МЧС РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПРОТИВОПОЖАРНОЙ СЛУЖБЫ

Иванов К.С.
Мисевич Ю.В.

Методические рекомендации по выполнению контрольной работы

по курсу «Прикладная механика»
для слушателей заочного обучения

Санкт - Петербург
2013

Рецензенты:

И.А. Шумейко

кандидат технических наук, доцент

(Санкт-Петербургский Государственный технологический университет растительных полимеров);

А.Н. Иванов

кандидат технических наук

(Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России)

Иванов К.С., Мисевич Ю.В. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы по курсу «Прикладная механика». / Под ред. О.М. Латышева – СПб.: Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России, 2013. – 34с.

Методические рекомендации по выполнению контрольной работы по курсу «Прикладная механика» подготовлены в соответствии с учебной программой по прикладной механике и предназначены для слушателей заочного обучения СПб УГПС МЧС РФ. В них даны варианты заданий контрольной работы, порядок и методика решения задач. Приведенные в тексте методические рекомендации решения практических задач дают слушателям представление об условиях равновесия и движения материальных тел, основных методов расчета на прочность, жесткость и устойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

Технику противопожарной защиты при экспертизе проектов, надзоре за эксплуатацией различных сооружений, машин и деталей необходимо знание общих законов равновесия и движения материальных тел, основных методов расчета на прочность, жесткость и устойчивость деталей машин и строительных конструкций; знание устройства, применения и основ проектирования деталей и сборочных единиц машин.

Знание основ механики является условием успешного изучения последующих инженерных курсов, пожарная техника, строительные материалы и конструкции и их поведений в условиях пожара, пожарная профилактика и другие.

После изучения курса «Прикладная механика» (1 - 3 разделы) слушатель должен выполнить одну итоговую контрольную работу.

Варианты схем и числовые данные выбираются из рисунков 1 – 5 и таблиц 1 – 5. Номер расчетной схемы определяется по последней цифре номера зачетной книжки, а исходные данные для расчета выбираются из таблиц соответственно номеру схемы.

Требования к оформлению контрольной работы.

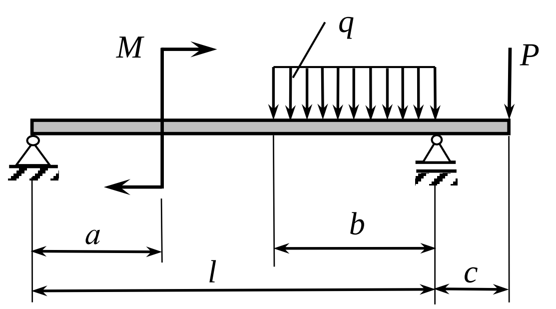
1. Работу следует выполнять в отдельной тетради.
2. Все страницы тетради должны быть пронумерованы и иметь поля 20-25 мм.
3. Перед решением задачи необходимо записать ее условие, выбранные данные и вычертить расчетную схему.
4. Решение задачи записывается подробно и аккуратно, со всеми вычислениями и вспомогательными чертежами. Решение задачи должно сопровождаться краткими пояснениями.
5. Чертежи расчетных схем и эпюр выполняются крупно, строго в масштабе, с указанием всех размеров, числовых данных и осей, используемых в расчетах. Чертежи должны соответствовать требованиям ГОСТов комплекса ЕСКД.
6. Эпюры необходимо вычерчивать под расчетной схемой задачи и все на одной странице (или развороте). На эпюрах должны быть проставлены значения всех характерных ординат и размерности.
7. Получив после рецензирования контрольную работу, слушатель-заочник обязан ввести исправления в соответствии с замечаниями преподавателя, даже если работа зачтена. В случае незачета работы необходимо внести требуемые исправления в конце тетради, на чистых листах, а не в тексте задач, после заголовка "Исправление к задаче." Нельзя стирать или заклеивать отмеченные преподавателем ошибки. Работы, выполняемые с нарушением данных требований, не зачитываются. Работы, выполненные не по варианту, возвращаются без рассмотрения.

ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

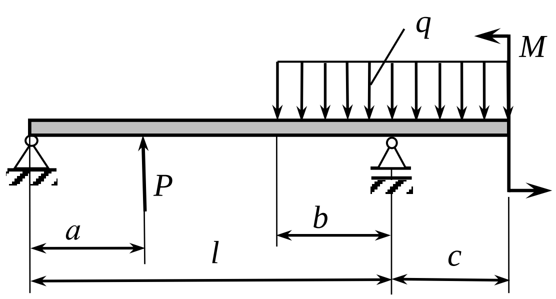
Задание 1. Определение реакций связей механической системы

Цель – оценить знания и практические навыки обучаемых по теме «Статика» в объеме требуемой программы.

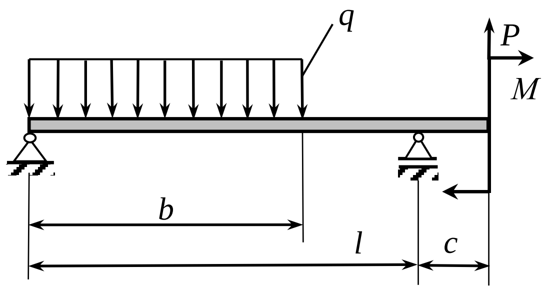
№ 1



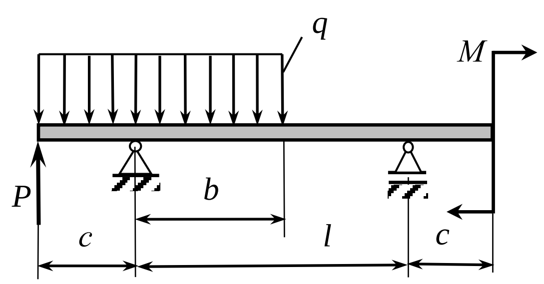
№ 6



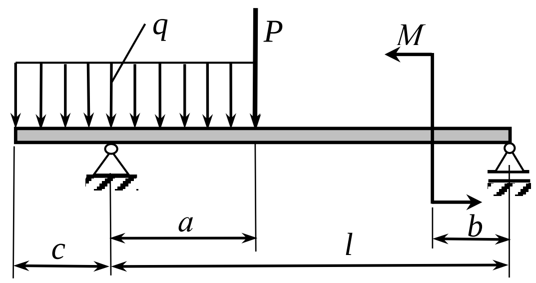
№ 2



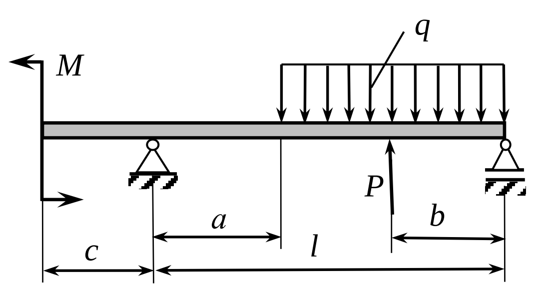
№ 7



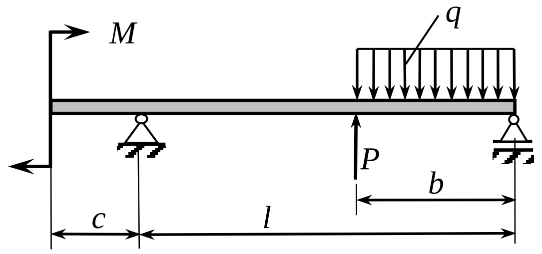
№ 3



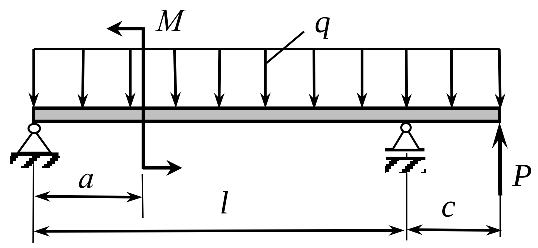
№ 8



№ 4



№ 9



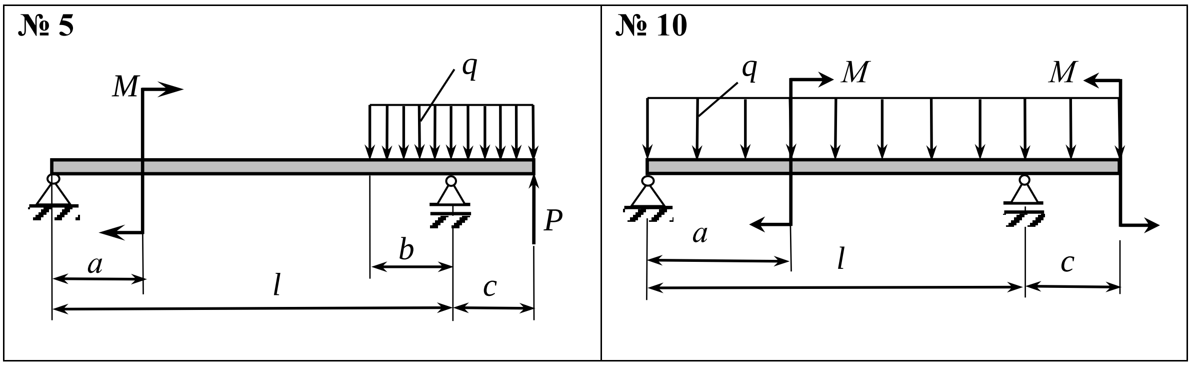


Рис. 1

Таблица 1

Номер схемы	Вариант	Линейные размеры, м				Внешние нагрузки			z, м	b/h
		a	b	c	l	P, кН	M, кН·м	q, кН/м		
С 1 по 10	0	0,2	0,9	0,7	5	15	10	20	2	1,2
	1	0,3	0,8	0,8	5	14	11	19	3	1,4
	2	0,4	0,7	0,9	6	13	12	18	4	1,6
	3	0,5	0,6	1,0	6	12	13	17	5	1,8
	4	0,6	0,5	1,1	7	11	14	16	4	2,0
	5	0,2	0,5	1,2	7	10	15	15	3	1,9
	6	0,3	0,6	1,3	8	9	16	14	2	1,7
	7	0,4	0,7	1,4	8	8	17	13	1	1,5
	8	0,5	0,8	1,5	9	7	18	12	6	1,3
	9	0,6	0,9	1,6	9	6	19	11	7	1,1

Методические рекомендации по выполнению задания

Порядок решения задач на определение реакций связей:

- вычертить исходную конструкцию (схему);

- выделить объект равновесия;

- установить тип механических связей;

- освободить объект равновесия от связей, заменив их реакциями (связей). После этого объект равновесия можно считать свободным (без связей-ограничений на перемещения точек объекта равновесия);

- изобразить объект равновесия вместе с приложенными к нему силами — заданными силами и реакциями. Другими словами, надо построить расчетную схему;

- составить систему уравнений равновесия статики;

- проверить необходимые условия статической неопределимости задачи — число неизвестных должно совпадать с числом уравнений для рассматриваемой системы сил;

- при выполнении этого условия решить составленную систему уравнений равновесия; сделать проверку построенного решения и провести его анализ.

Пример расчета реакций опор.

Определить реакции опор балки *CD* весом $G=15$ *кН,* находящейся под действием сил $P_1=40$ *кН,* $P_2=30$ *кН*, и пары с моментом М=30 *кН·м* (рис. 1.1).

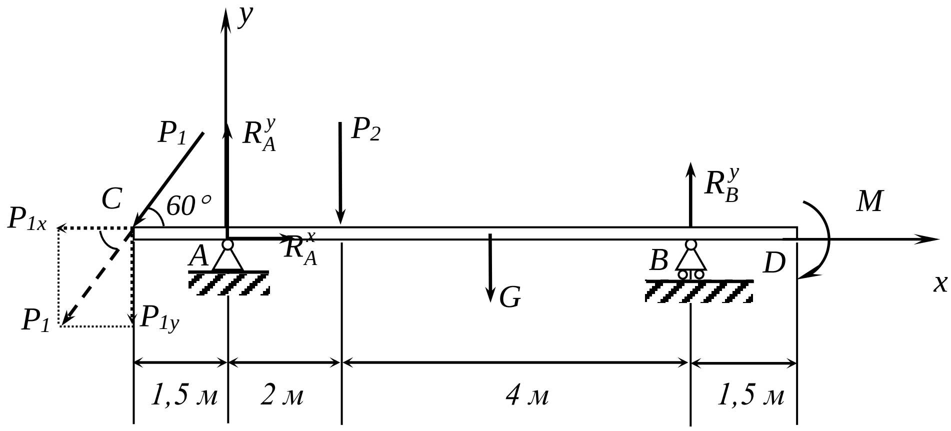


Рис. 1.1

Решение. Рассматриваем равновесие плоской системы сил, действующих на балку.

1. Показываем действующие на балку заданные силы $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, момент пары сил *M*, а также вес балки $\vec{G}$, который прикладываем в середине длины *CD,* считая балку однородной.

2. Реакции связей определяем следующим образом: реакция шарнирно-подвижной опоры R_B^y направлена перпендикулярно опорной плоскости, т.е. вертикально. Выберем направление осей так, как это показано на рис. *а*, и примем направление составляющих R_A^x и R_A^y реакций шарнирно-неподвижной опоры *A* совпадающими с направлениями осей координат.

3. Составляем уравнения равновесия:

$$\sum_i P_{i_x} = 0;$$

$$\sum_i P_{i_y} = 0;$$

$$\sum_i M_{i_A} = 0.$$

(При составлении последнего уравнения за центр моментов принимается, как правило, точка, относительно которой моменты наибольшего количества неизвестных сил равны нулю, в данной задаче это точка *A*.)

Распишем уравнения равновесия:

1) $\sum_i P_{i_x} = 0$; $\quad -P_{1x} + R_A^x = 0; \quad - P_1 \cdot cos60^\circ + R_A^x = 0;$

2) $\sum_i P_{i_y} = 0$; $\quad - P_{1y} + R_A^y - P_2 - G + R_B^y = 0;$

$- P_1 \cdot sin60^\circ + R_A^y - P_2 - G + R_B^y = 0;$

3) $\sum_i M_{i_A} = 0$; $\quad P_1 \cdot sin60^\circ \cdot 1{,}5 - P_2 \cdot 2 - G \cdot (9/2-1{,}5) + R_B^y \cdot 6 - M = 0.$

Из уравнения 1) определим R_A^x:

$\underline{R_A^x} = P_1 \cdot cos60^\circ = 40 \cdot 0{,}5 = \underline{20\ кН}.$

Из уравнения 3) определим R_B^y:

$$\underline{R_B^y} = \frac{-40 \cdot 0{,}866 \cdot 1{,}5 + 30 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 30}{6} = \frac{83}{6} = \underline{13{,}8\ кН}.$$

Из уравнения 2)

$\underline{R_A^y} = P_1 \cdot sin60^\circ + P_2 + G - R_B^y = 40 \cdot 0{,}866 + 30 + 15 - 13{,}8 = \underline{65{,}8\ кН}.$

Все ответы имеют знак плюс, следовательно, выбранные направления найденных сил совпадают с истинными.

Литература

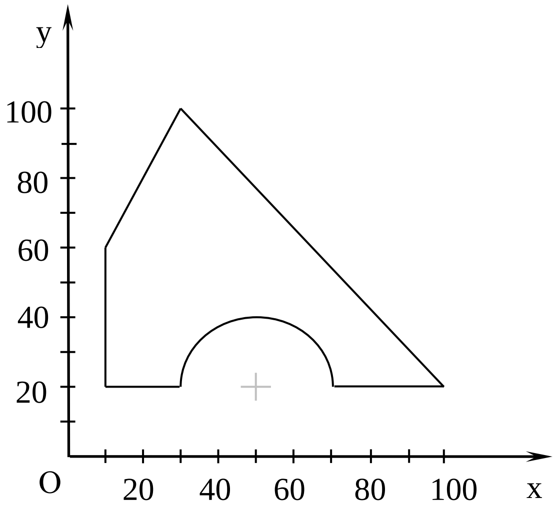
1. Яблонский А.А., Никифоровна В.М. Курс теоретической механики. Ч.1. Статика. Кинематика. Учебник для техн. вузов.- 6 изд. испр. - М.: Высшая школа, 2004. - 768 с.
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч.2. Динамика. Учебник для техн. вузов. - 6 изд. искр. -М.: Высшая школа, 2004. - 343 с.
3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики в 2 томах. – СПб: Лань, 2008, с. 736.

Задание 2. Определение центра тяжести твердого тела

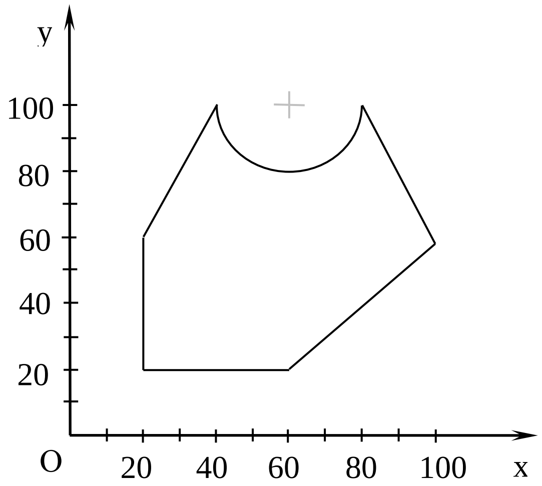
Цель – углубить и закрепить теоретические знания и практические навыки обучаемых по теме «Статика» в объеме требуемой программы.

Задание: определить координаты центра тяжести плоской однородной фигуры (размеры в *см*) (рис. 2)

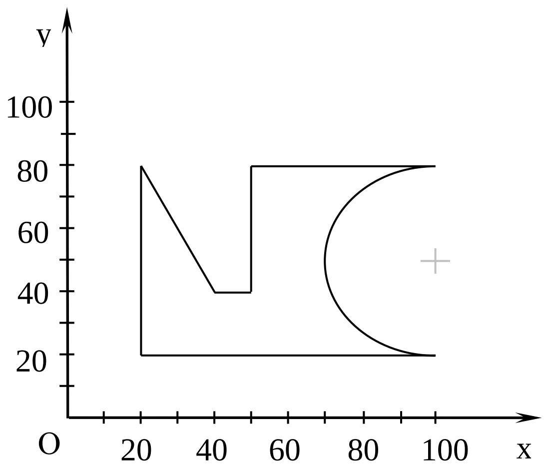
№ 1


y
100
80
60
40
20
O
20
40
60
80
100
x

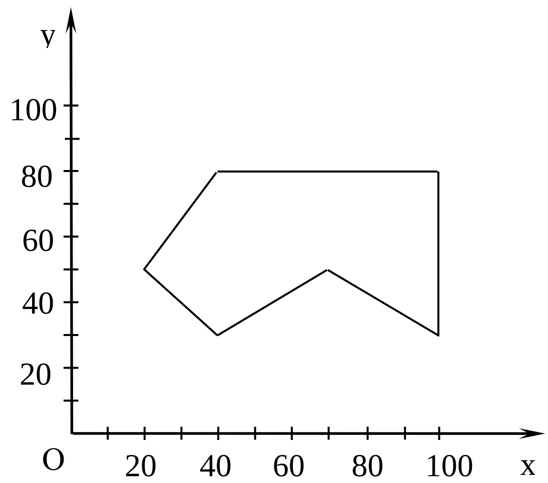
№ 6


y
100
80
60
40
20
O
20
40
60
80
100
x

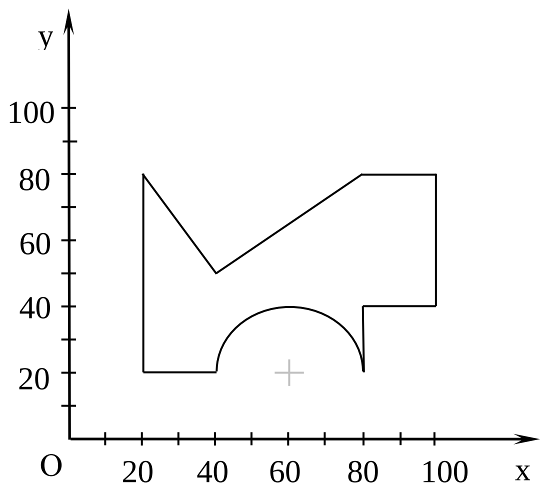
№ 2


y
100
80
60
40
20
O
20
40
60
80
100
x

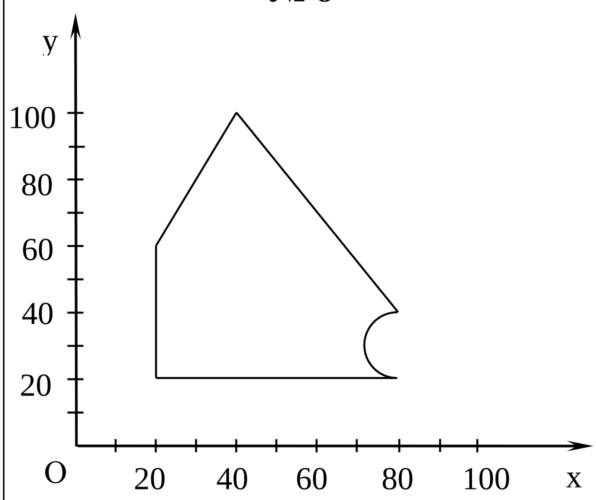
№ 7


y
100
80
60
40
20
O
20
40
60
80
100
x

№ 3


y
100
80
60
40
20
O
20
40
60
80
100
x

№ 8


y
100
80
60
40
20
O
20
40
60
80
100
x

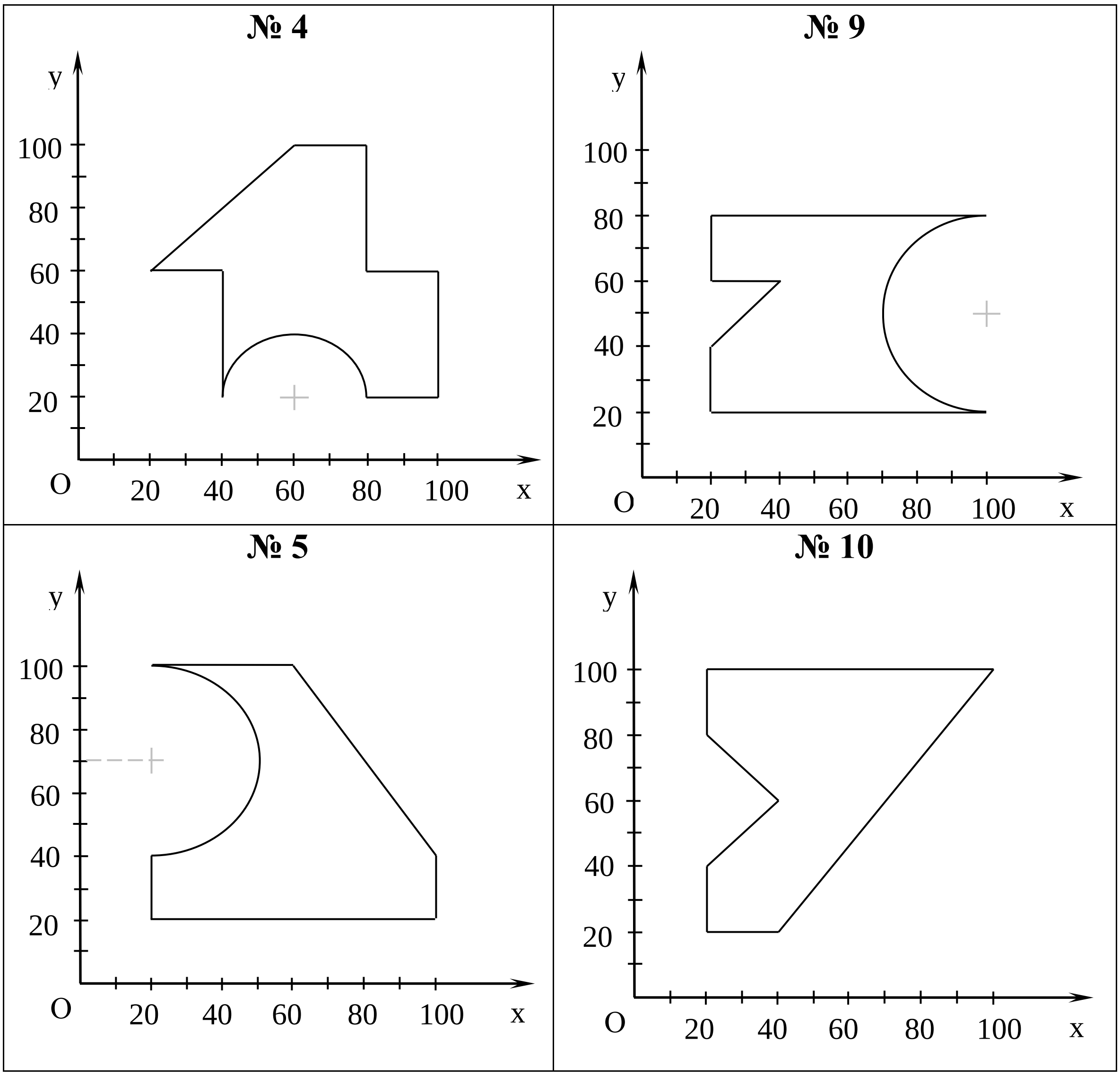


Рис. 2

Методические рекомендации по выполнению задания

Определение координат центра тяжести плоских фигур

При решении задач используются следующие методы:

1) метод симметрии: центр тяжести симметричных фигур находится на оси симметрии;

2) метод разделения: сложные фигуры разделяем на несколько простых частей, положение центров тяжести которых легко определить;

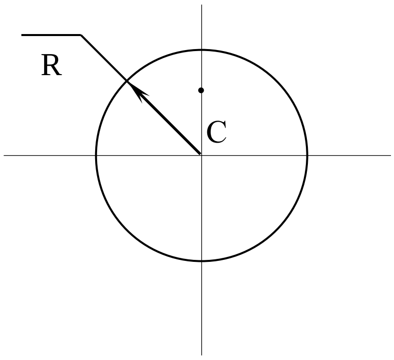
3) метод отрицательных площадей: вырезы (отверстия) рассматриваются как част фигуры с отрицательными площадями.

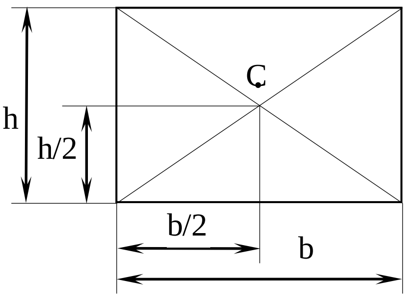
Координаты центр тяжести однородных плоских тел (плоских фигур) определяется следующим образом:

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; \quad y_c = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}$$

Положения центров тяжести простых геометрических фигур.

1) для круга; 2) для прямоугольника;

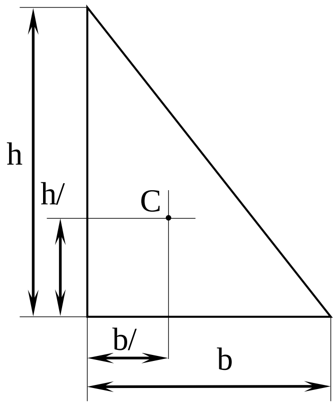


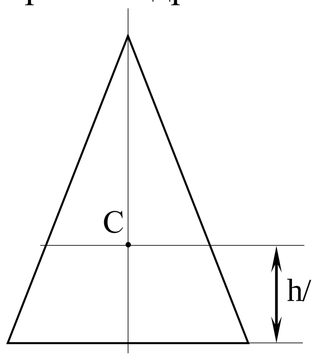


3) Центр тяжести любого треугольника лежит на пересечении медиан.

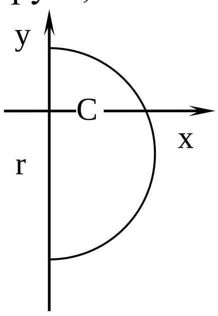
Частные случаи: для треугольника

- прямоугольного - равнобедренного

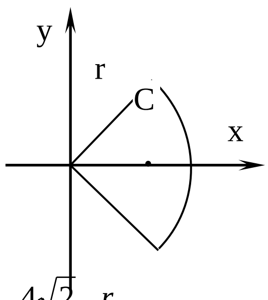




4) для полукруга; 5) для четверти круга;



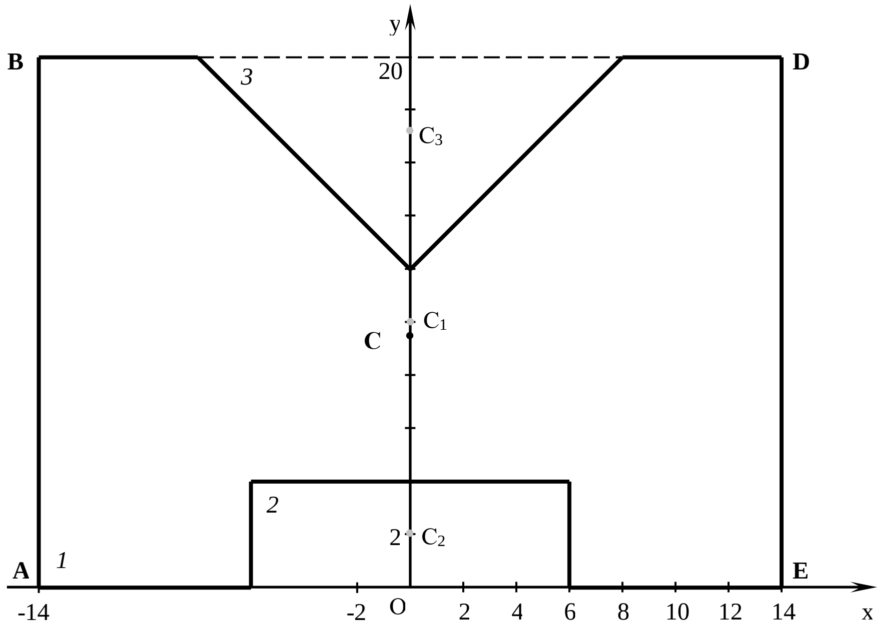
$$x_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \approx 0{,}424r$$



$$x_c = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \approx 0{,}6r$$

(где r –радиус круга).

Пример 1: Определить положение центра тяжести фигуры, имеющей ось симметрии (размеры определены на схеме).



Решение:

Фигура имеет ось симметрии, на которой находится центр тяжести. Совместим с осью симметрии ось y, а ось x – с нижним основанием фигуры.

Используем метод отрицательных площадей.

1. Разобьем фигуру произвольным образом на простые фигуры.

Наиболее рациональным из всех возможных способов деления фигуры на составные части является тот способ, при котором образуется *наименьшее* их число.

Дополнив фигуру до прямоугольника ABDE , разобьем ее на три части и определим площадь каждой (в см^2):

1 – прямоугольник (большой), $F_1 = b_1 \cdot h_1 = 28 \cdot 20 = 560$ (см^2);

2 – прямоугольник (маленький), $F_2 = b_2 \cdot h_2 = 12 \cdot 4 = 48$ (см^2);

3 – треугольник, $F_3 = \frac{1}{2} \cdot b_3 \cdot h_3 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 8 = 64$ (см^2).

2. Определяем координаты центров тяжести составных частей:

Точка C_1 – ЦТ первой фигуры имеет координаты: $x_1 = 0; y_1 = 10$.

Точка C_2 – ЦТ второй фигуры имеет координаты: $x_2 = 0; y_2 = 2$.

Точка C_3 – ЦТ третьей фигуры имеет координаты:

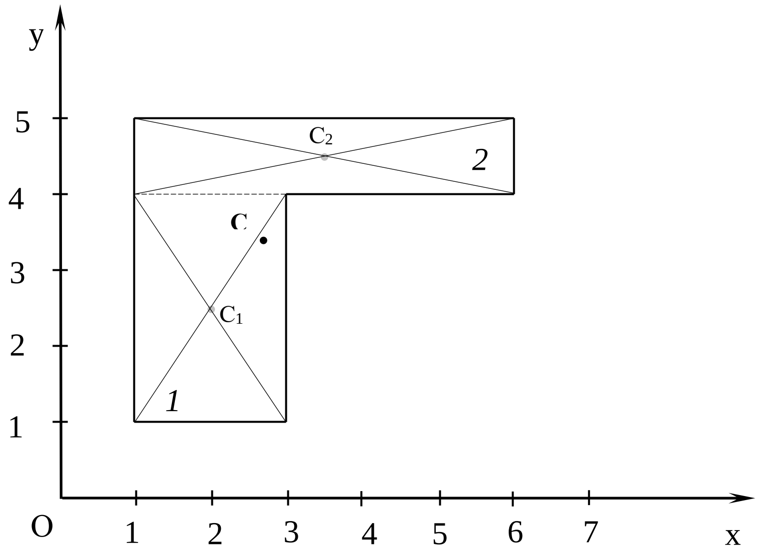
$$x_3 = 0; y_3 = 20 - \frac{1}{3} h_3 = 20 - \frac{8}{3} = 20 - 2{,}67 = 17{,}33.$$

4. Координаты точки C – центра тяжести всей фигуры:

$$x_c = 0; y_c = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i} = \frac{F_1 y_1 - F_2 y_2 - F_3 y_3}{F_1 - F_2 - F_3} = \frac{560 \cdot 10 - 48 \cdot 2 - 64 \cdot 17{,}33}{560 - 48 - 64} = 9{,}81$$ (см).

Ответ: C (0;9,81).

Пример 2: Определить положение центра тяжести фигуры, имеющей ось симметрии (размеры определены на схеме).



Решение:

1. Разобьем фигуру произвольным образом на простые фигуры (в данном случае на два прямоугольника) определим площадь каждой (в см^2):

1 – прямоугольник, $F_1 = b_1 \cdot h_1 = 2 \cdot 3 = 6$ (см^2);

2 – прямоугольник, $F_2 = b_2 \cdot h_2 = 5 \cdot 1 = 5$ (см^2);

2. Определяем координаты центров тяжести составных частей:

Точка C_1 – ЦТ первой фигуры имеет координаты: $x_1 = 2; y_1 = 2{,}5$.

Точка C_2 – ЦТ второй фигуры имеет координаты: $x_2 = 3{,}5; y_2 = 4{,}5$.

4. Координаты точки С - центра тяжести всей фигуры:

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i} = \frac{6 \cdot 2 + 5 \cdot 3{,}5}{6+5} = 2{,}68$$ (см)

$$y_c = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i} = \frac{6 \cdot 2{,}5 + 5 \cdot 4{,}5}{6+5} = 3{,}41$$ (см).

Ответ: С (2,68;3,41).

Литература

1. Яблонский А.А., Никифоровна В.М. Курс теоретической механики. Ч.1. Статика. Кинематика. Учебник для техн. вузов.- 6 изд. испр. - М.: Высшая школа, 2004. - 768 с.

2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч.2. Динамика. Учебник для техн. вузов. - 6 изд. искр. -М.: Высшая школа, 2004. - 343 с.

3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики в 2 томах. – СПб: Лань, 2008, с. 736.

Задание 3. Определение кинематических параметров твердого тела

Цель – оценить знания и практические навыки обучаемых по теме «Кинематика» в объеме требуемой программы.

Задание:

Кривошип ОА, вращаясь вокруг точки О с постоянной угловой скоростью ω, приводит в движение шатун АВ и ползун В. При заданном положении кривошипно-шатунного механизма определить скорость и ускорение шарнира А, угловую скорость звена АВ, скорость и ускорение ползуна В.

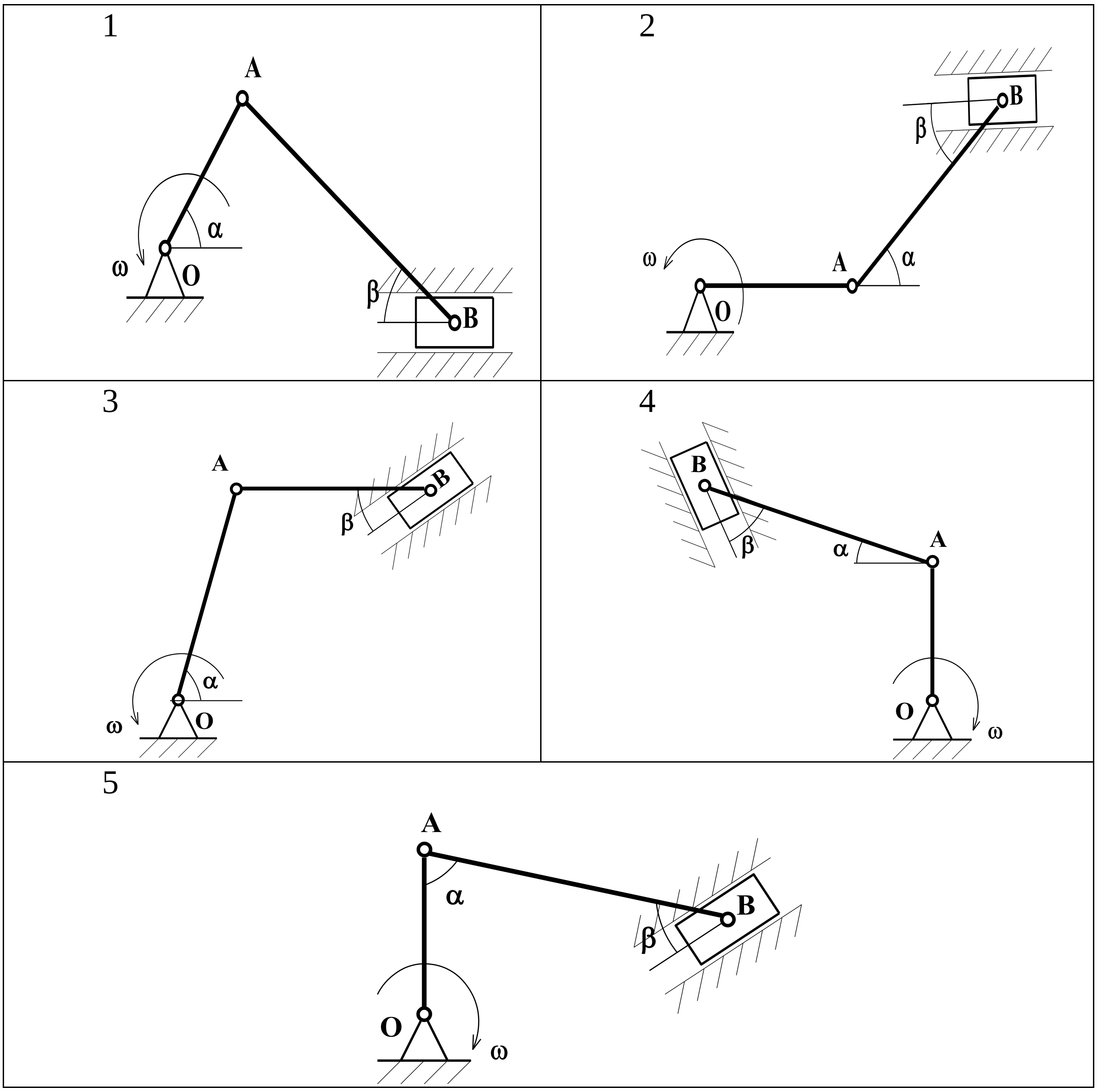


Рис. 3

Таблица 3

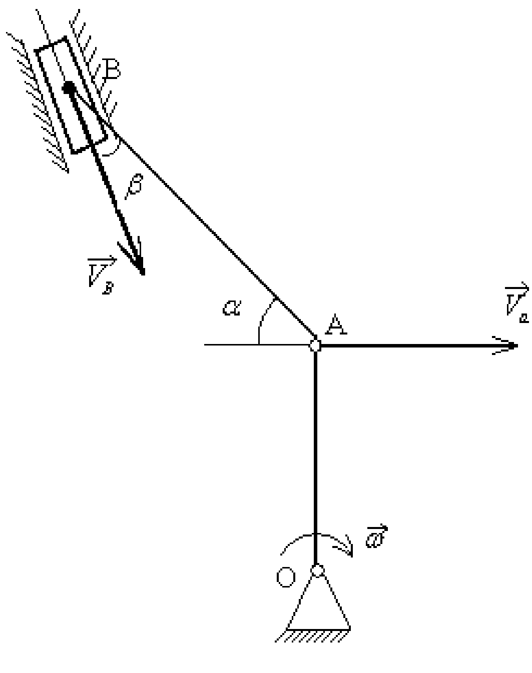
№	Первая цифра варианта	Вторая цифра варианта			Третья цифра варианта	
	Рисунок	Размеры, см		Угловая скорость ω, 1/с	Углы, град.	
		OA	AB		α	β
1	1	26	45	1,8	40	28
2	2	18	32	2,6	30	20
3	3	30	52	1,4	50	32
4	4	14	24	3,0	35	21
5	5	20	36	2,4	60	30
6	1	12	20	3,2	40	22
7	2	22	38	2,2	45	31
8	3	28	50	1,6	55	27
9	4	24	40	2,0	45	24
0	5	16	28	2,8	50	26

Методические рекомендации по выполнению задания

Кривошип OA, вращаясь вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω приводит в движение шатун AB и ползун B (OA=24см, AB=40см, ω=2.0см/с, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 45^{o}$, $\beta = 24^{o}$).

При заданном положении кривошипно-шатунного механизма определить:

1. Скорость и ускорение точки A;
2. Угловую скорость звена AB;
3. Скорость и ускорение ползуна B.



Решение:

1. Анализируем движение механизма

1.1.Кривошип ОА совершает вращательное движение относительно точки О с заданной угловой скоростью $\omega = const$.

1.2. Шатун АВ совершает плоскопараллельное движение.

1.3. Ползун В – возвратно-поступательное вдоль прямой.

2. Определим скорости

2.1.Определим V_a

Точка А принадлежит кривошипу ОА, совершая вращательное движение с постоянной угловой скоростью.

ω $V_a = \omega \times OA$

$$V_a = 2 \cdot 24 = 48(см/сек)$$

$V_A \perp OA$.

2.2. Определим ω_{AB} и V_B.

Применим второй метод исследования плоского движения – метод МЦС. Положение МЦС определим как точку пересечения перпендикуляров, проведенных к векторам скоростей точек А и В через эти точки.

Скорость точки «А» в мгновенном вращении относительно точки «Р»: $V_A = \omega_{AB} \cdot AP \;\Rightarrow\; \omega_{AB} = \frac{V_A}{AP}$

2.3. Определим АР :

Рассмотрим ΔAPB

$$\angle PAB = 90° - 45° = 45°$$

$$\angle PBA = 90° - 24° = 66°$$

$$\angle APB = 180° - 45° - 66° = 69°$$

$$\frac{AB}{\sin 69°} = \frac{BP}{\sin 45°} = \frac{AP}{\sin 66°}$$

$$BP = \frac{AB \cdot \sin 45°}{\sin 69°} = \frac{40 \cdot 0{,}707}{0{,}8837} = 32(см)$$

$$AP = \frac{AB \cdot \sin 66°}{\sin 69°} = \frac{40 \cdot 0{,}8607}{0{,}8837} = 39(см)$$

2.4.Найдем ω_{AB} и V_B.

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{40}{39} = 1{,}02\left(рад/сек\right)$$

V_B определим в том же вращении относительно МЦС .

$$V_B = \omega_{AB} \cdot PB = 1{,}02 \cdot 32 = 32{,}64\left(м/с\right)$$

3. Определение ускорений.

3.1. Найдем ускорение точки «А».

$$a_A = a_ц + a_{вр}$$

$$a_ц = OA \cdot \omega^2 = 24 \cdot 4 = 96\left(см/с^2\right)$$

$$a_{вр} = OA \cdot \varepsilon^2 = 24 \cdot 0 = 0$$

$$a_A = a_ц = 96\left(\frac{см}{с^2}\right)$$

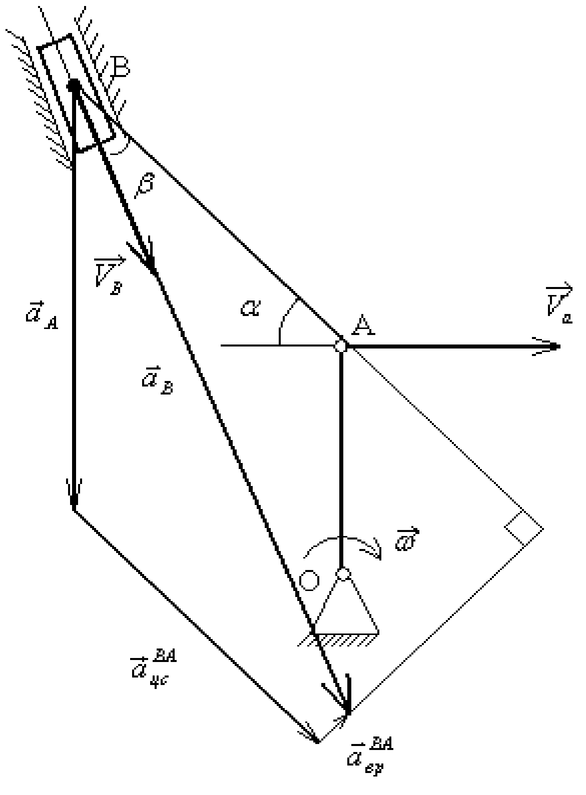
3.2. Определим ускорение точки «В»: применим второй метод исследования плоскопараллельного движения:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{BA}_{цс} + \vec{a}^{BA}_{вр}$$

$$a^{BA}_{цс} = \omega^2_{AB} \cdot AB = 50 \cdot 1{,}0404 = 52{,}02\left(\frac{см}{с^2}\right)$$

Так как мы не знаем вращательного ускорения точки «В», найдем ускорение этой точки графическим путем.

$$a_B = 128\left(\frac{см}{с^2}\right)$$



$$V_A = 48\left(\frac{см}{с}\right)$$

$$a_A = 96\left(\frac{см}{с^2}\right)$$

Ответ:

$$\omega_{AB} = 1{,}02\left(\frac{рад}{с}\right)$$

$$V_B = 32{,}64\left(\frac{м}{с}\right)$$

$$a_B = 128\left(\frac{см}{с^2}\right)$$

Литература

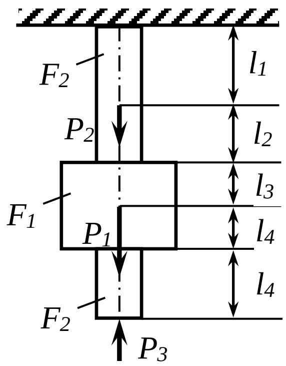
1. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. СПб.: Лань, 2004 – 768 с.
2. Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики в 2 томах. – СПб: Лань, 2008, с. 736.

Задание 4. Центральное растяжение-сжатие

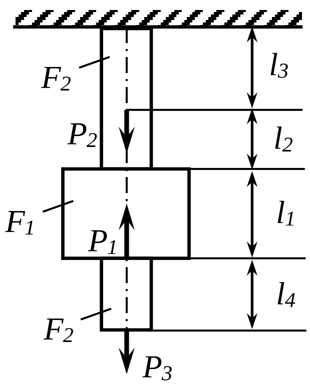
Цель – оценить знания и практические навыки обучаемых по теме «Основные понятия и определения сопротивления материалов» в объеме требуемой программы.

Задание: построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений, определить абсолютную деформацию по заданным условиям (рис. 4, табл. 4).

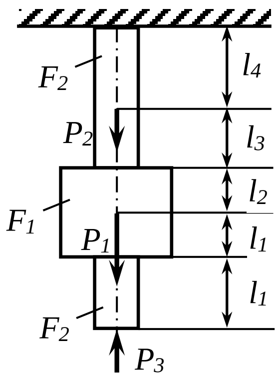
№ 1



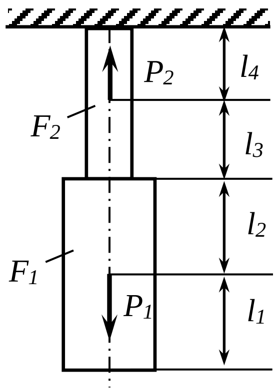
№ 2



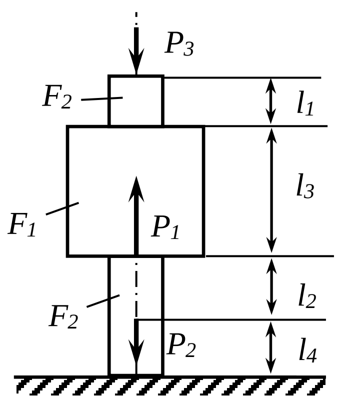
№ 3



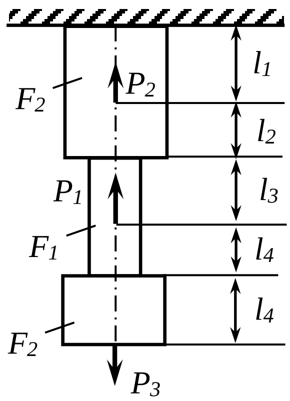
№ 6



№ 7



№ 8



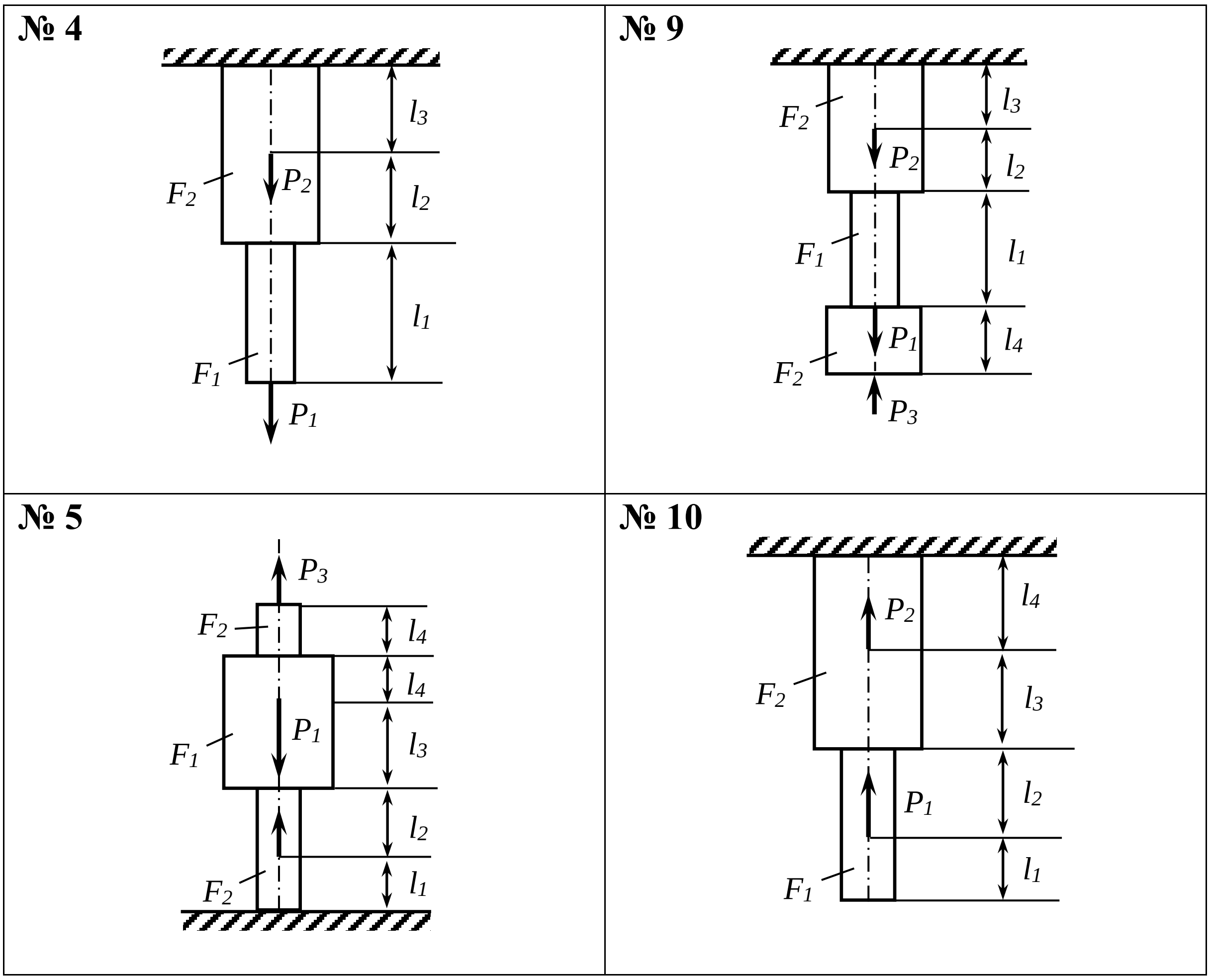


Рис. 4

Таблица 4

Номер схемы	Внешние нагрузки, кН			Линейные нагрузки, мм				Площади поперечных сечений, мм^2 ; материал	
	P_1	P_2	P_3	l_1	l_2	l_3	l_4	F_1	F_2
1	50	40	20	500	500	1000	1000	25, дюраль	10, дюраль
2	60	20	40	1500	1000	1000	1000	35, сталь	20, сталь
3	60	40	50	600	1800	400	2200	80, сталь	40, сталь
4	60	20	-	1500	1800	1200	-	10, сталь	15, сталь
5	50	20	50	500	1000	2000	400	20, дюраль	10, дюраль
6	90	50	-	2000	2500	2500	1400	50, бронза	25, бронза
7	40	60	40	500	1000	2000	500	40, дюраль	25, дюраль
8	40	20	40	1000	1000	500	500	5, дюраль	10, дюраль
9	15	25	20	2500	2000	1400	500	12, сталь	24, сталь
10	20	30	40	1200	600	1400	500	15, бронза	30, бронза

Методические рекомендации по выполнению задания

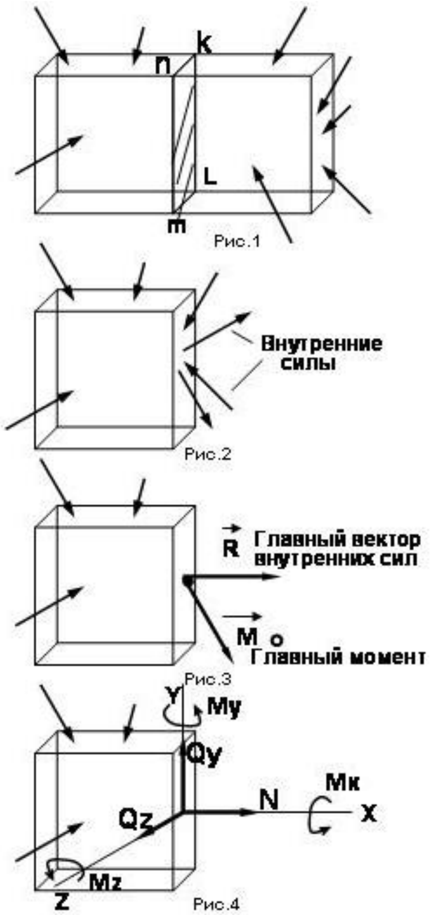
Построение эпюр продольных сил

Необходимо определить, с помощью какого метода можно исследовать эти внутренние силовые факторы. Например, *метод сечений*.

Пусть стержень нагружен произвольной системой внешних сил (рис. 1). Под действием данной системы внешних сил стержень находится в равновесии. Внутренние силы, возникающие в стержне, можно выявить, только если рассечь его мысленно на две части.

Проводим произвольное поперечное сечение *klmn*. Внешние силы стремятся оторвать часть стержня слева. Внутренние силы препятствуют этому.

Отбросим правую часть стержня (рис. 2). На точки сечения оставленной левой части будут действовать внутренние силы. Для сохранения равновесия рассматриваемой левой части необходимо заменить воздействие отброшенной (правой) части на оставленную левую часть системой внутренних сил в сечении.



Заменим всю совокупность внутренних сил в сечении главным вектором $\vec{R}_o$ и главным моментом $\vec{M}_o$ путем приведения их к центру тяжести сечения согласно основной теореме статики. Для определения $\vec{R}_o$ и $\vec{M}_o$ нужно составить условия равновесия, поэтому в проекциях на оси координат получим шесть условий равновесия. Для этого разложим $\vec{R}_o$ и $\vec{M}_o$ на составляющие:

$$\vec{R}_o = \vec{Q}_x + \vec{Q}_y + \vec{N}; \qquad \vec{M}_o = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z$$

$$\begin{cases} \sum_i P_{ix} + Q_x = 0 \\ \sum_i P_{iy} + Q_y = 0 \\ \sum_i P_{iz} + N = 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} \sum_i M_{ix} + M_x = 0 \\ \sum_i M_{iy} + M_y = 0 \\ \sum_i M_{iz} + M_к = 0 \end{cases}$$

Составляющие $\vec{Q}_x$, $\vec{Q}_y$, $\vec{Q}_z$, $\vec{M}_x$, $\vec{M}_y$ $\vec{M}_z = \vec{M}_к$ называются внутренними силовыми факторами.

Здесь $\sum_i P_{ix}$, $\sum_i P_{iy}$, $\sum_i P_{iz}$ – суммы проекций всех внешних сил;

$\sum_i M_{ix}$, $\sum_i M_{iy}$, $\sum_i M_{iz}$ – суммы проекций внешних моментов;

N – продольная сила;

Q_y, Q_z - поперечные силы;

$M_к$ - крутящий момент;

M_y, M_z - изгибающие моменты.

Деформированные состояния, при которых возникают данные силовые факторы:

1) растяжение-сжатие (продольные силы $\vec{N}$);
2) сдвиг (поперечные силы $\vec{Q}_x$, Q_y);
3) кручение (крутящий момент $\vec{M}_к$);
4) изгиб (изгибающие моменты $\vec{M}_x$, $\vec{M}_y$);
5) сложные деформации (несколько усилий, например, изгибающий и крутящий моменты).

Правило знаков для продольной силы: растягивающие продольные силы (направленные от сечения) считаются *положительными*, сжимающие (направленные к сечению) – *отрицательными.*

Эпюрой продольной силы называется график, показывающий изменение продольной силы по оси стержня.

Пример 1

Построить эпюру продольных сил для бруса, если***:***
$F_1 = F$; $F_2 = 2F$, $F_3 = 4F$.

Решение. Разбиваем брус на участки, начиная со свободного конца. Границами участков являются сечения, в которые приложены внешние силы. Применяя *метод сечений**,*** оставляем правую часть (левую отбрасываем) – это позволяет не определять реакцию заделки.

Проводя произвольно сечение *а-а* на участке I, составляем уравнение равновесия:

$$\sum Z = 0 \qquad F - N_I = 0$$

$$N_I = F \text{ (растяжение)}$$

Проводим сечение *в-в* на участке II:

$$\sum Z = F_1 - F_2 - N_{II} = F - 2F - N_{II} = 0$$

$$N_{II} = -F \text{ (сжатие)}$$

Проводим сечение *с-с* на участке III:

$$\sum Z = F_1 - F_2 + F_3 - N_{III} = 0$$

$$\sum Z = F - 2F + 4F - N_{III} = 0$$

$$N_{III} = 3F \text{ (растяжение)}$$

Строим эпюру.

Для построения эпюры *N* проводим ось абсцисс параллельно оси бруса.

Положительные значения откладываем вверх, отрицательные – вниз (рис. 4.1). Эпюра строится в выбранном м а с ш т а б е ! Эпюру следует штриховать! Штриховка строго перпендикулярна оси эпюры !!!

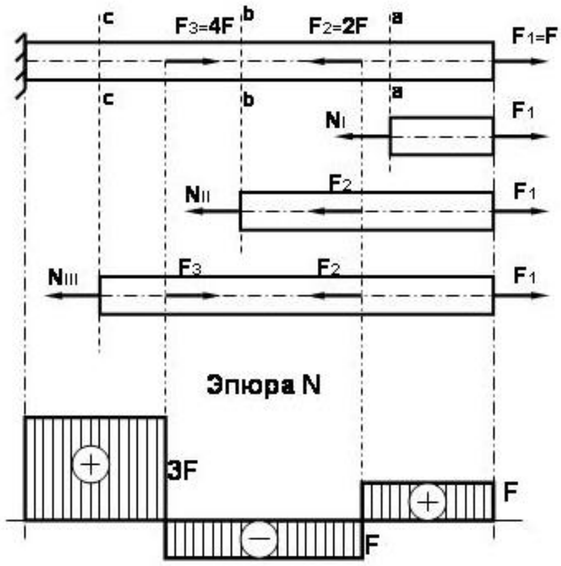


Рис. 4.1

Абсолютная и относительная продольная деформация.

Напряжение – это внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади: $\sigma = \frac{N}{F}$.

Единицы измерения напряжения:

1 Па = 1 Н/ м²; 1 МПа = 10⁶ Па =1 Н/мм².

Допускаемые напряжения ([σ] и [τ] – нормальные и касательные) – это такие максимальные напряжения, при которых не происходит разрушение данной конкретной детали, и она работает в условиях упругих деформаций.

При растяжении (сжатии) в поперечном сечении стержня $\sigma = \frac{P}{F} = \frac{N}{F}$.

При растяжении нормальные напряжения – положительные, при сжатии – отрицательные.

Обратить внимание, что при растяжении- сжатии возникают только нормальные напряжения.

Изменение длины стержня $\Delta l = l_1 - l$ называют **линейной продольной деформацией (абсолютным удлинением)**; изменение поперечного сечения $\Delta a = a_1 - a$ **- линейной поперечной деформацией**.

Интенсивность деформирования оценивают деформациями, приходящимися на единицу длинны стержня: **относительной продольной** ε и **относительной поперечной** ε' :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}; \qquad \varepsilon = \frac{\Delta a}{a}.$$

Деформации бывают продольные и поперечные. Отношение поперечной деформации к продольной называется *коэффициентом Пуассона* μ.

$$0{,}2 \le \mu \le 0{,}5.$$

ЗАКОН ГУКА *(открыт в 1660)*:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F}, \tag{2}$$

где Δl - абсолютная продольная деформация;

P – осевая внешняя сила;

F – площадь поперечного сечения;

E – модуль продольной упругости (модуль Юнга).

Закон Гука в форме (2) можно преобразовать, учитывая определения внутреннего напряжения ($\sigma = \frac{N}{F}$) и относительной деформации ($\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \tag{3}$$

Максимальные напряжения при растяжении (сжатии): $\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F}$.

Тогда можно сформулировать условия прочности и жесткости при растяжении (сжатии).

Условие прочности: $\sigma_{max} \le [\sigma]$.

Условие жесткости: $\varepsilon_{max} \le [\varepsilon]$.

Условие жесткости при растяжении (сжатии) можно записать и в другом виде:

$$\Delta l_{max} = \frac{N_{max} \cdot l}{E \cdot F} \le [\Delta l].$$

Изучить вопросы: закон Гука для абсолютных деформаций, закон Гука для нормальных напряжений.

Пример 2. Вычислить приращение длины стального стержня ступенчатого сечения, если $l_1 = 50$ *см*, $l_2 = 80$ *см*, $l_3 = 40$ *см*, $l_4 = 60$ *см*, $E = 2 \cdot 10^6 \frac{кг}{см^2}$, $F_1 = 10\, см^2$, $F_2 = 20\, см^2$, $P_1 = 200$ *кг*, $P_2 = 500$ *кг*, $P_3 = 700$ *кг* (рис. 1). Построить эпюры нормальных напряжений и перемещений.

Решение

1. Строим эпюру продольной силы.

Применяем метод сечений, разбиваем брус на участки.

I участок: $\sum Z = 0$ $\quad -P_1 + N_I = 0$

$N_I = P_1 = 200$ *кг* (растяжение)

II участок: $\sum Z = 0$ $\quad -P_1 + P_2 + N_{II} = 0$

$N_{II} = P_1 - P_2 = 200 - 500 = -300$ *кг* (сжатие)

III участок: $\sum Z = 0$ $\quad -P_1 + P_2 - P_3 + N_{III} = 0$

$N_{III} = P_1 - P_2 + P_3 = 200 - 500 + 700 = 400$ *кг* (раст.)

Чертим эпюру продольной силы (рис. 1).

2. Строим эпюру напряжений.

На каждом участке вычисляем значения нормальных напряжений σ_i в поперечных сечениях стержня:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{200}{10} = 20 \quad (кг/см^2);$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_1} = -\frac{300}{10} = -30 \quad (кг/см^2);$$

$$\sigma_3 = \frac{N_2}{F_2} = -\frac{300}{20} = -15 \quad (кг/см^2);$$

$$\sigma_4 = \frac{N_3}{F_2} = \frac{400}{20} = 20 \quad (кг/см^2).$$

Чертим эпюру напряжений (рис. 1).

3. Строим эпюру перемещений

Перемещение какого-либо поперечного сечения стержня равно изменению длины (абсолютной деформации) соответствующей части стержня. Ясно, что торец стержня, находящийся в заделке, обладает нулевым перемещением. Рассчитаем перемещение всех характерных сечений.

По закону Гука, абсолютная деформация $\Delta l = \dfrac{P \cdot l}{E \cdot F}$.

Тогда *перемещение сечения А*: $\Delta l_A = 0$;

перемещение сечения В:

$$\Delta l_B = \frac{N_{III} \cdot l_4}{E \cdot F_2} = \frac{400 \cdot 60}{2 \cdot 10^6 \cdot 20} = 6 \cdot 10^{-4}$$ см;

перемещение сечения С:

$$\Delta l_C = \frac{N_{II} \cdot l_3}{E \cdot F_2} = \frac{-300 \cdot 40}{2 \cdot 10^6 \cdot 20} = -3 \cdot 10^{-4}$$ см;

перемещение сечения D:

$$\Delta l_D = \frac{N_{II} \cdot l_2}{E \cdot F_1} = \frac{-300 \cdot 80}{2 \cdot 10^6 \cdot 10} = -12 \cdot 10^{-4}$$ см;

перемещение сечения Е:

$$\Delta l_E = \frac{N_{I} \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{200 \cdot 50}{2 \cdot 10^6 \cdot 10} = 5 \cdot 10^{-4}$$ см.

Чертим эпюру перемещений (рис. 1).

4. Полное удлинение стержня (абсолютную деформацию) определяем как сумму удлинений отдельных участков:

$$\Delta l = \Delta l_A + \Delta l_B + \Delta l_C + \Delta l_D + \Delta l_E = 0 + 10^{-4}(6 - 3 - 12 + 5) = -4 \cdot 10^{-4}$$

см.

(Знак минус означает, что произошло сжатие).

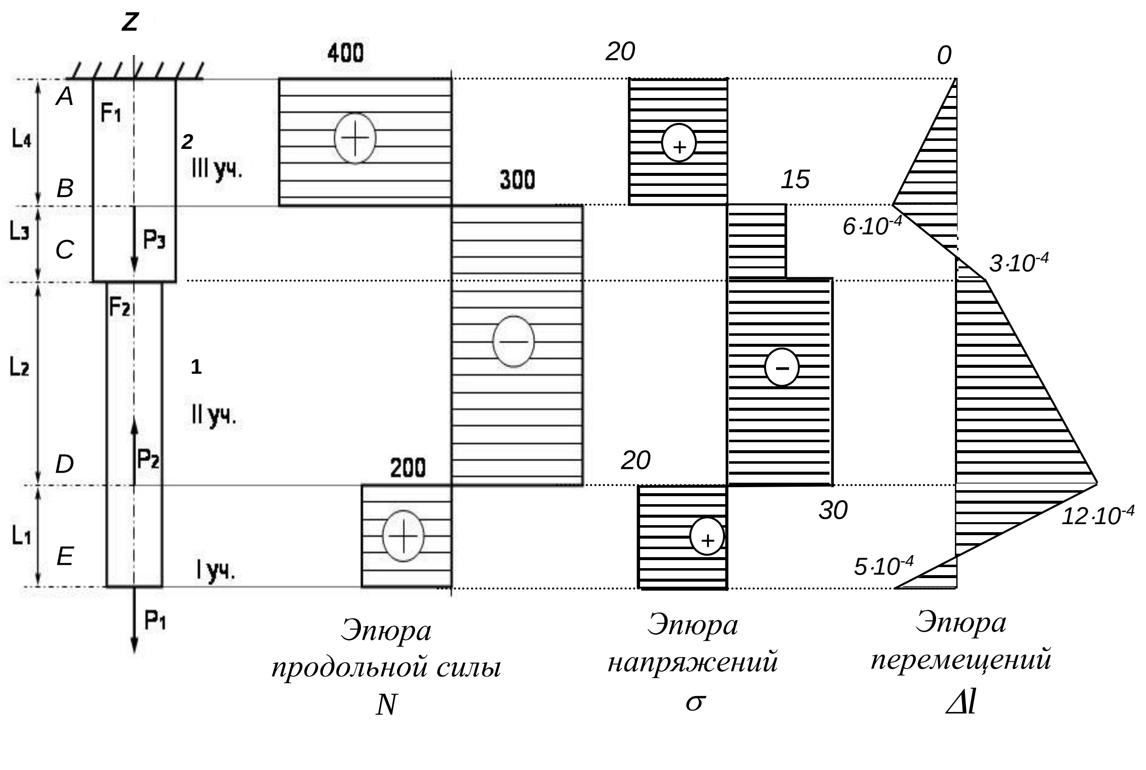


Рис. 4.2

Литература:

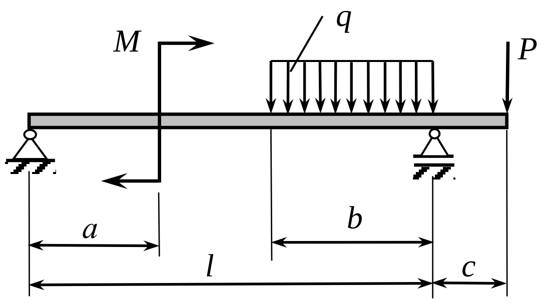
1. Кочетов В.Т., Кочетов М.В., Павленко А.Д. Учебное пособие. Сопротивление материалов. – СПб: БХВ – Петербург, 2004.
2. В.И.Феодосьев. Сопротивление материалов, М., Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.
3. Иванов К.С. и др. Прикладная механика. Сборник задач. Часть I. Сопротивление материалов. СПб.: Санкт-Петербургский университет Государственной противопожарной службы МЧС России, 2011. – 164 с.

Задание 5. Изгиб балки

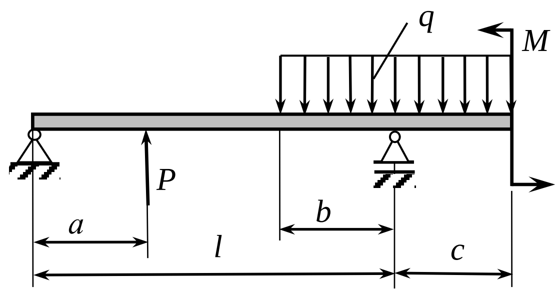
Цель – оценить знания и практические навыки обучаемых по теме «Прямой поперечный изгиб» в объеме требуемой программы.

Задание: для балки (рис. 5) построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов $M_{изг}$ по заданным условиям (табл. 5).

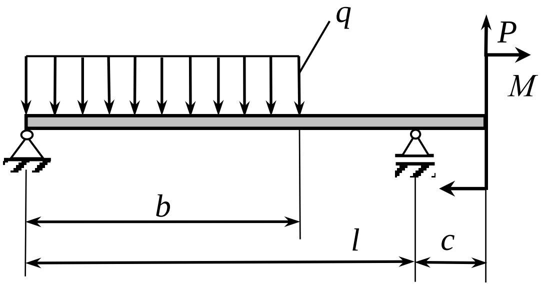
№ 1



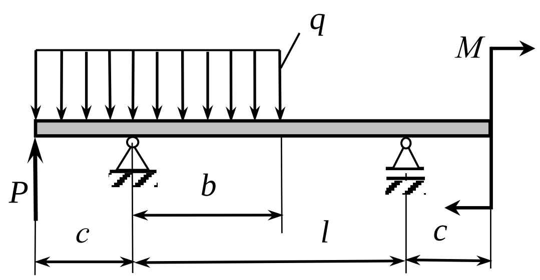
№ 6



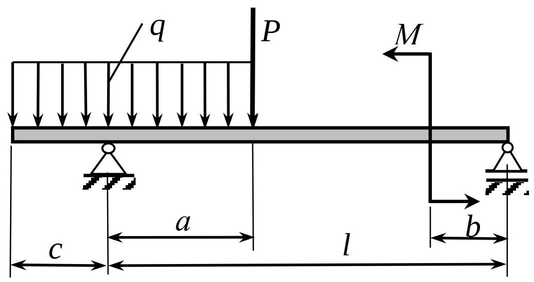
№ 2



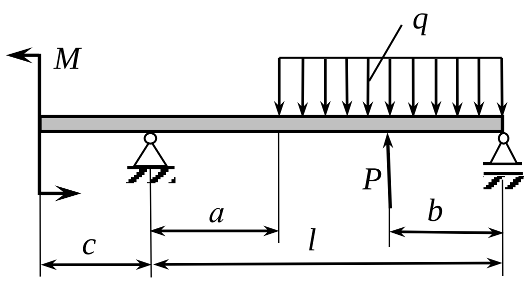
№ 7



№ 3



№ 8



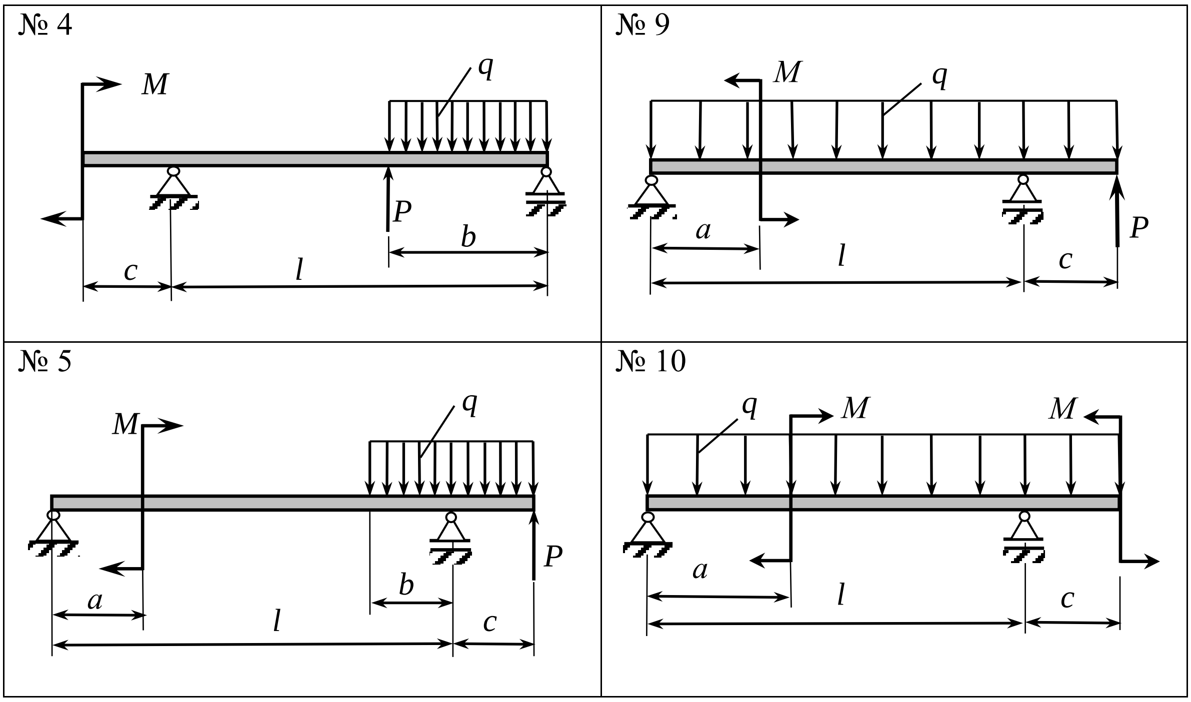


Рис. 5

Таблица 5

Номер схемы	Вариант	Линейные размеры, м				Внешние нагрузки			z, м	b/h
		a	b	c	l	P, кН	M, кН·м	q, кН/м		
С 1 по 10	0	0,2	0,9	0,7	5	15	10	20	2	1,2
	1	0,3	0,8	0,8	5	14	11	19	3	1,4
	2	0,4	0,7	0,9	6	13	12	18	4	1,6
	3	0,5	0,6	1,0	6	12	13	17	5	1,8
	4	0,6	0,5	1,1	7	11	14	16	4	2,0
	5	0,2	0,5	1,2	7	10	15	15	3	1,9
	6	0,3	0,6	1,3	8	9	16	14	2	1,7
	7	0,4	0,7	1,4	8	8	17	13	1	1,5
	8	0,5	0,8	1,5	9	7	18	12	6	1,3
	9	0,6	0,9	1,6	9	6	19	11	7	1,1

Методические рекомендации по выполнению задания

Понятие прямого изгиба

Изгибом называется деформация, сопровождающаяся изменением кривизны оси стержня.

При изгибе в поперечных сечениях стержня возникают два силовых фактора:

– изгибающий момент $M_{изг}$;

– поперечная сила Q.

Стержни, работающие на изгиб, принято называть *балками*.

В случае, когда плоскость действия внешних сил, вызывающих деформацию изгиба, проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения балки, изгиб называют *прямым* (рис. 5.1).

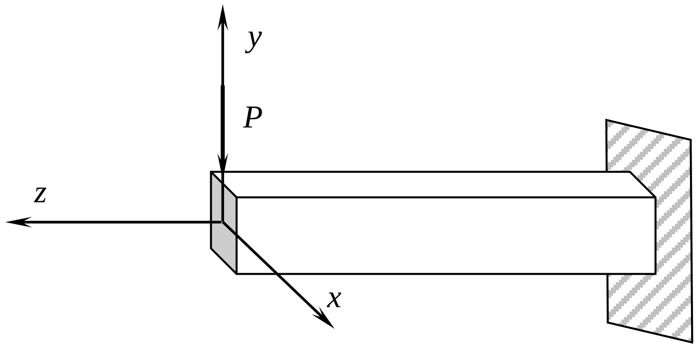


Рис. 5.1

В случае, когда в поперечном сечении балки возникает только один силовой фактор – изгибающий момент, а поперечная сила равна нулю, изгиб называется *чистым* (рис. 5.2).

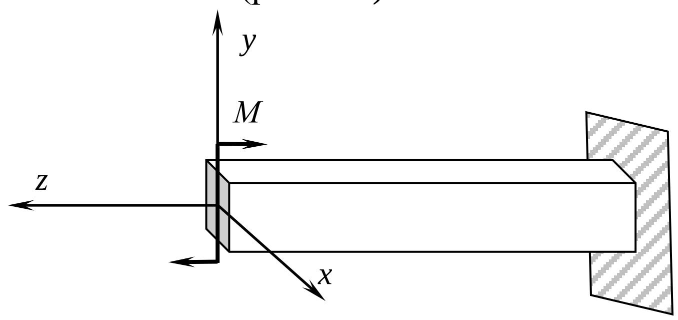


Рис. 5.2

Случай, когда плоскость действия изгибающего момента не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции сечения называется *косым* изгибом (рис. 5.3).

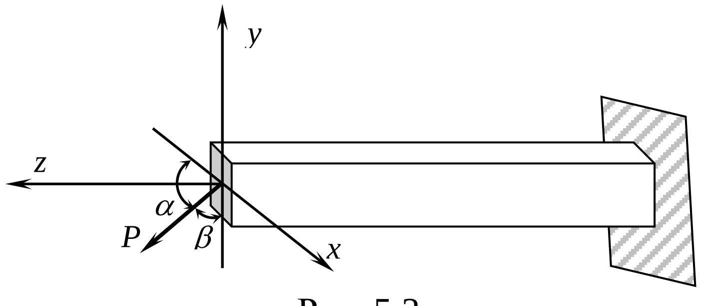


Рис. 5.3

Правило знаков для поперечных сил

Поперечная сила *положительна*, когда на левом торце правой части балки она направлена снизу вверх, а на правом торце левой части балки она направлена сверху вниз.

(Это значит, что внешняя поперечная сила, расположенная слева от сечения, направлена вверх, или внешняя сила, расположенная справа от сечения, направлена вниз.)

Таким образом, *положительная* поперечная сила стремится вращать отсеченную часть балки (к которой она приложена) *по часовой стрелке* относительно любой точки *C*, расположенной на внутренней нормали к поперечному сечению, а *отрицательная* поперечная сила стремится вращать отсеченную часть балки *против часовой стрелки* (рис.5.4).

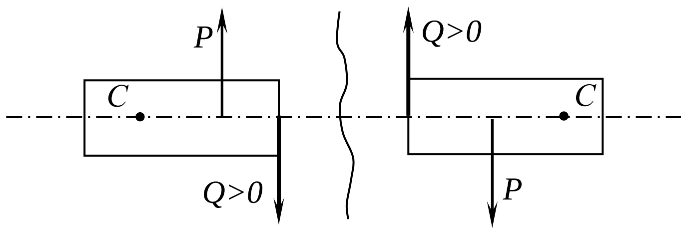


Рис. 5.4

Правило знаков для изгибающих моментов

Изгибающий момент в поперечном сечении считается *положительным*, когда он на левом торце правой части балки направлен *по часовой стрелке*, а на правом торце левой части балки направлен *против часовой стрелки* (рис. 5.5).

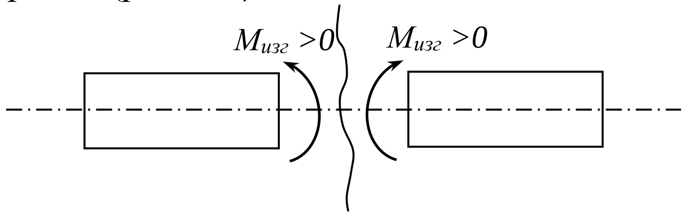


Рис. 5.5

Изгибающий момент считается *положительным*, если балка изгибается выпуклостью вниз, и наоборот:

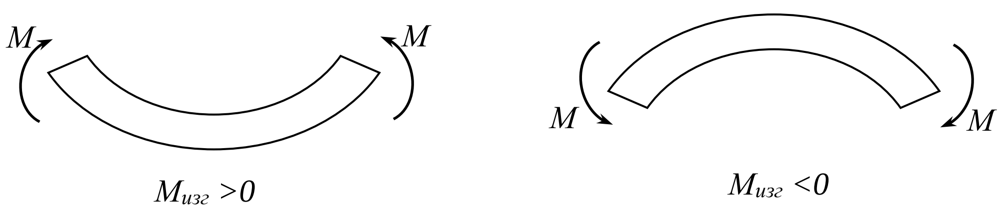


Рис. 5.6

Пример

Для балки (рис. 5.7) построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов $M_{изг}$, если

внешний момент $M=10$ *кН·м*;

сосредоточенная сила $P=2$ *кН*;

распределенная нагрузка $q=1$ *кН/м*.

Линейные размеры приведены на схеме.

Решение

1. Расчет балки начинаем с ***определения реакций опор***, для чего составляем уравнения равновесия для моментов относительно точек A и B.

Учитываем:

– если внешние нагрузки перпендикулярны оси балки, то продольная составляющая опорной реакции равна нулю. Поэтому для шарнирно-неподвижной опоры рассматриваем только вертикальную составляющую реакции;

– распределенную нагрузку q (на участке балки длиной l) заменяем эквивалентной сосредоточенной силой $Q=q\cdot l$, приложенной к середине поверхности распределения.

$\sum M_{(\cdot)A}=0$; $\quad M-P\cdot 1-q\cdot 2\cdot 3+R_B\cdot 4=0;$

$\sum M_{(\cdot)B}=0$; $\quad M-R_A\cdot 4+P\cdot 3+q\cdot 2\cdot 1=0.$

Решаем уравнения равновесия:

$4R_B=-M+P+6q \quad \Rightarrow \quad R_B=\dfrac{-M+P+6q}{4}$

$4R_A=M+3P+2q \quad \Rightarrow \quad R_A=\dfrac{M+3P+2q}{4}$.

Подставляем численные значения:

$$R_B=\frac{-10+2+6}{4}=-0{,}5 \text{ (кН)};$$

$$R_A=\frac{10+6+2}{4}=4{,}5 \text{ (кН)}.$$

Знак минус означает, что реакция R_B направлена в сторону, противоположную выбранной на схеме нагружения балки.

После вычисления реакций опор *обязательна* ***проверка***: сумма проекций всех сил на ось Oy должна быть равна нулю.

$R_A-P-q\cdot 2+R_B\cdot=4{,}5-2-1\cdot 2+(-0{,}5)=0.$

$0=0 \Rightarrow$ R_A и R_B вычислены верно.

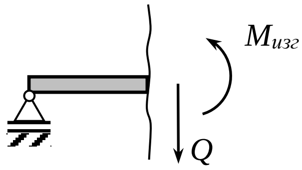
2. ***Рассчитаем поперечные силы и изгибающие моменты*** с помощью метода сечений.

Границы участков проводим через сечения, в которых приложены внешние нагрузки.

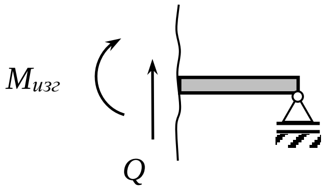
I участок. $0\le z_1\le 1.$

Проводим произвольное сечение. Отбрасываем правую часть балки. Рассматриваем равновесие левой части, заменив действие отброшенной (правой) части внутренними усилиями Q^I и $M^I_{изг}$.

Условимся считать поперечную силу и изгибающий момент положительными, а значит, рассматривая оставленную левую часть балки, направляем Q^I и $M^I_{изг}$. следующим образом (в соответствии с правилами знаков):



Рассматривая оставленную правую часть балки (левая отброшена), с учётом правила знаков, направляем Q^I и $M^I_{изг}$. следующим образом:



Составляем уравнения равновесия (точка K – центр тяжести сечения):

$\sum P_{iy} = 0$. $\quad R_A - Q^I = 0$; $\quad \underline{Q^I = R_A = 4{,}5}$ $(кН)$;

$\sum M_{(\cdot)K} = 0$. $\quad M^I_{изг} + M - R_A \cdot z_1 = 0$; $\quad M^I_{изг} = R_A \cdot z_1 - M$;

$\underline{M^I_{изг} = 4{,}5 \cdot z_1 - 10}$.

Получили:

– Q^I на I-м участке – величина постоянная, не зависящая от z, следовательно, эпюра поперечной силы на этом участке – прямая, параллельная оси z;

– изгибающий момент на I-м участке является функцией от переменной z, причем зависимость линейная, следовательно, ее график – эпюра – прямая наклонная линия. Чтобы ее построить, вычислим значения $M^I_{изг}$ в двух граничных точках участка:

$M^I_{изг}(0) = -10$ $(кН{\cdot}м)$;

$M^I_{изг}(1) = 4{,}5 \cdot 1 - 10 = -5{,}5$ $(кН{\cdot}м)$.II участок. $\quad 0 \le z_2 \le 1$.

Проводим произвольное сечение. Отбрасываем правую часть балки. Рассматриваем равновесие левой (оставленной) части, заменив действие отброшенной части внутренними усилиями Q^{II} и $M^{II}_{изг}$.

Составляем уравнения равновесия:

$\sum P_{iy} = 0$. $\quad -Q^{II} + R_A - P = 0$; $\quad Q^{II} = R_A - P$; $\quad \underline{Q^{II} = 4{,}5 - 2 = 2{,}5}$ $(кН)$.

$\sum M_{(\cdot)K} = 0$. $\quad M^{II}_{изг} + M - R_A(1 + z_2) + P \cdot z_2 = 0$;

$M^{II}_{изг} = 4{,}5(1 + z_2) - 10 - 2 \cdot z_2$; $\quad \underline{M^{II}_{изг} = 2{,}5 z_2 - 5{,}5}$

Получили:

– Q^{II} на II-м участке – величина постоянная, не зависящая от z, следовательно, эпюра поперечной силы на этом участке – прямая, параллельная оси z;

– изгибающий момент на II-м участке является линейной функцией от z, следовательно, его эпюра – прямая наклонная линия. Рассчитаем граничные значения $M^{II}_{изг}$ для II-го участка (при $z_2=0$ и при $z_2=1$):

$$M^{II}_{изг}(0)=-5{,}5 \quad (кН\cdot м);$$

$$M^{II}_{изг}(1)=2{,}5-5{,}5=-3 \quad (кН\cdot м).$$

III участок. $0 \le z_3 \le 2$.

Последний, третий участок рассмотрим справа налево. То есть после рассечения балки произвольным сечением мысленно отбросим ее левую часть и изучим равновесие правой ее части.

Этот прием служит своеобразной проверкой правильности вычислений: найденные численные значения Q^{III} и $M^{III}_{изг}$ справа и слева от границы II и III участков должны совпасть.

Составляем уравнения равновесия правой части балки, заменив действие отброшенной части внутренними усилиями Q^{III} и $M^{III}_{изг}$:

$$\sum P_{iy}=0 . \quad Q^{III}+R_B-q\cdot z_3=0 ; \quad Q^{III}=q\cdot z_3-R_B ; \quad \underline{Q^{III}=z_3+0{,}5}$$

Получили: эпюра Q^{III} на III-м участке – наклонная прямая. Построим ее по двум точкам, граничным для III-го участка (для $z_3=0$ и для $z_3=2$):

$$Q^{III}(0)=0+0{,}5=0{,}5 \quad (кН);$$

$$Q^{III}(2)=2+0{,}5=2{,}5 \quad (кН).$$

Для изгибающих моментов:

$$\sum M_{(\cdot)K}=0 . \qquad -M^{III}_{изг}-q\cdot z_3\cdot\frac{z_3}{2}+R_B\cdot z_3=0 ;$$

$$\underline{M^{III}_{изг}=R_B\cdot z_3-q\cdot\frac{z_3^2}{2}}$$

Получили: изгибающий момент на III-м участке является квадратичной функцией относительно z, следовательно, его эпюра – парабола. Рассчитаем граничные значения $M^{III}_{изг}$ в граничных точках III-го участка и в его середине (чтобы узнать, как изогнута парабола).

При $z_3=0$ $\quad M^{III}_{изг}(0)=0 \quad (кН\cdot м);$

при $z_3=2$ $\quad M^{III}_{изг}(2)=-0{,}5\cdot 2-1\cdot\frac{4}{2}=-1-2=-3 \quad (кН\cdot м);$

при $z_3=1$ $\quad M^{III}_{изг}(1)=-0{,}5\cdot 1-1\cdot\frac{1}{2}=-0{,}5-0{,}5=-1 \quad (кН\cdot м);$

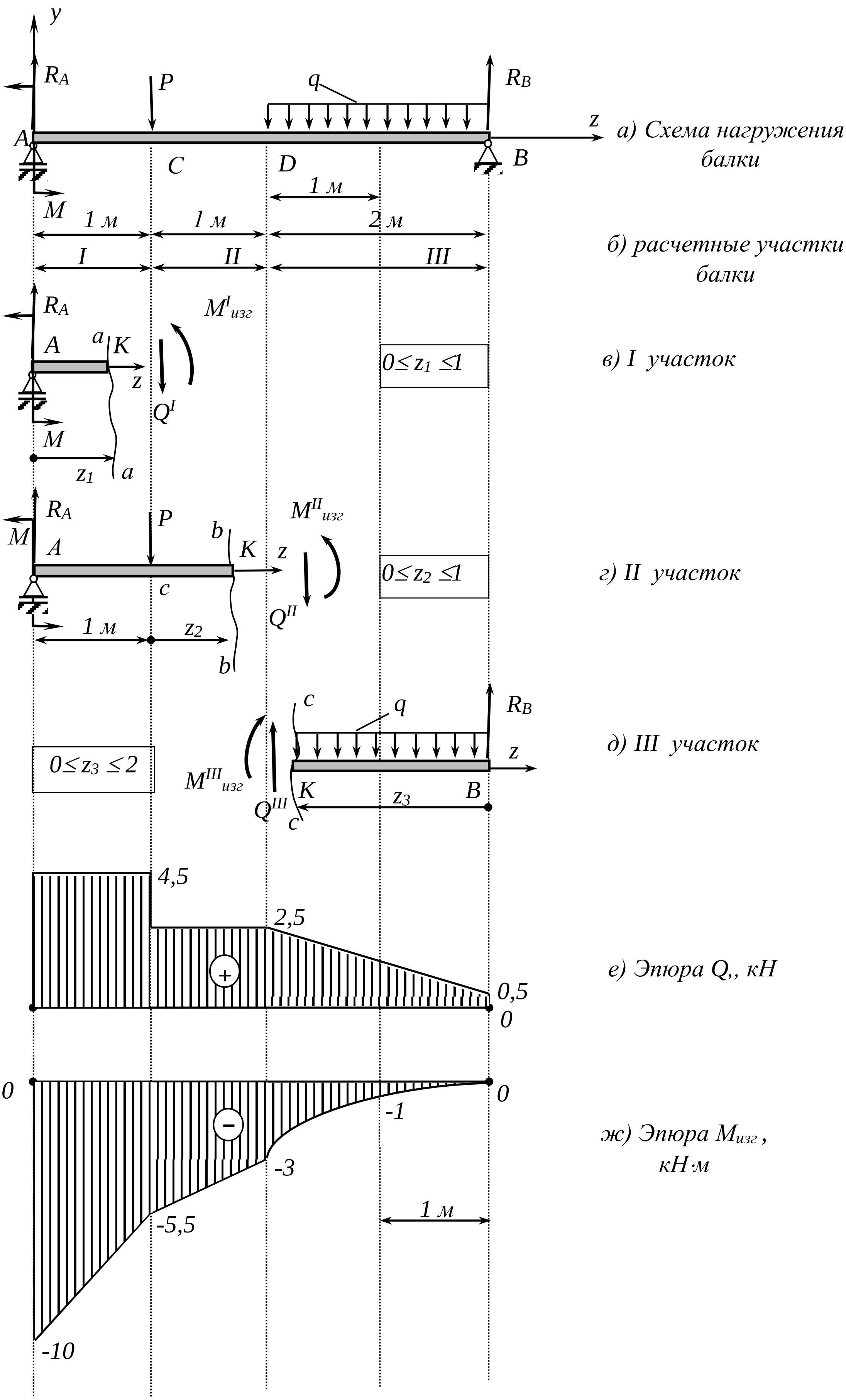

а) Схема нагружения балки
б) расчетные участки балки
в) I участок
г) II участок
д) III участок
е) Эпюра Q,, кН
ж) Эпюра Mизг ,
кН·м
R_A
P
q
R_B
z
y
A
C
D
B
M
1 м
1 м
1 м
2 м
I
II
III
$M^I_{изг}$
Q^I
$0 \le z_1 \le 1$
$M^{II}_{изг}$
Q^{II}
$0 \le z_2 \le 1$
$M^{III}_{изг}$
Q^{III}
$0 \le z_3 \le 2$
4,5
2,5
0,5
0
0
-1
-3
-5,5
-10
1 м

Рис. 5.7

3. Строим эпюры.

Проанализируем характер эпюр поперечных сил и изгибающих моментов:

1) у эпюры поперечной силы Q в сечениях, в которых приложены внешние силы, - скачки на величину силы;
2) распределенной нагрузке на эпюре поперечной силы Q соответствует наклонная прямая линия;
3) распределенной нагрузке на эпюре изгибающих моментов соответствует участок параболы.

Литература

1. Кочетов В.Т., Кочетов М.В., Павленко А.Д. Учебное пособие. Сопротивление материалов. – СПб: БХВ – Петербург, 2004.

2. В.И.Феодосьев. Сопротивление материалов, М., Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.

3. Иванов К.С. и др. Прикладная механика. Сборник задач. Часть I. Сопротивление материалов. СПб.: Санкт-Петербургский университет Государственной противопожарной службы МЧС России, 2011. – 164 с.

Под общей редакцией
Олега Михайловича Латышева
профессора

Иванов Константин Серафимович
кандидат технических наук, доцент
Мисевич Юлия Владимировна
кандидат технических наук

Методические рекомендации по выполнению контрольной работы

по курсу «Прикладная механика»
для слушателей заочного обучения

Печатается в авторской редакции
Ответственный за выпуск К.С. Иванов

Подписано в печать 00.00.2013		Формат 60×84 1/16
Печать трафаретная	Объем 0,0 п.л.	Тираж 000 экз.

Отпечатано в Санкт-Петербургском университете ГПС МЧС России
196105, Санкт-Петербург, Московский проспект, д. 149