов. Вероятность отказа каждого элемента в течение времени T равна p . Элементы работают независимо. Найти вероятность $P(A)$ того, что за время T откажет не менее двух элементов.

4.1. Вычислить $P(A)$ при $n = 16$, $p = 0.1$.

4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона вычислить $P(A)$ при $n = 100$, $p = 0.002$.

5. Орудие стреляет в цель до двух попаданий, но делает всего не более трех выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.8. Построить ряд распределения. Найти m_X , σ_X числа X сделанных выстрелов. Выстрелы производятся независимо друг от друга.

6. $f(x) = \begin{cases} C \ln x, & x \in [1, e]; \\ 0, & x \notin [1, e]. \end{cases}$ Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 6.

Указание. В п. 6.7 ограничиться проверкой, что $x_{1/4} = 1.786$.

7. Используя таблицу, выразить через σ расстояние между квантилями (децилями) $x_{0.1}$ и $x_{0.9}$ для нормального распределения $N(m, \sigma)$.

8. $p_{11} = 0.2$, $p_{12} = 0.4$, $p_{21} = 0.1$, $p_{22} = 0.3$. Условие задачи см. в образце 2, п. 9.

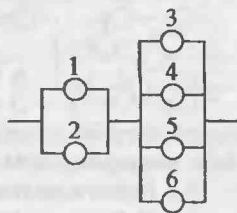
9. $f_{XY}(x, y) = \begin{cases} C(1 - xy) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$ Условие задачи см. в образце 2, п. 9.

Вариант 19

1. В партии из 25 изделий содержится 15 изделий первого сорта и 10 – второго. Случайным образом выбираются 3 изделия. Найти вероятность того, что из этих трех изделий хотя бы одно – первого сорта.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.

3. В партии 30 % изделий произведено первым заводом и 70 % – вторым. Вероятность брака на первом заводе равна 0.03, на втором – 0.02. Из партии случайным образом взято 2 изделия.



3.1. Найти вероятность того, что оба изделия – бракованные.

3.2. При контроле оба изделия оказались бракованными. Найти вероятность того, что оба изготовлены первым заводом.

4. В систему массового обслуживания независимо друг от друга обращаются клиенты двух видов: обычные и с приоритетом в обслуживании. Вероятность поступления клиента с приоритетом равна p . Найти вероятность того, что из n клиентов, поступивших в систему, клиентов с приоритетом будет не более двух (событие A).

4.1. Вычислить $P(A)$ при $n = 10$, $p = 0.2$.

4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона вычислить $P(A)$ при $n = 100$, $p = 0.02$.

5. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение некоторого времени T первый станок потребует внимания рабочего, равна 0.2. Для второго станка эта вероятность равна 0.3, для третьего – 0.4. Построить ряд распределения и найти m_X , D_X , σ_X числа X станков, потребоющих внимания рабочего в течение времени T . Станки работают независимо друг от друга.

6.
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ C/(x+1)^5 & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$
 Условие задачи см. в образце 1, п. 6.

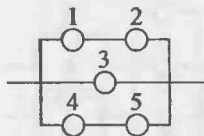
7. Номинальное значение сопротивления резистора равно $m_X = 100 \text{ кОм}$ (килоом). Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma_X = 8 \text{ кОм}$. Какой процент от общего количества резисторов при массовом производстве имеет сопротивление X , отличающееся от номинала по модулю не более чем на 10 % номинала. Предполагается, что X – случайная величина, распределенная нормально.

8. $p_{11} = 0.05$, $p_{12} = 0.1$, $p_{21} = 0.05$, $p_{22} = 0.8$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

9. D – криволинейный треугольник, ограниченный линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$. Условие задачи см. в образце 1, п. 9.

Вариант 20

1. В партии из 20 изделий содержится 10 изделий первого сорта, 6 – второго и 4 – третьего. Случайным образом выбираются 3 изделия. Найти вероятность того, что все они разных сортов.



2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.

3. В партии 40 % деталей изготовлено первым заводом и 60 % – вторым. Вероятность брака на первом заводе равна 0.04, на втором – 0.02. Из партии случайным образом взято две детали.

3.1. Найти вероятность того, что обе детали – бракованные (событие A).

3.2. Найти вероятность того, что обе бракованные детали изготовлены первым заводом.

4. В учреждении эксплуатируется n телефонных аппаратов. Вероятность выхода из строя каждого из них в течение времени T равна p . Найти вероятность того, что за время T из строя выйдет не более одного телефонного аппарата.

4.1. Вычислить эту вероятность по точной формуле Бернулли при $n = 50$, $p = 0.01$.

4.2. Вычислить ту же вероятность с помощью приближенной формулы Пуассона.

4.3. Найти абсолютную Δ и относительную δ погрешности приближенного вычисления.

5. Производятся независимые испытания трех приборов на надежность. Вероятность выхода из строя при этих испытаниях для первого прибора равна 0.2, для второго – 0.3, для третьего – 0.4. Построить ряд распределения и найти m_X , σ_X , где X – число приборов, вышедших из строя при этих испытаниях.

$$6. f(x) = \begin{cases} C\sqrt{x}, & x \in [0, 1]; \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases} \quad \text{Условие задачи см. в образце 2, п. 6.}$$

7. Номинальное значение сопротивления резистора $m_X = 50 \text{ кОм}$ (килоом). Известно, что 80 % от общего количества всех изготавливаемых на данном производстве резисторов имеют отклонение сопротивления от номинала по модулю не более чем на 10 %. Найти среднее квадратическое отклонение сопротивления X резистора от номинала, предполагая, что X – случайная величина, распределенная нормально.

8. $p_{11} = 0.1$, $p_{12} = 0.05$, $p_{21} = 0.05$, $p_{22} = 0.8$. Условие задачи см. в образце 2, п. 8.

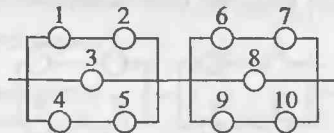
$$9. f_{XY}(x, y) = \begin{cases} Cx^3 y^3 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad \text{Условие задачи см. в образце 2, п. 9.}$$

це 2, п. 9.

1. 4 ракетные установки производят залп по шести воздушным целям. Каждая из них выбирает цель независимо от других. Найти вероятность того, что хотя бы по одной цели будет выпущено более одной ракеты.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.

3. Вероятность брака изделия равна p . Изделие проверяется контролером-автоматом, который обнаруживает брак с вероятностью X и по ошибке бракует годное изделие с вероятностью p_2 . Найти вероятность того, что произведенное изделие будет забраковано (событие A).



3.1. Вычислить m_X при $p = 0.02$, $p_{21} = 0.2$, $p_2 = 0.01$.

3.2. Вычислить по формуле Байеса вероятность того, что забракованное изделие было с браком.

4. Наводнением в Санкт-Петербурге считается подъем воды в Неве до 160 см и выше над нулевой отметкой. Наблюдения в течение 292 лет за период с 1703 по 1994 г. показывают, что 134 года были без наводнений. Этот факт дает вероятность $p_{11} = 0.5$ отсутствия наводнений в конкретном году. Аналогично находится вероятность $p_2 = 0.06$ очередного наводнения с высотой подъема воды более 250 см.

4.1. Найти вероятность того, что два года из ближайших 5 лет будут без наводнений.

4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона найти вероятность того, что среди $n = 50$ ожидающих нас последовательных наводнений будет не менее двух наводнений с высотой подъема воды более 250 см.

5. Два независимые реле, включенные последовательно, отключают линию при ее перегрузке. Вероятность несрабатывания каждого реле равна 0.07. Пусть X — число перегрузок линии до первого несрабатывания обоих реле.

5.1. Найти закон распределения X . 5.2. Вычислить m_X . 5.3. $P(X < m_X)$.

6.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ Cxe^{-0.5x}, & x \geq 0. \end{cases}$$
 Условие задачи см. в образце 1, п. 6.

Указание. В пункте 6.7 ограничиться проверкой, что $Me = 3.36$.

7. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку $m_X = 1$ м. Среднее квадратическое отклонение ошибки измерения X равно $\sigma_X = 2$ м. Предполагается, что X — случайная величина, распределенная нормально.

7.1. Найти вероятность $P(|X| < \sigma_X)$.

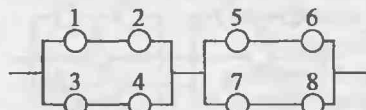
7.2. Как изменится эта вероятность, если устранить систематическую ошибку?

8. $p_{11} = 0.25$, $p_{12} = 0.1$, $p_{21} = 0.2$, $p_{22} = 0.45$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

9. D — криволинейный треугольник, ограниченный линиями $y = x^2$, $x = 0$, $y = 1$. Условие задачи см. в образце 1, п. 9.

Вариант 22

1. 5 ракетных установок производят залп по 8 воздушным целям. Каждая из них выбирает цель независимо от других. Найти вероятность того, что выстрелы будут произведены по разным целям.



2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.

3. Вероятность брака изделия равна p . Изделие проверяется контролером-автоматом, который обнаруживает брак с вероятностью p_1 и по ошибке бракует годное изделие с вероятностью p_2 . Найти вероятность того, что 2 проверенных изделия будут забракованы (событие A).

3.1. Вычислить $P(A)$ при $p = 0.01$, $p_1 = 0.95$, $p_2 = 0.005$. 3.2. Вычислить по формуле Байеса вероятность того, что два забракованных автоматом изделия на самом деле имеют брак.

4. Наводнением в Санкт-Петербурге считается подъем воды в Неве до 160 см и выше над нулевой отметкой. Наблюдения в течение 292 лет с 1703 по 1994 г. показывают, что небольшие наводнения с высотой подъема воды менее двух метров происходят при очередном наводнении с вероятностью $p_1 = 0.7$, а крупные – с высотой подъема воды 280 см и более происходят с вероятностью $p_2 = 0.02$.

4.1. Найти вероятность того, что среди очередных четырех наводнений больших будет не менее двух. 4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона найти вероятность того, что среди $n = 50$ ожидающих нас последовательных наводнений крупных окажется более одного.

5. Два прибора независимо испытываются до тех пор, пока хотя бы один из них откажет. Отказ каждого прибора при каждом испытании происходит с вероятностью 0.2.

5.1. Записать формулу, выражающую закон распределения случайной величины X , равной числу испытаний. 5.2. Найти m_X . 5.3. Вычислить $P(X < m_X)$.

$$6. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ Cxe^{-2x}, & x \geq 0. \end{cases} \text{ Условие задачи см. в образце 2, п. 6.}$$

Указание. В п. 6.7 ограничиться проверкой, что $x_{1/4} = 0.481$.

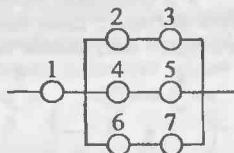
7. Номинальное значение линейного размера детали X равно $m_X = 100$ мм. Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma_X = 0.5$ мм. Какой процент от общего количества деталей при массовом производстве составляют детали, для которых размер X отклоняется от m_X по модулю не больше, чем на 1 % номинала? Предполагается, что X – случайная величина, распределенная нормально.

8. $p_{11} = 0.35$, $p_{12} = 0.15$, $p_{21} = 0.05$, $p_{22} = 0.45$. Условие задачи см. в образце 2, п. 8.

$$9. f_{XY}(x, y) = \begin{cases} Ce^{-(x+y)} & \text{при } x \geq 0, y \geq 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \text{ Условие задачи см. в образце 2, п. 9.}$$

1. Группа, состоящая из пяти мужчин и трех женщин, случайным образом разбита на две подгруппы по 4 человека. Найти вероятность того, что все женщины оказались в одной подгруппе.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.



3. Вероятность брака детали равна p . Деталь после изготовления проверяется контролером-автоматом, который обнаруживает брак с вероятностью p_1 и по ошибке бракует годную деталь с вероятностью p_2 .

3.1. Найти вероятность того, что произведенная деталь не будет забракована (событие A).

3.2. Вычислить $P(A)$ при $p = 0.01$, $p_1 = 0.94$, $p_2 = 0.05$.

3.3. Вычислить по формуле Байеса вероятность того, что деталь, признанная годной в результате контроля, не имеет брака.

4. Наводнением в Санкт-Петербурге считается подъем воды в Неве до 160 см и выше над нулевой отметкой. За период 1703 – 1994 г. зарегистрировано 75 лет, в каждом из которых было 2 и более наводнений (событие A), а также лишь одно наводнение с высотой подъема воды более 4 м над нулевой отметкой (событие B) в 1824 г. Исходя из этих статистических данных примем $P(A) = 75/292 = 0.26$, $P(B) = 1/295 = 0.0034$ (всего за указанный период было зарегистрировано 295 наводнений).

4.1. Найти вероятность того, что в течение пяти предстоящих последовательных лет событие A произойдет не менее двух раз.

4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона найти вероятность того, что среди $n = 100$ ожидающих нас последовательных наводнений событие B будет наблюдаться хотя бы один раз.

5. Производится последовательный пуск ракет по цели до первого попадания, либо до израсходования боекомплекта, состоящего из четырех ракет. Вероятность попадания при каждом запуске равна 0.4.

5.1. Составить таблицу распределения случайной величины X , равной числу пусков ракет. 5.2. Вычислить m_X . 5.3. Вычислить $P(X < m_X)$.

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ C/x^5, & x \geq 1. \end{cases}$ Условие задачи см. в образце 1, п. 6.

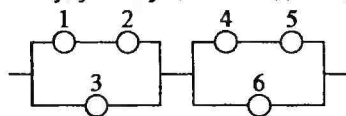
7. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку $m_X = 1$ см и среднее квадратическое отклонение $\sigma_X = 5$ см ошибки измерения X . Предполагается, что случайная величина X распределена нормально.

7.1. Найти $P(|X| > 10)$. 7.2. Как изменится эта вероятность, если ликвидировать систематическую ошибку?

8. $p_{11} = 0.25$, $p_{12} = 0.2$, $p_{21} = 0.1$, $p_{22} = 0.45$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

9. D – криволинейный треугольник, ограниченный линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$. Условие задачи см. в образце 1, п. 9.

1. 3 ракетных установки производят залп по 5 воздушным целям. Каждая из них выбирает цель независимо от других. Найти вероятность того, что все ракеты будут выпущены по одной цели.



2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.

3. Вероятность брака детали равна p . Деталь после изготовления проверяется контролером-автоматом, который обнаруживает брак с вероятностью p_1 и по ошибке бракует годную деталь с вероятностью p_2 .

3.1. Найти вероятность того, что произведенная деталь не будет забракована (событие A). 3.2. Вычислить $P(A)$ при $p = 0.02$, $p_1 = 0.95$, $p_2 = 0.01$.

3.3. Вычислить по формуле Байеса вероятность того, что деталь, признанная годной в ходе контроля, на самом деле является бракованной.

4. Наводнением в Санкт-Петербурге считается подъем воды в Неве до 160 см и выше над нулевой отметкой. За период 1703–1994 гг. зарегистрировано 295 наводнений. Из них 94 были с высотой подъема воды не менее 200 см над нулевой отметкой (событие A), а 3 – с высотой подъема воды выше 3 м (событие B), (1777, 1824, 1924 гг.). На основе этих статистических данных примем $P(A) = 94/295 = 0.32$, $P(B) = 3/295 = 0.01$.

4.1. Найти вероятность того, что среди пяти предстоящих последовательных наводнений будет не более двух наводнений с высотой подъема воды не менее 200 см. 4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона вычислить вероятность того, что среди 50 последовательных наводнений будет не более одного наводнения с высотой подъема воды выше 3 м.

5. Станок-автомат при изготовлении изделия допускает сбой, выпуская бракованное изделие, с вероятностью p . После первого же сбоя производится переналадка станка. Пусть X – число изделий, выпущенных автоматом между двумя переналадками.

5.1. Составить закон распределения X .

5.2. Найти m_X и вычислить его при $p = 0.05$.

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ C/x^4, & x \geq 1. \end{cases}$ Условие задачи см. в образце 2, п. 6.

7. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку $m_X = 10$ см и среднее квадратическое отклонение $\sigma_X = 50$ см ошибки измерения X . Предполагается, что случайная величина X распределена нормально.

7.1. Найти вероятность $P(|x| < 100)$. 7.2. Как изменится эта вероятность, если ликвидировать систематическую ошибку?

8. $p_{11} = 0.06$, $p_{12} = 0.24$, $p_{21} = 0.14$, $p_{22} = 0.56$. Условие задачи см. в образце 2, п. 8.

9. $f_{XY}(x, y) = \begin{cases} C(1 + x^2 y^2) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$ Условие задачи см. в образце

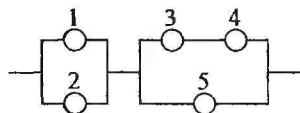
2, п. 9.

Вариант 25

1. 8 билетов в две четырехместные театральные ложи случайным образом распределены среди группы, состоящей из четырех мужчин и четырех женщин. Найти вероятность того, что в каждой ложе мужчин и женщин окажется поровну.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.

3. Медицинский анализ выявляет имеющуюся у больного болезнь α с вероятностью p_1 и ошибочно указывает на эту болезнь при ее отсутствии с вероятностью p_2 . У больных, направленных на анализ с предварительным диагнозом о болезни α , болезнь α встречается с вероятностью p .



3.1. Найти вероятность $P(A)$ того, что у пациента анализ укажет на болезнь α . 3.2. Вычислить $P(A)$ при $p = 0.6$, $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.05$. 3.3. Вычислить по формуле Байеса вероятность того, что у пациента действительно имеется болезнь α , если на нее указал медицинский анализ.

4. За период в 131 год с 1865 по 1995 г. в Санкт-Петербурге 10-го января среднесуточная температура ниже минус 10° (событие A) наблюдалась 44 раза, а ниже минус 30° (событие B) – всего 1 раз (-33.6° в 1987 г.). Исходя из этих статистических данных, положим $P(A) = 44/131 = 0.34$, $P(B) = 1/131 = 0.008$.

4.1. Найти вероятность события, означающего, что в ближайшие 4 года событие A будет наблюдаться не менее двух раз. 4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона найти вероятность появления события B хотя бы в одном году из предстоящих последовательных 50 лет.

5. Два орудия залпом стреляют по цели до первого попадания хотя бы одним орудием. Вероятность попадания каждого равна 0.6.

5.1. Найти закон распределения случайной величины X , равный числу залпов. 5.2. Найти m_X . 5.3. Вычислить $P(X < m_X)$.

6.
$$f(x) = \begin{cases} C(2-x), & x \in [0, 2]; \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$
 Условие задачи см. в образце 1, п. 6.

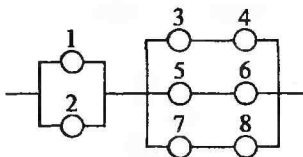
7. Производятся 2 независимых измерения прибором без систематической ошибки ($m_X = 0$). Средняя квадратическая ошибка $\sigma_X = 2$ м. Найти вероятность p того, что ошибка хотя бы одного измерения по модулю будет меньше σ_X . Предполагается, что ошибка измерения X распределена нормально.

8. $p_{11} = 0.25$, $p_{12} = 0.1$, $p_{21} = 0.15$, $p_{22} = 0.5$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

9. D – криволинейный треугольник, ограниченный линиями $y = \sqrt{1-x}$, $x = 0$, $y = 0$. Условие задачи см. в образце 1, п. 9.

Вариант 26

1. Группа, состоящая из шести мужчин и двух женщин случайным образом разбита на две подгруппы по 4 человека. Найти вероятность того, что обе женщины оказались в одной из подгрупп.



2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.

3. Вероятность брака изделия равна p . Изделие проверяется контролером-автоматом, который обнаруживает брак с вероятностью p_1 и по ошибке бракует годное изделие с вероятностью p_2 .

3.1. Найти вероятность того, что 2 проверенных автоматом изделия не будут забракованы (событие A).

3.2. Вычислить $P(A)$ при $p = 0.02$, $p_1 = 0.95$, $p_2 = 0.01$.

3.3. Вычислить по формуле Байеса вероятность, что оба проверенных автоматом и признанных годными изделия не имеют брака.

4. Наводнением в Санкт-Петербурге считается подъем воды в Неве до 160 см и выше над нулевой отметкой. За период в 292 года с 1703 по 1994 г. в 158 годах произошло хотя бы одно наводнение (событие A). Также зарегистрировано 16 лет, когда наблюдались летние наводнения – в июне, июле, августе (событие B). Исходя из этих данных примем $P(A) = 158/292 = 0.54$, $P(A) = 16/292 = 0.055$.

4.1. Найти вероятность того, что в предстоящие 4 последовательные года событие A произойдет, но не более двух раз.

4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона найти вероятность того, что событие B произойдет хотя бы один раз за предстоящие 50 последовательных лет.

5. Испытываются на надежность 3 прибора. Вероятности безотказно пройти испытания для каждого соответственно равны 0.7, 0.8, 0.9. Пусть X – число приборов, прошедших испытания безотказно.

5.1. Построить таблицу распределения случайной величины X .

Вычислить: 5.2. m_X . 5.3. σ_X . 5.4. $P(X < m_X)$.

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ C/x^6, & x \geq 1. \end{cases}$ Условие задачи см. в образце 2, п. 6.

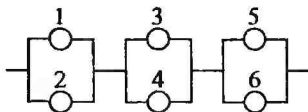
7. Производятся два независимых измерения прибором без систематической ошибки ($m_X = 0$). Средняя квадратическая ошибка $\sigma_X = 3$ м. Найти вероятность того, что ошибка каждого измерения по модулю будет меньше σ_X . Предполагается, что ошибка измерения X распределена нормально.

8. $p_{11} = 0.85$, $p_{12} = 0.02$, $p_{21} = 0.03$, $p_{22} = 0.1$. Условие задачи см. в образце 2, п. 8.

9. $f_{XY}(x, y) = \begin{cases} C(1 - x^2 y^2) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$ Условие задачи см. в образце 2, п. 9.

1. В партии из L изделий имеются дефектные изделия. Для контроля из партии случайным образом выбираются l изделий. Вся партия принимается, если среди выбранных изделий не оказывается дефектных. Найти вероятность p приемки партии, если в ней R дефектных изделий. Вычислить эту вероятность при $L = 20$, $l = 4$, $R = 2$.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.



3. Медицинский анализ выявляет имеющуюся у больного болезнь α с вероятностью p_1 и ошибочно указывает на эту болезнь при ее отсутствии с вероятностью p_2 . У больных, направленных на анализ с предварительным диагнозом болезни α , она встречается с вероятностью p .

3.1. Найти вероятность $P(A)$ того, что у пациента анализ не укажет на болезнь α .

3.2. Вычислить $P(A)$ при $p = 0.7$, $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.1$.

3.3. Вычислить по формуле Байеса вероятность того, что у пациента действительно отсутствует болезнь α при условии, что и анализ на нее не указал.

4. За период в 131 год с 1865 по 1995 г. в Санкт-Петербурге 10-го января среднесуточная температура выше 0° (событие A) наблюдалась 20 раз, из них выше плюс 3° (событие B) – всего 1 раз ($+3.8^\circ$ в 1971 г.). Исходя из этих статистических данных, примем $P(A) = 20/131 = 0.15$, $P(B) = 1/131 = 0.008$.

4.1. Найти вероятность того, что в предстоящие ближайшие 4 года событие A будет наблюдаться не менее одного раза. 4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона найти вероятность того, что хотя бы в одном году из предстоящих 50-ти последовательных лет событие B произойдет.

5. Орудие стреляет по цели до первого попадания, либо до израсходования боекомплекта, состоящего из пяти снарядов. Вероятность попадания с первого выстрела равна 0.4, со второго – 0.5, при всех последующих – 0.6. Пусть X – число произведенных выстрелов.

5.1. Составить таблицу распределения X . 5.2. Найти m_X . 5.3. Найти $P(X < m_X)$.

6.
$$f(x) = \begin{cases} C(1-x/3), & x \in [0, 3]; \\ 0, & x \notin [0, 3]. \end{cases}$$
 Условие задачи см. в образце 1, п. 6.

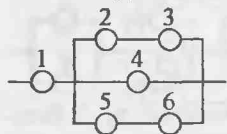
7. Каким должно быть среднее квадратическое отклонение σ_X , чтобы параметр детали X отклонялся от номинала $m_X = 20$ по модулю не более чем на 1 % номинала с вероятностью 0.95? Предполагается, что случайная величина X распределена нормально.

8. $p_{11} = 0.3$, $p_{12} = 0.15$, $p_{21} = 0.05$, $p_{22} = 0.5$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

9. D – криволинейный треугольник, ограниченный линиями $y = x^3$, $x = 1$, $y = 0$. Условие задачи см. в образце 1, п. 9.

Вариант 28

1. Партия товара в количестве L штук состоит из изделий первого и второго сорта. Для контроля из партии случайным образом выбирается l изделий. Вся партия принимается, если среди выбранных изделий второсортных оказывается не более одного. Найти вероятность p приемки партии, если в ней R изделий первого сорта. Вычислить p при $L = 10$, $l = 3$, $R = 8$.



2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.

3. Медицинский анализ выявляет имеющуюся у больного болезнь α с вероятностью p_1 и ошибочно указывает на эту болезнь при ее отсутствии с вероятностью p_2 . У больных, направленных на анализ с предварительным диагнозом болезни α , эта болезнь встречается с вероятностью p .

3.1. Найти вероятность $P(A)$ того, что у пациента анализ укажет на болезнь α . 3.2. Вычислить $P(A)$ при $p = 0.7$, $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.1$. 3.3. С помощью формулы Байеса вычислить вероятность, что у пациента отсутствует болезнь α , хотя на нее указал медицинский анализ.

4. За период в 131 год с 1865 по 1995 г. в Санкт-Петербурге 10-го января среднесуточная температура ниже минус 15° (событие A) наблюдалась 20 раз, а ниже минус 25° (событие B) – всего 3 раза. Исходя из этих статистических данных, примем $P(A) = 20/131 = 0.15$, $P(B) = 3/131 = 0.023$.

4.1. Найти вероятность того, что в предстоящие 5 ближайших лет событие A будет наблюдаться не менее трех раз. 4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона найти вероятность появления события B хотя бы в одном году из предстоящих 50 последовательных лет.

5. Орудие стреляет по цели до первого попадания, но производится не более четырех выстрелов. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.4, при втором – 0.5, при третьем и четвертом – 0.6. Пусть X – число произведенных выстрелов.

5.1. Составить таблицу распределения X .

Вычислить: 5.2. m_X . 5.3. $P(X > m_X)$.

6.
$$f(x) = \begin{cases} C\sqrt{1-x}, & x \in [0, 1]; \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$
 Условие задачи см. в образце 2, п. 6.

7. Каким должно быть среднее квадратическое отклонение σ_X , чтобы параметр X детали отклонялся от номинала $m_X = 10$ по модулю не более чем на 1 % m_X с вероятностью 0.9? Предполагается, что случайная величина X распределена нормально.

8. $p_{11} = 0.92$, $p_{12} = 0.02$, $p_{21} = 0.01$, $p_{22} = 0.05$. Условие задачи см. в образце 2, п. 8.

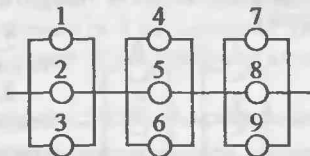
9.
$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} Ce^{-2(x+y)} & \text{при } x \geq 0, y \geq 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$
 Условие задачи см. в образце 2, п. 9.

Вариант 29

1. Каждый из девяти клиентов независимо и случайно выбирает одну из трех линий обслуживания. Найти вероятность того, что они распределены между линиями обслуживания поровну.

2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 1, п. 2.

3. По статистическим данным в данном регионе арестованный, подозреваемый в тяжком преступлении, виновен с вероятностью p . Виновный осуждается с вероятностью p_1 . Невинный ошибочно осуждается с вероятностью p_2 .



3.1. Найти вероятность $P(A)$ того, что арестованный подозреваемый не будет осужден. 3.2. Вычислить $P(A)$ при $p = 0.9$, $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.05$.

По формуле Байеса найти вероятность того, что арестованный по подозрению в преступлении, но не осужденный, в действительности виновен, т. е. не осужден ошибочно.

4. За период в 131 год с 1865 по 1995 г. в Санкт-Петербурге 10-го января в период так называемых рождественских морозов погода со среднесуточной температурой не ниже минус 2° (событие A) наблюдалось 36 раз, а ниже минус 20° (событие B) – 8 раз. Исходя из этих статистических данных, примем $P(A) = 36/131 = 0.275$, $P(B) = 8/131 = 0.06$.

4.1. Найти вероятность того, что в предстоящие ближайшие 5 лет событие A будет наблюдаться не менее двух раз.

4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона найти вероятность появления события B не более одного раза в предстоящие последовательные 20 лет.

5. В систему массового обслуживания независимо обращаются клиенты, каждый из них обслуживается с вероятностью $p = 0.8$. Количество клиентов, обратившихся за обслуживанием за время T , – случайная величина X с математическим ожиданием $m_X = 2$, распределенная по закону Пуассона. Найти вероятность того, что за время T поступит не более двух клиентов и все поступившие на обслуживание клиенты будут обслужены.

6.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ Ce^{1-x}, & x \geq 1. \end{cases}$$
 Условие задачи см. в образце 1, п. 6.

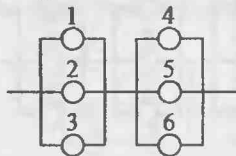
7. Деталь, изготовленная автоматом, считается бракованной, если отклонение X ее контролируемого параметра от номинала превышает по модулю 2 единицы измерения. Предполагается, что случайная величина X распределена нормально с параметрами $m_X = 0$, $\sigma_X = 0.7$. Сколько процентов бракованных деталей выдает автомат?

8. $p_{11} = 0.4$, $p_{12} = 0.1$, $p_{21} = 0.2$, $p_{22} = 0.3$. Условие задачи см. в образце 1, п. 8.

9. D – криволинейный треугольник, ограниченный линиями $y = x^3$, $x = 0$, $y = 1$. Условие задачи см. в образце 1, п. 9.

Вариант 30

1. 10 различных сообщений независимо посылаются по двум различным каналам связи. Для каждого сообщения равновозможен выбор любого канала. Найти вероятность того, что сообщения распределятся по обоим каналам поровну.



2. Дана схема включения элементов. Условие задачи см. в образце 2, п. 2.

3. По статистическим данным в конкретном регионе подозреваемый в тяжком преступлении виновен с вероятностью p . Виновный осуждается с вероятностью p_1 . Невинный ошибочно осуждается с вероятностью p_2 .

3.1. Найти вероятность $P(A)$ того, что арестованный подозреваемый будет осужден. 3.2. Вычислить $P(A)$ при $p = 0.95$, $p_1 = 0.9$, $p_2 = 0.02$. 3.3. С помощью формулы Байеса найти вероятность того, что осужденный действительно виновен.

4. За период в 131 год с 1865 по 1995 г. в Санкт-Петербурге 10-го января (рождественские морозы) мягкая зимняя погода со среднесуточной температурой от минус 5° до 0° (событие A) наблюдалась 35 раз, а не ниже $+2^\circ$ (событие B) — всего 5 раз. Исходя из этих статистических данных примем $P(A) = 35/131 = 0.27$, $P(B) = 5/131 = 0.04$.

4.1. Найти вероятность того, что в предстоящие ближайшие 4 года событие A будет наблюдаться не менее двух раз.

4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона найти вероятность появления события B хотя бы один раз в предстоящие 20 последовательных лет.

5. Выборка из партии изделий для контроля производится случайным образом до обнаружения первого бракованного изделия, но выбирается не более 5 штук изделий. Вероятность брака партии равна $p = 0.1$. Пусть X — число выбранных изделий.

5.1. Составить таблицу распределения случайной величины X .

Вычислить: 5.2. m_X . 5.3. $P(X > m_X)$.

6.
$$f(x) = \begin{cases} C(2-x), & x \in [0, 1]; \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$
 Условие задачи см. в образце 2, п. 6.

7. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение X ее контролируемого размера от номинала не превышает по модулю 5 мм. Предполагается, что случайная величина X распределена нормально с параметрами $m_X = 0$ и $\sigma_X = 3$ мм. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

8. $p_{11} = 0.92$, $p_{12} = 0.02$, $p_{21} = 0.01$, $p_{22} = 0.05$. Условие задачи см. в образце 2, п. 8.

9.
$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} Cxy(x+y) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$
 Условие задачи см. в образце 2, п. 9.

Решения задач образца 1 контрольного задания

1. Партия автомашин содержит 10 автомашин марки M и 10 автомашин марки N . Из этой партии случайным образом отбираются 4 автомашины для испытаний. Найти вероятность того, что для испытаний будут отобраны автомашины обеих марок поровну.

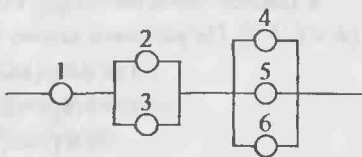
► Применяем классическое определение вероятности. Число, способов выбора двух автомашин марки M из 10 равно C_{10}^2 , так как порядок выбора автомашин роли не играет, а один случай выбора отличается от другого хотя бы одной автомашиной. Имеем дело с сочетаниями. Таким же числом способов можно выбрать две автомашины марки N . По правилу «умножения» эти числа перемножаются, поэтому число благоприятствующих случаев выбора равно $m = (C_{10}^2)^2$. Общее число случаев выбора четырех автомашин любых марок из 20 равно $n = C_{20}^4$. Тогда искомая вероятность равна

$$p = \frac{m}{n} = \frac{(C_{10}^2)^2}{C_{20}^4} = \frac{(10 \cdot 9)^2}{1 \cdot 2} \bigg/ \left(\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right) = \frac{135}{323} \approx 0.418. \blacktriangleleft$$

2. Вероятность безотказной работы каждого элемента в течение времени T равна p .

Элементы работают независимо и включены в цепь по приведенной схеме. Пусть событие A_i означает безотказную работу за время T элемента с номером i ($i = 1, 2, 3, \dots$), а со-

бытие B – безотказную работу цепи. Требуется:



2.1. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i .

2.2. Найти вероятность события B .

2.3. Вычислить $P(B)$ при $p = 1/2$.

► Цепь состоит из трех последовательно включенных блоков. Цепь работает, когда все три блока работают совместно. Присвоим блокам номера 1, 2, 3 слева направо. Пусть B_k – событие, означающее безотказную работу блока с номером k ($k = 1, 2, 3$). Тогда $B = B_1 B_2 B_3$. Первый блок состоит из одного элемента с номером 1, поэтому $B_1 = A_1$. Второй блок состоит из двух элементов с номерами 2, 3, включенных параллельно. Поэтому блок работает, когда работает хотя бы один элемент блока, следовательно, $B_2 = A_2 + A_3$. Третий блок содержит 3 элемента с номерами 4, 5, 6, включенных параллельно, поэтому $B_3 = A_4 + A_5 + A_6$. Таким образом,

2.1. $B = A_1(A_2 + A_3)(A_4 + A_5 + A_6)$.

2.2. Так как элементы, а следовательно, и блоки работают независимо, то можно применить теоремы сложения и умножения вероятностей для взаимно независимых событий.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1) \cdot P(A_2 + A_3) \cdot P(A_4 + A_5 + A_6) = \\ &= P(A_1) [P(A_2) + P(A_3) - P(A_2) \cdot P(A_3)] [1 - (1 - P(A_4))(1 - P(A_5))(1 - P(A_6))] = \\ &= p(2p - p^2) [1 - (1 - p)^3]. \end{aligned}$$

$$2.3. P(B) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{21}{64} \approx 0.328. \blacktriangleleft$$

3. Ремонтно-наладочная бригада завода обслуживает станки трех типов – 1-го, 2-го, 3-го, которые находятся на заводе в соотношении 1:2:3. Вероятности обращения к бригаде за время T для станков каждого типа соответственно равны 0.5, 0.3, 0.2.

3.1. Найти среднюю (полную) вероятность того, что за время T для произвольно выбранного станка потребуется ремонтно-наладочная работа бригады.

3.2. Поступил вызов в ремонтно-наладочную бригаду (событие A). Какого типа станок вероятнее всего потребовал усилий бригады?

► Введем события H_k , означающие, что выбран станок k -го типа ($k = 1, 2, 3$). По условиям задачи имеем вероятности

$$\begin{aligned} P(H_1) &= 1/(1+2+3) = 1/6; & P(A/H_1) &= 0.5; \\ P(H_2) &= 2/6 = 1/3; & P(A/H_2) &= 0.3; \\ P(H_3) &= 3/6 = 1/2; & P(A/H_3) &= 0.2. \end{aligned}$$

3.1. По формуле полной вероятности получаем

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot 0.5 + \frac{2}{6} \cdot 0.3 + \frac{3}{6} \cdot 0.2 = \frac{1}{6} (0.5 + 0.6 + 0.6) = \frac{1.7}{6} \approx 0.283. \end{aligned}$$

3.2. По формуле Байеса находим

$$\begin{aligned} P(H_1/A) &= P(H_1)P(A/H_1)/P(A) = (0.5/6)/(1.7/6) = 5/17; \\ P(H_2/A) &= P(H_2)P(A/H_2)/P(A) = (0.6/6)/(1.7/6) = 6/17; \\ P(H_3/A) &= 1 - 5/17 - 6/17 = 6/17. \end{aligned}$$

Вероятнее всего потребовались усилия бригады для станка 2-го или 3-го типа. ◀

4. За период в 131 год с 1865 по 1995 г. в Санкт-Петербурге 10-го января среднесуточная температура от минус 10° до минус 5° (событие A) наблюдалась 35 раз, а в пределах от минус 6° до минус 5° (событие B) – 10 раз. Исходя из этих статистических данных, примем $P(A) = 35/131 = 0.27 = p_1$, $P(B) = 10/131 = 0.076 = p_2$.

4.1. Найти вероятность того, что в 5 ближайших лет событие A будет наблюдаться не менее трех раз.

4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона найти вероятность того, что хотя бы в одном году из предстоящих 50 последовательных лет событие B произойдет.

► 4.1. Наблюдения за среднесуточной температурой укладываются в схему Бернулли. Здесь число наблюдений $n = 5$. Пусть X – число случаев появления события A в течение 5 лет. Тогда по формуле Бернулли получаем

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \\ &= C_5^3 p_1^3 (1-p_1)^2 + C_5^4 p_1^4 (1-p_1) + C_5^5 p_1^5 = 10 \cdot 0.27^3 \cdot 0.73^2 + 5 \cdot 0.27^4 \cdot 0.73 + 0.27^5 = \\ &= 0.1049 + 0.0194 + 0.0014 = 0.1257 \approx 0.13. \end{aligned}$$

4.2. Обозначим через C событие, означающее, что хотя бы в одном году из предстоящих 50 лет событие B произойдет. Рассматриваемое событие C является противоположным событию, означающему, что в предстоящие $n = 50$ лет событие B не произойдет ни разу. Тогда $P(C) = 1 - P_{n,0}(p_2)$. По приближенной

формуле Пуассона $P_{n,k}(p) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ ($a = np$) получаем

$$P(C) = 1 - P_{50,0}(p_2) \approx 1 - \frac{a^0}{0!} e^{-a},$$

где $a = 50 \cdot p_2 = 50 \cdot 0.076 = 3.8$.

$$P(C) \approx 1 - e^{-3.8} \approx 1 - 0.0224 = 0.9776.$$

Сравним этот результат с вычислением по точной формуле:

$$P(C) = 1 - (1 - 0.076)^{50} \approx 0.9808;$$

абсолютная погрешность $\Delta = 0.032$; относительная

$$\delta = 0.0032 / 0.9808 \approx 0.0033 \sim 0.3\%. \blacktriangleleft$$

5. По статистическим данным хотя бы один пожар, требующий выезда пожарной команды, может возникнуть в трех обслуживаемых районах города с номерами 1, 2, 3 в течение времени T соответственно с вероятностями $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$. Пусть X – число районов из числа трех обслуживаемых, в которых за время T случился хотя бы один пожар. Предполагается, что пожары возникают независимо. Требуется:

5.1. Составить ряд (таблицу) распределения случайной величины X .

5.2. Найти m_X .

5.3. Вычислить $P(X > m_X)$.

► 5.1. Пусть A_k – событие, означающее возникновение хотя бы одного пожара за время T в районе с номером k ($k = 1, 2, 3$). Тогда

$$P(X=0) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7 = 0.504;$$

$$P(X=1) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) =$$

$$=P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)=$$

$$=0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.3 = 0.056 + 0.126 + 0.216 = 0.398;$$

$$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.006;$$

$$P(X=2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=3)=1-0.504-0.398-0.006=0.092.$$

Получаем таблицу распределения:

X	0	1	2	3
P	0.504	0.398	0.092	0.006

$$5.2. m_X = 0 \cdot 0.504 + 1 \cdot 0.398 + 2 \cdot 0.092 + 3 \cdot 0.006 = 0.398 + 0.184 + 0.018 = 0.600.$$

$$5.3. P(X > m_X) = P(X > 0.6) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$$

$$= 0.398 + 0.092 + 0.006 = 0.496. \blacktriangleleft$$

6. Плотность вероятности случайной величины X задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ C/(x+1)^4, & x \geq 0. \end{cases}$$

Найти:

6.1. C . 6.2. $F(x)$. 6.3. m_X . 6.4. D_X . 6.5. σ_X . 6.6. $P(X > m_X)$. 6.7. Ме.

6.8. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$\blacktriangleright 6.1. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \text{ Отсюда } C \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^4} = -\frac{C}{3(x+1)^3} \Big|_0^{+\infty} = \frac{C}{3} = 1; C = 3.$$

$$6.2. F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \text{ При } x \leq 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0. \text{ При } x > 0$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt + \int_0^x \frac{3 dt}{(t+1)^4} = -\frac{3}{3(t+1)^3} \Big|_0^x = 1 - \frac{1}{(x+1)^3}.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - 1/(x+1)^3, & x > 0. \end{cases}$$

$$6.3. m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 3 \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x+1)^4} = 3 \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)-1}{(x+1)^4} dx =$$

$$= 3 \left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^3} - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^4} \right) = 3 \left(-\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} \right) \Big|_0^{+\infty} = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$6.4. D_X = M[X^2] - m_X^2; M[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 3 \int_0^{+\infty} \frac{(x^2-1)+1}{(x+1)^4} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \int_0^{+\infty} \left(\frac{x-1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4} \right) dx = 3 \int_0^{+\infty} \left(\frac{(x+1)-2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4} \right) dx = \\
 &= 3 \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4} \right) dx = \\
 &= 3 \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{2}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)^3} \right) \Bigg|_0^{+\infty} = 3 \left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = 1;
 \end{aligned}$$

$$D_X = 1 - 1/4 = 3/4 = 0.75.$$

$$6.5. \sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{3}/2 \approx 0.866.$$

$$6.6. P(X > m_X) = 1 - P(X \leq m_X) = 1 - F(0.5) = 1/(0.5+1)^3 = 1/(1.5)^3 \approx 0.296.$$

$$6.7. F(Me) = 1/2 \Rightarrow 1 - (Me+1)^{-3} = 1/2; \quad (Me+1)^3 = 2; \quad Me+1 = \sqrt[3]{2};$$

$$Me = \sqrt[3]{2} - 1 \approx 0.26.$$

6.8. Для удобства восприятия строим графики $f(x)$ и $F(x)$ друг под другом (рис. 2.1).

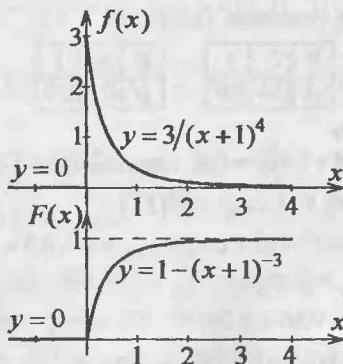


Рис. 2.1

7. Каким должно быть среднее квадратическое отклонение σ , чтобы толщина X металлического листа, выпускаемого заводом, отличалась от номинала $m = 2$ мм не более, чем на 5 % номинала с вероятностью, не меньшей 0.99? Предполагается, что случайная величина X распределена нормально.

► По условию $P(|X - m| < 0.05 \cdot 2) \geq 0.99$. Для нахождения наибольшего допустимого (граничного) значения σ_r для σ применим формулу

$$P(|X - m| < \lambda \sigma) = 2\Phi_0(\lambda),$$

где $\Phi_0(x)$ – нормированная функция Лапласа. Положим $\lambda\sigma_r = 0.1$; $2\Phi_0(\lambda) = 0.99$. Отсюда $\Phi_0(\lambda) = 0.495$. По таблице находим $\lambda = 2.576$. Тогда $\sigma_r = 0.1/\lambda = 0.1/2.576 \approx 0.039$. Таким образом, $\sigma \leq 0.039$ мм. ◀

8. X, Y – индикаторы событий A, B , означающих положительные ответы соответственно на вопросы α, β социологической анкеты. По данным социологического опроса двумерная случайная величина (X, Y) имеет следующую таблицу распределения:

$X \backslash Y$	0	1
0	p_{11}	p_{12}
1	p_{21}	p_{22}

Положительному ответу присвоен ранг 1, отрицательному – 0. $p_{11} = 0.3$, $p_{12} = 0.1$, $p_{21} = 0.2$, $p_{22} = 0.4$. Найти коэффициент корреляции ρ_{XY} .

► 8.1. Строим таблицы распределения для случайных величин X, Y , используя формулы согласованности. Для этого складываем вероятности исходной таблицы по строкам и столбцам. Получаем:

X	0	1
p	0.4	0.6

Y	0	1
p	0.5	0.5

8.2. Находим m_X и m_Y .

$$m_X = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 0.6; \quad m_Y = 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0.5.$$

8.3. Находим $\alpha_{2X} = M[X^2]$, $\alpha_{2Y} = M[Y^2]$.

$$\alpha_{2X} = 0^2 \cdot 0.4 + 1^2 \cdot 0.6 = 0.6; \quad \alpha_{2Y} = 0^2 \cdot 0.5 + 1^2 \cdot 0.5 = 0.5.$$

8.4. Находим $D_X, D_Y, \sigma_X, \sigma_Y$.

$$D_X = \alpha_{2X} - m_X^2 = 0.6 - 0.36 = 0.24; \quad D_Y = \alpha_{2Y} - m_Y^2 = 0.5 - 0.25 = 0.25;$$

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{0.24} \approx 0.4899; \quad \sigma_Y = \sqrt{D_Y} = \sqrt{0.25} = 0.5.$$

8.5. Находим $M[XY]$.

$$M[XY] = 0 \cdot 0 \cdot 0.3 + 0 \cdot 1 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 1 \cdot 0.4 = 0.4.$$

8.6. Находим K_{XY} .

$$K_{XY} = M[XY] - m_X m_Y = 0.4 - 0.6 \cdot 0.5 = 0.4 - 0.3 = 0.1.$$

8.7. Находим ρ_{XY} .

$$\rho_{XY} = K_{XY} / (\sigma_X \sigma_Y) \approx 0.1 / (0.4899 \cdot 0.5) \approx 0.408.$$

События A, B обнаруживают значительную положительную связь. ◀

9. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в области D . D – четверть круга (рис. 2.2): $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

9.1. Составить плотность вероятности $f_{XY}(x, y)$.

9.2. Найти $f_X(x), f_Y(y)$.

Вычислить:

9.3. m_X, m_Y ; 9.4. σ_X, σ_Y ; 9.5. ρ_{XY} .

9.6. Выяснить, зависимы или нет X, Y .

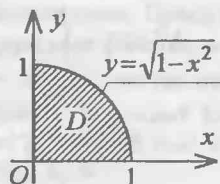


Рис. 2.2

► 9.1. $f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 4/\pi, & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$ так как $f_{XY}(x, y) = 1/S_D$ при $(x, y) \in D$, где $S_D = \pi/4$ – площадь D .

9.2. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_{-\infty}^0 0 dy + \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{4}{\pi} dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} 0 dy = \frac{4}{\pi} \sqrt{1-x^2}$ при $x \in [0, 1]$; $f_X(x) = 0$ при $x \notin [0, 1]$.

Аналогично: $f_Y(y) = \frac{4}{\pi} \sqrt{1-y^2}$ при $y \in [0, 1]$, $f_Y(y) = 0$ при $y \notin [0, 1]$.

9.3. $m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \frac{4}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{3} (1-x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{3\pi}$. Аналогично: $m_Y = \frac{4}{3\pi}$.

9.4. Находим $D_X, D_Y, \sigma_X, \sigma_Y$.

$$\begin{aligned} D_X &= M[X^2] - m_X^2; \quad M[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 \frac{4}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx = \\ &= \left[x = \sin t, \right. \\ &\quad \left. dx = \cos t dt \right] = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}; \end{aligned}$$

$$D_X = \frac{1}{4} - \left(\frac{4}{3\pi} \right)^2 \approx 0.069873; \quad \sigma_X = \sqrt{D_X} \approx 0.264.$$

Аналогично $\sigma_Y \approx 0.264$.

9.5. Находим $K_{XY} = M[XY] - m_X m_Y$; $\rho_{XY} = K_{XY} / (\sigma_X \sigma_Y)$.

$$\begin{aligned}
 M[XY] &= \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int xy f_{XY}(x, y) dx dy = \frac{4}{\pi} \iint_D xy dx dy = \frac{4}{\pi} \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy = \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 x(1-x^2) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2\pi} = 0.1592.
 \end{aligned}$$

$$K_{XY} = \frac{1}{2\pi} - \left(\frac{4}{3\pi} \right)^2 \approx -0.02097; \quad \rho_{XY} \approx -0.02097/0.06987 \approx -0.300.$$

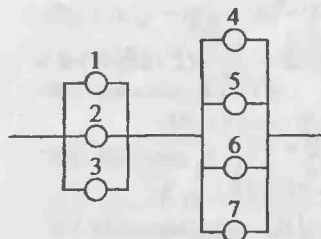
9.6. X, Y зависимы, так как $\rho_{XY} \neq 0$.

Решения задач образца 2 контрольного задания

1. В каждом из двоичных разрядов датчика случайных чисел с равной вероятностью могут оказаться «0» или «1». Найти вероятность того, что в случайно зарегистрированном числе, имеющем 8 двоичных разрядов, в половине разрядов будут нули.

► Применяем классическое определение вероятности. Общее число случаев: $n = 2^8$ – число размещений с повторениями из двух элементов по 8, так как случаи могут отличаться друг от друга как числом повторений нулей и единиц, так и порядком их следования в восьми разрядах. Число благоприятствующих случаев $m = C_8^4$ – число сочетаний из восьми элементов по четыре, так как благоприятствующие случаи отличаются друг от друга разрядами, в которых стоят нули. Порядок разрядов безразличен. Тогда

$$p = \frac{m}{n} = C_8^4 / 2^8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^8} = \frac{7 \cdot 5}{2^7} = \frac{35}{128} = 0.273. \blacktriangleleft$$



2. Вероятность отказа каждого элемента в течение времени T равна p . Элементы работают независимо и включены в цепь по приведенной схеме. Пусть событие A_i означает отказ элемента с номером i ($i = 1, 2, 3, \dots$), а событие B – отказ цепи за время T (прекращение тока в цепи). Требуется:

2.1. Написать формулу, выражающую событие B через все события A_i .

2.2. Найти вероятность события B .

2.3. Вычислить $P(B)$ при $p = 1/2$.

► 2.1. Цепь состоит из двух блоков, включенных последовательно. Присвоим им номера 1, 2 слева направо. Пусть B_1 – событие, означающее отказ первого блока, а B_2 – отказ второго блока за время T . Тогда $B = B_1 + B_2$, так как отказ цепи происходит при отказе хотя бы одного блока. Элементы в каждый блок включены параллельно, поэтому отказ блока происходит при отказе всех элементов, в него входящих. Отсюда $B_1 = A_1 A_2 A_3$, $B_2 = A_4 A_5 A_6 A_7$.

$$B = A_1 A_2 A_3 + A_4 A_5 A_6 A_7.$$

2.2. Элементы работают независимо, поэтому события $A_1, \dots, A_7$ – взаимно независимые. Применяем теорему сложения вероятностей для двух любых событий и теорему умножения вероятностей для взаимно независимых событий.

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 B_2) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_4)P(A_5)P(A_6)P(A_7) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)P(A_6)P(A_7) = p^3 + p^4 - p^7,$$

так как $P(A_i) = p$ ($i = 1, \dots, 7$).

2.3. При $p = 1/2$ получаем $P(B) = 1/8 + 1/16 - 1/128 = 23/128 \approx 0.18$. ◀

3. Заготовки для серийного производства поступают из 1-го и 2-го литейных цехов в соотношении 3:2 и могут быть как стандартными, так и нестандартными. Для 1-го цеха стандартные заготовки составляют 5 %, а для второго цеха – 10 % от всей продукции. При изготовлении детали из стандартной заготовки вероятность брака равна 0.02, а из нестандартной – 0.25.

3.1. Какова вероятность изготовления бракованной детали из случайно выбранной заготовки?

3.2. Из какой случайно выбранной заготовки, стандартной или нестандартной, более вероятно изготовление бракованной детали?

► Введем следующие события (заготовки выбираются случайным образом):

A – деталь, изготовленная из заготовки, окажется бракованной.

B_1 – заготовка изготовлена в первом цеху.

B_2 – заготовка изготовлена во втором цеху.

H_1 – заготовка – стандартная.

H_2 – заготовка – нестандартная.

Из условий задачи находим вероятности:

$$P(B_1) = 3/5 = 0.6; \quad P(H_1/B_1) = 0.95; \quad P(A/H_1) = 0.02;$$

$$P(B_2) = 2/5 = 0.4; \quad P(H_1/B_2) = 0.90; \quad P(A/H_2) = 0.25.$$

3.1. По формуле полной вероятности находим

$$P(H_1) = P(B_1)P(H_1/B_1) + P(B_2)P(H_1/B_2) = 0.6 \cdot 0.95 + 0.4 \cdot 0.9 = 0.93;$$

$$P(H_2) = 1 - P(H_1) = 0.07.$$

Вторично используя формулу полной вероятности, находим искомую вероятность изготовления бракованной детали из случайным образом выбранной детали, стандартной или нестандартной:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \\ = 0.93 \cdot 0.02 + 0.07 \cdot 0.25 = 0.0186 + 0.0175 = 0.0361.$$

3.2. С помощью формулы Байеса получаем

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0.0186}{0.0361} \approx 0.515;$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0.0175}{0.0361} \approx 0.485.$$

$P(H_1/A) > P(H_2/A)$, т. е. более вероятно изготовление бракованной детали из стандартной заготовки.

4. Испытывается независимо n приборов. Вероятность выхода из строя любого прибора равна p . По условию партия приборов принимается, если выйдет из строя не более одного прибора. Найти вероятность приема партии.

4.1. Вычислить эту вероятность при $n = 50$ и $p = 0.02$ с помощью точной формулы Бернулли.

4.2. Вычислить ее же с помощью приближенной формулы Пуассона.

4.3. Укажите абсолютную Δ и относительную δ погрешности приближенного вычисления.

► Испытания приборов укладываются в схему Бернулли. Пусть X – число вышедших из строя приборов при испытании. Искомая вероятность есть

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = (1 - p)^n + np(1 - p)^{n-1}.$$

4.1. $P(X \leq 1) = 0.98^{50} + 50 \cdot 0.02 \cdot 0.98^{49} \approx 0.36417 + 0.37160 = 0.73577.$

4.2. С помощью приближенной формулы Пуассона получаем

$$P(X \leq 1) = \frac{a^0}{0!} e^{-a} + \frac{a}{1!} e^{-a} = (1 + a)e^{-a}, \text{ где } a = np = 50 \cdot 0.02 = 1;$$

$$P(X \leq 1) = 2e^{-1} \approx 0.73576.$$

4.3. $\Delta = 0.00001$; $\delta = 0.00001/0.73577 \approx 0.000014 \sim 0.0014\%$. Вычисления по точной и приближенной формулам практически совпадают. ◀

5. Число X заявок на ремонт станков в цеху за время $t = 1$ час распределено по закону Пуассона с параметром $a = 2$. Найти вероятность p того, что за первый час работы заявок будет меньше двух, а за второй час – не меньше двух.

► $p = P(X < 2) \cdot P(X \geq 2) = P(X < 2) \cdot (1 - P(X < 2)).$

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{a^0}{0!} e^{-a} + \frac{a}{1!} e^{-a} = (1 + a)e^{-a} = \\ = 3e^{-2} \approx 3 \cdot 0.1353 = 0.4059 \approx 0.41.$$

Отсюда

$$p \approx 0.41 \cdot (1 - 0.41) = 0.41 \cdot 0.59 = 0.24. \blacktriangleleft$$

6. Плотность вероятности случайной величины X задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} Cx & \text{при } x \in [0, 1], \\ C & \text{при } x \in [1, 2], \\ 0 & \text{при } x \notin [0, 2]. \end{cases} \text{ Найти:}$$

6.1. C . 6.2. $F(x)$. 6.3. m_X . 6.4. D_X . 6.5. σ_X . 6.6. $P(|X - m_X| < \sigma_X)$.

6.7. $x_{1/4}$ – нижнюю квантиль. 6.8. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

► 6.1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Это равенство есть условие для нахождения C .

$$\int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 Cx dx + \int_1^2 C dx + \int_2^{+\infty} 0 dx = \left. \frac{Cx^2}{2} \right|_0^1 + Cx \Big|_1^2 = \frac{C}{2} + C = \frac{3}{2}C = 1.$$

Отсюда $C = 2/3$.

6.2. Находим $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

При $x \leq 0$ $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

При $0 \leq x \leq 1$ $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{2}{3} t dt = \frac{x^2}{3}$.

При $1 \leq x \leq 2$ $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 \frac{2}{3} t dt + \int_1^x \frac{2}{3} dt = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x-1) = \frac{1}{3}(2x-1)$.

При $x \geq 2$ $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 \frac{2}{3} t dt + \int_1^2 \frac{2}{3} dt + \int_2^{+\infty} 0 dt = 1$.

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x^2/3, & 0 \leq x \leq 1; \\ (2x-1)/3, & 1 \leq x \leq 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

6.3. $m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 \frac{2}{3} x^2 dx + \int_1^2 \frac{2}{3} x dx + \int_2^{+\infty} 0 dx =$

$$= \frac{2}{9} + \frac{1}{3}(4-1) = \frac{11}{9} \approx 1.22.$$

6.4. Находим $D_X = \alpha_2 - m_X^2$.

$$\begin{aligned} \alpha_2 = M[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 \frac{2}{3} x^3 dx + \int_1^2 \frac{2}{3} x^2 dx + \int_2^{+\infty} 0 dx = \\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{9}(8-1) = \frac{1}{6} + \frac{14}{9} = \frac{31}{18}. \end{aligned}$$

$$D_X = \frac{31}{18} - \frac{121}{81} = \frac{37}{162} \approx 0.228.$$

6.5. $\sigma_X = \sqrt{D_X} \approx 0.48$.

$$\begin{aligned} 6.6. P(|X - m_X| < \sigma_X) &\approx P(|X - 1.22| < 0.48) = P(1.22 - 0.48 < X < 1.22 + 0.48) = \\ &= P(0.74 < X < 1.70) = F(1.7) - F(0.74) = \frac{1}{3}(2 \cdot 1.7 - 1) - \frac{1}{3} \cdot 0.74^2 \approx 0.62. \end{aligned}$$

6.7. Находим нижнюю квантиль $x_{1/4}$. Для этого решаем уравнение

$F(x_{1/4}) = 1/4$. Выбираем аналитическое выражение, через которое выражается $F(x)$ в диапазоне $0 \leq x \leq 1$, где $F(x)$ может быть равно $1/4$. Здесь $F(x)$ изменяется в пределах $0 \leq F(x) \leq 1/3$. При этом $F(x) = x^2/3$. Тогда $x_{1/4}^2/3 = 1/4$. Отсюда $x_{1/4}^2 = 3/4$; $x_{1/4} = \sqrt{3}/2 \approx 0.866$.

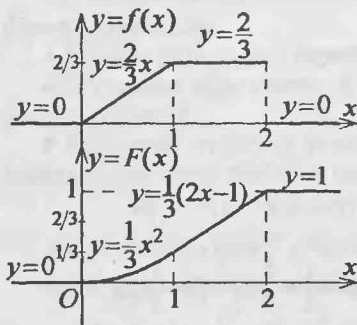


Рис. 2.3

6.8. Для удобства восприятия строим графики $f(x)$ и $F(x)$ друг под другом (рис. 2.3).

7. По количеству X содержащейся примеси продукт разделяется на две группы.

Продукт первой группы содержит примесь в количестве, меньшем 1 %. Продукт второй группы – большим 1 %. X – случайная величина, распределенная нормально с параметрами $m=1.5$ % и $\sigma=0.5$ %. Найти, сколько процентов в общем объеме продукции составляют продукты первой и второй групп.

► Пусть $p_1 = P(X < 1) = F(1)$, где $F(x) = 0.5 + \Phi_0\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$. Здесь

$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – нормированная функция Лапласа.

$$F(1) = 0.5 + \Phi_0\left(\frac{1-1.5}{0.5}\right) = 0.5 + \Phi_0(-1) = 0.5 - \Phi_0(1) = 0.5 - 0.341 = 0.159.$$

$$p_1 = 0.159 \sim 15.9\%; \quad p_2 = P(X \geq 1) = 1 - p_1 = 0.841 \sim 84.1\%. \quad \blacktriangleleft$$

8. Детали на производстве сортируются на 4 группы по величине отклонений от номиналов двух существенных параметров. Отклонения ранжируются. Ранги X, Y отклонений могут принимать лишь значения 0 и 1. Распределение двумерной случайной величины (X, Y) задано таблицей. Здесь $p_{11} = 0.94$, $p_{12} = 0.01$, $p_{21} = 0.02$, $p_{22} = 0.03$. Найти коэффициент корреляции ρ_{XY} , называемый ранговым.

$X \backslash Y$	0	1
0	p_{11}	p_{12}
1	p_{21}	p_{22}

► 8.1. Находим таблицы распределения компонент X, Y , используя формулы согласованности. Для этого складываем вероятности таблицы по строкам и столбцам.

X	0	1
p	0.95	0.05

Y	0	1
p	0.96	0.04

8.2. Вычисляем m_X, m_Y .

$$m_X = 0 \cdot 0.95 + 1 \cdot 0.05 = 0.05; \quad m_Y = 0 \cdot 0.96 + 1 \cdot 0.04 = 0.04.$$

8.3. Находим $\alpha_{2X} = M[X^2]$, $\alpha_{2Y} = M[Y^2]$.

$$\alpha_{2X} = 0^2 \cdot 0.95 + 1^2 \cdot 0.05 = 0.05; \quad \alpha_{2Y} = 0^2 \cdot 0.96 + 1^2 \cdot 0.04 = 0.04.$$

8.4. Находим $D_X, D_Y, \sigma_X, \sigma_Y$.

$$D_X = \alpha_{2X} - m_X^2 = 0.05 - 0.0025 = 0.0475;$$

$$D_Y = \alpha_{2Y} - m_Y^2 = 0.04 - 0.04^2 = 0.0384;$$

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{0.0475} \approx 0.218; \quad \sigma_Y = \sqrt{D_Y} = \sqrt{0.0384} \approx 0.196.$$

8.5. Находим $M[XY] = 0 \cdot 0 \cdot 0.94 + 0 \cdot 1 \cdot 0.01 + 1 \cdot 0 \cdot 0.02 + 1 \cdot 1 \cdot 0.03 = 0.03$.

8.6. Находим

$$K_{XY} = M[XY] - m_X m_Y = 0.03 - 0.05 \cdot 0.04 = 0.03 - 0.002 = 0.028.$$

8.7. Находим $\rho_{XY} = K_{XY} / (\sigma_X \sigma_Y) \approx 0.028 / (0.218 \cdot 0.196) \approx 0.66$. ◀

9. Плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y) задана формулой $f_{XY}(x, y) = \begin{cases} C(x^2 + y^2) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$ Найти:

9.1. C . 9.2. $f_X(x)$, $f_Y(y)$. 9.3. m_X, m_Y . 9.4. σ_X, σ_Y . 9.5. ρ_{XY} .

9.6. Выяснить, зависимы или нет X, Y .

► 9.1. Коэффициент C находим из условия $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$:

$$C \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2) dy = C \left(\int_0^1 x^2 dx \int_0^1 dy + \int_0^1 y^2 dy \int_0^1 dx \right) = 2C \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \cdot 1 \right) = \frac{2}{3} C = 1.$$

Отсюда $C = 3/2$.

9.2. Применяем формулы согласованности:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \frac{3}{2} \int_0^1 (x^2 + y^2) dy = \frac{3}{2} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \left(x^2 + \frac{1}{3} \right)$$

при $x \in [0, 1]$; $f_X(x) = 0$ при $x \notin [0, 1]$. $f_Y(y)$ записываем из условия равноправности вхождения переменных x, y в выражение для $f_{XY}(x, y)$:

$$f_Y(y) = \frac{3}{2} y^2 + \frac{1}{2} \text{ при } y \in [0, 1]; f_Y(y) = 0 \text{ при } y \notin [0, 1].$$

9.3. Находим $m_X = m_Y$.

$$m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{3}{2} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) = \frac{5}{8};$$

$$m_Y = \frac{5}{8}.$$

9.4. Находим $\sigma_X = \sigma_Y$. Предварительно найдем $\alpha_{2X} = M[X^2]$,

$$D_X = \alpha_{2X} - m_X^2:$$

$$\alpha_{2X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{3}{2} \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{9} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{9} \right) = \frac{7}{15};$$

$$D_X = \frac{7}{15} - \left(\frac{5}{8} \right)^2 = \frac{7}{15} - \frac{25}{64} = \frac{73}{960} \approx 0.076;$$

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} \approx \sqrt{0.076} \approx 0.276; \quad \sigma_Y \approx 0.276.$$

9.5. Находим ρ_{XY} . Предварительно найдем $M[XY]$ и

$$K_{XY} = M[XY] - m_X m_Y:$$

$$M[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy = \frac{3}{2} \int_0^1 \int_0^1 xy (x^2 + y^2) dx dy =$$

$$= \frac{3}{2} \left(\int_0^1 x^3 dx \int_0^1 y dy + \int_0^1 y^3 dy \int_0^1 x dx \right) = 3 \int_0^1 x^3 dx \int_0^1 y dy = 3 \left(\frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \right) \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \right) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

$$K_{XY} = \frac{3}{8} - \frac{25}{64} = \frac{24 - 25}{64} = -\frac{1}{64};$$

$$\rho_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-1/64}{73/960} = -\frac{960}{73 \cdot 64} = -\frac{15}{73} \approx -0.205.$$

9.6. Так как $\rho_{XY} \neq 0$, то X, Y зависимы. ◀

ЧАСТЬ 3
КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ (1–4)

Контрольный тест 1 по теории вероятностей

• **Алгебра событий**

1. Что такое сумма событий?
2. Укажите пункты, в которых записаны истинные равенства:
а) $A + \emptyset = \emptyset$; б) $A + \Omega = \Omega$; в) $A + A = 2A$; г) $A \cdot A = A$; д) $A \cdot \Omega = \Omega$.

• **Алгебра вероятностей**

3. Сформулируйте классическое определение вероятности.
4. Запишите формулу, выражающую правило умножения вероятностей для трех любых событий.

5. Независимо испытываются 2 прибора. Каждый при испытании выходит из строя с вероятностью 0.2. Найти вероятность того, что при испытании из строя выйдет хотя бы один прибор.

6. Партия деталей поставлена двумя заводами. 1-й поставил 70 % деталей. Вероятность брака на 1-м заводе – 0.02, на 2-м – 0.03. Из партии случайным образом взята одна деталь. Найти вероятность того, что она окажется бракованной.

• **Одномерная дискретная случайная величина**

7. Что такое математическое ожидание дискретной случайной величины? В каком случае оно существует?

8. Напишите формулу, выражающую биномиальное распределение случайной величины X .

9. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $a = 2$. Вычислите вероятность $P(X > 0)$.

10. Орудие стреляет по цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна $p = 0.6$. Пусть X – число сделанных выстрелов. Найти вероятность $P(X \leq 2)$.

• **Одномерная непрерывная случайная величина**

11. Напишите формулу, по которой функция распределения случайной величины выражается через плотность вероятности.

12. Что такое дисперсия случайной величины? Напишите формулу для дисперсии с помощью плотности вероятности.

13. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 1$. Вычислите вероятность $P(1 \leq X \leq 2)$.

14. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x) = 2x$ при $x \in [0, 1]$; $f(x) = 0$ при $x \notin [0, 1]$. Вычислите m_X .

- **Двумерная случайная величина**

15. Что такое функция распределения двумерной случайной величины (X, Y) ?

16. Выберите правильный вариант: коэффициент корреляции изменяется в диапазоне

а) $0 \leq \rho_{XY} \leq 1$; б) $0 \leq \rho_{XY} \leq +\infty$; в) $-\infty < \rho_{XY} < +\infty$;

г) $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$; д) $-1 < \rho_{XY} < 1$; е) нет правильного ответа.

17. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет функцию распределения $F_{XY}(x, y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})$ при $x \geq 0$ и $y \geq 0$; $F_{XY}(x, y) = 0$ в остальных случаях. Вычислите $F_X(1)$.

- **n -мерная случайная величина. Предельные теоремы**

18. Что по определению означает, что случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ являются взаимно независимыми?

19. Случайная величина X является центрированной и нормированной суммой n одинаково распределенных; взаимно независимых случайных величин с конечной дисперсией, т. е. удовлетворяет условиям центральной предельной теоремы. Пусть ее функция распределения равна $F_n(x)$. К чему она стремится при $n \rightarrow \infty$ в точке $x = 0$?

- **Вопрос с доказательством**

20. Найдите математическое ожидание MX нормальной случайной величины X , распределенной по закону $N(m, \sigma)$.

Контрольный тест 2 по теории вероятностей

- **Алгебра событий**

1. Что такое произведение событий?

2. Упростите выражение $\overline{(A + B)(A + B)}$.

- **Алгебра вероятностей**

3. Что такое относительная частота события? В каких пределах она находится?

4. Запишите формулу для вероятности суммы двух любых событий.

5. Независимо испытываются 2 прибора. Каждый при испытании выходит из строя с вероятностью 0.2. Найти вероятность того, что при испытании из строя выйдет только один прибор.

6. Пусть событие A влечет за собой событие B . Тогда:

а) $P(A) \geq P(B)$; б) $P(A) \leq P(B)$; в) $P(A) > P(B)$; г) $P(A) < P(B)$.

Укажите пункт, в котором записано верное неравенство.

- **Одномерная дискретная случайная величина**

7. Как можно задать закон распределения дискретной случайной величины?

8. Напишите формулу, выражающую закон распределения Пуассона.
9. Производится 4 независимых испытания по схеме Бернулли. В каждом испытании событие A происходит с вероятностью $p = 0.4$. Найдите вероятность, что событие A произойдет точно 2 раза.
10. Случайная величина X имеет ряд распределения: $P(X = 1) = 0.3$; $P(X = 2) = 0.2$; $P(X = 3) = 0.5$. Найдите MX .
- **Одномерная непрерывная случайная величина**
 11. Напишите функцию распределения случайной величины для случая показательного закона с параметром λ .
 12. Что такое математическое ожидание непрерывной случайной величины?
 13. Случайная величина X распределена по нормальному закону $N(1, 3)$. Найдите $D[2X + 1]$.
 14. $f_X(x) = Cx$ при $x \in [0, 2]$; $f_X(x) = 0$ при $x \notin [0, 2]$. Найдите C .
- **Двумерная случайная величина**
 15. Что такое ковариация (корреляционный момент) случайных величин X, Y ?
 16. Укажите необходимое и достаточное условие независимости случайных величин X, Y , зная их функции распределения.
 17. Случайная величина (X, Y) распределена равномерно в квадрате D : $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Запишите формулу для ее плотности вероятности.
- **n -мерная случайная величина. Предельные теоремы**
 18. Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ взаимно независимы и имеют плотности вероятности $f_{X_1}(x_1), f_{X_2}(x_2), \dots, f_{X_n}(x_n)$. Напишите плотность вероятности n -мерной случайной величины $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
 19. Допишите правую часть неравенства Чебышева: $P(|X - m_X| \geq \varepsilon) \leq \dots$
- **Вопрос с доказательством**
 20. Напишите и докажите формулу для $M[X + Y]$.

Контрольный тест 3 по теории вероятностей

- **Алгебра событий**
 1. Что такое полная группа событий?
 2. Если A, B несовместны и составляют полную группу, то чему равны $A + B$ и AB ?
- **Алгебра вероятностей**
 3. Сформулируйте аксиомы, которым удовлетворяет вероятность, из аксиоматического определения вероятности.

4. Допишите правую часть формулы $P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \dots$ для взаимно независи-

мых событий.

5. Прибор состоит из трех блоков, выходящих из строя независимо друг от друга. Блоки за время T могут выйти из строя с вероятностями, равными $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.4$, $p_3 = 0.2$. Для работы прибора необходима работа блока № 3 и хотя бы одного из блоков № 1 или № 2. Найдите вероятность отказа прибора за время T .

6. Партия деталей изготовлена на двух станках. На 1-м станке изготовлено 40 % деталей, а вероятность брака составляет $p_1 = 0.005$. Вероятность брака на втором станке равна $p_2 = 0.003$. Случайным образом взята деталь партии. Найдите вероятность того, что она бракованная.

• **Одномерная дискретная случайная величина**

7. Что такое ряд распределения дискретной случайной величины?

8. Пусть X – число независимых испытаний до первого появления события A . Событие A в каждом испытании появляется с одной и той же вероятностью p . Напишите закон распределения случайной величины X .

9. Проводятся 3 независимых испытания по схеме Бернулли. В каждом испытании событие A происходит с вероятностью $p = 0.6$. Найдите вероятность того, что событие A произойдет точно $k = 2$ раза.

10. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $a = 2$. Чему равно MX ?

• **Одномерная непрерывная случайная величина**

11. Что такое мода непрерывной случайной величины?

12. Напишите плотность вероятности случайной величины, распределенной нормально с параметрами m, σ .

13. $f_X(x) = 2e^{-2x}$ при $x \geq 0$; $f_X(x) = 0$ при $x < 0$. Найдите вероятность $P(1 \leq x \leq 2)$.

14. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 1$. Чему равно MX ?

• **Двумерная случайная величина**

15. Если случайные величины X, Y независимы, то чему равен их коэффициент корреляции?

16. Случайные величины X, Y независимы и распределены одинаково – нормально с параметрами m, σ . Напишите плотность вероятности двумерной случайной величины (X, Y) .

17. Корреляционная матрица двумерной случайной величины (X, Y) равна $K = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. Чему равен коэффициент корреляции ρ_{XY} ?

• **n -мерная случа. на. величина. Предельные теоремы**

18. Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ – взаимно независимы и имеют функции распределения $F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)$. Напишите функцию распределения n -мерной случайной величины $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

19. Сформулируйте теорему Бернулли о приближении относительной частоты к вероятности события.

• **Вопрос с доказательством**

20. Напишите и докажите формулу для вероятности произведения n любых событий.

Контрольный тест 4 по теории вероятностей

• **Алгебра событий**

1. Что означает, что событие A влечет за собой событие B ?

2. Выразите выражение $\overline{A+B}$ через произведение событий по формуле Де Моргана.

• **Алгебра вероятностей**

3. Что означает, что события A и B независимы?

4. Напишите формулу полной вероятности и объясните смысл входящих в нее событий.

5. Два орудия независимо стреляют по одной цели. Вероятность попадания в цель для каждого орудия равна 0.7. Найти вероятность хотя бы одного попадания в цель, если каждое орудие сделало по одному выстрелу.

6. Дано, что $P(\overline{A}B) = 0.5$; $P(A\overline{B}) = 0.3$. Найдите условную вероятность $P(B/A)$.

• **Одномерная дискретная случайная величина**

7. Что такое мода дискретной случайной величины?

8. Составьте ряд распределения (таблицу распределения) для биномиального закона с вероятностью успеха $p = 0.5$ при числе испытаний $n = 3$. Сколько здесь мод? Укажите их.

9. Испытания производятся независимо до появления первого успеха (геометрическая схема испытаний). Вероятность успеха $p = 0.7$. Найдите вероятность того, что испытаний будет более двух.

10. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $\alpha = 4$. Укажите среднее квадратическое отклонение σ_X .

11. Что такое медиана непрерывной случайной величины? Как ее найти?

12. Напишите функцию распределения для равномерного закона распределения на отрезке $[a, b]$.

13. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 2$. Найдите вероятность $P(X > 1)$.

14. $f_X(x) = |x|$ при $x \in [-1, 1]$, $f_X(x) = 0$ при $x \notin [-1, 1]$. Найдите D_X .

• **Двумерная случайная величина**

15. Как найти плотность вероятности $f_{XY}(x, y)$ двумерной непрерывной случайной величины, зная ее функцию распределения?

16. Чему равен коэффициент корреляции ρ_{XY} двумерной случайной величины (X, Y) , если $Y = 1 - 2X$?

17. Случайные величины X, Y независимы, и каждая распределена равномерно на отрезке $[0, 1]$. Составьте плотность вероятности $f_{XY}(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) . Будет ли случайная величина (X, Y) распределена равномерно в квадрате $D = \{x | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$?

• **n -мерная случайная величина. Предельные теоремы.**

18. Что такое функция распределения $F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -мерной случайной величины $(X_1, X_2, \dots, X_n)$?

19. Сформулируйте закон больших чисел (теорема Чебышева) для случая, когда рассматриваемые случайные величины $X_1, \dots, X_n$ попарно независимы, одинаково распределены и имеют конечные математическое ожидание m и дисперсию D .

• **Вопрос с доказательством.**

20. Докажите теорему Пуассона о сходимости биномиального распределения к распределению Пуассона при $n \rightarrow \infty$ (n – число возможных значений биномиальной случайной величины).

ЧАСТЬ 4

КОНСПЕКТ-СПРАВОЧНИК

(опорные сведения по теории вероятностей)

Глава 1

АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

Рассматривается эксперимент E (опыт, испытание, наблюдение). Предполагается, что его можно проводить неоднократно. В результате эксперимента могут появляться различные события, составляющие некоторое множество F .

§ 1. Классификация событий

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет в результате проведения эксперимента E . Достоверное событие обозначается буквой I или Ω .

Невозможным называется событие, которое заведомо не произойдет в результате проведения эксперимента E . Оно обозначается символом пустого множества $\emptyset$.

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате проведения эксперимента E . Случайные события обозначаются первыми буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots$.

Дополнительным, или противоположным событию A , называется событие, обозначаемое $\bar{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A .

Элементарным событием ω называется непосредственный исход эксперимента E .

Множество всех элементарных событий называется пространством элементарных событий и обозначается Ω .

События наглядно иллюстрируются с помощью диаграммы Венна (англ. математик, 1832–1923) (рис. 1.1). Достоверное событие изображается квадратом; случайное событие A – областью внутри квадрата; дополнительное событие $\bar{A}$ – областью внутри квадрата вне области, изображающей событие A (рис. 1.1).

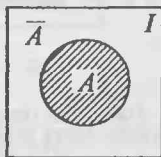


Рис. 1.1

Для того, чтобы диаграммы Венна не казались слишком абстрактными, можно представить себе эксперимент E как стрельбу по мишени, являющейся квадратом, с условием, что выпущенный снаряд обязательно попадет в мишень. Тогда A есть событие, означающее попадание в заданную область. Вместо снаряда можно говорить о случайной точке, бросаемой в квадрат.

§ 2. Действия над событиями

Суммой (или объединением) событий называется событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из данных событий.

Обозначения суммы событий:

алгебраические: $A + B, A + B + C, \sum_k A_k$;

теоретико-множественные: $A \cup B, A \cup B \cup C, \bigcup_k A_k$;

логические: A или B, A или B или C .

На диаграмме Венна сумма событий A и B изображается областью, которая покрывается областями, изображающими события A и B (рис. 1.2).

Произведением (объединением, пересечением) событий называется событие, происходящее тогда и только тогда, когда все данные события происходят вместе (одновременно).

Обозначения произведения событий:

алгебраические: $AB, ABC, \prod_k A_k$;

теоретико-множественные: $A \cap B, A \cap B \cap C, \bigcap_k A_k$;

логические: A и B , A и B и C .

На диаграмме Венна произведение событий AB изображается общей частью областей, изображающих события A и B (рис. 1.3).

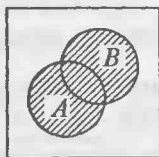


Рис. 1.2

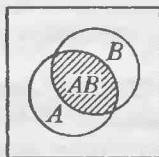


Рис. 1.3

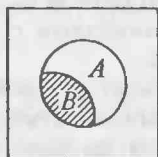


Рис. 1.4

Свойства операций сложения, умножения, дополнения:

$$A + A = A; \quad A + I = I; \quad A + \emptyset = A; \quad AA = A; \quad A\emptyset = \emptyset; \quad (1.1)$$

$$A + B = B + A \text{ — переместительный закон сложения;} \quad (1.2)$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \text{ — сочетательный закон сложения;} \quad (1.3)$$

$$AB = BA \text{ — переместительный закон умножения;} \quad (1.4)$$

$$(AB)C = A(BC) \text{ — сочетательный закон умножения;} \quad (1.5)$$

$$(A + B)C = AC + BC \text{ — распределительный закон;} \quad (1.6)$$

$$\overline{\overline{A}} = A; \quad (1.7)$$

$$\overline{A + B} = \overline{A}\overline{B}; \quad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B} \text{ — правила Де Моргана.} \quad (1.8)$$

События называются несовместными, если их произведение есть невозможное событие: $A_1 A_2 \dots A_n = \emptyset$.

Если события попарно несовместны, то они несовместны и в совокупности.

Полной группой событий называется множество событий, сумма которых есть достоверное событие: $A_1 + A_2 + \dots + A_n = I$.

В частности,

$$A + \overline{A} = I. \quad (1.9)$$

Событие B называется частным случаем события A , если с появлением события B появляется и событие A . Говорят также: событие B влечет за собой событие A , что записывается в виде $B \subset A$.

На диаграмме Венна событие B , влекущее за собой событие A , изображается подобластью области, изображающей A (рис. 1.4).

Элементарное событие ω обладает характеристическим свойством, которое может служить определением элементарного события: каким бы ни было событие A , порожденное экспериментом E , всегда либо $\omega \subset A$, либо $\omega \subset \bar{A}$.

События A и B называются эквивалентными, если они происходят или не происходят совместно при проведении эксперимента E .

Запись эквивалентности событий: $A = B$.

Справедлива формула

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A. \quad (1.10)$$

Глава 2

КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторикой называется раздел математики, посвященный решению задач выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам.

Полученные группы элементов называются соединениями. Они могут отличаться друг от друга как составом элементов и их общим числом, так и порядком следования элементов.

§ 1. Комбинаторный принцип умножения

Пусть требуется выполнить последовательно k операций, при этом первую операцию можно выполнить n_1 способами, вторую — n_2 способами, и т. д., k -ю — n_k способами. Тогда все k операций могут быть выполнены числом способов, равным произведению

$$n_1 n_2 \dots n_k. \quad (2.1)$$

§ 2. Размещения

Определение 2.1. *Размещениями из n элементов по k элементов называются соединения, каждое из которых состоит из k элементов, взятых из данных n элементов. При этом размещения отличаются друг от друга как самими элементами, так и их порядком.*

Число размещений из n элементов по k элементов вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)] \quad (1 \leq k \leq n). \quad (2.2)$$

Замечание 2.1. Имея в виду приложения теории вероятностей к математической статистике, полезно осветить статистический аспект некоторых соединений.

Будем называть исходное множество из n элементов генеральной совокупностью объема n , а соединение, из него построенное, — выборкой объема k . При этом выбранные по одному из генеральной совокупности элементы могут не возвращаться обратно. Тогда такой выбор называется выбором без возвращения. Если же выбранные по одному элементы осматриваются, запоминаются и затем возвращаются в генеральную совокупность, то такой выбор называется выбором с возвращением.

Определение 2.2. Размещениями из n элементов по k элементов называются выборки объема k из генеральной совокупности объема n , полученные выбором без возвращения и отличающиеся друг от друга при повторении выборок как самими элементами, так и порядком их выбора.

§ 3. Перестановки

Определение 2.3. Перестановками из n элементов называются размещения из n элементов по n элементов, отличающиеся друг от друга лишь порядком элементов.

Число перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (2.3)$$

§ 4. Сочетания

Определение 2.4. Сочетаниями из n элементов по k элементов называются соединения, каждое из которых состоит из k элементов, взятых из данных n элементов. Эти соединения отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. В отличие от размещений, порядок следования элементов здесь не учитывается.

Число сочетаний из n элементов по k элементов вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \quad (2.4)$$

Со статистической точки зрения сочетания определяются следующим образом.

Определение 2.5. Сочетаниями из n элементов по k элементов называются выборки объема k из генеральной совокупности объема n , полученные путем выбора без возвращения и без учета следования элементов. Они отличаются друг от друга при повторении выборок хотя бы одним элементом.

Имеют место формулы для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad (2.5)$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}; \quad (2.6)$$

$$C_n^0 = C_n^n = 0! = 1. \quad (2.7)$$

Числа C_n^k называются также биномиальными коэффициентами, так как являются коэффициентами разложения бинома

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k a^{n-k}. \quad (2.8)$$

§ 5. Размещения с повторениями

Определение 2.6. *Размещениями с повторениями из n элементов по k элементов называются соединения, содержащие k элементов, каждый из которых может быть любого из n типов.*

Предполагается, что элементы каждого из n типов содержатся в исходном множестве в любом нужном количестве (подобно кассе букв для набора текстов).

Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и кратностью повторения элементов.

Количество размещений с повторениями из n элементов по k элементов вычисляется по формуле

$$V_n^k = n^k. \quad (2.9)$$

Со статистической точки зрения определение размещения с повторениями звучит следующим образом.

Определение 2.7. *Размещениями с повторениями из n элементов по k элементов называются выборки объема k из генеральной совокупности объема n , произведенные путем выбора с возвращением. При этом при повторении выборок одна выборка от другой может отличаться составом элементов, их порядком и количеством повторений элементов.*

Глава 3 ВЕРОЯТНОСТЬ

Рассматриваются 5 различных определений вероятности, применяемых в соответствующих ситуациях.

§ 1. Классическое определение вероятности

События называются равновероятными, если по условиям эксперимента ни одно из этих событий не является предпочтительным по отношению к другим с точки зрения возможности их появления. Эксперимент E в этом случае обладает «симметрией» исходов по отношению к этим событиям. Таковы исходы бросания монеты, игральной кости, выигрыш каждого из купленных

билетов лотереи, выход из строя каждого испытываемого прибора серии одинаковых приборов и т. д.

Определение 3.1. Эксперимент E называется классическим, если он приводит к множеству событий, удовлетворяющих трем условиям:

- 1) они попарно несовместны,
- 2) образуют полную группу,
- 3) равновозможны.

Эти события называются случаями, или шансами, и обозначаются ω . Они могут быть элементарными событиями.

Определение 3.2. Случай ω называется благоприятным (иначе – благоприятствующим) событию A , если ω влечет за собой A : $\omega \subset A$.

Определение 3.3. Если эксперимент E является классическим, то вероятность события A называется отношением числа m случаев, благоприятствующих событию A , к общему числу n случаев:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (3.1)$$

§ 2. Геометрическое определение вероятности

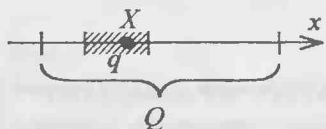


Рис. 3.1

Рассмотрим на оси абсцисс отрезок Q и внутри него отрезок q : $q \subset Q$ (рис. 3.1).

На отрезке Q случайно выбирается точка X . Этот выбор можно интерпретировать как бросание случайной точки X на отрезок Q .

При этом попадание X на Q считается достоверным событием, а попадание на отрезок q – случайным. Также предполагается, что равновозможно попадание X на q , где бы отрезок q ни находился внутри основного отрезка Q , при условии, что длина q фиксирована. Пусть событие $A = (X \in q)$. Тогда по определению

$$P(A) = \frac{\text{мера } q}{\text{мера } Q}. \quad (3.2)$$

Здесь под мерой отрезка понимается его длина.

Формула (3.2) распространяется на плоский и пространственный случаи, но тогда под мерой понимается соответственно площадь или объем рассматриваемых областей.

§ 3. Статистическое определение вероятности

Рассматривается эксперимент E , который можно проводить многократно в стабильных условиях.

Определение 3.4. *Относительной частотой события A называется отношение числа μ экспериментов, в которых появилось событие A , к общему числу n проведенных экспериментов.*

Относительная частота события A обозначается символом $P^*(A)$. Таким образом,

$$P^*(A) = \frac{\mu}{n}. \quad (3.3)$$

Определение 3.5. *Вероятностью события называется число, около которого колеблется относительная частота этого события, приближаясь к нему при увеличении числа экспериментов.*

На практике за вероятность события принимается относительная частота этого события при достаточно большом числе n проведенных экспериментов.

§ 4. Аксиоматическое определение вероятности

Под событием в аксиоматической схеме понимается сумма (объединение) какого-либо множества элементарных исходов:

$$A = \sum_k \omega_k. \quad (3.4)$$

Все рассматриваемые в аксиоматической схеме события образуют множество событий F , называемое полем, иначе – алгеброй, к которому предъявляются следующие требования, обеспечивающие применение понятия вероятности:

1. F содержит достоверное и невозможное события.
2. Если $A_1, A_2, \dots$ (конечное или счетное множество) принадлежат F , то F принадлежит сумма, произведение и дополнения этих событий.

Понятие вероятности строится для всех событий алгебры F .

Определение 3.6 (аксиоматическое). *Вероятностью называется числовая функция $P(A)$ события A , определенная на алгебре F , имеющая свойства 1–4:*

$$1) P(I) = 1; \quad 2) P(\emptyset) = 0; \quad 3) 0 \leq P(A) \leq 1; \quad 4) P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k),$$

если события $A_1, A_2, \dots$ попарно несовместны и образуют конечное или счетное множество.

Приведенное определение является адаптированным аксиоматическим определением вероятности А.Н. Колмогорова. Свойства вероятности 1–4 являются аксиомами. Последняя аксиома 4 носит название «Аксиома сложения».

На основе этих аксиом может быть выведена формула:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (3.5)$$

§ 5. Субъективное определение вероятности

Определение 3.7. *Субъективными вероятностями событий называются вероятности, удовлетворяющие аксиомам 1–4 аксиоматического определения, приписанные событиям на основе личного опыта экспертов.*

С помощью экспертов оцениваются тенденции развития экономики, науки, техники, исходы той или иной политической ситуации, результаты спортивных состязаний, военных действий и т. д.

Заключительное замечание к главе 3. Все вероятности, введенные по определениям §1–5, обладают свойствами 1–4 аксиоматического определения. В аксиоматическом определении эти свойства являются аксиомами, а в классическом, геометрическом, статистическом определениях могут быть доказаны на основе формул (3.1), (3.2), (3.3).

Глава 4

АЛГЕБРА ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Условная вероятность

Определение 4.1. Пусть A и B – два события, порожденные опытом E , причем $P(B) \neq 0$. Число

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (4.1)$$

называется вероятностью события A при условии, что наступило событие B , или просто условной вероятностью события A .

Вероятность $P(A)$ в отличие от условной вероятности $P(A/B)$ называется безусловной.

Замечание 4.1. При аксиоматическом определении вероятности формула (4.1) является определением и доказательству не подлежит. Однако при конструктивных определениях вероятности (классическом, геометрическом) она может быть доказана.

§ 2. Правило умножения вероятностей

Формула (4.1) равносильна формуле $P(AB) = P(B)P(A/B)$. По симметрии вхождения букв в выражение $P(AB)$ имеет место и вторая формула $P(AB) = P(A)P(B/A)$. Обе формулы объединяются в одну и составляют правило (иначе – теорему) умножения вероятностей двух любых событий:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B), \quad (4.2)$$

которое формулируется следующим образом.

Вероятность произведения двух любых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго при условии, что первое произошло.

В случае n событий имеет место более общая формула

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1}), \quad (4.3)$$

которая составляет теорему умножения вероятностей n любых событий.

§ 3. Независимость событий.

Правило умножения вероятностей взаимно независимых событий

Определение 4.2. Два события называются независимыми, если условная вероятность любого из них равна безусловной, т. е. выполняются равенства

$$P(A/B) = P(A), \quad P(B/A) = P(B). \quad (4.4)$$

Понятие независимости n событий ($n > 2$) опирается на понятие независимости двух событий.

Определение 4.3. События $A_1, A_2, \dots, A_k$ называются взаимно независимыми (иначе – независимыми в совокупности), если каждое из них не зависит от произведения любого числа остальных событий и от каждого в отдельности.

В этом случае все условные вероятности в формуле (4.3) равны безусловным, и формула упрощается:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n). \quad (4.5)$$

Формула (4.5) выражает правило умножения вероятностей для n взаимно независимых событий. При $n = 2$ она принимает вид:

$$P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2). \quad (4.6)$$

Данная формула также является необходимым и достаточным условием независимости двух событий.

§ 4. Правила сложения вероятностей

Аксиома сложения вероятностей

$$P\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k P(A_k) \quad (4.7)$$

выражает правило сложения вероятностей для попарно несовместных событий. Если же события совместны, то формула (4.7) усложняется. Для двух событий она имеет вид

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (4.8)$$

Для трех событий:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \quad (4.9)$$

Формула сложения вероятностей для n взаимно независимых событий:

$$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^n [1 - P(A_k)]. \quad (4.10)$$

§ 5. Формулы полной вероятности и Байеса

Пусть событие A может наступить только с одним из n попарно несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, составляющих полную группу:

$$H_i H_k = \emptyset \text{ при } i \neq k; \quad H_1 + H_2 + \dots + H_n = I.$$

Эти события называются гипотезами. Тогда имеет место формула полной (иначе – средней) вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n). \quad (4.11)$$

Если появляется дополнительное условие того, что событие A произошло, то первоначальные вероятности $P(H_k)$ гипотез могут быть переоценены по формуле Байеса

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n)} \quad (k=1, \dots, n). \quad (4.12)$$

Вероятности $P(H_k)$ называются априорными (доопытными), а $P(H_k/A)$ – апостериорными (послеопытными) ($k=1, \dots, n$).

§ 6. Схема Бернулли проведения независимых испытаний.

Биномиальная вероятность

Схема Бернулли проведения независимых испытаний состоит в том, что независимо проводится n испытаний (опытов), в каждом из которых наблюдаемое событие A появляется с вероятностью p ($0 < p < 1$) и не появляется с вероятностью $q = 1 - p$.

Формула

$$P_{n,k}(p) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0, 1, \dots, n, \quad 0 < p < 1, \quad (4.13)$$

выражает вероятность того, что в результате проведенных n независимых испытаний событие A появится точно k раз.

Вероятности (4.13) называются биномиальными, а сама формула – формулой Бернулли. Биномиальные вероятности являются членами разложения бинома

$$(q + p)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k}.$$

§ 7. Приближенная формула Пуассона для вычисления биномиальной вероятности

Приближенная формула Пуассона имеет вид

$$P_{n,k}(p) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}; \quad a=np, \quad k=0,1,2,\dots,n. \quad (4.14)$$

Эта формула применяется при больших n и малых p . Погрешность формулы имеет порядок $1/n$, а сама формула является следствием предельной теоремы Пуассона.

Теорема Пуассона. Если $p_n = a/n$, где a — положительная постоянная, то при любом фиксированном k

$$P_{n,k}(p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a^k}{k!} e^{-a}. \quad (4.15)$$

Глава 5

ОДНОМЕРНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Случайные величины могут быть одномерными и многомерными. В пределах гл. 5 одномерные случайные величины будут называться просто случайными величинами.

§ 1. Определение случайной величины

Определение 5.1. Случайной величиной X называется числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω , которая каждому элементарному событию ω ставит в соответствие определенное число.

При этом предполагаются определенными вероятности событий $X < x$ для любых вещественных чисел x .

Случайные величины обозначаются буквами $X, Y, Z, \dots$ латинского алфавита.

Определение 5.2. Законом распределения случайной величины называется любое правило, указывающее вероятности отдельных значений случайной величины или множества этих значений.

Определение 5.3. Функцией распределения случайной величины X называется функция $F_X(x)$, которая для любого вещественного числа x равна вероятности события $X < x$:

$$F_X(x) = P(X < x). \quad (5.1)$$

Свойства функции распределения $F(x)$:

1. $F(-\infty) = 0$.
2. $F(+\infty) = 1$.

3. $F(x)$ – неубывающая функция.

4. $F(x)$ непрерывна слева в любой точке x : $F(x-0) = F(x)$.

5. $P(a \leq x < b) = F(b) - F(a)$.

Функция распределения $F_X(x)$ является полной вероятностной характеристикой случайной величины X , т. е. одним из видов закона распределения случайной величины X .

Первые 4 свойства функции распределения являются характеристическими. Это означает, что функция, обладающая этими свойствами, является функцией распределения некоторой случайной величины.

Вместо термина «закон распределения» часто употребляют более простой термин «распределение».

§ 2. Дискретная случайная величина

Определение 5.4. Случайная величина называется дискретной, иначе – дискретного типа, если множество ее значений может быть пронумеровано натуральными числами (т. е. оно конечно или счетное).

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать несколькими способами.

1. Формула

$$p_k = P(X = x_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

определяет вероятности значений дискретной случайной величины X .

2. Последовательность пар $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$ образует так называемый ряд распределения.

3. Таблица распределения

X	x_1	x_2	$\dots$	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	$\dots$	p_n

удобна как закон распределения в случае конечного числа значений.

4. Полигон (многоугольник) распределения (рис. 5.1) наглядно представляет таблицу распределения.

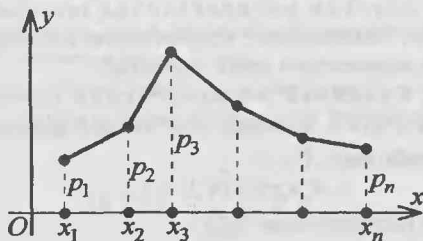


Рис. 5.1

5. Функция распределения:

$$F_X(x) = P(X < x) = \sum_{x_k < x} p_k. \quad (5.3)$$

Здесь суммирование распространяется на те значения k , для которых $x_k < x$.

Обратим внимание на формулу

$$\sum_k p_k = 1. \quad (5.4)$$

Графиком функции распределения является ступенчатая линия со скачками p_k в точках x_k , $k = 1, 2, \dots$ (рис. 5.2).

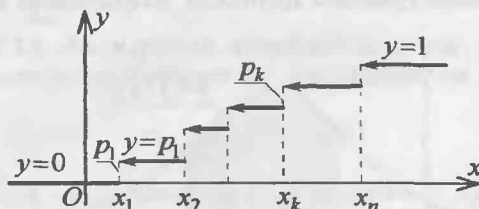


Рис. 5.2

§ 3. Непрерывная случайная величина

Определение 5.5. Случайная величина X называется непрерывной, если существует такая неотрицательная функция $f(x)$, называемая плотностью распределения вероятностей, что вероятность попадания случайной величины в промежуток $[a, b]$ равна определенному интегралу от плотности по этому промежутку:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (5.5)$$

Плотность распределения вероятностей короче называется плотностью распределения, плотностью вероятности или просто плотностью.

Для непрерывной случайной величины вероятность события $X = c$ равна нулю, поэтому

$$P(X \in [a, b]) = P(X \in (a, b)) = P(X \in [a, b)) = P(X \in (a, b]).$$

Свойства плотности вероятности: это неотрицательная, заданная на всей оси функция, нормированная условием

$$\int_a^b f(x) dx = 1. \quad (5.6)$$

Функция распределения и плотность вероятности связаны равенствами:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt; \quad (5.7)$$

$$f(x) = F'(x). \quad (5.8)$$

Формула (5.8) справедлива во всех точках непрерывности плотности.

Функция распределения непрерывной случайной величины называется также ее интегральным законом распределения, а плотность – ее дифференциальным законом.

Формула (5.5) имеет геометрический смысл. Это площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности, опирающейся на отрезок $[a, b]$ (рис. 5.3).

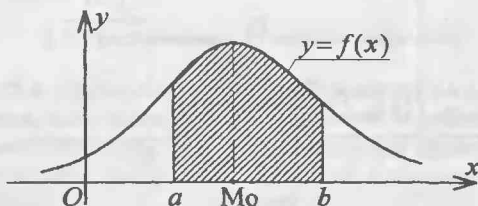


Рис. 5.3

§ 4. Числовые характеристики случайной величины

Определение 5.6. Числовыми характеристиками случайной величины называются специальные числа, характеризующие отдельные свойства закона распределения.

К ним относятся характеристики положения: математическое ожидание, мода, медиана, квантили; характеристики рассеяния: дисперсия, среднее квадратическое отклонение и другие.

Определение 5.7. Математическое ожидание случайной величины X определяется формулами

$$m_X = \sum_k x_k p_k \text{ в дискретном случае,} \quad (5.9)$$

$$m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \text{ в непрерывном случае.} \quad (5.10)$$

В этих формулах ряд и интеграл предполагаются абсолютно сходящимися. В противном случае считают, что случайная величина не имеет математического ожидания.

Другие обозначения математического ожидания: MX , $M[X]$.

Вероятностный смысл математического ожидания состоит в том, что это среднее значение случайной величины.

Свойства математического ожидания:

1. $MC = C$ (C – постоянная, т. е. неслучайная величина).

2. $M[CX] = CM[X]$.

3. $M\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \sum_{k=1}^n M[X_k]$.

4. $M\left[\prod_{k=1}^n X_k\right] = \prod_{k=1}^n M[X_k]$ для взаимно независимых случайных величин.

Определение 5.8. *Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания:*

$$D_X = M[(X - m_X)^2]. \quad (5.11)$$

Величина $\dot{X} = X - m_X$ называется отклонением X от ее математического ожидания.

Другие обозначения дисперсии: DX , $D[X]$.

Дисперсия имеет размерность квадрата размерности самой случайной величины.

Величина

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} \quad (5.12)$$

называется средним квадратическим отклонением случайной величины. Она имеет размерность такую же, как X , поэтому во многих вопросах удобнее, чем D_X .

D_X и σ_X – это числовые характеристики рассеяния случайной величины X . Формулы для вычисления дисперсии:

$$DX = M[X^2] - m_X^2; \quad (5.13)$$

$$DX = \sum_k (x_k - m_k)^2 p_k \text{ в дискретном случае,} \quad (5.14)$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f(x) dx \text{ в непрерывном случае.} \quad (5.15)$$

Свойства дисперсии:

1. $DC = 0$ ($C = \text{const}$).

2. $D[CX] = C^2 D[X]$.

3. $D\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \sum_{k=1}^n D[X_k]$ для попарно независимых случайных величин.

Математическое ожидание функции $\varphi(X)$ случайной величины X вычисляется по формулам:

$$M[\varphi(X)] = \sum_k \varphi(x_k) p_k \text{ в дискретном случае;} \quad (5.16)$$

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \text{ в непрерывном случае.} \quad (5.18)$$

В частности,

$$M[X^2] = \sum_k x_k^2 p_k \text{ в дискретном случае;} \quad (5.19)$$

$$M[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \text{ в непрерывном случае.} \quad (5.20)$$

Определение 5.9. *Квантилью порядка p непрерывной случайной величины X называется ее значение x_p , являющееся корнем уравнения*

$$F(x) = p. \quad (5.21)$$

Квантиль порядка $p = 1/2$ называется медианой, порядка $p = 1/4$ — нижней квартилью, порядка $p = 3/4$ — верхней квартилью.

Медиана распределения Me обладает свойством

$$P(X < Me) = P(X > Me). \quad (5.22)$$

Медиана случайной величины X обозначается также символом $Me X$.

Определение 5.10. *Модой дискретной случайной величины называется ее значение, принимаемое с наибольшей вероятностью по сравнению с двумя соседними значениями.*

Модой непрерывной случайной величины называется точка максимума ее плотности вероятности (рис. 5.3).

Обозначения моды: Mo , $Mo X$.

§ 5. Канонические дискретные распределения

1. Индикатор события A есть случайная величина $I(A)$, равная 1, если событие A произошло, и равная 0, если не произошло. При этом $P(A) = p$. Тогда получаем таблицу распределения:

$I(A)$	0	1
P	q	p

, $q = 1 - p$.

$$M[I(A)] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

2. Биномиальное распределение определяется формулой:

$$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0, 1, \dots, n, \quad q=1-p, \quad 0 < p < 1. \quad (5.23)$$

Случайная величина X есть число появлений события A при n независимых испытаниях по схеме Бернулли. Справедливы формулы:

$$MX = np; \quad DX = npq. \quad (5.24)$$

3. Распределение Пуассона определяется формулой:

$$P(X=k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k=0, 1, 2, \dots; \quad a > 0. \quad (5.25)$$

При этом

$$MX = DX = a. \quad (5.26)$$

4. Геометрическое распределение определяется формулой:

$$P(X=k) = pq^{k-1}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (5.27)$$

Случайная величина X есть число испытаний в так называемой «геометрической схеме испытаний»: независимые испытания проводятся до первого появления события A . При этом событие A в каждом испытании может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q=1-p$.

Вероятности (5.27) являются членами геометрической прогрессии, от чего и происходит название распределения.

Имеют место формулы

$$MX = \frac{1}{p}; \quad DX = \frac{q}{p^2}. \quad (5.28)$$

§ 6. Канонические одномерные непрерывные распределения

1. Нормальное распределение (закон Гаусса) определяется плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (5.29)$$

Краткое обозначение нормального закона: $N(m, \sigma)$. Для него справедливы формулы:

$$m_X = m; \quad D_X = \sigma^2; \quad (5.30)$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = 0.5 + \Phi_0\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \quad (5.31)$$

Здесь

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt - \text{функция Лапласа}, \quad (5.32)$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt - \text{нормированная функция Лапласа.} \quad (5.33)$$

Для этих функций справедливы формулы

$$\Phi(x) = 0.5 + \Phi_0(x); \quad (5.34)$$

$$\Phi_0(0)=0, \Phi_0(-x)=-\Phi_0(x); \Phi(-x)=1-\Phi(x); \Phi_0(+\infty)=0.5, \Phi(+\infty)=1. \quad (5.35)$$

График $\Phi_0(x)$ представлен на рис. 5.4, а ее производной

$$\varphi(x) = \Phi'_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \text{ (функция Гаусса) — на рис. 5.5.}$$

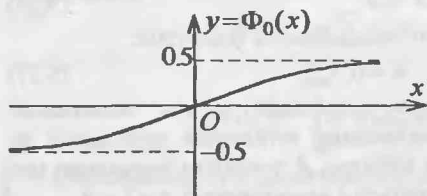


Рис. 5.4

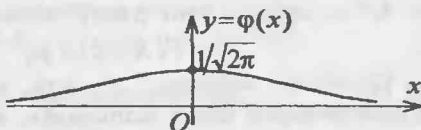


Рис. 5.5

Таблица значений нормированной функции Лапласа $\Phi_0(x)$ помещена в конце книги.

Справедливы формулы для нормального распределения:

$$P(|X - m| < \lambda) = 2\Phi_0(\lambda); \quad (5.36)$$

$$P(|X - m| < \sigma) = 2\Phi_0(1) \approx 0.6827; \quad (5.37)$$

$$P(|X - m| < 2\sigma) = 2\Phi_0(2) \approx 0.9545; \quad (5.38)$$

$$P(|X - m| < 3\sigma) = 2\Phi_0(3) \approx 0.9973. \quad (5.39)$$

Формула (5.39) определяет так называемое «правило трех сигм»: практически достоверно, что все значения нормальной случайной величины содержатся в интервале $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$.

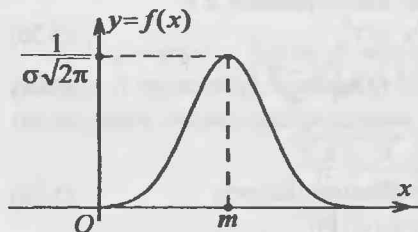


Рис. 5.6

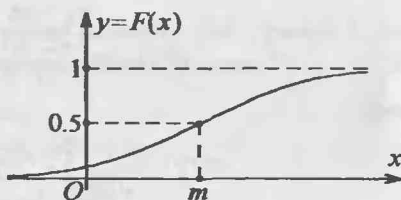


Рис. 5.7

Типовой график плотности нормальной случайной величины представлен на рис. 5.6. График функции распределения нормальной случайной величины представлен на рис. 5.7.

2. Показательное (экспоненциальное) распределение определяется плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0). \quad (5.40)$$

Справедливы формулы

$$m_X = \sigma_X = 1/\lambda, \quad (5.41)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (5.42)$$

Графики плотности вероятности и функции распределения показательного закона представлены соответственно на рис. 5.8 и рис. 5.9.

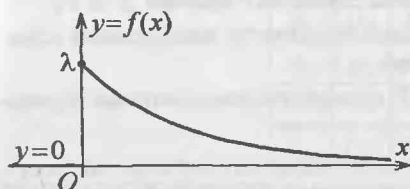


Рис. 5.8

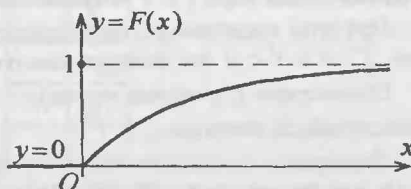


Рис. 5.9

3. Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$ определяется плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } x \in [a, b]; \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (5.43)$$

Для него справедливы формулы

$$m_X = \frac{b+a}{2}, \quad D_X = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad (5.44)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{при } x \geq b. \end{cases} \quad (5.45)$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ для равномерного распределения представлены соответственно на рис. 5.10 и рис. 5.11.

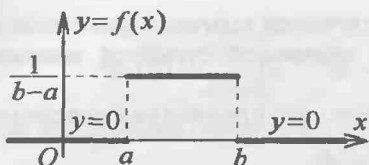


Рис. 5.10

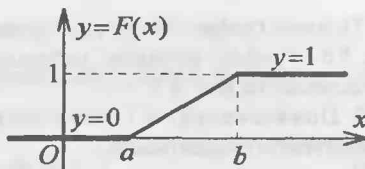


Рис. 5.11

Глава 6

ДВУМЕРНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

§ 1. Двумерная случайная величина, ее функция распределения

Определение 6.1. Двумерной случайной величиной называется упорядоченная пара (X, Y) двух одномерных случайных величин X и Y .

При этом предполагаются определенными вероятности произведения событий $X < x$ и $Y < y$ для любых вещественных x, y .

Одномерные случайные величины X, Y называются компонентами двумерной случайной величины (X, Y) .

Двумерную случайную величину называют также случайным двумерным вектором, случайной двумерной точкой, системой двух случайных величин.

Определение 6.2. Функцией распределения $F_{XY}(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) называется вероятность произведения событий $X < x$ и $Y < y$, определенная для любых вещественных x, y :

$$F_{XY}(x, y) = P(X < x, Y < y). \quad (6.1)$$

Функция $F_{XY}(x, y)$ для краткости называется двумерной функцией распределения.

Свойства двумерной функции распределения:

1. $F_{XY}(-\infty, y) = 0$; $F_{XY}(x, -\infty) = 0$.
2. $F_{XY}(+\infty, +\infty) = 1$.
3. $F_{XY}(x, +\infty) = F_X(x)$; $F_{XY}(+\infty, y) = F_Y(y)$.
4. $F_{XY}(x, y)$ не убывает по каждому из своих аргументов при фиксированном другом аргументе.

Формулы (6.3) называются формулами согласованности (общего вида). Они означают, что из функции распределения двумерной случайной величины можно получить функции распределения ее одномерных компонент.

§ 2. Дискретная двумерная случайная величина

Определение 6.3. Двумерная случайная величина называется дискретной, если множество ее значений (x, y) – конечное или счетное.

Закон распределения вероятностей двумерной дискретной случайной величины (X, Y) можно задать формулой

$$P(X = x_i, Y = y_k) = p_{ik} \quad (i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n). \quad (6.4)$$

При этом выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n p_{ik} = 1. \quad (6.5)$$

Формулу (6.4) в случае конечности чисел m и n можно оформить в виде таблицы распределения:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mn}

Формулы согласованности для дискретной случайной величины имеют вид

$$p_{i\bullet} = \sum_{k=1}^n p_{ik}, \quad p_{\bullet k} = \sum_{i=1}^m p_{ik}, \quad (6.6)$$

где $p_{i\bullet} = P(X = x_i)$, $i = 1, \dots, m$, $p_{\bullet k} = P(Y = y_k)$, $k = 1, \dots, n$ – одномерные законы распределения компонент случайной величины.

Функция распределения дискретной двумерной случайной величины записывается в виде

$$F_{XY}(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_k < y} p_{ik}. \quad (6.7)$$

Здесь суммирование распространяется на те значения i и k , для которых выполняются неравенства $x_i < x$, $y_k < y$.

§ 3. Непрерывная двумерная случайная величина

Определение 6.4. Двумерная случайная величина (X, Y) называется непрерывной, если существует такая неотрицательная функция $f_{XY}(X, Y)$, называемая двумерной плотностью вероятности, что вероятность попадания случайной величины (X, Y) в область D равна двойному интегралу от плотности по области D :

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f_{XY}(x, y) dx dy. \quad (6.8)$$

Из формулы (6.8) следует выражение для функции распределения двумерной непрерывной случайной величины:

$$F_{XY}(x, y) = P(-\infty < X < x, -\infty < Y < y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(x, y) dx dy. \quad (6.9)$$

Свойства двумерной плотности вероятности:

1. Определена на всей плоскости xOy .

2. $\frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} = f_{XY}(x, y)$ в каждой точке непрерывности плотности.

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = f_X(x); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx = f_Y(y). \quad (6.10)$$

Формулы (6.10) носят название «формулы согласованности для плотностей».

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1. \quad (6.11)$$

§ 4. Зависимость и независимость двух случайных величин

Определение 6.5. Случайные величины X, Y называются независимыми, если независимыми являются события $X < x$ и $Y < y$ для любых вещественных x, y . В противном случае случайные величины X, Y называются зависимыми.

Общее необходимое и достаточное условие независимости двух случайных величин:

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \quad (6.12)$$

где x, y – любые вещественные числа.

Необходимое и достаточное условие независимости двух непрерывных случайных величин:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \quad (6.13)$$

где x, y – любые вещественные числа.

Необходимое и достаточное условие независимости двух дискретных случайных величин:

$$P_{ik} = P_{i\bullet} \cdot P_{\bullet k}, \quad (6.14)$$

где $i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$.

§ 5. Корреляционный момент и коэффициент корреляции

Корреляционный момент и коэффициент корреляции являются числовыми характеристиками связи между случайными величинами.

Определение 6.6. Корреляционным моментом K_{XY} , иначе – ковариацией двух случайных величин X, Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих случайных величин от их математических ожиданий:

$$K_{XY} = M[(X - m_X)(Y - m_Y)]. \quad (6.15)$$

Формулы для вычисления K_{XY} :

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f_{XY}(x, y) dx dy \quad (6.16)$$

– для непрерывных случайных величин,

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (x_i - m_X)(y_k - m_Y) p_{ik} \quad (6.17)$$

– для дискретных случайных величин.

Определение 6.7. Коэффициентом корреляции ρ_{XY} двух случайных величин X, Y называется отношение их корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений:

$$\rho_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (6.18)$$

Определение 6.8. Если $K_{XY} = 0$, то случайные величины X, Y называются некоррелированными.

Свойства корреляционного момента и коэффициента корреляции:

1. $K_{XY} = M[XY] - m_X m_Y. \quad (6.19)$

2. $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1.$

3. Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы. Обратное неверно: существуют зависимые некоррелированные случайные величины.

4. Для случайных величин $X, Y = aX + b$, связанных линейной зависимостью, $\rho_{XY} = 1$ при $a > 0$ и $\rho_{XY} = -1$ при $a < 0$.

5. Если $|\rho_{XY}| = 1$, то случайные величины X, Y связаны линейной зависимостью с вероятностью 1.

Замечание 6.1. Величина $M[XY]$, входящая в формулу (6.19), вычисляется по формуле

$$M[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy \text{ в непрерывном случае,} \quad (6.20)$$

$$M[XY] = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n x_i y_k p_{ik} \text{ в дискретном случае.} \quad (6.21)$$

Для двумерной случайной величины (X, Y) наиболее употребительными числовыми характеристиками являются:

1. m_X, m_Y – математические ожидания компонент – их средние значения.
2. σ_X, σ_Y – средние квадратические отклонения компонент – характеристики рассеяния компонент.
3. ρ_{XY} – коэффициент корреляции – характеристика связи компонент.

Величина $M[XY]$ называется вторым смешанным начальным моментом, а K_{XY} – вторым смешанным центральным моментом.

§ 6. Канонические двумерные непрерывные распределения

1. Двумерное равномерное распределение в области D определяется плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{S_D} & \text{при } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin D, \end{cases} \quad (6.22)$$

где S_D – площадь области D .

2. Двумерное нормальное распределение определяется плотностью вероятности

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}, \quad (6.23)$$

где m_1, m_2 – математические ожидания компонент X, Y ; а σ_1, σ_2 – средние квадратические отклонения компонент; $\rho = \rho_{XY}$ – коэффициент корреляции между компонентами двумерной случайной величины X, Y .

Доказано, что компоненты X, Y распределены нормально соответственно по законам $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$, а равенство $\rho = 0$ является необходимым и достаточным условием независимости компонент X, Y .

§ 1. Основные понятия и формулы

Определение 7.1. ****n*-мерной случайной величиной называется система *n* одномерных случайных величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. При этом предполагается, что определена вероятность произведения *n* событий $X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n$ для любых вещественных $x_1, \dots, x_n$.***

Вместо термина «*n*-мерная случайная величина» употребляются термины: *n*-мерная случайная точка, *n*-мерный случайные вектор, система *n* случайных величин.

Определение 7.2. ****n*-мерной функцией распределения называется вероятность произведения *n* событий $X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n$ для любых вещественных $x_1, \dots, x_n$:***

$$F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n). \quad (7.1)$$

Определение 7.3. ****n*-мерная случайная величина называется дискретной, если множество ее значений конечно или счетное.***

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать формулой, определяющей вероятности отдельных значений.

Определение 7.4. ****n*-мерная случайная величина называется непрерывной, если существует такая неотрицательная функция $f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$, называемая плотностью вероятности, что вероятность попадания случайной точки $(X_1, \dots, X_n)$ в *n*-мерную область *D* равна *n*-кратному интегралу от плотности по области *D*:***

$$P((X_1, \dots, X_n) \in D) = \int \dots \int_D f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (7.2)$$

Из формулы (7.2) следует формула для функции распределения *n*-мерной непрерывной случайной величины:

$$F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1 \dots X_n}(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n. \quad (7.3)$$

Плотность вероятности во всех точках непрерывности плотности выражается через функцию распределения по формуле

$$f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \quad (7.4)$$

Определение 7.5. ***Случайные величины $X_1, \dots, X_n$ называются взаимно независимыми, иначе – независимыми в совокупности, если взаимно независимыми являются события $X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n$ для любых $x_1, \dots, x_n$.***

Необходимое и достаточное условие взаимной независимости n случайных величин $X_1, \dots, X_n$:

$$F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n), \quad (7.5)$$

где $x_1, \dots, x_n$ – любые вещественные числа; $F_{X_k}(x_k)$ – функция распределения случайной величины X_k , $k = 1, \dots, n$.

Необходимое и достаточное условие взаимной независимости n непрерывных случайных величин:

$$f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n), \quad (7.6)$$

где $x_1, \dots, x_n$ – любые вещественные числа; $f_{X_k}(x_k)$ – плотность вероятности случайной величины X_k , $k = 1, \dots, n$.

Теорема 7.1. Если случайные величины $X_1, \dots, X_n$ – попарно некоррелированы, то дисперсия их суммы равна сумме дисперсий этих величин:

$$D\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \sum_{k=1}^n D[X_k]. \quad (7.7)$$

§ 2. Числовые характеристики n -мерной случайной величины

В пределах первых двух моментов наиболее употребительными числовыми характеристиками n -мерной случайной величины являются следующие:

1. n математических ожиданий компонент n -мерной случайной величины ($X_1, \dots, X_n$), образующих ее центр распределения ($m_1, \dots, m_n$). Это точка n -мерного пространства, около которой группируются значения n -мерной случайной величины.

2. n дисперсий компонент n -мерной случайной величины

$$D_i = M[(X_i - m_i)^2], \quad i = 1, \dots, n,$$

характеризующих ее рассеяние в направлении координатных осей.

3. $n(n-1)$ корреляционных моментов всевозможных пар X_i, X_j , характеризующих связь между компонентами n -мерной случайной величины:

$$K_{ij} = M[(X_i - m_i)(X_j - m_j)], \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Все корреляционные моменты и дисперсии удобно записать в виде матрицы

$$(K_{ij}) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется ковариационной. По ее главной диагонали стоят дисперсии компонент, так как $K_{ii} = D_i$, $i = 1, \dots, n$.

Ковариационная матрица — симметрическая, поскольку $K_{ij} = K_{ji}$,
 $i, j = 1, \dots, n$.

Глава 8 ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 1. Закон больших чисел

Неравенство Чебышева. Если случайная величина X имеет конечные математическое ожидание m_X и дисперсию D_X , то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P(|X - m_X| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_X}{\varepsilon^2}. \quad (8.1)$$

Оно дает оценку вероятности попадания случайной величины X в область, лежащую вне промежутка $(m_X - \varepsilon, m_X + \varepsilon)$. Неравенство Чебышева применяется непосредственно в математической статистике, а также для доказательства следующей теоремы Чебышева.

Теорема Чебышева для случая одинаково распределенных слагаемых 8.1. Пусть случайные величины $X_1, \dots, X_n$ попарно независимы, одинаково распределены, имеют конечные математическое ожидание m и дисперсию D . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполняется предельное соотношение

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (8.2)$$

Теорема Чебышева носит название закона больших чисел.

Определение 8.1. Последовательность случайных величин $X_1, \dots, X_n, \dots$ называется сходящейся по вероятности к величине A (случайной или нет), если для любого $\varepsilon > 0$ имеет место предельное соотношение

$$P(|X_n - A| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (8.2)$$

Запись: $X_n \xrightarrow{P} A$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = A$.

Теорема Бернулли 8.2. Относительная частота $P^*(A)$ события A при n независимых испытаниях по схеме Бернулли стремится по вероятности к вероятности события A при $n \rightarrow \infty$:

$$P^*(A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} P(A). \quad (8.4)$$

Теорема Бернулли является следствием теоремы Чебышева.

§ 2. Центральная предельная теорема теории вероятностей

Определение 8.2. Случайная величина X называется *центрированной и нормированной*, если $MX = 0$ и $DX = 1$.

Любую случайную величину X с конечной дисперсией σ_X^2 и математическим ожиданием m_X можно центрировать и нормировать с помощью операции

$$\frac{X - m_X}{\sigma_X}.$$

Теорема (центральная предельная теорема для случая одинаково распределенных слагаемых) 8.3. Пусть случайные величины $X_1, \dots, X_n$ взаимно независимы, одинаково распределены, имеют конечные математическое ожидание m и дисперсию σ^2 . Тогда функция распределения центрированной и нормированной суммы этих случайных величин

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - M\left[\sum_{k=1}^n X_k\right]}{\sqrt{D\left[\sum_{k=1}^n X_k\right]}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - mn}{\sigma\sqrt{n}} \quad (8.5)$$

стремится при $n \rightarrow \infty$ к функции распределения нормальной случайной величины с параметрами 0 и 1 (при любом фиксированном x):

$$F_{Y_n} = P(Y_n < y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x). \quad (8.6)$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа.

Теорема (интегральная теорема Муавра – Лапласа) 8.4. Пусть μ — число появлений события A в n независимых испытаниях по схеме Бернулли, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p ($0 < p < 1$, $q = 1 - p$). Тогда для любых a и b , $a < b$, имеет место предельное соотношение

$$P\left(a \leq \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b e^{-t^2/2} dt = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (8.7)$$

Здесь $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

На интегральной теореме Муавра – Лапласа основана интегральная приближенная формула Муавра – Лапласа, применяемая для приближенного вычисления сумм биномиальных вероятностей:

$$\sum_{k=0}^m P_{n,k}(p) \approx \Phi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right). \quad (8.8)$$

Формула (8.8) применяется при таких больших n и малых p , чтобы число $\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ было средним – в пределах таблицы значений аргумента для функции Лапласа, т. е. от 0 до 5.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТАМ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1. 1. $1/3 \approx 0.333$; 2.3. $49/512 \approx 0.096$; 3.1. 0.017; 3.2. 0.399; 4.1. 0.420; 4.2. 0.423; 5.2. 0.469; 5.3. 3.69; 6.1. $3/\pi$; 6.3. $(3/\pi)\ln 2 \approx 0.662$; 6.4. $(3\sqrt{3})/\pi - 1 - 9(\ln 2)^2/\pi^2 = 1.092$; 6.5. 1.045; 6.6. 0.208; 6.7. $1/\sqrt{3} \approx 0.577$; 7. $\sigma_X \leq 0.00194$; 8. 0.33; 9.3. $m_X = m_Y = 1/3$; 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = 1/(3\sqrt{2}) \approx 0.236$; 9.5. -0.5; 9.6. Зависимы.

Вариант 2. 1. $47/90 \approx 0.522$; 2.3. $17/32 \approx 0.531$; 3.1. 0.38; 3.2. $5/19 \approx 0.263$; 4.1. 0.272; 4.2. 0.0425; 5.1. 0.605; 5.2. 4.50; 6.1. $1/\pi$; 6.3. 0; 6.4. $1/2$; 6.5. $1/\sqrt{2} \approx 0.707$; 6.6. $1/2$; 6.7. $-1/\sqrt{2} \approx -0.707$; 7. 38.3%, 30.8%; 8. 0.38; 9.1. 2; 9.3. $m_X = m_Y = 13/20 = 0.65$; 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{31}/20 \approx 0.278$; 9.5. $-9/31 \approx -0.290$; 9.6. Зависимы.

Вариант 3. 1. $4/11 \approx 0.364$; 2.3. $25/256 \approx 0.098$; 3.1. 0.93; 3.2. $4/7 \approx 0.571$; 4.1. 0.1476; 4.2. $3e^{-3} \approx 0.1494$; 4.3. $\Delta = 0.0018$; $\delta = 0.012 \sim 1.2\%$; 5.2. 0.314; 5.3. 2.273; 6.1. 0.5; 6.3. $\operatorname{sh} 1 \approx 1.175$; 6.4. $0.5(1 - e^{-2}) \approx 0.432$; 6.5. 0.658; 6.6. 0.419; 6.7. 1; 7. $\sigma_X \leq 12.2$ (мкм); 8. 0.44; 9.3. $m_X = 4/\pi$; $m_Y = 8/(3\pi)$; 9.4. $\sigma_X = 1.5\sigma_Y = \sqrt{9\pi^2 - 64}/(2\pi) \approx 0.793$; 9.5. -0.300; 9.6. Зависимы.

Вариант 4. 1. $9/49 \approx 0.184$; 2.3. $43/64 \approx 0.672$; 3.1. 0.93; 3.2. $9/93 \approx 0.097$; 4.1. 0.0461; 4.2. 0.0497; 4.3. $\Delta = 0.0036$; $\delta = 0.078 \sim 8\%$; 5. $m_X = 14.5$; $m_Y = 6.9$; 6.1. 0.5; 6.3. 0; 6.4. $2/3 \approx 0.667$; 6.5. 0.816; 6.6. 0.652; 6.7. $-2 + \sqrt{2} \approx -0.586$; 7. 0.700; 8. 0.39; 9.1. 4; 9.3. $m_X = m_Y = 2/3$; 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = 1/(3\sqrt{2}) \approx 0.236$; 9.5. 0; 9.6. Независимы.

Вариант 5. 1. $4/35 \approx 0.114$; 2.3. $207/256 \approx 0.809$; 3.1. 0.28; 3.2. $2/7 \approx 0.286$; 4.1. $n \geq 4$; 4.2. $3e^{-2} \approx 0.406$; 5. $1 - 2.8e^{-2} \approx 0.621$; 6.1. 1; 6.3. $\pi/2 - 1 \approx 0.571$; 6.4. $\pi - 3 \approx 0.1416$; 6.5. 0.376; 6.6. $1 - \cos 1 \approx 0.460$; 6.7. $\pi/6 \approx 0.524$; 7. 0.012; 8. $11/21 \approx 0.524$; 9.3. $m_X = 4a/(3\pi)$; $m_Y = 4b/(3\pi)$;

9.4. $\sigma_X = (a/b)\sigma_Y = a\sqrt{9\pi^2 - 64}/(6\pi) \approx 0.264a$;

9.5. $2(9\pi - 32)/(9\pi^2 - 64) \approx -0.300$; 9.6. Зависимы.

Вариант 6. 1. $1/126 \approx 0.0079$; 2.3. $87/256 \approx 0.340$; 3.1. $7/150 \approx 0.047$;
3.2. $4/7 \approx 0.571$; 4.1. $n \geq 16$; 4.2. 0.984; 5. $1 - 2.4e^{-2} \approx 0.675$; 6.1. 1.5;
6.3. $5/8 = 0.625$; 6.4. $19/320 \approx 0.0594$; 6.5. 0.244; 6.6. 0.615; 6.7. 0.442; 7. 1.24%;
8. 0.54; 9.1. 9; 9.3. $m_X = m_Y = 0.75$; 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{3}/(4\sqrt{5}) \approx 0.194$; 9.5. 0;
9.6. Независимы.

Вариант 7. 1. 0.8; 2.3. $37/256 \approx 0.145$; 3.1. 0.418; 3.2. 0.072; 4.1. 0.676679;
4.2. $5e^{-2} \approx 0.676676$; 4.3. $\Delta = 3 \cdot 10^{-6}$; $\delta = 4 \cdot 10^{-6} \sim 4 \cdot 10^{-4}\%$; 5. $0.5 - 115e^{-1} \approx 0.077$;
6.1. 1; 6.3. 2; 6.4. 2; 6.5. $\sqrt{2} \approx 1.414$; 6.6. $3e^{-2} \approx 0.406$; 7. 0.904; 8. 0.36;
9.3. $m_X = m_Y = 2/3$; 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = 1/(3\sqrt{2}) \approx 0.236$; 9.5. -0.5; 9.6. Зависимы.

Вариант 8. 1. $1/12 \approx 0.083$; 2.3. $43/64 \approx 0.672$; 3.1. $1/35 \approx 0.029$; 3.2. 0.5;
4.1. $n \geq 45$; 4.2. $5e^{-2} \approx 0.677$; 5. $0.5(1 + e^{-0.5}) \approx 0.803$; 6.1. 6; 6.3. 0.5; 6.4. 0.05;
6.5. 0.224; 6.6. 0.627; 7. 0.905; 8. 0.76; 9.1. 6; 9.3. $m_X = m_Y = 5/12 \approx 0.417$;
9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = 0.244$; 9.5. $-5/43 \approx -0.116$; 9.6. Зависимы.

Вариант 9. 1. $10/243 \approx 0.041$; 2.3. $15/64 \approx 0.234$; 3.1. 0.651; 3.2. 0.677;
4.1. 0.868; 4.2. 0.809; 5.2. 14.5; 6.1. $C = 1/6$; 6.3. $m_X = 3/2$;
6.4. $D_X = 17/12 \approx 1.417$; 6.5. $\sigma_X = 1.190$; 6.6. $5/12 \approx 0.417$; 6.7. $Me = 1$; 7. 71.5 %;
25.2 %; 3.3 %; 8. $\rho_{XY} = 0.36$; 9.3. $m_X = m_Y = -1/3$;
9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = 1/(3\sqrt{2}) \approx 0.236$; 9.5. $\rho_{XY} = -0.5$; 9.6. Зависимы.

Вариант 10. 1. $120/343 \approx 0.350$; 2.3. $65/128 \approx 0.508$; 3.1. 0.49;
3.2. $48/49 \approx 0.980$; 4.1. 0.13432; 4.2. $e^{-2} \approx 0.13534$; $\Delta = 0.00102$;
 $\delta = 0.0076 \sim 0.8\%$; 5.3. $4.9 \approx 5$; 6.1. $1/3$; 6.3. $4/3 \approx 1.33$; 6.4. $7/18 \approx 0.389$;
6.5. 0.624; 6.6. 0.651; 6.7. $\sqrt{3}/2 \approx 0.866$; 7. 0.046; 8. 0.64; 9.1. 24;
9.3. $m_X = m_Y = 2/5$; 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = 1/5$; 9.5. -2/3; 9.6. Зависимы.

Вариант 11. 1. $56/81 \approx 0.691$; 2.3. $49/64 \approx 0.766$; 3.1. 0.052; 3.2. второму;
4.1. 0.73569; 4.2. 0.73576; 4.3. $\Delta = 7 \cdot 10^{-5}$; $\delta = 10^{-4} \sim 0.01\%$; 5.2. $m_X = 53$;
6.1. $4/3$; 6.3. $3/7 \approx 0.429$; 6.4. 0.0735; 6.5. 0.271; 6.6. 0.474; 6.7. 0.405; 7. 0.992;
8. 0.36; 9.3. $m_X = 0$; $m_Y = 4/(3\pi) \approx 0.424$; 9.4. $\sigma_X = 0.5$; $\sigma_Y = 0.264$;
9.6. Зависимы.

Вариант 12. 1. $5/72 \approx 0.069$; 2.3. $79/128 \approx 0.617$; 3.1. 0.257; 3.2. Окунь;
4.1. 0.90983; 4.2. 0.90980; 4.3. $\Delta = 3 \cdot 10^{-5}$; $\delta = 3 \cdot 10^{-5} \sim 0.003\%$; 5. $m_X = 28$;

6.1. 2; 6.3. $2\ln 2 - 1 \approx 0.386$; 6.4. $2 - 4\ln^2 2 \approx 0.0782$; 6.5. 0.280; 6.6. 0.608;
 6.7. $1/7 \approx 0.143$; 7. 0.317; 8. 0.408; 9.1. $4/5$; 9.3. $m_X = m_Y = 8/15 \approx 0.533$;
 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{37}/(15\sqrt{2}) \approx 0.287$; 9.5. $2/37 \approx 0.054$; 9.6. Зависимы.

Вариант 13. 1. $70/323 \approx 0.217$; 2.3. $13^2/16^2 \approx 0.660$; 3.3. $P(A) = 0.0145$;
 $P(H_2/A) = 0.343$; 4.1. 0.216; 4.2. 0.44; 5.1. 0.6; 5.2. 0.46; 5.3. 0.496; 6.1. $1/2$;
 6.3. $2/3$; 6.4. $2/9 \approx 0.222$; 6.5. 0.471; 6.6. $4/9 \approx 0.444$; 6.7. $2 - \sqrt{2} \approx 0.586$; 7. 0.114;
 7.1. 0.100; 8. 0.36; 9.3. $m_X = M_Y = 0$; 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = 0.5$;
 9.5. $\rho_{xy} = 0$; 9.6. Зависимы.

Вариант 14. 1. $140/429 \approx 0.326$; 2.3. $91/128 \approx 0.711$; 3.1. 0.057; 3.2. 0.167;
 4.1. 0.828; 4.2. $1 - 3e^{-2} \approx 0.594$; 5. 0.1728; 6.1. 3; 6.3. $2/3$; 6.4. $13/18 \approx 0.722$;
 6.5. 0.850; 6.6. 0.650; 6.7. 0; 7. 95.450%; 4.544%; 0.006%; 8. 0.36; 9.1. 6;
 9.3. $m_X = m_Y = 0.5$; 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{7}/\sqrt{60} \approx 0.342$; 9.5. $-5/7 \approx -0.714$;
 9.6. Зависимы.

Вариант 15. 1. $3/19 \approx 0.158$; 2.3. $23/128 \approx 0.180$; 3.1. 0.65; 3.2. $56/65 \approx 0.862$;
 4.1. 0.07985; 4.2. 0.08030; 4.3. $\Delta = 0.00045$; $\delta = 0.006 \sim 0.6\%$; 5. $m_X = 2.172$;
 $D_X = 0.518$; $\sigma_X = 0.720$; 6.1. 1; 6.3. 0; 6.4. $1/6$; 6.5. 0.408; 6.6. 0.5;
 6.7. $-1 + \sqrt{0.5} \approx -0.293$; 7. $Q = 135\sigma$; 8. -0.089 ; 9.3. $m_X = 4/(3\pi) \approx 0.424$;
 $m_Y = 0$; 9.4. $\sigma_X = 0.264$; $\sigma_Y = 0.5$; 9.5. $\rho_{xy} = 0$; 9.6. Зависимы.

Вариант 16. 1. $11/23 \approx 0.478$; 2.3. $29/64 \approx 0.453$; 3.1. 0.6175; 3.2. 0.964;
 4.1. 0.840; 4.2. $1 - 2e^{-1} \approx 0.264$; 5. $m_X = 1.8$; $\sigma_X = 0.6$; $P(X < m_X) = 0.3$;
 6.1. $2/3$; 6.3. $7/9 \approx 0.778$; 6.4. 0.228; 6.5. 0.478; 6.6. 0.614; 6.7. $3/8 = 0.375$;
 7. $E = 0.675\sigma$; 8. 0.174; 9.1. $5/2$; 9.3. $m_X = m_Y = 2/3 \approx 0.667$;
 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{5}/(3\sqrt{7}) \approx 0.282$; 9.5. $-7/20 = -0.35$; 9.6. Зависимы.

Вариант 17. 1. $27/92 \approx 0.293$; 2.3. $45/64 \approx 0.703$; 3.1. 0.934; 3.2. 0.682;
 4.1. 0.987; 4.2. $1.646e^{-0.5} \approx 0.998$; 5. $m_X = 2.533$; $P(X < m_X) = 0.51$; 6.1. $2/3$;
 6.3. 0; 6.4. $4/9$; 6.5. $2/3$; 6.6. $1/2$; 7. $x_{0.6} - x_{0.4} = 0.507\sigma$; 8. 0.22; 9.3. $m_X = 0$;
 $m_Y = 1/3$; 9.4. $\sigma_X = 1/\sqrt{6} \approx 0.408$; $\sigma_Y = 1/(3\sqrt{2}) \approx 0.236$; 9.5. $\rho_{xy} = 0$;
 9.6. Зависимы.

Вариант 18. 1. $51/154 \approx 0.331$; 2.3. $11/32 \approx 0.344$; 3.1. 0.7056; 3.2. 0.327;
 4.1. 0.485; 4.2. $1 - 1.2e^{-0.2} = 0.0175$; 5. $m_X = 2.36$; $\sigma_X = 0.48$; 6.1. 1; 6.3. 2.097;
 6.4. 0.176; 6.5. 0.420; 6.6. 0.616; 7. $x_{0.9} - x_{0.1} = 2.562\sigma$; 8. 0.089; 9.1. $4/3$;

9.3. $m_X = m_Y = 4/9 \approx 0.444$; 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{13}/(9\sqrt{2}) \approx 0.283$; 9.5. $-2/13 = -0.154$;

9.6. Зависимы.

Вариант 19. 1. $109/115 \approx 0.948$; 2.3. $45/64 \approx 0.703$; 3.1. 0.000529 ; 3.2. 0.153 ;
4.1. 0.678 ; 4.2. 0.677 ; 5. $m_X = 0.9$; $D_X = 0.61$; $\sigma_X = 0.781$; 6.1. 4 ; 6.3. $1/3$;
6.4. $2/9 \approx 0.222$; 6.5. $\sqrt{2}/3 \approx 0.471$; 6.6. $81/256 \approx 0.316$; 6.7. $\sqrt[4]{2} - 1 \approx 0.189$;
7. 78.8% ; 8. 0.33 ; 9.3. $m_X = 3/4$; $m_Y = 0.3$; 9.4. $\sigma_X = \sqrt{3}/(4\sqrt{5}) \approx 0.194$;
 $\sigma_Y = \sqrt{37}/(10\sqrt{7}) \approx 0.230$; 9.5. $\sqrt{35}/\sqrt{111} \approx 0.562$; 9.6. Зависимы.

Вариант 20. 1. $4/19 \approx 0.211$; 2.3. $9/32 \approx 0.28$; 3.1. 0.000784 ; 3.2. 0.327 ;
4.1. 0.9106 ; 4.2. 0.9098 ; 4.3. $\Delta = 0.0008$; $\delta = 0.0009 \sim 0.09\%$; 5. $m_X = 0.9$;
 $\sigma_X = 0.781$; 6.1. $3/2$; 6.3. $3/5$; 6.4. $12/175 \approx 0.0686$; 6.5. 0.262 ; 6.6. 0.604 ;
6.7. $1/\sqrt[3]{16} \approx 0.397$; 7. 3.9 кОм ; 8. 0.61 ; 9.1. 16 ; 9.3. $m_X = m_Y = 0.8$;
9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{2}/(5\sqrt{3}) \approx 0.163$; 9.5. 0 ; 9.6. Независимы.

Вариант 21. 1. $13/18 \approx 0.722$; 2.3. $529/1024 \approx 0.526$; 3.2. 0.0288 ; 3.3. 0.660 ;
4.1. 0.333 ; 4.2. $1 - 4e^{-3} \approx 0.801$; 5.2. 204 ; 5.3. 0.633 ; 6.1. 0.25 ; 6.3. 4 ; 6.4. 8 ;
6.5. $2\sqrt{2} \approx 2.828$; 6.6. $3e^{-2} \approx 0.406$; 7.1. 0.625 ; 7.2. 0.683 ; 8. 0.39 ; 9.3. $m_X = 3/8$;
 $m_Y = 3/5$; 9.4. $\sigma_X = \sqrt{19}/(8\sqrt{5}) \approx 0.244$; $\sigma_Y = 2\sqrt{3}/(5\sqrt{7}) \approx 0.262$;
9.5. $\sqrt{35}/(2\sqrt{57}) \approx 0.392$; 9.6. Зависимы.

Вариант 22. 1. $105/512 \approx 0.205$; 2.3. $207/256 \approx 0.809$; 3.1. 0.000209 ;
3.2. 0.432 ; 4.1. 0.916 ; 4.2. 0.264 ; 5.2. 2.78 ; 5.3. 0.590 ; 6.1. 4 ; 6.3. 1 ; 6.4. 0.5 ;
6.5. 0.707 ; 6.6. 0.737 ; 7. 95.45% ; 8. 0.61 ; 9.1. 1 ; 9.3. $m_X = m_Y = 1$;
9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = 1$; 9.5. 0 ; 9.6. Независимы.

Вариант 23. 1. $1/7 \approx 0.143$; 2.3. $37/128 \approx 0.289$; 3.2. 0.941 ; 3.3. 0.9994 ;
4.1. 0.388 ; 4.2. 0.288 ; 5.2. 2.164 ; 5.3. 0.64 ; 6.1. 4 ; 6.3. $4/3$; 6.4. $2/9$;
6.5. $\sqrt{2}/3 \approx 0.471$; 6.6. 0.316 ; 6.7. $\sqrt[4]{2} \approx 1.189$; 7.1. 0.0498 ; 7.2. 0.0455 ; 8. 0.39 ;
9.3. $m_X = 3/5$; $m_Y = 3/8$; 9.4. $\sigma_X = 0.262$; $\sigma_Y = 0.244$;
9.5. $\sqrt{35}/(2\sqrt{57}) \approx 0.392$; 9.6. Зависимы.

Вариант 24. 1. $1/25 = 0.04$; 2.3. $39/64 \approx 0.609$; 3.2. 0.971 ; 3.3. 0.001 ;
4.1. 0.810 ; 4.2. 0.910 ; 5.2. 20 ; 6.1. 3 ; 6.3. 1.5 ; 6.4. 0.75 ; 6.5. $\sqrt{3}/2 \approx 0.866$;
6.6. 0.924 ; 6.7. 1.101 ; 7.1. 0.947 ; 7.2. 0.954 ; 8. 0 ; 9.1. 0.9 ;
9.3. $m_X = m_Y = 21/40 = 0.525$; 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = 3\sqrt{3}/(8\sqrt{5}) \approx 0.290$; 9.5. $1/15 \approx 0.067$;
9.6. Зависимы.

Вариант 25. 1. $18/35 \approx 0.514$; 2.3. $15/32 \approx 0.469$; 3.2. 0.5; 3.3. 0.96; 4.1. 0.419; 4.2. 0.330; 5.2. 1.190; 5.3. 0.84; 6.1. 0.5; 6.3. $2/3$; 6.4. $2/9$; 6.5. $\sqrt{2}/3 \approx 0.471$; 6.6. $5/9 \approx 0.556$; 6.7. 0.586; 7. 0.894; 8. 0.47; 9.3. $m_X = 2/5$; $m_Y = 0.375$; 9.4. $\sigma_X = 2\sqrt{3}/(5\sqrt{7}) \approx 0.262$; $\sigma_Y = \sqrt{19}/(8\sqrt{5}) \approx 0.244$; 9.5. $-\sqrt{35}/(2\sqrt{57}) \approx -0.392$; 9.6. Зависимы.

Вариант 26. 1. $3/7 \approx 0.429$; 2.3. $145/256 \approx 0.566$; 3.2. 0.943; 3.3. 0.998; 4.1. 0.580; 4.2. 0.936; 5.2. 2.4; 5.3. 0.678; 5.4. 0.496; 6.1. 5; 6.3. 1.25; 6.4. $5/48 \approx 0.104$; 6.5. 0.323; 6.6. 0.896; 6.7. $\sqrt[5]{4/3} \approx 1.059$; 7. 0.466; 8. 0.77; 9.1. $9/8$; 9.3. $m_X = m_Y = 15/32 \approx 0.469$; 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{411}/(32\sqrt{10}) \approx 0.283$; 9.5. $-45/411 \approx -0.109$; 9.6. Зависимы.

Вариант 27. 1. $12/19 \approx 0.632$; 2.3. $27/64 \approx 0.422$; 3.2. 0.34; 3.3. $27/34 \approx 0.794$; 4.1. 0.9995; 4.2. 0.330; 5.2. 2.068; 5.3. 0.7; 6.1. $2/3$; 6.3. 1; 6.4. 0.5; 6.5. 0.707; 6.6. $4/9 \approx 0.444$; 6.7. $3 - \sqrt{45} \approx 0.879$; 7. 0.102; 8. 0.60; 9.3. $m_X = 0.8$; $m_Y = 2/7 \approx 0.286$; 9.4. $\sigma_X = 2/(5\sqrt{3}) \approx 0.163$; $\sigma_Y = \sqrt{38}/(7\sqrt{15}) \approx 0.227$; 9.5. $9\sqrt{5}/(8\sqrt{19}) \approx 0.577$; 9.6. Зависимы.

Вариант 28. 1. $14/15 \approx 0.933$; 2.3. $41/64 \approx 0.641$; 3.2. 0.66; 3.3. $1/22 \approx 0.045$; 4.1. 0.027; 4.2. 0.683; 5.2. 2.02; 5.3. 0.3; 6.1. $3/2$; 6.3. $2/5$; 6.4. $12/175 \approx 0.0686$; 6.5. 0.262; 6.6. 0.603; 6.7. $1 - 1/\sqrt[3]{4} \approx 0.370$; 7. 0.061; 8. 0.76; 9.1. 4; 9.3. $m_X = m_Y = 0.5$; 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = 0.5$; 9.5. 0; 9.6. Независимы.

Вариант 29. 1. $1120/2187 \approx 0.512$; 2.3. $343/512 \approx 0.670$; 3.2. 0.275; 3.3. $36/55 \approx 0.655$; 4.1. 0.420; 4.2. 0.663; 5. 0.525; 6.1. 1; 6.3. 2; 6.4. 1; 6.5. 1; 6.6. 0.368; 6.7. $1 + \ln 2 \approx 1.693$; 7. 0.4 %; 8. 0.41; 9.3. $m_X = 0.4$; $m_Y = 4/7 \approx 0.571$; 9.4. $\sigma_X = \sqrt{14}/15 \approx 0.249$; $\sigma_Y = 3\sqrt{2}/(7\sqrt{5}) \approx 0.271$; 9.5. $3\sqrt{5}/(8\sqrt{7}) \approx 0.317$; 9.6. Зависимы.

Вариант 30. 1. $63/256 \approx 0.246$; 2.3. $49/64 \approx 0.766$; 3.2. 0.856; 3.3. 0.999; 4.1. 0.296; 4.2. 0.551; 5.2. 4.10; 5.3. 0.656; 6.1. $2/3$; 6.3. $4/9 \approx 0.444$; 6.4. $13/162 \approx 0.080$; 6.5. $\sqrt{13}/(9\sqrt{2}) \approx 0.283$; 6.6. 0.587; 6.7. 0.197; 7. 90,45%; 8. 0.76; 9.1. 3; 9.3. $m_X = m_Y = 17/24 \approx 0.708$; 9.4. $\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{139}/(24\sqrt{5}) \approx 0.290$; 9.5. $-5/139 \approx -0.036$; 9.6. Зависимы.

Таблица значений нормированной функции Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0.1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0.2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0.5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0.6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0.7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0.8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0.9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1.0	34134	34375	34614	34849	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1.1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1.2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1.3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1.4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42785	42922	43056	43189
1.5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1.6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1.7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1.8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1.9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2.0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2.1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2.2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2.3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2.4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2.5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2.6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2.8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2.9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

x	3.0	3.5	4.0	5.0
$\Phi_0(x)$	0.49865	0.49977	0.499968	0.4999997

Оглавление

Предисловие.....	3
Часть 1. Перечень базисных понятий, задач, методов, знаний и умений, которыми должен овладеть студент, изучив теорию вероятностей	5
Часть 2. Контрольные задания.....	7
Образец 1 контрольного задания	7
Образец 2 контрольного задания	9
Варианты 1–30	11
Решения задач образца 1 контрольного задания.....	41
Решения задач образца 2 контрольного задания.....	48
Часть 3. Контрольные тесты (1–4).....	55
Часть 4. Конспект-справочник (опорные сведения по теории вероятностей).....	60
Глава 1. Алгебра событий	60
Глава 2. Комбинаторика	63
Глава 3. Вероятность	65
Глава 4. Алгебра вероятностей	68
Глава 5. Одномерная случайная величина	71
Глава 6. Двумерная случайная величина	80
Глава 7. n -мерная случайная величина.....	85
Глава 8. Предельные теоремы	87
Ответы к вариантам контрольных заданий	89
Таблица значений нормированной функции Лапласа	94

*Максимов Юрий Дмитриевич
Куклин Борис Анатольевич
Хватов Юрий Алексеевич*

МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В ы п у с к 6

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ С ОБРАЗЦАМИ РЕШЕНИЙ

Тесты. Конспект-справочник

Редактор *В.В. Чиркова*
Технический редактор *А.И. Колодяжная*
Директор Издательства СПбГТУ *А.В. Иванов*

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Подписано в печать 15.11.2001. Формат 60×84/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6. Уч.-изд. л. 6. Тираж 200. Заказ 746.

Отпечатано с оригинал-макета, предоставленного авторами
в типографию Издательства СПбГТУ
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

