



Федеральное агентство морского и речного транспорта
Федеральное государственное бюджетное образователь-
ное учреждение высшего образования
**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОРСКОГО И РЕЧНОГО ФЛОТА**
имени адмирала С. О. МАКАРОВА

Институт ВОДНОГО ТРАНСПОРТА
Кафедра основ инженерного проектирования

С. А. Завгородний, А. А. Поляков

Динамика материальной точки

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов по курсу
«Теоретическая механика»

Санкт-Петербург
Изд-во ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова
2017

УДК 531.2

ББК 22.21

312

- 312 **Завгородний, С. А.** Динамика материальной точки: учеб.-метод. пособие для самостоятельной работы / С. А. Завгородний, А. А. Поляков — СПб.: Изд-во ГУМРФ им. адм. С.О. Макарова, 2017. — 16 с.

Пособие соответствует дисциплине «Теоретическая механика». Приведены варианты расчетно-графического задания «Составление и интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки» и пример решения подобной задачи с необходимыми методическими указаниями и рекомендациями для самостоятельной работы студентов.

Предназначено для студентов очной формы обучения следующих направлений бакалавриата: 26.03.02 «Кораблестроение, океанотехника, системотехника объектов морской инфраструктуры»; 08.03.01 «Строительство»; 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»; 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»; 20.03.02 «Природообустройство и водопользование»; 23.03.01 «Технология транспортных процессов»; направление 26.03.01 «Управление водным транспортом и гидрографическое обеспечение судоходства».

Рецензент:

Иванов А. Н. канд. техн. наук, доцент (ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»)

© ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова», 2017

© Завгородний С. А., Поляков А. А., 2017

1. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ

1.1. Задание оформляется на стандартных листах писчей бумаги формата А4 и содержит перечень исходных данных и расчетную часть с необходимыми краткими пояснениями, рисунками.

1.2. Задание сшивается в тетрадь с титульным листом, образец которого приведен в **приложении А**.

1.3. Варианты заданий с таблицей исходных данных для расчета и схемами движения материальной точки приведены в **приложении Б**.

2. РАСЧЕТНО–ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ «СОСТАВЛЕНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ»

Тема: Динамика материальной точки

Для изучения этой темы проработайте теоретический материал, содержащийся в параграфах § 1.1 – 1.7 учебника [1] т. 2 или соответствующие параграфы другого учебника.

2.1. Вопросы для самоконтроля

2.1.1. Как формулируется первый закон динамики (закон инерции)?

2.1.2. Как формулируется второй закон динамики (второй закон Ньютона)?

2.1.3. Как формулируется третий закон динамики (закон равенства действия и противодействия)?

2.1.4. Как формулируется четвертый закон динамики (закон независимости действия сил)?

2.1.5. Первая (прямая) задача динамики материальной точки и общий путь ее решения?

2.1.6. Вторая (обратная) задача динамики материальной точки и общий путь ее решения?

2.1.7. Как определяется дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме, в проекциях на оси декартовых координат и оси естественного трехгранника?

2.1.8. Что понимается под начальными условиями движения материальной точки?

2.1.9. Как определяются постоянные интегрирования при решении дифференциальных уравнений движения материальной точки?

2.2. Содержание задания

Материальная точка M массой $m = 10$ кг движется прямолинейно в плоскости из точки O в точку A с начальной скоростью V_0 .

На точку действует сила сопротивления движению R , направленная в сторону противоположную ее движению. Сила сопротивления R в зависимости от варианта задания может быть задана как постоянная величина, или как функция времени, или как функция скорости точки или как функция положения точки. Через время t_1 после начала движения точка достигает края плоскости в положении A , после чего продолжает двигаться под действием одной только силы тяжести до встречи с преградой в точке B .

Требуется определить: расстояние BC .

Варианты движения материальной точки и исходные данные для расчета приведены в **приложении Б** (табл. 2, рис. 2).

2.3. План решения

2.3.1. Начертить схему движения материальной точки на участке ее прямолинейного движения.

2.3.2. Определить активные силы и реакции связей, действующие на материальную точку, и изобразить вектора этих сил на рисунке.

2.3.2. Определить закон, которому подчиняется движение материальной точки на этом участке ее движения.

2.3.3. Записать соответствующее закону векторное уравнение.

2.3.4. Указать на схеме направление координатных осей инерциальной системы отсчета, в которой будет решаться задача.

2.3.5. Составить дифференциальное уравнение прямолинейного движения материальной точки.

2.3.6. Записать начальные условия движения материальной точки.

2.3.7. Проинтегрировать дифференциальное уравнение движения материальной точки.

2.3.8. Определить значение постоянной интегрирования с учетом начальных условий движения материальной точки.

2.3.9. В полученную зависимость для скорости точки подставить заданное значение времени t_1 , движения точки на этом участке, и определить значение скорости V_A в положении A .

2.3.10. Начертить схему движения материальной точки на втором участке под действием одной только силы тяжести.

2.3.11. Определить закон, которому подчиняется движение материальной точки на этом участке ее движения.

2.3.12. Записать соответствующее закону векторное уравнение.

2.3.13. Указать на схеме направление координатных осей инерциальной системы отсчета, в которой будет решаться задача.

2.3.14. Составить первую систему дифференциальных уравнений движения материальной точки.

2.3.15. Записать начальные условия движения материальной точки на втором участке ее движения.

2.3.16. Проинтегрировать первую систему дифференциальных уравнений движения материальной точки.

2.3.17. Определить значения постоянных интегрирования с учетом начальных условий движения материальной точки и получить зависимости для проекций вектора скорости материальной точки на оси выбранной системы координат.

2.3.18. Составить вторую систему дифференциальных уравнений движения материальной точки.

2.3.19. Проинтегрировать вторую систему дифференциальных уравнений движения материальной точки.

2.3.20. Определить значения постоянных интегрирования с учетом начальных условий движения материальной точки и получить уравнения движения (закон движения) материальной точки на втором участке ее движения.

2.3.21. Используя полученные уравнения движения материальной точки, определить время ее движения t_2 на втором участке.

2.3.22. Используя полученные уравнения движения материальной точки и найденное значение времени движения t_2 , определить неизвестное задачи расстояние ВС.

2.4. Пример выполнения задания

Исходные данные: 1. Схема движения материальной точки на первом (прямолинейном) участке и втором участках движения (рис. 1);

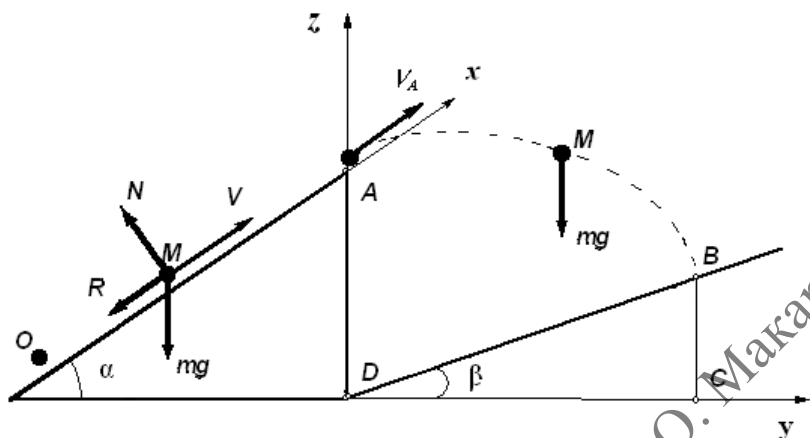


Рис. 1

2. Численные данные для расчета (табл. 1);

Таблица 1

m , кг	V_0 , м/с	α , град	AD , м	$\operatorname{tg} \beta$	$R = 3S$, Н	t_1 , с
10	50	30	20	0,3	40	1

Решение

2.4.1. Схема движения материальной точки на первом участке приведена на рис. 1.

2.4.2. Определяем систему сил, действующих на материальную точку на первом участке ее движения (прямолинейное движение). Согласно условиям задачи на материальную точку действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила сопротивления движению $\vec{R}$, нормальная составляющая опорной реакции $\vec{N}$.

2.4.3. Движение материальной точки в данном случае подчиняется второму (основному закону динамики), который с учетом четвертого закона можно записать в виде

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{N}. \quad (1)$$

2.4.4. Решение задачи ищем в прямоугольной системе декартовых координат. Положительное направление оси Ox совпадает с направлением движения точки.

2.4.5. Проецируем векторное уравнение (1) на ось Ox

$$ma_x = -mg \cdot \cos \alpha - R.$$

Проекцию вектора ускорения точки на ось Ox определяем как

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}.$$

2.4.6. Получаем дифференциальное уравнение движения материальной точки в форме неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, с учетом, что $R = 3xH$

$$m\ddot{x} = -mg \cdot \cos \alpha - 3x.$$

Это уравнение приводим к виду

$$m\ddot{x} + 3x = -mg \cdot \cos \alpha,$$

а затем к виду

$$\ddot{x} + k^2x = -g \cdot \cos \alpha, \quad (2)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{3}{m}} = \sqrt{\frac{3}{10}} = \sqrt{0,3} = 0,548 \text{ рад/с}.$$

2.4.7. Решение этого дифференциального уравнение ищем в виде

$$x = x_{\text{общ}} + x_{\text{част}},$$

т.е. как сумму общего и частного решений.

Общее решение ищем в виде

$$x_{\text{общ}} = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

частное решение в форме правой части исходного неоднородного дифференциального уравнения, т.е. в виде постоянного числа

$$x_{\text{част}} = B.$$

Тогда решение дифференциального уравнения (2) принимает вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + B.$$

Неизвестную постоянную B определяем путем подстановки частного решения в уравнение (2), с учетом того, что $\ddot{x}_{\text{част}} = 0$.

$$\text{В результате } k^2B = -g \cdot \sin \alpha. \text{ Отсюда } B = -\frac{g \cdot \sin \alpha}{k^2}.$$

2.4.8. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем из начальных условий движения материальной точки:

$$\text{при } t = 0; \quad x(0) = x_0 = 0; \quad V_x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = V_0.$$

2.4.9. Систему уравнений для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 получаем на основе уравнения решения (2) и второ-

го уравнения, которое можно получить путем дифференцирования по времени этого уравнения:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + B;$$

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Подставляя в полученную систему уравнений в правую часть $t = 0$, а в левую часть $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = V_0 = 50$ м/с, имеем

$$0 = C_1 + B;$$

$$V_0 = C_2 k.$$

Отсюда определяем $C_1 = -B = \frac{g \sin \alpha}{k^2}$ и $C_2 = \frac{V_0}{k}$.

2.4.10. Скорость V_A материальной точки в положении A при $t_1 = 1$ с определяем по формуле

$$\begin{aligned} V_A = V(t_1) = \dot{x} &= -\frac{g \sin \alpha}{k^2} \sin kt_1 + \frac{V_0}{k} k \cos kt_1 = \\ &= -\frac{9,8 \cdot 0,5}{0,548^2} \sin 0,548 \cdot 1 + \frac{50}{0,548} 0,548 \cos 0,548 \cdot 1 = \\ &= -8,5 + 42,7 = 34,2 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

2.4.11. Схема движения материальной точки на втором участке приведена на рис. 1.

2.4.12. Движение материальной точки на втором участке происходит под действием одной только силы тяжести $m\vec{g}$ и подчиняется второму закону динамики (второму закону Ньютона). Дифференциальные уравнения движения материальной точки на этом участке определяются на основе соответствующего векторного уравнения

$$m\vec{a} = \vec{F} = m\vec{g}$$

путем его проекции на координатные оси Oy и Oz .

2.4.13. В результате получаем исходную систему уравнений движения материальной точки:

$$Oy : ma_y = 0;$$

$$Oz : ma_z = -mg.$$

2.4.13. Учитывая, что $a_y = \frac{dV_y}{dt}$ и $a_z = \frac{dV_z}{dt}$, приходим к первой системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dV_y}{dt} = 0;$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -g .$$

2.4.15. Интегрируя эту систему уравнений, получим:

$$V_y = C_2 ;$$

$$V_z = -gt + C_3 ,$$

где C_2 и C_3 — постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий движения материальной точки на втором участке.

2.4.16. Начальные условия движения материальной точки на втором участке в точке A при $t = 0$; $y(0) = y_0 = 0$; $z(0) = z_0 = AB$;

$$V_y(0) = \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = V_A \cos \alpha ;$$

$$V_z(0) = \dot{z}(0) = \dot{z}_0 = V_A \sin \alpha .$$

2.4.17. Из начальных условий определяем постоянные интегрирования $C_2 = V_y(0) = V_A \cos \alpha$; $C_3 = V_z(0) = V_A \sin \alpha$. Таким образом, проекции вектора скорости точки на координатные оси определяются

$$V_y = V_A \cos \alpha ;$$

$$V_z = -gt + V_A \sin \alpha .$$

2.4.18. Вторую систему дифференциальных уравнений движения точки получаем на основе полученных зависимостей для V_y и V_z ,

определяя в них $V_y = \frac{dy}{dt}$ и $V_z = \frac{dz}{dt}$;

$$\frac{dy}{dt} = V_A \cos \alpha ;$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt + V_A \sin \alpha .$$

2.4.19. Интегрируя полученную систему уравнений, получим

$$y = (V_A \cos \alpha) \cdot t + C_4 ;$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + (V_A \sin \alpha) \cdot t + C_5 ,$$

где постоянные интегрирования C_4 и C_5 определяем из начальных условий.

2.4.20. Из начальных условий следует $C_4 = y_0 = 0$ и $C_5 = z_0 = AD = 20$ м. Закон движения материальной точки на втором участке движения принимает вид

$$y(t) = (V_A \cos \alpha) \cdot t ;$$

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + (V_A \sin \alpha) \cdot t + 20 .$$

2.4.21. В точке B соотношение между координатами точки выражается соотношением

$$z = y \cdot \operatorname{tg} \beta .$$

Отсюда получаем уравнение

$$-\frac{gt_2^2}{2} + (V_A \sin \alpha) \cdot t_2 + 20 = (V_A \cos \alpha) \cdot t_2 \cdot \operatorname{tg} \beta ,$$

где t_2 — время движения материальной точки на втором участке.

Определяем

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{V_A}{g} (\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta) + \sqrt{\frac{V_A^2}{g^2} (\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta)^2 + \frac{40}{g}} = \\ &= \frac{34,2}{9,8} (0,5 - 0,866 \cdot 0,3) + \\ &+ \sqrt{\frac{34,2^2}{9,8^2} (0,5 - 0,866 \cdot 0,3)^2 + \frac{40}{9,8}} = 3,02 \text{ с.} \end{aligned}$$

2.4.22. Определяем расстояние BC

$$\begin{aligned} BC = z(t_2) &= -\frac{gt_2^2}{2} + (V_A \sin \alpha) \cdot t_2 + 20 = \\ &= -\frac{9,8 \cdot 3,02^2}{2} + (34,2 \cdot 0,5) \cdot 3,02 + 20 = 27,46 \text{ м.} \end{aligned}$$

Ответ:

Расстояние $BC = 27,46$ м.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Образец титульного листа

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО
ТРАНСПОРТА

Федеральное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С. О. Макарова»

Кафедра основ инженерного проектирования

Расчётно-графическое задание

Составление и интегрирование дифференциальных уравнений
движения материальной точки

Пояснительная записка

Вариант 12

Студент гр. ГТ-21

Иванов И.И.

Преподаватель
доц. к.т.н.

Петров А.И.

Санкт-Петербург
2017

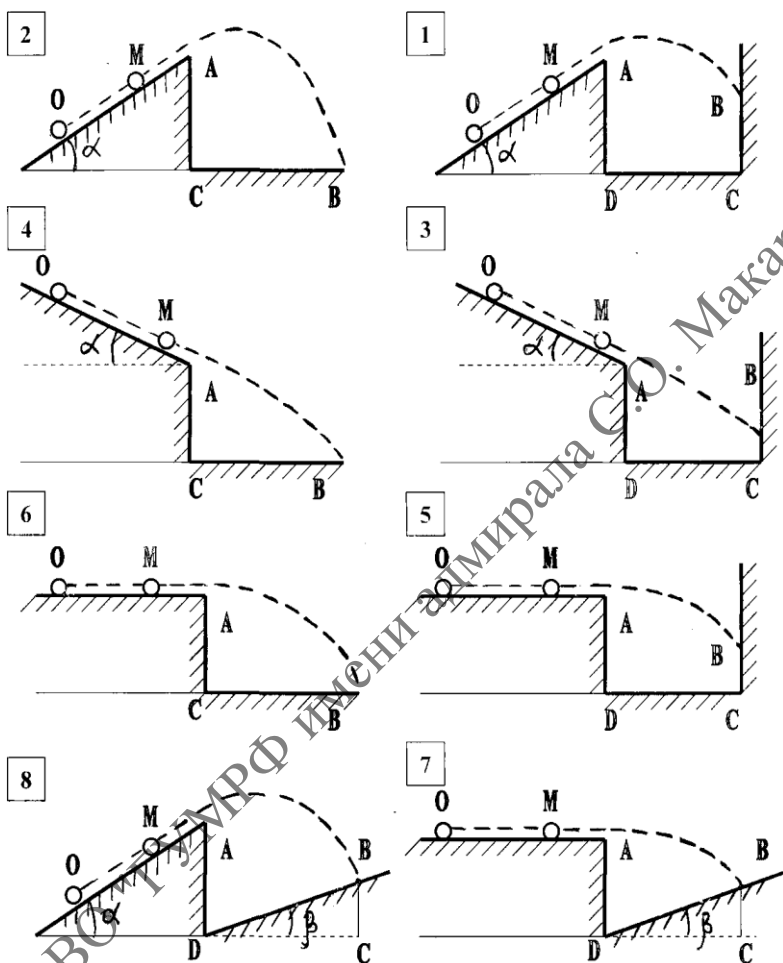


Рис. 2

Таблица 2

№ вариантов	№ схемы рис.2	V_0 , м/с	α , Град	АД, М	ДС, м	АС, м	$\text{tg}\beta$	R , Н
1 2 3 4	1	50	30	20	40	-	-	70 2S 40t 2V
5 6 7 8	2	50	30	-	-	20	-	50 2S 40t 2V
9 10 11 12	3	30	30	20	10	-	-	100 4S 60t 6V
13 14 15 16	4	30	30	-	-	20	-	120 4S 60t 6V
17 18 19 20	5	40	-	20	30	-	-	60 1,5S 50t 2V
21 22 23 24	6	40	-	-	-	20	-	60 1,5S 50t 2V
25 26 27 28	7	40	-	20	-	-	0,3	60 1,5S 50t 2V
29 30 31 32	8	50	30	20	-	-	0,3	70 2S 40t 2V

Литература

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.А., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. В двух томах. 8-е изд., стер. — СПб.: Изд-во «Лань», 2006, 736 с.: (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Трофимов Г.И., Сегал З.Б. Задания по кинематике к курсовым работам по теоретической механике с методическими указаниями. — Л.: ЛИВТ, 1981, 82 с.

ФГБОУ ВО "ТУМРФ имени адмирала С.О. Макарова"

Содержание

1. Общие требования к выполнению и оформлению расчетно-графического задания.....	3
2. Расчетно-графическое задание	3
Приложения. А. Образец оформления титульного листа.....	11
Приложение Б. Варианты заданий	12
Литература.....	14

ФГБОУ ВО "ТУМРФ имени адмирала С.О. Макарова"

Завгородний Сергей Александрович, канд. техн. наук, доцент;
Поляков Александр Андреевич, канд. техн. наук, профессор
Динамика материальной точки

Учебно-методическое пособие



198035, Санкт-Петербург, Межевой канал, 2
Тел.: (812) 748-97-19, 748-97-23
e-mail: izdat@gumrf.ru

Печатается в авторской редакции

Ответственный за выпуск
Компьютерная верстка

Сатикова Т. Ф.
Сатикова Т. Ф.

Подписано в печать 20.09.2017
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman
Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ № 423/17