Контрольные задания (курс 1)

1 – 10. Решить систему уравнений тремя способами: по формулам Крамера, методом Гаусса-Жордана, средствами матричного исчисления. Сделать проверку правильности вычисления обратной матрицы.

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ -5x_1 - 4x_2 + x_3 = -11, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 = -7, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7, \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 = -11, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -8. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = -1, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -9, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$

21 – 30. Даны координаты вершин пирамиды $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$. Найти: а) угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_3; б) площадь грани $A_1\ A_2\ A_3$; в) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; г) уравнение высоты, проходящей через A_4; д) объём пирамиды.

21. $A_1\,(1, –1, 0)$, $A_2\,(2, –2, 4)$, $A_3\,(4, –3, –1)$, $A_4\,(–1, 0, –1)$.

22. $A_1\,(0, 1, –1)$, $A_2\,(1, –1, 2)$, $A_3\,(2, 0, –2)$, $A_4\,(–1, 4, –2)$.

23. $A_1\,(0, –1, 1)$, $A_2\,(1, –6, 3)$, $A_3\,(1, –5, 0)$, $A_4\,(–2, 0, –2)$.

24. $A_1\,(–1, 1, 0)$, $A_2\,(0, –1, 2)$, $A_3\,(2, –4, –1)$, $A_4\,(–2, 2, –2)$.

25. $A_1\,(1, 0, –1)$, $A_2\,(2, –3, 1)$, $A_3\,(3, –5, –2)$, $A_4\,(–2, 1, –3)$.

26. $A_1\,(–1, 0, 1)$, $A_2\,(0, 2, –1)$, $A_3\,(0, –1, 4)$, $A_4\,(–3, 3, 0)$.

27. $A_1\,(1, 1, –1)$, $A_2\,(2, 4, –2)$, $A_3\,(3, 0, 3)$, $A_4\,(0, 3, –2)$.

28. $A_1(-1, 1, 1)$, $A_2(0, 5, -1)$, $A_3(0, 0, 0)$, $A_4(-5, 4, 2)$.

29. $A_1(1, -1, 1)$, $A_2(2, 4, 0)$, $A_3(2, 2, -1)$, $A_4(-1, 0, 2)$.

30. $A_1(0, 0, -2)$, $A_2(1, 3, -3)$, $A_3(2, -1, 3)$, $A_4(-1, 2, -3)$.

41 – 50. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

41. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+4}\right)^{-2x+1}$.

42. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-7}{2x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+4}\right)^{x+1}$.

43. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+4}{x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x\operatorname{tg} 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{2x}$.

44. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x+1}{x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{x^2\operatorname{tg} 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{-2x}$.

45. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x}{5x^3-x^2+4x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x+2}\right)^{x}$.

46. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x}{2x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{x^2\cos 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x+2}\right)^{\frac{8x+1}{2}}$.

47. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{3x^2+2x-4}$;   б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{8+x}-\sqrt{10-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg}x}{tg5x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{2x+3}$.

48. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2-5x+2}{5x^2-x}$;   б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{\operatorname{tg}2x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{x+2}$.

49. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2+x}{x^3+2x^2-x+3}$;   б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+5}\right)^{\frac{x-5}{4}}$.

50. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+2}{x^2+3x}$;   б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos^3 x}$;   г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+2}\right)^{-x}$.

61 – 70. Найти производные заданных функций.

61. а) $\dfrac{1}{1-2x}$; б) $e^{\operatorname{arcctg}\sqrt[3]{x}}$; в) $3x\sin\dfrac{x}{3}$; г) $\dfrac{x}{x^3+1}$; д) $\ln\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$.

62. а) $\sqrt[3]{3x+2}$; б) $5x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{5}$; в) $\left(2^{\frac{1}{\operatorname{arctg}x}}+x\right)^3$; г) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; д) $\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}$.

63. а) $\dfrac{1}{(x-5)^3}$; б) $2x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; в) $\left(\arccos\sqrt{x}+e^{\frac{1}{x}}\right)^2$; г) $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos x}$; д) $\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

64. а) $\sqrt{2x-3}$; б) $3x\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}$; в) $\left(\arccos 2x+3^{\frac{x}{2}}\right)^2$; г) $\dfrac{1-x^3}{1+x^3}$; д) $\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}}$.

65. а) $\dfrac{1}{3x-2}$; б) $4x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}$; в) $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}+e^{-x}\right)^2$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; д) $\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+\cos 3x}{1-\cos 3x}}$.

66. а) $\sqrt{(4x+1)^3}$; б) $2xe^{-\frac{x^2}{2}}$; в) $\sqrt{x+\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}}$; г) $\dfrac{\operatorname{arctg}x}{\operatorname{arcctg}x}$; д) $\ln\sqrt[5]{\dfrac{1+\cos 5x}{1-\cos 5x}}$.

67. а) $\dfrac{1}{2x+3}$; б) $5x\cos\dfrac{x}{5}$; в) $\left(\arcsin\sqrt{x}+\operatorname{ctg}x\right)^3$; г) $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$; д) $\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+x^4}{1-x^4}}$.

68. а) $\sqrt[4]{1-2x}$; б) $2x\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$; в) $e^{\operatorname{tg}^2\frac{1}{x}}$; г) $\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}$; д) $\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+\sin 4x}{1-\sin 4x}}$.

69. а) $\dfrac{1}{(x+2)^4}$; б) $2\operatorname{arctg}^3 e^x$; в) $x\sqrt{\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\right)}$; г) $\dfrac{2^{3x}}{2^{3x}-1}$; д) $\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}}$.

70. а) $\sqrt{1-x^2}$; б) $\arcsin^2 x+\arcsin x^2$; в) $5^{\frac{1}{x}}x^5$; г) $\dfrac{1+x^4}{1-x^4}$; д) $\ln\sqrt[5]{\dfrac{1+\sin 5x}{1-\sin 5x}}$.

91 – 100. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке.

91. $y=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{4}{3}x^3+5;\ [-3,\ 3]$.

92. $y=x^4-8x^2+12;\ [-2,\ 3]$.

93. $y=3x-\sqrt{x};\ [0,\ 1]$.

94. $y=2\sqrt{x}-3x;\ [0,\ 4]$.

95. $y=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+9x+7;\ [2,\ 4]$.

96. $y=\sqrt{x^2-16};\ [5,\ 7]$.

97. $y=\dfrac{3x+1}{x+2};\ [0,\ 2]$.

98. $y=2x+\sin x;\ [0,\ \pi/2]$.

99. $y=x\ln x+1;\ [1,\ e]$.

100. $y=\dfrac{e^x}{3}+1;\ [-2,\ 2]$.

131 – 140. Исследовать функцию $z=f(x,y)$ на экстремум и вычислить производную этой функции в точке M по направлению вектора $\bar{l}$.

131. $z=\dfrac{x^3}{2}+xy+\dfrac{y^2}{3}$; $M(0,3)$; $\bar{l}(3,4)$.

132. $z=\dfrac{x^3}{3}+xy+\dfrac{y^2}{2}$; $M(-1,0)$; $\bar{l}(4,3)$.

133. $z=-\dfrac{x^3}{2}+xy-\dfrac{y^2}{3}$; $M(2,3)$; $\bar{l}(-3,-4)$.

134. $z=-\dfrac{x^3}{3}+xy-\dfrac{y^2}{2}$; $M(2,0)$; $\bar{l}(-4,-3)$.

135. $z=\dfrac{x^3}{6}+xy+y^2$; $M(-2,1)$; $\bar{l}(5,12)$.

136. $z=-\dfrac{x^3}{6}+xy-y^2$; $M(2,1)$; $\bar{l}(12,5)$.

137. $z=\dfrac{x^3}{2}+xy-\dfrac{y^2}{3}$; $M(0,-3)$; $\bar{l}(3,-4)$.

138. $z=\dfrac{x^3}{3}+xy-\dfrac{y^2}{2}$; $M(0,2)$; $\bar{l}(-3,4)$.

139. $z=x^3+xy+\dfrac{y^2}{6}$; $M(1,0)$; $\bar{l}(4,-3)$.

140. $z=-x^3+xy-\dfrac{y^2}{6}$; $M(0,-6)$; $\bar{l}(-4,3)$.

161 – 170. В пункте а) вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками заданных функций; в пункте б) вычислить площадь S криволинейной трапеции, огранченной сверху графиком заданной на отрезке $[a,b]$ функции, длину L кривой, являющейся графиком этой функции, а также объём V тела, ограниченного плоскостью $x = b$ и поверхностью, образованной вращением вокруг оси OX графика заданной функции.

161. а) $y=4-\dfrac{2}{3}x^2$, $y=\dfrac{x^2}{3}$; б) $y=\sqrt{2-x^2}$, $\left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

162. а) $y=1-x^2$, $y=x^2-1$; б) $y=\sqrt{81-x^2}$, $\left[0, \dfrac{9}{2}\right]$.

163. а) $y=1-x^2$, $y+x+1=0$; б) $y=\sqrt{4-x^2}$, $[0,1]$.

164. а) $y=x^2+1$, $y=x+3$; б) $y=\sqrt{36-x^2}$, $[0,3]$.

165. а) $y = x^2 - 1,\ y = x + 1$; б) $y = \sqrt{64 - x^2}$, $[0,\ 4]$.

166. а) $y = 2x - x^2,\ y = -x$; б) $y = \sqrt{9 - x^2}$, $\left[0,\ \frac{3}{2}\right]$.

167. а) $y = x^2,\ y = 3 - 2x$; б) $y = \sqrt{100 - x^2}$, $[0,\ 5]$.

168. а) $y = \frac{x^2}{2},\ y = x^2 - 1$; б) $y = \sqrt{49 - x^2}$, $\left[0,\ \frac{7}{2}\right]$.

169. а) $y = x^2,\ y = 2 - x^2$; б) $y = \sqrt{16 - x^2}$, $[0,\ 2]$.

170. а) $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{25 - x^2}$, $\left[0,\ \frac{5}{2}\right]$.

171 – 180. В пункте а) решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка, сделать проверку; в пункте б) найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

171. а) $y' - 3y^2 = 0;\quad y(0) = -\frac{1}{2}$; б) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$.

172. а) $y' - 8\sqrt{y}x^3 = 0;\quad y(0) = 1$; б) $y' + y\cos x = \sin x\cos x$.

173. а) $xyy' = 1 + x^2;\quad y(1) = 1$; б) $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$.

174. а) $yy' - \frac{3}{2}x^2 = 0;\quad y(0) = 1$; б) $xy' - y = x^3$.

175. а) $y' + 2xy^2 = 0;\quad y(0) = \frac{1}{2}$; б) $y' - \frac{y}{x} = x$.

176. а) $x^2y' = 2\sqrt{y};\quad y(-1) = 1$; б) $xy' - y = x^4$.

177. а) $(1 + x^2)y' = y;\quad y(0) = 1$; б) $xy' + y = \sin x$.

178. а) $x^2y' = y^2;\quad y(1) = 1$; б) $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = \sin x$.

179. а) $x^2y' = y;\quad y(-1) = e$; б) $xy' + y = x\sin x$.

180. а) $2\sqrt{x}y' = y;\quad y(1) = 1$; б) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

181 – 190. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

181. $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 + 4x + 2$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 0$.

182. $y'' + 2y' + y = x^2 + 3x$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = -1$.

183. $y'' + 2y' + 2y = x^2 + 4x + 1$, $\quad y(0) = -1$, $\quad y'(0) = 1$.

184. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 2$.

185. $y'' + 4y = 4x - 8$, $\quad y(0) = -2$, $\quad y'(0) = 1$.

186. $y'' + 4y' + 4y = 3\sin x + 4\cos x$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1$.

187. $y'' + 4y' + 5y = 5x + 4$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1$.

188. $y'' - 4y' + 4y = 4\sin x + 3\cos x$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 0$.

189. $y'' - 4y' + 5y = 5x + 1$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 1$.

190. $y'' + 9y = 3x^3 + 2x$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 0$.

271 – 280. Задачи на формулу Бернулли.

271. Игральную кость бросают 5 раз. Какова вероятность того, что тройка выпадет дважды?

272. Монету бросают 9 раз. Какова вероятность того, что цифра появится в два раза чаще, чем герб?

273. Какова вероятность того, что в семье, имеющей четверо детей, девочек и мальчиков поровну?

274. Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0,8. Какова вероятность двух промахов при шести выстрелах?

275. Монету бросают 8 раз. Какова вероятность того, что орёл и решка выпадут поровну?

276. Игральную кость бросают 6 раз. Какова вероятность того, что чётное число очков выпадет трижды?

277. Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0,7. Какова вероятность только одного попадания при трёх выстрелах?

278. Игральную кость бросают 6 раз. Какова вероятность того, что дважды выпадет число очков, делящееся на три?

279. Бросают 5 монет. Какова вероятность того, что только на одной из них выпадет герб?

280. Игральную кость бросают 6 раз. Какова вероятность того, что нечётное число очков выпадет в два раза чаще, чем чётное?

281 – 290. Дискретная случайная величина задана своим законом распределения. Заполнить пустую клетку таблицы и найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение данной случайной величины. Построить график её функции распределения.

281.

X	– 4	0	5
P	0,1	0,8	

282.

X	0	2	6
P	0,7		0,1

283.

X	–3	–1	0
P		0,2	0,6

284.

X	–1	0	5
P	0,4	0,5	

285.

X	0	3	4
P	0,8		0,1

286.

X	– 4	–2	0
P		0,2	0,7

287.

X	–2	0	4
P	0,3	0,6	

288.

X	0	1	3
P	0,5		0,2

289.

X	–2	–1	0
P		0,3	0,4

290.

X	–2	0	1
P	0,2	0,3	

301 – 310. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Найти вероятность попадания этой случайной величины в интервал (α, β).

301. $a = 42$, $\sigma = 12$, $\alpha = 36$, $\beta = 54$.

302. $a = 12$, $\sigma = 4$, $\alpha = 6$, $\beta = 16$.

303. $a = 25$, $\sigma = 5$, $\alpha = 15$, $\beta = 30$.

304. $a = 15$, $\sigma = 6$, $\alpha = 6$, $\beta = 18$.

305. $a = 40$, $\sigma = 10$, $\alpha = 35$, $\beta = 55$.

306. $a = 7$, $\sigma = 2$, $\alpha = 2$, $\beta = 10$.

307. $a = 17$, $\sigma = 3$, $\alpha = 14$, $\beta = 23$.

308. $a = 9$, $\sigma = 2$, $\alpha =11$, $\beta = 14$.

309. $a = 10$, $\sigma = 4$, $\alpha = 8$, $\beta = 18$.

310. $a = 37$, $\sigma = 7$, $\alpha = 30$, $\beta = 44$.