1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В случае прямолинейного движения кинематическое уравнение движения материальной точки (центра масс твердого тела) вдоль оси x имеет вид $x = f(t)$, где $f(t)$ – некоторая функция времени. Скорость и ускорение соответственно:

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}.$$

Средняя скорость и средняя путевая скорость соответственно

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \langle\upsilon\rangle_S = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

где ΔS – путь, пройденный точкой за интервал времени Δt.

В случае прямолинейного равнопеременного движения ($\vec{a} = \mathrm{const}$):

$$\upsilon = \upsilon_0 + at; \qquad x = x_0 + \upsilon_0 t + at^2/2,$$

где υ_0 и x_0 – начальные значения скорости и координаты; $a > 0$ при равноускоренном движении и $a < 0$ при равнозамедленном.

При вращательном движении материальной точки вокруг неподвижной оси кинематическое уравнение имеет вид $\varphi = f(t)$, где φ – угол, описываемый радиусом R окружности, соединяющим центр траектории с движущейся точкой. Модули угловой скорости и углового ускорения соответственно

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

В случае равнопеременного вращательного движения ($\varepsilon = \text{const}$) $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$, $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$, где знак ε также определяется тем, ускоряется точка или замедляется. В случае равномерного вращения угловая скорость

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

где T – период вращения; n – частота вращения; N – число оборотов за время t.

Угловая и линейная скорости точки связаны соотношением $\upsilon = \omega R$.

При криволинейном движении модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

где a_τ и a_n – модули тангенциального и нормального ускорений соответственно, $a_\tau = d\upsilon / dt$; $a_n = \upsilon^2 / R$.

Связь линейных величин с угловыми описывается выражениями $a_\tau = \varepsilon R$ и $a_n = \omega^2 R$.

ПРИМЕР 1. Уравнение движения материальной точки вдоль оси имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 2$ м, $B = 1$ м/с, $C = -0{,}5$ м/с^3. Найти координату x, скорость υ и ускорение a точки в момент времени $t = 2$ с.

Решение. Координату x найдем, подставив в уравнение движения численные значения коэффициентов A, B и C и времени t: $x = (2 + 1\cdot 2 - 0{,}5\cdot 2^3) = 0$.

Мгновенная скорость относительно оси x есть первая производная от координаты по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2.$$

Ускорение точки найдем, взяв первую производную от скорости по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 6Ct.$$

В момент времени $t = 2$ с $\upsilon = (1 - 3\cdot 0{,}5\cdot 2^2)$ м/с $= -5$ м/с, $a = 6\cdot(-0{,}5)\cdot 2$ м/с^2 $= -6$ м/с^2.

ПРИМЕР 2. Над ямой глубиной 3 м бросают вертикально вверх камень с начальной скоростью 2 м/с. Когда камень достигнет дна ямы? Сопротивлением воздуха пренебречь, принять $g = 10$ м/с^2.

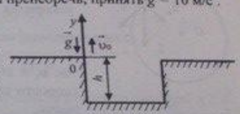
Рис.1

Решение. Свяжем ось координат с землей. Направим положительную часть оси вертикально вверх и совместим начало координат 0 с начальным положением камня (рис.1).

Так как вектор $\vec{g}$ направлен противоположно оси 0y, то проекция его на эту ось отрицательна. Поэтому зависимость координаты y от времени t имеет вид

$$y = \upsilon_0 t - gt^2/2.$$

Решим уравнение относительно t, получим зависимость времени движения от координаты:

$$gt^2/2 - \upsilon_0 t + y = 0.$$

На дне ямы $y = -h$, поэтому время t, через которое камень достигает дна ямы,

$$t = \left(\upsilon_0 \pm \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}\right)/g.$$

Решение, соответствующее знаку минус перед корнем, отбрасываем, так как $t < 0$ не имеет смысла. Итак, $t = \left(2 + \sqrt{4 + 2\cdot 10\cdot 3}\right)/10 = 1$ с.

ПРИМЕР 3. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ рад, $B = 20$ рад/с, $C = -2$ рад/с^2. Найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $r = 0{,}1$ м от оси вращения, для момента времени $t = 4$ с.

Решение. Полное ускорение $\vec{a}$ точки, движущейся по кривой, может быть найдено как геометрическая сумма тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения $\vec{a}_n$, направленного к центру кривизны траектории (рис.2): $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Так как векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ взаимно перпендикулярны, то модуль ускорения

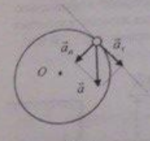
Рис.2

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где $a_\tau = \varepsilon r$; $a_n = \omega^2 r$; ω – модуль угловой скорости тела; ε – модуль его углового ускорения.

Тогда

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Угловую скорость ω найдем, взяв первую производную от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct.$$

В момент времени $t = 4$ с модуль угловой скорости $\omega = (20 + 2\cdot(-2)\cdot 4) = 4$ рад/с.

Угловое ускорение найдем, взяв первую производную от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C = -4 \text{ рад/с}^2.$$

Таким образом, $a = 0{,}1\cdot\sqrt{(-4^2) + 4^4} = 1{,}65$ м/с^2.

ПРИМЕР 4. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r}(t) = \vec{i}(A + Bt^2) + \vec{j}Ct$, где $A = 10$ м, $B = -5$ м/с^2, $C = 10$ м/с. Написать уравнение траектории материальной точки. Найти функции $\vec{\upsilon}(t)$ и $\vec{a}(t)$. Для момента времени $t = 1$ с вычислить модуль скорости υ, модуль ускорения a, модуль тангенциального ускорения a_τ и модуль нормального ускорения a_n.

Решение. Траектория плоского движения материальной точки описывается уравнением вида $y = f(x)$. Учитывая, что уравнение

движения представлено в виде $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y$, имеем $x = A + Bt^2$; $y = Ct$. Исключив из уравнений время, получим

$$x = A + B(y/C)^2.$$

Окончательно уравнение траектории запишется в виде

$$y = C\sqrt{(x - A)/B}.$$

Заметим, что движение происходит только в области значений $x \geq A$.

Скорость материальной точки найдем, дифференцируя уравнение движения по времени:

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{i}\cdot 2Bt + \vec{j}C.$$

Так как проекции скорости на координатные оси $\upsilon_x = 2Bt$ и $\upsilon_y = C$, то модуль скорости

$$\upsilon = \sqrt{4B^2t^2 + C^2}.$$

Ускорение материальной точки определяется производной от скорости по времени:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = \vec{i}\cdot 2B.$$

Выразим модуль скорости через проекции вектора $\vec{\upsilon}$ на оси 0x и 0y: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$.

Модуль полного ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, а проекции ускорения на оси координат $a_x = |2B|$ и $a_y = 0$. Следовательно, модуль полного ускорения $a = |2B|$.

Найдем модуль тангенциального ускорения, дифференцируя по времени модуль скорости:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\sqrt{4B^2t^2 + C^2}}{dt} = \frac{4B^2t}{\sqrt{4B^2t^2 + C^2}}.$$

Модуль нормального ускорения проще всего вычислить, пользуясь его связью с полным и тангенциальным ускорениями:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\ .$$

Подставляя численные значения в выражения для модулей скорости, полного ускорения, тангенциального ускорения и нормального ускорения, получим соответственно

$$\upsilon = (4\cdot(-5)^2\cdot 1^2 + 10^2) = 14{,}1 \text{ м/с};$$

$$a = |2\cdot(-5)| = |-10| = 10 \text{ м/с}^2;$$

$$a_\tau = \frac{4\cdot(-5)^2\cdot 1}{\sqrt{4\cdot(-5)^2\cdot 1^2 + 10^2}} = 7{,}07 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = \sqrt{10^2 - 7{,}07^2} = 7{,}07 \text{ м/с}^2.$$

ПРИМЕР 5. Пуля выпущена с начальной скоростью $\upsilon_0 = 100$ м/с под углом 30^0 к горизонту. Определить максимальную высоту подъема H и дальность полета S пули. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Поскольку в условиях данной задачи пуля движется под действием только силы тяжести, ее полное ускорение постоянно и равно ускорению свободного падения $\vec{g}$. Представим равноускоренное движение пули как результат сложения движений вдоль координатных осей $0x$ и $0y$.

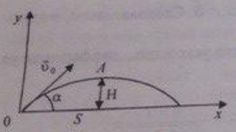

Рис.3

Выберем прямоугольную систему координат, связанную с землей, как показано на рис.3 (начало координат 0 совместим с точкой вылета пули, ось $0x$ параллельна поверхности земли вблизи точки 0, ось $0y$ направлена вертикально вверх), где векторы $\vec{\upsilon}_x$ и $\vec{\upsilon}_y$ – составляющие вектора скорости $\vec{\upsilon}$.

При таком выборе системы координат проекции ускорения пули $\vec{g}$ на оси $0x$ и $0y$ равны нулю и $-g$ соответственно. Начальные координаты пули $x_0 = y_0 = 0$.

Таким образом, зависимость координат движения пули от времени имеет вид

$$x = \upsilon_{0x} t;\quad y = \upsilon_{0y} t - gt^2/2\,,$$

где υ_{0x} и υ_{0y} – проекции начальной скорости на координатные оси, соответственно $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$.

Максимальная высота подъема H и дальность полета S (т.е. максимальные смещения по осям $0y$ и $0x$) определяются уравнениями для координат пули, если подставить в них значения времени полета $t_{пол}$ и времени подъема $t_{под}$.

Для того чтобы найти время подъема, воспользуемся выражениями для проекций скорости пули на координатные оси: $\upsilon_x = \upsilon_{0x}$ и $\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt$. В точке максимального подъема (точка A на рис.3) проекция скорости на вертикальную ось обращается в ноль: $\upsilon_{0y} - gt_{под} = 0$. Тогда время подъема

$$t_{под} = \upsilon_0 \sin\alpha / g\ .$$

Заметим, что проекция скорости на ось $0x$ $\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha$ остается постоянной, т.е. движение пули вдоль поверхности Земли является равномерным.

Таким образом, максимальная высота подъема

$$H = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{(\upsilon_0 \sin\alpha)^2}{2g}\ .$$

Нетрудно убедиться (см. пример 4), что уравнение траектории представляет собой параболу, а следовательно, время полета в 2 раза превышает время подъема: $t_{пол} = 2t_{под}$.

Дальность полета пули получим, подставляя время полета в выражение $x = \upsilon_{0x} t$:

$$S = \upsilon_0 \cos\alpha\, 2\upsilon_0 \sin\alpha / g = \upsilon_0^2 \sin 2\alpha / g\ .$$

Подставив численные данные, найдем окончательно

$$S = 100^2 \cdot \sin 60^0 / 9{,}81 = 882{,}8 \text{ м};$$

$$H = (100\cdot \sin 30^0)^2 / (2\cdot 9{,}81^2) = 127{,}4 \text{ м}.$$

ПРИМЕР 6. Определить в условиях примера 5 нормальное и тангенциальное ускорения, а также радиус кривизны R траектории пули через 2 с после начала движения.

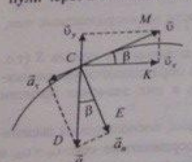

Рис.4

Решение. Изобразим участок траектории пули с векторами нормального и тангенциального ускорений. Определим, прежде всего, на каком участке траектории – восходящем или нисходящем – находится пуля. Время подъема $t_{под} = 100 \sin 30^0 / 9{,}81 = 5{,}1$ с. Таким образом, через 2 с после начала движения пуля находится на восходящем участке (рис.4).

Из треугольника CDE, составленного векторами тангенциального, нормального и полного $\vec{g}$ ускорений, имеем $a_\tau = g \sin\beta$, $a_n = g\cos\beta$. Из треугольника CMK, составленного векторами скорости и ее составляющих, найдем $\sin\beta = \upsilon_y / \upsilon$; $\cos\beta = \upsilon_x / \upsilon$.

Таким образом, тангенциальное и нормальное ускорения

$$a_\tau = g\upsilon_y / \upsilon\,,\quad a_n = g\upsilon_x / \upsilon\,.$$

Пользуясь выражениями для проекций скорости пули на оси координат, получим

$$a_n = g\,\frac{\upsilon_0 \cos\alpha}{\upsilon};\qquad a_\tau = g\,\frac{\upsilon_0 \sin\alpha - gt}{\upsilon}\,, \tag{1}$$

где υ – модуль скорости,

$$\upsilon = \sqrt{(\upsilon_0 \cos\alpha)^2 + (\upsilon_0 \sin\alpha - gt)^2}\ . \tag{2}$$

Вычислим значения тангенциального и нормального ускорений, определив значение скорости в момент времени 2 с:

$$\upsilon = \sqrt{(100\cos 30^0)^2 + (100\sin 30^0 - 9{,}81\cdot 2)^2} = 91{,}78 \text{ м/с}.$$

Тогда нормальное и тангенциальное ускорения

$$a_n = 9{,}81\cdot 100\cos 30^0 / 91{,}78 = 9{,}26 \text{ м/с}^2;$$

$$a_\tau = 9{,}81\ (100\sin 30^0 - 9{,}81\cdot 2)/91{,}78 = 3{,}25 \text{ м/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории R найдем, пользуясь определением модуля нормального ускорения:

$$R = \upsilon^2 / a_n = 91{,}78^2 / 9{,}26 = 909{,}7 \text{ м}.$$

Заметим, что тангенциальное и нормальное ускорения можно найти, не рассматривая треугольники на рис.4, а воспользовавшись уравнением (1) для a_τ и взяв производную по времени от модуля скорости υ, определенного по (2). Предоставляя читателю возможность самостоятельно получить таким способом выражение для a_τ, отметим только, что оно будет отличаться наличием знака минус, который указывает на то, что на восходящем участке траектории вектор $\vec{a}_\tau$ направлен противоположно вектору скорости $\vec{\upsilon}$.

ПРИМЕР 7. Диск, вращавшийся с постоянной частотой $n_0 = 10\ \text{с}^{-1}$, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, вращение диска снова стало равномерным, но уже с частотой $n = 6\ \text{с}^{-1}$. Определить угловое ускорение диска ε и продолжительность торможения, если за время равнозамедленного движения диск сделал 50 оборотов.

Решение. В случае равноускоренного вращательного движения угловая скорость и угол поворота соответственно $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$, $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$. Исключив из выражений время и приняв $\varphi_0 = 0$, получим

$$\varphi = (\omega^2 - \omega_0^2)/2\varepsilon\,.$$

Тогда угловое ускорение

$$\varepsilon = (\omega^2 - \omega_0^2)/2\varphi .$$

Учитывая, что $\varphi = 2\pi N$ и $\omega = 2\pi n$, найдем

$$\varepsilon = \pi(n^2 - n_0^2)/N$$

или

$$\varepsilon = 3{,}14 \cdot (6^2 - 10^2)/50 = -4{,}02 \text{ рад/с}^2,$$

где N – число оборотов, $N = 50$.

Знак минус указывает здесь на то, что скорость вращения диска уменьшалась.

Продолжительность торможения в соответствии с формулой для угловой скорости

$$t = 2\pi(n - n_0)/\varepsilon$$

или

$$t = 2 \cdot 3{,}14(6 - 10)/(-4{,}02) = 6{,}25 \text{ с}.$$

Задача 1. Движение материальной точки задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A = 4$ м/с, $B = -0{,}05$ м/с^2. Определить момент времени, в который скорость υ точки равна нулю. Найти координату и ускорение в этот момент. Построить графики зависимости координаты, пути, скорости и ускорения этого движения от времени.

Задача 2. Движение материальной точки задано уравнением $\vec{r} = \vec{i}(A + Bt^2) + \vec{j}\,Ct$, где $A = 10$ м, $B = -5$ м/с^2. Начертить траекторию точки. Найти выражение $\vec{\upsilon}(t)$ и $\vec{a}(t)$. Для момента времени $t = 1$ с вычислить модуль скорости, модуль ускорения $|\vec{a}|$, модуль тангенциального ускорения $|\vec{a}_\tau|$, модуль нормального ускорения $|\vec{a}_n|$.

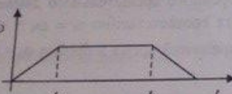

Рис.5

Задача 3. Построить графики $S(t)$ и $a(t)$ по графику скорости, представленному на рис.5.

Задача 4. Материальная точка движется прямолинейно с ускорением $a = 5$ м/с^2. Определить, на сколько путь, пройденный точкой в n-ю секунду, будет больше пути, пройденного в предыдущую секунду. Принять $\upsilon_0 = 0$.

Задача 5. Материальная точка движется прямолинейно с начальной скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с и с постоянным ускорением $a = -5$ м/с^2. Определить, во сколько раз путь S, пройденный материальной точкой, будет превышать модуль ее перемещения $|\Delta\vec{r}|$ спустя $t = 4$ с после начала отсчета времени.

Задача 6. Три четверти своего пути автомобиль прошел со скоростью $\upsilon_1 = 60$ км/ч, остальную часть пути со скоростью $\upsilon_2 = 80$ км/ч. Какова средняя путевая скорость $\langle\upsilon\rangle$ автомобиля?

Задача 7. Тело прошло первую половину пути за время $t_1 = 2$ с, вторую – за время $t_2 = 8$ с. Определить среднюю путевую скорость $\langle\upsilon\rangle$ тела, если длина пути $S = 20$ м.

Задача 8. Зависимость скорости от времени для движения некоторого тела представлена на рис.6. Определить среднюю путевую скорость $\langle\upsilon\rangle$ за время $t = 14$ с.

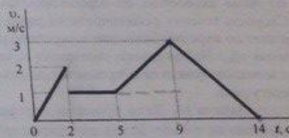

Рис 6

Задача 9. Машинист, ведущий поезд со скоростью υ_1, увидел перед собой на расстоянии S товарный поезд, который шел по тому же пути и в том же направлении, но с меньшей скоростью υ_2. Машинист включил тормоза и сообщил своему поезду постоянное замедление a. Доказать, что при $S > A$, где $A = (\upsilon_1 + \upsilon_2)^2/2a$, столкновения не будет, а при $S < A$ оно произойдет. Полезно для каждого поезда начертить график зависимости $x(t)$.

Задача 10. Рыбак гребет на лодке вверх по реке. Проезжая под мостом, он уронил в воду багор. Через полчаса он это обнаружил и, повернув назад, догнал багор в 5 км ниже моста. Какова скорость течения реки, если рыбак, двигаясь вверх и вниз по реке, греб одинаково?

Задача 11. Человек может плыть в стоячей воде на весельной лодке со скоростью 6,4 км/ч. Ответить на вопросы:

- Если он пересекает реку, где скорость течения 3,2 км/ч, то какое направление он должен выбрать для лодки, если желает достигнуть точки, прямо противоположной той, откуда он отплыл?
- Если ширина реки 6,4 км, то сколько времени потребуется, чтобы пересечь эту реку?
- Сколько времени потребуется, чтобы проплыть на лодке 3,2 км вниз по реке и затем обратно до точки отплытия?
- Сколько времени потребуется, чтобы проплыть 3,2 км вверх по реке и затем обратно до точки отплытия?
- В каком направлении должна двигаться лодка, чтобы пересечь реку в кратчайшее время?

Задача 12. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью υ, перпендикулярной направлению течения. Скорость течения реки шириной l равна нулю у берегов и линейно растет по мере приближения к середине реки, где она достигает значения u_{max}. Найти траекторию лодки, а также снос лодки x вниз по течению от пункта ее отправления до причала на противоположном берегу реки.

Задача 13. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $\upsilon_0 = 4$ м/с. Когда оно достигло верхней точки полета, из того же начального пункта и с той же начальной скоростью υ_0 вертикально вверх было брошено второе тело. На каком расстоянии d от начального пункта встретятся тела? Сопротивление воздуха не учитывать.

Задача 14. Камень падает с высоты $H = 1200$ м. Какой путь S пройдет камень за последнюю секунду своего падения?

Задача 15. При падении камня в колодец его удар о поверхность воды доносится через $\tau = 5$ с. Принимая скорость звука $\upsilon = 330$ м/с, определить глубину колодца.

Задача 16. С аэростата, находящегося на высоте 300 м, упал камень. Через какое время камень достигнет земли, если аэростат поднимается со скоростью 5 м/с; аэростат опускается со скоростью 5 м/с; аэростат неподвижен? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 17. Тело брошено под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $\upsilon = 30$ м/с. Каковы будут нормальное (a_n) и тангенциальное (a_τ) ускорения тела через время $\tau = 1$ с после начала движения?

Задача 18. Пуля пущена с начальной скоростью $\upsilon = 200$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Определить максимальную высоту подъема H, дальность полета S и радиус кривизны R траектории пули в ее наивысшей точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 19. С башни высотой 19,6 м в горизонтальном направлении брошено тело со скоростью 10 м/с. Написать уравнение траектории тела. Чему равна скорость тела в момент падения? Какой угол образует эта скорость с горизонтальным направлением? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 20. Из одной точки одновременно брошены два тела с одинаковой скоростью, но под разными углами (α и β) к горизонту. Определить расстояние между телами спустя $\tau = 2{,}0$ с после начала движения, если $\upsilon = 10$ м/с, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

Задача 21. При повороте трактора, движущегося со скоростью 24 км/ч, его центр масс описывает дугу радиусом $R = 9{,}0$ м. Найти разность скоростей гусениц трактора, если расстояние между ними $d = 1{,}5$ м.

Задача 22. Скорость электропоезда 36 км/ч. Определить скорость точки A на ободе колеса электропоезда по отношению к рельсу в момент, когда точка находится в наивысшем положении, в наинизшем положении и на уровне оси колеса. Радиус колеса 0,50 м. Точка A ниже уровня рельса на 5,0 см. Чему равна угловая скорость вращения колеса?

Задача 23. Определить угловое ускорение маховика, частота вращения которого за 20 полных оборотов возросла равномерно от $n_1 = 1{,}0$ с$^{-1}$ до $n_2 = 5{,}0$ с$^{-1}$.

Задача 24. Определить угловую скорость и угловое ускорение твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси x по закону $\varphi = at - bt^2 + t^3$, где $a = 20$ с$^{-1}$, $b = 1$ с$^{-2}$. Каков характер движения этого тела? Построить графики зависимости угловой скорости и углового ускорения от времени.

Задача 25. Диск радиусом $R = 20$ см вращается согласно уравнению $\varphi = A + B + Ct^2$, где $A = 3$ рад, $B = -1$ рад/с, $C = 0{,}1$ рад/с^2.

Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное ускорение точек на окружности диска для момента времени $\tau = 10$ с.

Задача 26. Найти линейную скорость υ точек земной поверхности на географической широте φ, вызванную суточным вращением Земли вокруг своей оси. Радиус земного шара $R = 6400$ км.

Задача 27. Найти линейную скорость Земли, вызванную ее орбитальным движением. Средний радиус земной орбиты $R = 1{,}5 \cdot 10^8$ км.

Задача 28. Точка движется по окружности радиусом R с постоянным тангенциальным ускорением a_τ, но без начальной скорости. Найти нормальное и полное ускорения точки, выразив их как функцию от времени t и ускорения a; как функцию от углового ускорения ε и угла поворота φ радиуса-вектора точки из его начального положения. Найти угол β между направлением вектора полного ускорения точки и ее радиусом-вектором.

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Импульс материальной точки массой m, движущейся со скоростью $\vec{\upsilon}$, $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. Основной закон динамики (второй закон Ньютона)

$$\vec{F}dt = d\vec{p},$$

где $\vec{F}$ – результирующая сила, действующая на материальную точку.

Если масса постоянна, то

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{a},$$

где $\vec{a}$ – ускорение материальной точки под действием силы $\vec{F}$.

В механике рассматриваются следующие силы:

• Сила упругости $F = -k\Delta l$, где k – коэффициент жесткости; Δl – абсолютная деформация пружины (стержня).

Связь относительной деформации $\varepsilon = \Delta l / l_0$ (здесь l_0 – начальная длина) с вызывающим ее механическим напряжением $\sigma = F / S$ (здесь S – площадь сечения стержня) выражается соотношением $\sigma = E\varepsilon$, где E – модуль Юнга материала стержня.

• Сила гравитационного взаимодействия

$$F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где m_1 и m_2 – массы взаимодействующих материальных точек; r – расстояние между ними; $\gamma = 6{,}6720 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная.

Силу гравитации можно выразить и через напряженность гравитационного поля $\vec{G}$, создаваемого массой M на расстоянии r:

$$\vec{F} = m\vec{G}; \qquad \vec{G} = \gamma\frac{M}{R^2}\vec{e}_r,$$

где $\vec{e}_r$ – единичный вектор, направленный из данной точки поля к массе M.

Если пренебречь вращением Земли, то для материальных точек, находящихся вблизи поверхности (r близко к радиусу Земли), $\vec{G}$ имеет смысл ускорения свободного падения: $|\vec{G}| = g \cong 9{,}81$ м/с^2. В этих условиях сила тяжести, действующая на материальную точку массой m, $F = mg$.

• Сила трения скольжения $F = \mu N$, где μ – коэффициент трения; N – сила нормального давления.

Работа силы F на пути S

$$A = \int_S F_S dS,$$

где F_S – проекция силы на направление перемещения.

В случае постоянной силы, действующей под углом α к направлению перемещения, $A = FS\cos\alpha = \left(\vec{F}, \vec{S}\right)$ (скалярное произведение силы на перемещение).

Мощность

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

В случае постоянной мощности $N = A/t$, где t – время совершения работы.

В этом случае мощность может быть определена также формулой $N = F\upsilon\cos\alpha = \left(\vec{F}, \vec{\upsilon}\right)$.

Кинетическая энергия тела массы m, движущегося со скоростью υ, $E_к = m\upsilon^2/2$.

В изолированной системе суммарный импульс входящих в систему N тел остается постоянным (закон сохранения импульса):

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{const}.$$

Для двух тел ($N = 2$)

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

где $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ – скорости тел в начальный момент времени; $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ – скорости тех же тел в последующий момент времени.

В случае абсолютно неупругого центрального удара двух шаров с массами m_1 и m_2 скорость шаров после столкновения

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2},$$

где $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ – скорости первого и второго шаров до удара (предполагается что шары движутся поступательно).

После абсолютно упругого центрального удара первый шар движется со скоростью $\vec{u}_1$, а второй – со скоростью $\vec{u}_2$:

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2\vec{\upsilon}_2 + (m_1 - m_2)\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2};$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{\upsilon}_2 + 2m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2}.$$

Заметим, что при использовании формул, включающих в себя векторные величины, необходимо проецировать все векторы на некоторую ось. При этом знак получающихся в результате расчета величин говорит о направлении соответствующих векторов относительно выбранной оси.

Выражения для потенциальной энергии зависят от характера взаимодействия:

• потенциальная энергия упруго деформированной пружины $E_p = k(\Delta l)^2/2$, где k – жесткость пружины; Δl – абсолютная деформация;

• потенциальная энергия гравитационного взаимодействия

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

(предполагается, что при $r \to \infty$ потенциальная энергия обращается в нуль);

• потенциальная энергия тела в однородном поле силы тяжести $E_p = mgh$, где g – ускорение свободного падения; h – высота тела над уровнем, принятым за нулевой (при условии $h \ll R$, где R – радиус Земли).

Закон сохранения механической энергии

$$E = E_к + E_p = \text{const}.$$

При решении задач по динамике рекомендуется придерживаться следующей последовательности:

1. Определить, какие тела образуют физическую систему.

2. Выполнить схематический рисунок с обозначением всех сил, действующих на тело (тела), за исключением тех, которыми можно пренебречь в рамках используемого приближения. При этом нужно отчетливо представить себе, со стороны каких тел действуют рассматриваемые силы, и помнить, что действие одного тела на другое является взаимным.

3. Убедиться в применимости физических законов, на основании которых предполагается решать задачу. Например, второй закон Ньютона в форме $\vec{F} = m\vec{a}$ справедлив, если выполняются следующие условия: движение тела рассматривается по отношению к

инерциальной системе отсчета, тело можно считать материальной точкой, масса тела постоянна, скорость тела значительно меньше скорости света в вакууме и т.д.

4. Выбрать прямоугольную систему координат $x0y$. В случае равноускоренного движения положительное направление оси $0x$ удобно направить вдоль вектора ускорения. Всегда можно сориентировать координатные оси так, чтобы проекции сил определялись наиболее просто.

5. Записать второй закон динамики в векторной форме для каждого тела системы: $m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$.

6. Проецируя силы и ускорения на оси координат, получить для каждого тела скалярные уравнения вида $ma_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots$; $ma_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots$.

7. При решении задач о движении системы тел, соединенных друг с другом, необходимо записать так называемые кинематические условия, которые выражают соотношения между ускорениями тел. В частности, если тела связаны нерастяжимой нитью, они имеют одинаковые по модулю ускорения вдоль нити. Это справедливо и для случая, когда нить перекинута через неподвижный блок (блоки).

Часто в задачах предлагается пренебречь массой нити, связывающей тела. Лишь в этом случае одинаковы по модулю силы, действующие на нити со стороны прикрепленных тел (и, по третьему закону Ньютона, одинаковы по модулю силы, с которыми нить действует на прикрепленные к ней тела). Поясним это: если на нить массой $m_н$ действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, то согласно второму закону Ньютона: $m_н\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Если $m_н = 0$, то $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ и $F_1 = F_2$.

Если пренебрежимо мала масса блока, то натяжение перекинутой через блок нити можно считать одинаковым по обе стороны блока. При этом угловое ускорение блока равно нулю и он вращается с постоянной угловой скоростью. Если массой блока пренебречь невозможно, то это не так.

8. Если число неизвестных окажется больше числа полученных уравнений, дополнить систему уравнениями кинематики, законом сохранения энергии и т.д.

9. Решить полученную систему уравнений в общем виде, а затем подставить численные значения в одной определенной системе единиц (если нет специальных указаний, то в СИ).

10. Проверить полученный ответ каким-либо способом, например по размерности. Если единицы величин в обеих частях окончательного соотношения совпадают, вероятность того, что решение верно, довольно высока. Если же размерности различны, это означает, что результат, без всякого сомнения, неверен.

ПРИМЕР 8. Груз массой 5 кг, связанный невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок, с другим грузом массой 2 кг, движется вниз по наклонной плоскости. Угол наклона плоскости к горизонту 30°. Коэффициент трения между первым грузом и плоскостью равен 0,1. Найти силу натяжения нити и ускорение грузов. Массой блока и трением в блоке пренебречь.

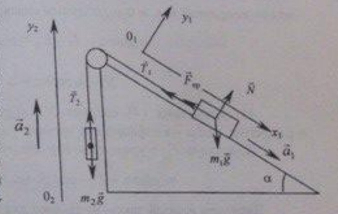

Рис.7

Решение. Обозначим на схеме силы, действующие на грузы (рис.7). На первый груз действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_1$. Ко второму грузу приложены сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$. Ускорения грузов обозначим соответственно $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Поскольку нить нерастяжима, ускорения грузов по модулю одинаковы: $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$.

Из условия невесомости нити ($m_н = 0$) следует, что модули сил натяжения также равны между собой (на нить действуют только

силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$; по второму закону динамики $T_1 - T_2 = m_н\, a = 0 \cdot a = 0$): $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$.

Свяжем системы координат $y_1 0_1 x_1$ и $0_2 y_2$ с Землей, которую в данном случае можно считать инерциальной системой отсчета (рис.7). Грузы m_1 и m_2 будем считать материальными точками. Таким образом, основные условия применимости второго закона динамики выполнены.

Для первого груза второй закон динамики дает следующее векторное уравнение: $m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1$. Проектируя векторы на оси координат 0_1x_1 и 0_1y_1, получим скалярные уравнения

$$m_1 g\sin\alpha - T_1 - F_{тр} = m_1 a; \tag{3}$$

$$N - m_1 g\cos\alpha = 0. \tag{4}$$

Из уравнения (4) следует $N = m_1 g\cos\alpha$, поэтому $F_{тр} = \mu N = \mu m_1 g\cos\alpha$, где μ – коэффициент трения.

Подставив $F_{тр}$ в уравнение (3), получим

$$m_1 g\sin\alpha - T_1 - \mu m_1 g\cos\alpha = m_1 a. \tag{5}$$

Запишем второй закон динамики для второго груза:

$$m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2 .$$

Проектируя векторы на ось 0_2y_2, найдем

$$-m_2 g + T = m_2 a. \tag{6}$$

Сложив уравнения (5) и (6), запишем

$$m_1 g\sin\alpha - \mu\, m_1 g\cos\alpha - m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

и получим

$$a = \frac{m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2} g .$$

Силу натяжения определим из уравнения (6): $T = m_2\,(g + a)$.
Таким образом,

$$a = \frac{5\cdot(0{,}5 - 0{,}1\cdot 0{,}87) - 2}{5+2}\cdot 9{,}8 = 0{,}094\ \text{м/с}^2;$$

$$T = 2\cdot(9{,}8 + 0{,}094) = 19{,}8\ \text{Н}.$$

ПРИМЕР 9. Шар массой 70 кг, подвешенный на веревке длиной 10 м, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Угол отклонения веревки от вертикали 36°. Найти силу натяжения веревки и число оборотов шара в минуту.

Решение. На шар со стороны Земли действует сила тяжести $m\vec{g}$, а со стороны нити – упругая сила натяжения $\vec{T}$ (рис.8). В системе отсчета, связанной с Землей, равнодействующая этих двух сил сообщает шару (который мы рассматриваем как материальную точку) центростремительное ускорение. Следовательно, второй закон динамики дает следующее векторное уравнение $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$, где $a = \upsilon^2 / R$.

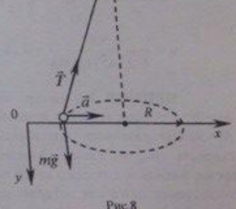

Рис.8

Направив оси координат $0x$ и $0y$, как показано на рис.8, запишем это уравнение в скалярной форме:

$$T\sin\alpha = \frac{m\upsilon^2}{R};\ mg - T\cos\alpha = 0.$$

Тогда

$$T = mg/\cos\alpha;\ T = 70\cdot 9{,}8/0{,}81 \approx 850\ \text{Н}.$$

Если движение по окружности происходит с неизменной по модулю скоростью, справедливо выражение

$$\upsilon = 2\pi R/t,$$

где $2\pi R$ – длина пути, проходимого материальной точкой за один оборот; t – время одного оборота.

Принимая во внимание, что число оборотов в единицу времени связано с t выражением $\nu = 1/t$, имеем $\upsilon = 2\pi R\nu$. Отсюда $T\sin\alpha = m4\pi^2R\nu^2$.

Из рис.8 видно, что радиус траектории R связан с длиной подвеса l соотношением $R = l\sin\alpha$. Тогда

$$T\sin\alpha = 4\pi^2ml\nu^2\sin\alpha.$$

Окончательно $\nu = \sqrt{\dfrac{T}{4\pi^2ml}} = \sqrt{\dfrac{g}{4\pi^2l\cos\alpha}}$;

$$\nu = \frac{9{,}8}{4\cdot 3{,}14^2\cdot 10\cdot 0{,}8} \approx 0{,}18\ \text{с}^{-1};\quad \nu = 0{,}18\cdot 60 = 10{,}8\ \text{мин}^{-1}.$$

ПРИМЕР 10. Катер массой $m = 2$ т с двигателем мощностью $N = 50$ кВт развивает максимальную скорость $\upsilon_{max} = 25$ м/с. Определить время, в течение которого катер после выключения двигателя потеряет половину своей скорости. Принять, что сила сопротивления движению катера изменяется пропорционально квадрату скорости.

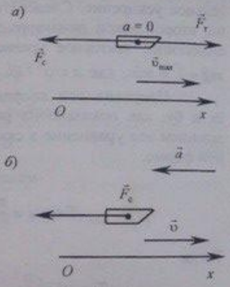

Рис.9

Решение. До начала торможения катер двигался равномерно под действием двух сил: силы тяги мотора $\vec{F}_т$ и силы сопротивления

среды $\vec{F}_c$ (рис.9, *а*). Действовали, разумеется, и другие силы (выталкивающая, сила тяжести), но на движение тела в горизонтальном направлении они не влияли.

Второй закон динамики позволяет написать векторное уравнение $\vec{F}_т + \vec{F}_c = m\vec{a} = 0$. Проецируя его на ось координат Ox, имеем

$$F_т - F_c = 0.$$

После начала торможения $F_т = 0$ (рис.9, *б*), и уравнение второго закона динамики имеет вид $\vec{F}_c = m\vec{a}$. Представим, согласно условию, силу сопротивления в виде

$$\vec{F}_c = -\vec{e}_v k\upsilon^2. \tag{7}$$

Здесь $\vec{e}_v$ – единичный вектор (орт) скорости, направленный как $\vec{\upsilon}$ и равный по модулю единице (знак минус указывает на то, что сила сопротивления всегда противоположна вектору скорости по направлению); k – коэффициент сопротивления.

Модуль силы сопротивления при этом $F_c = k\upsilon^2$.

Используя выражение (7) и определение ускорения, представим уравнение второго закона Ньютона в виде

$$-\vec{e}_v k\upsilon^2 = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}.$$

Для того чтобы правильно учесть взаиморасположение векторов $\vec{\upsilon}$ и $\vec{a}$, представим скорость в виде $\vec{\upsilon} = \vec{e}_v\upsilon$. Тогда

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{e}_v\upsilon) = \vec{e}_v\frac{d\upsilon}{dt}.$$

Векторное выражение второго закона динамики преобразуется к виду

$$-\vec{e}_v k\upsilon^2 = m\vec{e}_v\frac{d\upsilon}{dt}.$$

Проектирование обеих частей уравнения на ось Ox приводит к дифференциальному уравнению: $-k\upsilon^2 = m\dfrac{d\upsilon}{dt}$, которое после разделения переменных принимает вид

$$-\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = \frac{k}{m}dt.$$

Выполним интегрирование

$$-\int\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = \frac{k}{m}\int dt;\qquad \frac{1}{\upsilon} = \frac{k}{m}t + C.$$

Так как при $t = 0$ $\upsilon = \upsilon_{max}$, $C = 1/\upsilon_{max}$.

Тогда зависимость скорости от времени имеет вид

$$\upsilon = \frac{1}{(kt/m) + (1/\upsilon_{max})}.$$

Значение коэффициента сопротивления k определим из следующих соображений. Как известно, мощность связана с силой и скоростью выражением $N = (\vec{F}\cdot\vec{\upsilon})$. Так как в случае равномерного движения катера со скоростью $\vec{\upsilon}_{max}$ под действием силы $\vec{F}_т$ векторы силы и скорости сонаправлены, мощность, развиваемая двигателем, $N = F_т\upsilon_{max}$. Поскольку $F_m = F_c$, то $N = F_c\upsilon_{max} = k\upsilon^3_{max}$. Откуда $k = N/\upsilon^3_{max}$.

Окончательно получим, что скорость катера меняется со временем по закону

$$\upsilon = \upsilon_{max}/(Nt/m\upsilon^2_{max} + 1).$$

Так как $\upsilon = \upsilon_{max}/2$, решив уравнение относительно t, получим

$$t = m\upsilon^2_{max}/N;\qquad t = \frac{2\cdot 10^3\cdot 25^2}{50\cdot 10^3} = 25\ \text{с}.$$

ПРИМЕР 11. Два шара массами $m_1 = 2{,}5$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг движутся навстречу друг другу со скоростями $\upsilon_1 = 6$ м/с и $\upsilon_2 = 2$ м/с. Определить скорость u шаров после удара; кинетические энергии шаров $E_{к1}$ и $E_{к2}$ после удара; долю кинетической энергии w шаров, превратившуюся во внутреннюю энергию. Удар считать прямым, неупругим.

Решение. После неупругого удара шары будут двигаться с одной и той же скоростью u. Для определения этой скорости воспользуемся законом сохранения импульса:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

Выберем положительное направление координатной оси 0x вдоль скорости, например, первого шара. Тогда скорость второго шара, движущегося до удара навстречу первому, следует при проектировании взять со знаком минус:

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)u.$$

Заметим, что направление (а следовательно, и знак) скорости шаров после удара определить на данном этапе не представляется возможным, так как оно зависит от значений масс и скоростей сталкивающихся шаров. Направление $\vec{u}$ определим в результате численного решения уравнения

$$u = (m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2)/(m_1 + m_2).$$

Если получившееся значение u окажется положительным, то шары движутся после удара вдоль оси 0x; если отрицательным, то в противоположном направлении.

Итак,

$$u = \frac{2{,}5\cdot 6 - 1{,}5\cdot 2}{2{,}5 + 1{,}5} = 3\ \text{м/с}.$$

Кинетические энергии шаров до и после удара соответственно

$$E_{к1} = m_1\upsilon_1^2/2 + m_2\upsilon_2^2/2;\qquad E_{к2} = (m_1 + m_2)u^2/2;$$

$$E_{к1} = (2{,}5\cdot 6^2/2 + 1{,}5\cdot 2^2/2) = 48\ \text{Дж};$$

$$E_{к2} = (2{,}5 + 1{,}5)\cdot 3^2/2 = 18\ \text{Дж}.$$

Сравнение $E_{к1}$ и $E_{к2}$ показывает, что в результате неупругого удара произошло уменьшение кинетической энергии шаров, за счет чего увеличилась их внутренняя энергия. Доля кинетической энергии шаров, пошедшая на увеличение их внутренней энергии,

$$w = \frac{E_{к1} - E_{к2}}{E_{к1}}; \quad w = 0{,}62.$$

ПРИМЕР 12. Шар массой $m_1 = 300$ г, движущийся горизонтально со скоростью $\upsilon_1 = 15$ км/ч, столкнулся с неподвижным шаром массой $m_2 = 14$ кг. Шары абсолютно упругие, удар прямой. Какую долю w своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Решение. Доля энергии, переданной первым шаром второму,

$$w = \frac{E'_{к2}}{E_{к1}} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 \upsilon_1^2} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{\upsilon_1}\right)^2,$$

где $E_{к1}$ – кинетическая энергия первого шара до удара; u_2 и $E'_{к2}$ – скорость и кинетическая энергия второго шара после удара.

Чтобы найти u_2, воспользуемся выполняющимися при абсолютно упругом ударе законами сохранения импульса и механической энергии. По закону сохранения импульса, учитывая, что второй шар до удара покоился, имеем

$$m_1 \upsilon_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

(удар центральный, поэтому импульсы шаров после удара направлены вдоль прямой, по которой сближались их центры). По закону сохранения механической энергии

$$\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Решив совместно эти уравнения, найдем

$$u_2 = \frac{2 m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}.$$

Таким образом,

$$w = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{2 m_1 \upsilon_1}{\upsilon_1 (m_1 + m_2)}\right)^2 = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров. Окончательно $w = 4 \cdot 0{,}3 \cdot 14 / (14 + 0{,}3)^2 = 0{,}082$.

ПРИМЕР 13. При перемещении груза на расстояние $S = 70$ см равномерно возрастающей силой была затрачена работа 120 Дж. Определить значение F_2 силы в конце перемещения, если ее значение в начале $F_1 = 20$ Н. Считать силу направленной вдоль перемещения на всем его протяжении.

Решение. Известно, что работа силы, изменяющейся при перемещении от x_1 до x_2,

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (\vec{F}, d\vec{x}).$$

Поскольку в условиях данной задачи сила совпадает по направлению с перемещением в каждой точке, можно перейти под знаком интеграла к произведению скалярных величин:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx, \tag{8}$$

где $x_1 = 0$; $x_2 = S$.

Будем считать, что равномерное возрастание силы на протяжении перемещения означает зависимость ее от x в виде

$$F(x) = F_1 + bx, \tag{9}$$

где b – угловой коэффициент.

Очевидно, что для определения значения F_2 необходимо вычислить угловой коэффициент b в выражении (9). Для этого подставим $F(x)$ в форме (9) под знак интеграла в (8) и возьмем интеграл:

$$A = \int_0^S (F_1 + bx)\,dx = F_1 x\Big|_0^S + \frac{bx^2}{2}\Big|_0^S = SF_1 + \frac{bS^2}{2}.$$

Отсюда

$$b = \frac{2}{S^2}(A - SF_1); \quad b = \frac{2}{0{,}7^2}(120 - 0{,}7 \cdot 20) = 432{,}7 \text{ Н/м}.$$

Соответственно $F_2 = (20 + 432{,}7 \cdot 0{,}7) = 322{,}9$ Н.

ПРИМЕР 14. Ракета установлена на поверхности Земли для запуска в вертикальном направлении. При какой минимальной скорости υ_1, сообщенной ракете при запуске, она удалится от поверхности на расстояние, равное радиусу Земли ($R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м)? Силами, кроме силы гравитационного взаимодействия ракеты и Земли, можно пренебречь.

Решение. Для определения минимальной скорости υ_1 ракеты найдем ее минимальную кинетическую энергию $E_{к1}$. Систему ракета – Земля можно считать замкнутой. Единственная сила, действующая в системе, – сила гравитационного взаимодействия, является консервативной. Поэтому в указанной системе выполняется закон сохранения механической энергии.

В качестве системы отсчета выберем инерциальную систему, связанную с центром масс нашей системы. При этом центр масс системы будет практически совпадать с центром Земли, так как масса Земли M много больше массы ракеты m.

Согласно закону сохранения механической энергии

$$E_{к1} + E_{p1} = E_{к2} + E_{p2}, \tag{10}$$

где $E_{к1}$ и E_{p1} – кинетическая и потенциальная энергии системы ракета – Земля в начальном состоянии (на поверхности Земли); $E_{к2}$ и E_{p2} – те же величины в конечном состоянии (на расстоянии, равном радиусу Земли).

В выбранной системе отсчета кинетическая энергия Земли равна нулю. Поэтому $E_{к1}$ есть просто начальная кинетическая энергия ракеты: $E_{к1} = m\upsilon^2_1 / 2$. Потенциальная энергия системы в начальном состоянии $E_{p1} = -GmM / R$. По мере удаления ракеты от поверхности Земли ее потенциальная энергия будет возрастать, а кинетическая – убывать. В конечном состоянии кинетическая энергия $E_{к2}$ станет равной нулю, а потенциальная энергия E_{p2} достигнет максимального значения: $E_{p2} = -GmM / (2R)$.

Подставив значения $E_{к1}$, E_{p1}, $E_{к2}$ и E_{p2} в выражение (10), получим

$$\frac{1}{2} m\upsilon_1^2 - G\frac{mM}{R} = -G\frac{mM}{2R},$$

откуда

$$\upsilon_1 = \sqrt{GM / R}.$$

Заметив, что $GM / R^2 = g$ (т.е. ускорению свободного падения у поверхности Земли), перепишем эту формулу в виде $\upsilon_1 = \sqrt{gR}$, что совпадает с выражением для первой космической скорости.

Окончательно $\upsilon_1 = \sqrt{9{,}8 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6} = 7{,}9 \cdot 10^3$ м/с.

Задача 29. Два бруска массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 4$ кг, соединенные шнуром, лежат на столе. С каким ускорением будут двигаться бруски, если к одному из них приложить силу $F = 10$ Н, направленную горизонтально? Какова будет сила натяжения T шнура, соединяющего бруски, если силу 10 Н приложить к первому бруску? ко второму бруску? Трением пренебречь.

Задача 30. Грузы одинаковой массой ($m_1 = m_2 = 0{,}5$ кг) соединены нитью и перекинуты через невесомый блок, укрепленный на конце стола. Коэффициент трения груза m о стол $\mu = 0{,}15$. Пренебрегая трением в блоке, определить ускорение, с которым движутся грузы; силу натяжения нити.

Задача 31. В установке (рис.10) угол наклона плоскости с горизонтом $\alpha = 30°$, массы тел одинаковы ($m = 1$ кг). Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая трением в оси блока, определить силу давления на ось, если коэффициент трения между наклонной плоскостью и лежащим на ней телом $\mu = 0{,}1$.

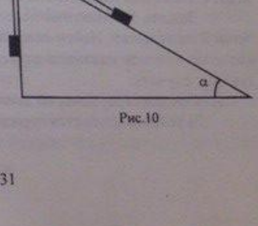

Рис.10

Задача 32. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 45°$. Пройдя расстояние $S = 36{,}4$ см, тело приобретает скорость $\upsilon = 2$ м/с. Найти коэффициент трения тела о плоскость.

Задача 33. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 45°. Зависимость пройденого телом расстояния S от времени t имеет вид $S = Ct^2$, где $C = 1{,}73$ м/с^2. Найти коэффициент трения тела о плоскость.

Задача 34. Тело массой 1 кг, движущееся горизонтально со скоростью 1 м/с, догоняет второе тело массой 0,5 кг и неупруго сталкивается с ним. Какую скорость получат тела, если второе тело стояло неподвижно; второе тело двигалось со скоростью 0,5 м/с в том же направлении, что и первое тело; второе тело двигалось со скоростью 0,5 м/с в направлении, противоположном направлению движения первого тела?

Задача 35. Невесомый блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$ (рис.11). Тела A и B равной массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти ускорение, с которым движутся тела, и натяжение нити. Трением тел A и B о наклонные плоскости, а также трением в блоке пренебречь.

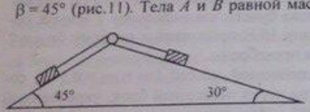

Рис.11

Задача 36. Бак с водой стоит на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$. С каким направленным горизонтально ускорением должна двигаться наклонная плоскость, чтобы поверхность воды в баке была параллельна ей?

Задача 37. Маятник массой m подвешен к подставке, укрепленной на тележке. Найти направление нити маятника, т.е. угол отклонения α нити маятника от вертикали, и ее натяжение T в следующих случаях:

1) тележка равномерно движется по горизонтальной плоскости;
2) тележка движется горизонтально с ускорением a;

3) тележка свободно скатывается с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом;
4) тележка с некоторым ускорением a, направленным вдоль наклонной плоскости, вкатывается на нее;
5) тележка с ускорением a скатывается с наклонной плоскости.

Задача 38. Шар массой $m_1 = 10$ кг, движущийся со скоростью $\upsilon_1 = 4$ м/с, сталкивается с шаром массой $m_2 = 4$ кг, скорость которого $\upsilon_2 = 12$ м/с. Считая удар прямым и неупругим, найти скорость шаров после удара, если малый шар нагоняет большой шар, движущийся в том же направлении, и если шары движутся навстречу друг другу.

Задача 39. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной легкими колесами. На одном конце доски стоит человек. Масса человека $M = 60$ кг, масса доски $m = 20$ кг. С какой скоростью u (относительно пола) будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль доски со скоростью (относительно доски) $\upsilon = 1$ м/с? Массой колес пренебречь. Трение во втулках не учитывать.

Человек переходит на другой конец доски. Найти расстояние S, на которое передвинется тележка; переместится человек относительно пола; переместится центр масс системы тележка – человек относительно доски и относительно пола. Длина доски $l = 2$ м.

Задача 40. На железнодорожной платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием $M = 15$ т. Орудие стреляет вверх под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. С какой скоростью покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда $m = 20$ кг и он вылетает со скоростью $\upsilon = 600$ м/с?

Задача 41. Снаряд массой $m = 10$ кг обладал скоростью $\upsilon = 200$ м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая массой $m_1 = 3$ кг получила скорость $\upsilon_1 = 400$ м/с в прежнем направлении. Найти скорость υ_2 второй части снаряда. Определить, с какой скоростью υ_2 и под каким углом α к горизонту полетит бóльшая часть снаряда, если меньшая полетела вперед под углом $\beta = 60°$ к горизонту.

Задача 42. На железнодорожной платформе, движущейся по инерции со скоростью $\upsilon = 3$ км/ч, укреплено орудие. Масса платформы с орудием $M = 10$ т. Ствол орудия направлен в сторону дви-

жения платформы. Снаряд массой $m = 10$ кг вылетает из ствола под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Определить скорость υ снаряда (относительно Земли), если после выстрела скорость платформы уменьшилась в 2 раза.

Задача 43. Нагруженная песком железнодорожная платформа с начальной массой m начинает движение из состояния покоя под действием постоянной силы тяги F. Через отверстие в дне платформы высыпается песок с постоянной скоростью $\Delta m / \Delta t$. Определить $\upsilon = \upsilon(t)$, т.е. зависимость скорости платформы от времени.

Задача 44. Ракета, масса которой в начальный момент времени $M = 2$ кг, запущена вертикально вверх. Относительная скорость выхода продуктов сгорания $u = 150$ м/с, расход горючего $\Delta m / \Delta t = 0{,}2$ кг/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить ускорение a ракеты через $t = 3$ с после начала ее движения. Поле силы тяжести считать однородным.

Задача 45. Ракета с жидким топливом массой $M = 15 \cdot 10^3$ кг запускается в вертикальном направлении. Расход топлива $\Delta m / \Delta t = 150$ кг/с. На какую высоту поднимется ракета за время работы двигателя $\tau = 1$ мин, если скорость истечения газов из сопла $\upsilon = 3{,}0$ км/с?

Задача 46. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется под действием некоторой силы согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 1$ м/с^2, $D = -0{,}2$ м/с^3. Найти значения этой силы в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с. В какой момент времени сила равна нулю?

Задача 47. Частица массой m движется под действием силы $F = F_0 \cos\omega t$, где F_0 и ω – некоторые постоянные. Определить положение частицы, т.е. выразить ее радиус-вектор r как функцию времени, если в начальный момент времени $t = 0$, $\vec{r}(0) = 0$ и $\vec{\upsilon}(0) = 0$.

Задача 48. Материальная точка массой $m = 2$ кг двигалась под действием некоторой силы, направленной вдоль оси $0x$, согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $B = -2$ м/с, $C = 1$ м/с^2, $D = -0{,}2$ м/с^3. Найти мощность N, развиваемую силой, в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с.

Задача 49. В баллистический маятник массой $M = 5$ кг попала пуля массой $m = 10$ г и застряла в нем. Найти скорость υ пули,

если маятник, отклонившись после удара, поднялся на высоту $h = 10$ см.

Задача 50. Шар массой m_1, летящий со скоростью $\upsilon = 5$ м/с, ударяет неподвижный шар массой m_2. Удар прямой, неупругий. Определить скорость u шаров после удара, а также долю ω кинетической энергии летящего шара, израсходованную на увеличение внутренней энергии этих шаров. Рассмотреть случаи: 1) $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 8$ кг; 2) $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 2$ кг.

Задача 51. Из шахты глубиной $h = 600$ м поднимают клеть массой $m_1 = 3{,}0$ т на канате массой 1,5 кг. Какая работа A совершается при поднятии клети на поверхность Земли? Каков коэффициент полезного действия η подъемного устройства?

Задача 52. Тело скользит сначала по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 8°$ с горизонтом, а затем по горизонтальной поверхности. Найти, чему равен коэффициент трения, если известно, что тело проходит по горизонтали такое же расстояние, как и по наклонной плоскости.

? **Задача 53.** Один раз камень бросают со скоростью υ_1 по горизонтальной поверхности льда, а второй раз со скоростью υ_2 в воздух под углом 45° к горизонту. В каком случае камню сообщена бóльшая начальная скорость и во сколько раз, если в обоих случаях перемещение камня одинаково? Коэффициент трения камня о лед принять равным 0,02. Сопротивление воздуха не учитывать.

Задача 54. Ветер действует на парус площадью S с силой $F = AS\rho(\upsilon_0 - \upsilon)^2/2$, где A – некоторая постоянная; ρ – плотность воздуха; υ_0 – скорость ветра; υ – скорость лодки. Определить, при какой скорости лодки мгновенная мощность ветра максимальна.

Задача 55. Тело массой m начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = 2t\vec{i} + 3t^2\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – соответственно единичные векторы координатных осей $0x$ и $0y$. Определить мощность $N(t)$, развиваемую силой в момент времени t.

Задача 56. Диск радиусом $R = 40$ см вращается вокруг вертикальной оси. На краю диска лежит кубик. Принимая коэффициент трения $\mu = 0{,}4$, найти частоту вращения n, при которой кубик соскользнет с диска.

Задача 57. К шнуру подвешена гиря. Гирю отвели в сторону так, что шнур принял горизонтальное положение, и отпустили. Как велика сила натяжения T шнура в момент, когда гиря проходит положение равновесия? Какой угол φ с вертикалью составляет шнур в момент, когда сила натяжения шнура равна силе тяжести гири?

Задача 58. Самолет описывает петлю Нестерова радиусом $R = 200$ м. Во сколько раз сила F, с которой летчик давит на сиденье в нижней точке петли, больше силы тяжести летчика P, если скорость самолета $\upsilon = 100$ м/с?

Задача 59. Сосуд с водой, подвешенный на веревке длиной $l = 1$ м, вращается в вертикальной плоскости так, что вода из него не выливается. Определить максимальное значение периода обращения.

Задача 60. Внутри вертикально расположенного конуса с углом $2\alpha = 90°$ при вершине находится тело. На каком минимальном расстоянии от вершины конуса может находиться тело, если коэффициент трения между телом и поверхностью конуса $\mu = 0{,}20$, а конус вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 7{,}0$ рад/с? Чему равно максимальное значение этого расстояния?

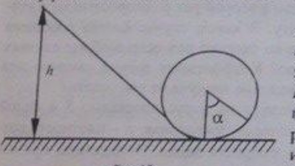

Рис.12

Задача 61. Шайба массой m скользит без трения с высоты h по желобу, переходящему в петлю радиусом R. Определить силу давления шайбы на опору в точке, определяемой углом α (рис.12), и угол, при котором произойдет отрыв шайбы.

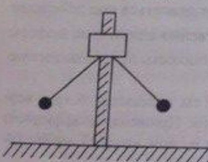
Рис.13

Задача 62. Модель центробежного регулятора (рис.13) вращается с частотой $n = 2$ с$^{-1}$. Учитывая только массу шаров, определить угол отклонения стержней, несущих шары. Длина стержней $l = 15$ см.

Задача 63. Спутник поднимают на высоту $h = 6370$ км и запускают его по круговой орбите на той

же высоте. Определить отношение работ на поднятие (A_1) и на запуск (A_2) спутника.

Задача 64. Определить численное значение второй космической скорости, т.е. наименьшей скорости, которую надо сообщить телу, чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической и тело могло превратиться в спутник Солнца.

Задача 65. Длина стержней центробежного регулятора (рис.13) равна 12,5 см. Какое число оборотов в секунду делает центробежный регулятор, если при вращении грузы отклонились от вертикали на угол 60°, на 30°?

Задача 66. Спортсмен с высоты $h = 12$ м падает на упругую сетку. Пренебрегая массой сетки, определить, во сколько раз наибольшая сила давления спортсмена на сетку больше его силы тяжести, если прогиб сетки под действием силы тяжести спортсмена $x_o = 15$ см.

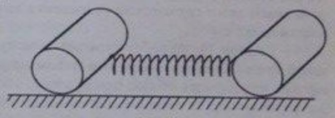
Рис.14

Задача 67. Два цилиндра массами $m_1 = 150$ г и $m_2 = 300$ г, соединенные сжатой пружиной, разошлись при внезапном освобождении пружины в разные стороны (рис.14). Пренебрегая силами сопротивления и учитывая, что кинетическая энергия T упругой деформации пружины составляет 1,8 Дж, определить: 1) скорость υ_1 движения первого цилиндра; 2) скорость υ_2 движения второго цилиндра.

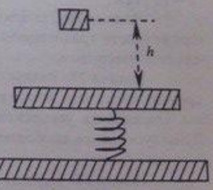

Рис.15

Задача 68. Гиря массой $m = 10$ кг падает с высоты $h = 0{,}5$ м на подставку, скрепленную с пружиной жесткостью $k = 30$ Н/см (рис.15). Определить смещение x пружины.

Задача 69. Определить работу растяжения двух соединенных последовательно пружин жесткостью

$k_1 = 400$ Н/м и $k_2 = 250$ Н/м, если первая пружина при этом растянулась на $\Delta l = 2$ см.

Задача 70. Две пружины жесткостью $k_1 = 0{,}5$ кН/м и $k_2 = 1$ кН/м скреплены параллельно. Определить потенциальную энергию данной системы при абсолютной деформации $\Delta l = 4$ см.

✓ **Задача 71.** Какую нужно совершить работу A, чтобы пружину жесткостью $k = 800$ Н/м, сжатую на $x = 6$ см, дополнительно сжать на $\Delta x = 8$ см?

Задача 72. Если на верхний конец вертикально расположенной спиральной пружины положить груз, то пружина сожмется на $\Delta l = 3$ мм. На сколько сожмет пружину тот же груз, упавший на конец пружины с высоты $h = 8$ см?

Задача 73. На чашку весов падает груз массой 1 кг с высоты 10 см. Каковы показания весов в момент удара? Известно, что под действием этого груза после успокоения качаний чашка весов опускается на 0,5 см.

Задача 74. Акробат прыгает в сетку с высоты $H_1 = 8$ м. На какой предельной высоте h_1 над полом надо натянуть сетку, чтобы акробат не ударился об пол при прыжке? Известно, что сетка прогибается на $h_2 = 0{,}5$ м, если акробат прыгает в нее с высоты $H_2 = 1$ м.

✓ **Задача 75.** Груз массой 0,5 кг, привязанный к резиновому шнуру длиной $l_o = 9{,}5$ см, отклоняют на угол $\alpha = 90°$ и отпускают. Найти длину l резинового шнура в момент прохождения грузом положения равновесия. Коэффициент деформации резинового шнура $k = 10$ Н/см.

Задача 76. На какой высоте h над поверхностью Земли напряженность гравитационного поля равна 1 Н/кг? Радиус Земли R считать известным.

Задача 77. Радиус Земли в 3,66 раза больше радиуса Луны; средняя плотность Земли в 1,66 раза больше средней плотности Луны. Определить ускорение свободного падения $g_л$ на поверхности Луны (ускорение свободного падения g на поверхности Земли считать известным).

Задача 78. Период вращения искусственного спутника Земли $T = 2$ ч. Считая орбиту спутника круговой, найти, на какой высоте h над поверхностью Земли движется спутник.

Задача 79. Луна движется вокруг Земли со скоростью $\upsilon_1 = 1{,}02$ км/с. Среднее расстояние l Луны от Земли равно $60{,}3R$, где R – радиус Земли. Определить, с какой скоростью υ_2 должен двигаться искусственный спутник, вращающийся вокруг Земли на незначительной высоте над ее поверхностью.

Задача 80. Советская космическая ракета, ставшая первой искусственной планетой, обращается вокруг Солнца по эллипсу. Наименьшее расстояние ракеты от Солнца $r_{min} = 0{,}97$ астрономической единицы, наибольшее расстояние $r_{max} = 1{,}31$ а.е. Определить период T обращения (в годах) искусственной планеты.

Задача 81. Тело массой $m = 1$ кг находится на поверхности Земли. Определить изменение ΔP силы тяжести при подъеме тела на высоту $h = 5$ км и при опускании тела в шахту на глубину $h = 5$ км. Землю считать однородным шаром радиусом $R = 6{,}37$ Мм и плотностью $\rho = 5{,}5$ г/см^3.

Задача 82. Определить работу A, которую совершат силы гравитационного поля Земли, если тело массой $m = 1$ кг упадет на поверхность Земли с высоты h, равной радиусу Земли, и из бесконечности. Радиус Земли R и ускорение свободного падения g на ее поверхности считать известными.

Задача 83. Ракета пущена с Земли с начальной скоростью $\upsilon_o = 15$ км/с. К какому пределу будет стремиться скорость ракеты, если расстояние ракеты от Земли бесконечно увеличивается? Сопротивление воздуха и притяжение других небесных тел, кроме Земли, не учитывать.

Задача 84. Тело массой $m = 1$ кг, падая свободно в течение $t = 4$ с, попадает на Землю в точку с географической широтой $\varphi = 45°$. Учитывая вращение Земли, определить и нарисовать все силы, действующие на тело в момент его падения на Землю. Нарисовать схему сил.

Задача 85. На 60° северной широты паровоз массой 100 т идет с запада на восток со скоростью $\upsilon = 72$ км/ч по железнодорожному пути, проложенному вдоль географической параллели. Найти величину и направление вертикальной и горизонтальной компонентов кориолисовой силы, действующей на паровоз.

Задача 86. Вращение Земли вызывает отклонение поверхности воды в реках от горизонтального положения. Рассчитать наклон поверхности воды в реке к горизонту на широте φ. Река течет с севера на юг.

Задача 87. По оси вращения земного шара пробурена шахта. Определить максимальную скорость падающего в шахту тела. Сопротивление воздуха не учитывать.

Задача 88. С вертолета, неподвижно «висящего» на некоторой высоте над поверхностью Земли, сброшен груз массой $m = 100$ кг. Считая, что сила сопротивления воздуха изменяется пропорционально скорости, определить, через какой промежуток времени Δt ускорение a груза будет равно половине ускорения свободного падения. Коэффициент сопротивления $k = 10$ кг/с.

Задача 89. Моторная лодка массой $m = 400$ кг начинает двигаться по озеру. Сила тяги мотора $F = 0{,}2$ кН. Считая силу сопротивления F_c пропорциональной скорости, определить скорость υ лодки через $\Delta t = 20$ с после начала ее движения. Коэффициент сопротивления $k = 20$ кг/с.

Задача 90. Начальная скорость пули $\upsilon_0 = 800$ м/с. При движении в воздухе за время $t = 0{,}8$ с ее скорость уменьшилась до $\upsilon_1 = 200$ м/с. Масса пули $m = 10$ г. Считая силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости, определить коэффициент сопротивления k. Действием силы тяжести пренебречь.

Задача 91. Космический корабль имеет массу $m = 3{,}5$ т. При маневрировании из его двигателей вырывается струя газов со скоростью $\upsilon = 800$ м/с, расход горючего $Q_m = 0{,}2$ кг/с. Найти реактивную силу R двигателей и ускорение a, которое она сообщает кораблю.

Задача 92. Вертолет массой $m = 3{,}5$ т с ротором диаметром $d = 18$ м «висит» в воздухе. С какой скоростью υ ротор отбрасывает вертикально вниз струю воздуха? Диаметр струи считать равным диаметру ротора.

3. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Вектор момента силы относительно некоторой точки определяется векторным произведением радиус-вектора $\vec{r}$, направленного из этой точки в точку приложения силы, на силу $\vec{F}$:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Модуль момента силы относительно оси

$$M = F_{\perp} d,$$

где d – плечо силы, представляющее собой расстояние от прямой, вдоль которой действует сила, до оси; $F_{\perp}$ – проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси вращения.

Моментом инерции *материальной точки* относительно некоторой оси называется величина

$$I = mr^2,$$

где m – масса материальной точки; r – расстояние от материальной точки до оси.

Момент инерции *твердого тела* относительно некоторой оси

$$I = \int\limits_{(m)} r^2 dm = \int\limits_{(V)} \rho r^2 dV,$$

где интегрирование должно быть проведено по всему объему тела.

Моменты инерции симметричных однородных твердых тел вычисляются следующим образом:

- $I = mR^2/2$ для сплошного цилиндра массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через центры оснований;
- $I = m\,(R_1^2 + R_2^2)\,/\,2$, где R_1 и R_2 – внутренний и внешний радиусы, для полого цилиндра массой m относительно оси, проходящей через центры оснований; для тонкостенного полого цилиндра $(R_1 \approx R_2 = R)$ $I \cong mR^2$; – [illegible]
- $I = 2mR^2/\,5$ для шара массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через его центр;
- $I = ml^2/\,12$ для стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно к нему.

Если известен момент инерции тела I_c относительно оси, проходящей через центр масс, то момент инерции относительно любой оси, параллельной первой, может быть найден по теореме Штейнера:

$$I = I_c + ma^2,$$

где m – масса тела; a – расстояние между осями.

Момент импульса материальной точки массой m, имеющей скорость $\vec{\upsilon}$,

$$\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{\upsilon}],$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, идущий из точки отсчета в материальную точку.

Для твердого тела с моментом инерции I, вращающегося вокруг оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, момент импульса $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Уравнение моментов $d\vec{L} = \vec{M}_{\Sigma} dt$, где $d\vec{L}$ – приращение момента импульса тела под действием приложенного к нему результирующего момента сил $\vec{M}_{\Sigma}$.

Основной закон динамики вращательного движения

$$\vec{M}_{\Sigma} = I\vec{\varepsilon},$$

где $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение, приобретаемое телом под действием момента сил $\vec{M}_{\Sigma}$.

Закон сохранения момента импульса системы N тел при вращении вокруг неподвижной оси

$$\sum_{i=1}^{N} I_i \vec{\omega}_i = \text{const}.$$

Закон сохранения момента импульса для системы из двух тел с моментами инерции I_1 и I_2

$$I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 = I_1\vec{\omega}_1' + I_2\vec{\omega}_2',$$

где $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ – угловые скорости тел в начальный момент; $\vec{\omega}_1'$ и $\vec{\omega}_2'$ – угловые скорости этих же тел в последующий момент времени.

Работа, совершаемая при вращении твердого тела,

$$A = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{\Sigma\omega} d\varphi,$$

где $M_{\Sigma\omega}$ – проекция результирующего момента сил на ось вращения; φ – угол поворота тела.

Для постоянного вращающего момента $A = M_{\Sigma\omega}\Delta\varphi$.

Мощность, развиваемая при вращении тела, $N = M_{\Sigma\omega}\,\omega$.

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела $E_к = I\omega^2/2$, где момент инерции вычислен относительно оси вращения.

Кинетическая энергия тела, движущегося поступательно и одновременно вращающегося,

$$E_к = m\upsilon_c^2/2 + I_c\omega^2/2,$$

где υ_c – скорость центра инерции тела; m – масса тела; I_c – момент инерции относительно оси вращения, проходящей через центр инерции; ω – угловая скорость относительно той же оси.

ПРИМЕР 15. Определить момент инерции I равностороннего проволочного треугольника со стороной $a = 10$ см относительно оси, лежащей в плоскости треугольника и проходящей через его вершину параллельно стороне, противоположной этой вершине (рис.16). Масса треугольника (12 г) равномерно распределена по длине проволоки.

Решение. Момент инерции обладает, по определению, свойством аддитивности. Это дает возможность рассчитать суммарный момент инерции треугольника как сумму моментов инерции его трех сторон: $I = I_1 + I_2 + I_3$.

В силу симметрии моменты инерции сторон AB и BC равны, а значит, момент инерции треугольника $I = 2I_1 + I_3$.

Определим момент инерции I_3. Поскольку каждый элемент массы стороны AC находится на одном и том же расстоянии d до оси

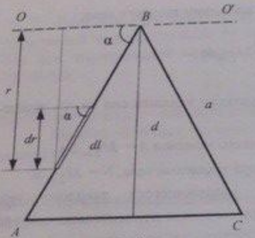

Рис.16

OO' (рис.16), то $I_3 = m_3 d^2$, где $d = a\sin\alpha$. Таким образом, учитывая, что угол $\alpha = \pi/3$ и $m_3 = m/3$, найдем

$$I_3 = \frac{m}{3}a^2\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{ma^2}{4}.$$

Определим момент инерции стороны AB. Каждый элемент массы dm этой стороны отличается по расстоянию r до оси OO' от соседнего элемента на величину dr (рис.16). Следовательно, следует воспользоваться общим определением момента инерции: $I = \int\limits_{(m)} r^2 dm$.

Для того чтобы интегрирование можно было осуществить, выразим элемент массы dm через элементарное расстояние dr. Обозначим элемент длины стороны треугольника dl и введем линейную плотность массы $\tau = m/l$, где l – периметр треугольника. Поскольку $l = 3a$, линейная плотность массы $\tau = m/(3a)$. Тогда элементарная масса $dm = \tau\, dl$.

Из рис.16 следует, что элемент длины $dl = dr/\sin\alpha$. Итак,

$$dm = \tau\frac{dr}{\sin\alpha} = \frac{m}{3a}\frac{dr}{\sin\alpha}.$$

Тогда момент инерции AB

$$I_1 = \int\limits_0^d r^2\frac{m}{3a}\frac{dr}{\sin\alpha},$$

где интегрирование распространено на весь диапазон изменения r: от 0 до d. Выполним интегрирование и воспользуемся полученным выражением для d:

$$I_1 = \frac{m}{3a\sin\alpha}\frac{r^3}{3}\Big|_0^d = \frac{ma^2}{12}.$$

Полный момент инерции

$$I = 2\cdot\frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4} = \frac{5}{12}ma^2;$$

$$I = \frac{5}{12}\cdot 12\cdot 10^{-3}\cdot(0{,}1)^2 = 5\cdot 10^{-5}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

ПРИМЕР 16. Пусть для условия примера 8 необходимо найти силы натяжения нити по обе стороны блока и ускорение грузов m_1 и m_2. Блок теперь считаем однородным цилиндром массой $m = 10$ кг.

Решение. Включим в физическую систему те же тела: грузы m_1 и m_2, наклонную плоскость, нить и блок (рис.17). Однако теперь необходимо учесть вращение блока как твердого тела. Блок вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости рисунка (назовем ее Oz).

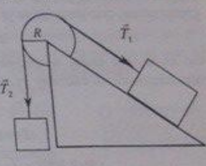

Рис.17

Вращение твердого тела возможно благодаря отличному от нуля вращающему моменту. Плечо сил натяжения в данном случае – это радиус блока R, следовательно, моменты этих сил относительно оси Oz: $M_{z1} = T_1R$, и $M_{z2} = -T_2R$. Различие знаков выражает противоположные направления действия моментов.

Момент инерции блока (сплошного цилиндра) относительно той же оси $I_z = mR^2/2$.

Вращение твердого тела описывается уравнением $M_z = I_z\varepsilon$. В дальнейшем будем опускать индекс оси у моментов сил и моментов инерции. Используя выражения для моментов сил, получим

$$(T_1 - T_2)R = mR^2\varepsilon/2. \tag{11}$$

Применив к грузам (как движущимся поступательно материальным точкам) второй закон динамики, имеем после проецирования систему скалярных уравнений:

$$m_1g\sin\alpha - T_1 - F_{тр} = m_1a; \tag{12}$$

$$N - m_1g\cos\alpha = 0; \tag{13}$$

$$-m_2g + T_2 = m_2a. \tag{14}$$

Учитывая, что $F_{тр} = \mu N$ исключим из (12) и (13) $F_{тр}$ и N:

$$m_1g\sin\alpha - T_1 - \mu m_1g\cos\alpha = m_1a. \tag{15}$$

Теперь уравнения (11), (14) и (15) содержат четыре неизвестные величины: a, T_1, T_2 и ε. Дополним систему кинематическим уравнением, связывающим угловое и линейное ускорения:

$$a = a_\tau = \varepsilon R,$$

что позволяет сразу исключить из (11) угловое ускорение и получить следующую систему уравнений:

$$T_1 - T_2 = ma/2;$$

$$T_2 - m_2g = m_2a;$$

$$m_1g\sin\alpha - T_1 - \mu\, m_1g\cos\alpha = m_1a.$$

Решим систему:

$$a = \frac{m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}g;$$

$$T_1 = m_1g\frac{(m_2 + \frac{m}{2})(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}};$$

$$T_2 = m_2g\frac{m_1(1 + \sin\alpha - \mu\cos\alpha) + \frac{m}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}.$$

Подставив численные значения, получим $a = 0{,}055$ м/с^2, $T_1 = 20$ Н, $T_2 = 19{,}71$ Н. Как видно, ускорение существенно уменьшилось, по сравнению с величиной, полученной без учета массы блока. Сила натяжения T_1, вращающая блок по часовой стрелке, возросла по сравнению с силой T_2, вращающей его против часовой стрелки.

ПРИМЕР 17. Нить, закрепленная верхним концом в точке O (рис.18), намотана на сплошной цилиндр массой $m = 10$ кг и радиусом $R = 10$ см. Определить ускорение центра масс цилиндра, опускающегося при разматывании нити, и силу натяжения нити. Считать нить невесомой и нерастяжимой.

Решение. Включим в физическую систему два тела: цилиндр и нить. Центр масс цилиндра C движется вертикально вниз, а сам цилиндр вращается вокруг подвижной оси, проходящей через центр масс. Применим теорему о движении центра масс и уравнение динамики вращения твердого тела. Свяжем инерциальную систему отсчета с землей, а оси координат направим, как показано на рис.18 (ось Oz направлена перпендикулярно плоскости рисунка).

На цилиндр действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. По теореме о движении центра масс, точка C движется так, как если бы в ней была сосредоточена вся масса тела и к ней были приложены все действующие на тело силы: $m\vec{a}_c = m\vec{g} + \vec{T}$. Проектируя это векторное уравнение на ось Oy, получим

$$ma_c = mg - T. \tag{16}$$

Цилиндр вращается относительно подвижной оси, но эта ось перемещается параллельно самой себе. В этом случае остается справедливым уравнение вращения: $\vec{M}_\Sigma = I\vec{\varepsilon}$. Принимая во внимание, что момент силы тяжести относительно точки C равен нулю (сила $m\vec{g}$ проходит через точку C, следователь-

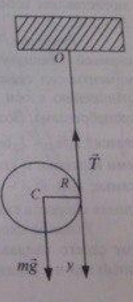

Рис.18

но, плечо силы равно нулю), а плечо силы натяжения равно радиусу диска R, запишем уравнение вращения в виде $mR^2\varepsilon/2 = TR$, где угловое ускорение $\varepsilon = a_c/R$. Подставив последнее выражение в уравнение движения, получим

$$ma_c/2 = T. \qquad (17)$$

Решив совместно уравнения (16) и (17), получим

$$a_c = 2g/3; \qquad T = 5mg/3$$

и вычислим $a_c = 6{,}6$ м/с^2 и $T = 163$ Н.

ПРИМЕР 18. Человек стоит в центре скамьи Жуковского (круглой платформы, вращающейся с малым трением относительно вертикальной оси) и вместе с ней вращается по инерции. Частота вращения $n_1 = 0{,}5$ с$^{-1}$. Момент инерции человека относительно оси вращения $I_o = 1{,}6$ кг·м^2. В вытянутых в стороны руках человек держит по гире массой $m = 2$ кг каждая. Расстояние между гирями $l_1 = 1{,}6$ м. Определить частоту вращения n_2 скамьи с человеком, когда он опустит руки (расстояние между гирями $l_2 = 0{,}4$ м). Скамья представляет собой однородный диск радиусом $R = 30$ см и массой $M = 3$ кг.

Решение. Человек, держащий гири, представляет вместе со скамьей замкнутую механическую систему (предполагается, что моменты сил тяжести и сил реакции, действующих на систему, по отношению к оси вращения являются уравновешенными; трением пренебрегаем). Поэтому момент импульса $I\vec{\omega}$ этой системы сохраняется: $I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2$, где I_1 и $\vec{\omega}_1$ – момент инерции человека с гирями и скамьи и угловая скорость человека с вытянутыми руками и скамьи; I_2 и $\vec{\omega}_2$ – момент инерции человека с гирями и скамьи и угловая скорость скамьи и человека с опущенными руками.

Угловые скорости направлены вдоль оси вращения и не меняют своего направления. Поэтому уравнение будет иметь аналогичный вид и в скалярной форме. Отсюда

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1.$$

Выразив угловые скорости ω_1 и ω_2 через частоту вращения ($\omega = 2\pi n$) и сократив на 2π, получим

$$n_2 = \frac{I_1}{I_2}n_1. \qquad (18)$$

Момент инерции рассматриваемой системы равен сумме момента инерции тела человека I_o, момента инерции гирь в руках человека и момента инерции скамьи. Так как размер гирь много меньше расстояния до оси вращения, то их момент инерции можно определить по формуле момента инерции материальной точки: $I = mr^2$. Момент инерции скамьи $I_{ск} = mR^2/2$. Пренебрегая изменением момента инерции тела человека при изменении положения рук, получим

$$I_1 = I_o + 2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}mR^2; \qquad I_2 = I_o + 2m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}mR^2.$$

Тогда с учетом (18) получим $n_2 = 1{,}13$ с$^{-1}$.

ПРИМЕР 19. Стержень длиной $l = 1{,}5$ см и массой $M = 10$ кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O, лежащую на расстоянии $d = 20$ см от верхнего конца стержня (рис.19). В середину стержня попадает пуля массой $m = 10$ г, летящая горизонтально, и застревает в нем. Стержень отклоняется после удара на угол $\varphi = 10°27'$. Определить, с какой скоростью υ_o летела пуля.

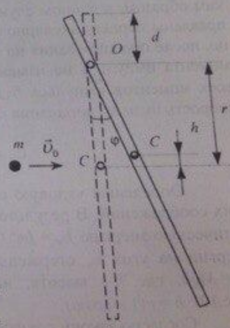

Рис.19

Решение. Удар пули следует считать неупругим; после него пуля и соответствующая точка стержня C будут двигаться с одинаковыми скоростями. В момент удара на пулю и стержень действуют силы тяжести,

линии действия которых проходят через ось вращения. Моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Следовательно, при ударе в системе, включающей пулю и стержень, выполняется закон сохранения момента импульса.

В начальный момент удара момент импульса стержня $L_{01} = I\omega_0 = 0$, поскольку угловая скорость $\omega_0 = 0$, где I – момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку O. Начальный момент импульса пули $L_{02} = m\upsilon_0 r$, где r – расстояние от точки попадания C до оси вращения, проходящей через O (по определению, $L_{02} = m\upsilon_0 r \sin\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{\upsilon}_0$, но $\alpha = \pi/2$ и $\sin\alpha = 1$).

В конечный момент удара стержень с пулей имеют угловую скорость ω. Линейная скорость пули при этом $\upsilon = \omega r$. Следовательно, конечный момент импульса пули $L_2 = mr^2\omega$.

По закону сохранения момента импульса $\vec{L}_{o1} + \vec{L}_{o2} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$. По определению, вектор момента импульса перпендикулярен плоскости, содержащей векторы $\vec{r}$ и $m\vec{\upsilon}$, и сонаправлен вектору $\vec{\omega}$. Таким образом, в данном случае все векторы $\vec{L}$ до и после удара направлены перпендикулярно плоскости рисунка к нам. Следовательно, после проецирования на ось вращения запись закона сохранения момента импульса не изменит своей формы и после подстановки всех моментов импульса будем иметь $m\upsilon_0 r = I\omega + mr^2\omega$. Отсюда скорость пули до попадания в стержень

$$\upsilon_0 = \left(\frac{I}{mr} + r\right)\omega.$$

Определим угловую скорость стержня с пулей из следующих соображений. В результате удара пуля сообщает стержню кинетическую энергию $E_к = I\omega^2/2$. Повернувшись за счет полученной энергии на угол φ, стержень приобрел потенциальную энергию $E_p = Mgh$, где h – высота, на которую поднялся центр масс C (рис.19): $h = r(1 - \cos\varphi)$.

Согласно закону сохранения энергии, $E_{p0} + E_{к0} = E_p + E_к$, где $E_{p0} = 0$ (по соглашению) и $E_к = 0$. В результате $Mgh = I\omega^2/2$. Тогда угловая скорость стержня с пулей

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mgr(1-\cos\varphi)}{I_O}}.$$

Определим момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку O. В соответствии с теоремой Штейнера, момент инерции $I_O = I_C + mr^2$, где $I_C = Ml^2/12$ – момент инерции стержня относительно центра масс; r – расстояние между параллельными осями, проходящими через точки C и O. Расстояние $r = l/2 - d = 1{,}5/2 - 0{,}2 = 0{,}55$ м. Тогда момент инерции $I_O = 10 \cdot 1{,}5^2/12 + 10 \cdot 0{,}55^2 = 4{,}9$ кг·м^2.

Угловая скорость стержня с пулей

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}55(1-\cos 10°27') \cdot 10}{4{,}9}} = 0{,}705 \text{ рад/с}.$$

Скорость пули до попадания в стержень

$$\upsilon_0 = \left(\frac{4{,}9}{10 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}55} + 0{,}55\right) \cdot 0{,}705 = 628{,}5 \text{ м/с}.$$

ПРИМЕР 20. Шар радиусом $R = 10$ см скатывается без скольжения с наклонной плоскости высотой $h = 0{,}5$ м, имеющей угол наклона $\alpha = 20°$ (рис.20). Определить, пренебрегая трением, полное время движения шара. Какое угловое ускорение ε будет иметь шар при движении?

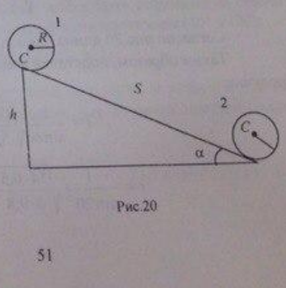

Рис.20

Решение. Согласно теореме о движении центра масс, полное время движения шара по наклонной плоскости t можно определить, рассмотрев движение центра масс шара как материальной точки (начальная скорость шара считается равной нулю): $S = at^2/2$;

$\upsilon_C = a_C t$, где S – длина наклонной плоскости; υ_C – скорость центра масс в конце пути; a_C – ускорение центра масс. Отсюда $t = 2S/\upsilon_C$.

Определим скорость центра масс, исходя из закона сохранения механической энергии (это можно сделать, если считать силу трения пренебрежимо малой). Энергия шара в начальной точке траектории представляет собой потенциальную энергию: $E_1 = E_p = mgh$ (m – масса шара; h – расстояние по вертикали между начальным и конечным положениями центра масс шара, равное в данном случае высоте наклонной плоскости). При этом принято, что $E_p = 0$ при $h = 0$.

Энергию шара в конечной точке можно определить как кинетическую энергию твердого тела, совершающего поступательное и вращательное движение:

$$E_2 = E_к = I_C\omega^2/2 + m\upsilon_C^2/2.$$

где I_C – момент инерции шара относительно центра масс, $I_C = 2mR^2/5$.

Приравняем E_1 и E_2:

$$mgh = I_C\omega^2/2 + m\upsilon_C^2/2.$$

Линейная скорость связана с угловой известным соотношением $\upsilon_C = \omega R$. Подставив в уравнение выражения для I_C и ω, получим

$$\upsilon_C = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.$$

Согласно рис.20 длина наклонной плоскости $S = h/\sin\alpha$.

Таким образом, подставив в выражение для времени υ_C и S, получим

$$t = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{14h}{5g}};$$

$$t = \frac{1}{\sin 20^\circ}\sqrt{\frac{14\cdot 0{,}5}{5\cdot 9{,}8}} = 1{,}11 \text{ с}.$$

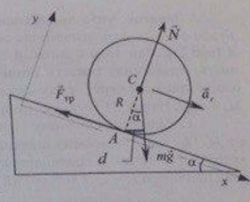

Рис.21

Для определения углового ускорения шара воспользуемся основным уравнением динамики вращения твердого тела: $M_{C\Sigma} = I_C\varepsilon$. Рассмотрим силы, действующие на шар (рис.21). Линии действия силы тяжести $m\vec{g}$ и силы реакции опоры $\vec{N}$ проходят через центр масс C, а следовательно, не вносят вклада в суммарный вращающий момент $M_{C\Sigma}$ относительно оси вращения, проходящей перпендикулярно плоскости рисунка через точку C.

Единственная сила, создающая вращающий момент, – это сила трения качения $\vec{F}_{тр}$, момент которой относительно указанной оси

$$M_C = F_{тр}R. \qquad (19)$$

Выразим $F_{тр}$, воспользовавшись законом динамики поступательного движения центра масс: $m\vec{a}_C = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр}$. Проецирование данного уравнения на ось Ox приводит к скалярному уравнению $ma_{C_x} = mg\sin\alpha - F_{тр}$. Учитывая, что $a_{C_x} = a_C$, получим

$$F_{тр} = mg\sin\alpha - ma_C. \qquad (20)$$

Следовательно, угловое ускорение может быть выражено из основного уравнения динамики вращения с использованием (19) и (20):

$$\varepsilon = mR(g\sin\alpha - a_c)/I_C.$$

Принимая во внимание связь линейного и углового ускорений ($a = \varepsilon R$) и используя выражение для момента инерции шара, окончательно запишем

$$\varepsilon = \frac{5}{7}\frac{g\sin\alpha}{R}; \qquad \varepsilon = \frac{5\cdot 9{,}8\cdot\sin 20^\circ}{7\cdot 0{,}1} = 23{,}9 \text{ рад/с}^2. \qquad (21)$$

Заметим, что к выражению (21) можно придти и по-другому. Будем считать, что мгновенная ось вращения проходит через точку A (рис.21). При этом отличный от нуля вращающий момент будет иметь только сила тяжести (линии действия сил трения и реакции опоры проходят через точку A, т.е. моменты этих сил равны нулю): $M_A = mgd$. Из рис.21 следует, что плечо силы тяжести $d = R\sin\alpha$.

Согласно основному уравнению динамики вращения, $\varepsilon = M_A/I_A$, где I_A – момент инерции шара относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка. По теореме Штейнера $I_A = I_C + mR^2 = 7mR^2/5$. Итак,

$$\varepsilon = \frac{5}{7}\frac{g\sin\alpha}{R}.$$

Задача 93. Цилиндр диаметром 12 см и массой 3 кг лежит боковой поверхностью на горизонтальной плоскости. Определить момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей по линии контакта с плоскостью.

Задача 94. На тонком стержне длиной a укреплен шар радиусом r так, что расстояние между его центром и осью вращения, перпендикулярной стержню, равно a. Определить относительную погрешность в определении момента инерции, если шар считать точечной массой. Длина стержня $a = 10r$, масса шара в 10 раз больше массы стержня.

Задача 95. Вычислить момент инерции тонкого обода радиусом $R = 0{,}5$ м и массой $m = 3$ кг относительно оси, проходящей через крайнюю точку диаметра перпендикулярно к плоскости обода.

Задача 96. Определить момент инерции полого шара массой $m = 0{,}5$ кг относительно касательной. Внешний радиус шара $R = 0{,}02$ м, внутренний $r = 0{,}01$ м.

Задача 97. Тонкостенный цилиндр с диаметром основания $D = 30$ см и массой $m = 12$ кг вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 4$ рад; $B = -2$ рад/с; $C = 0{,}2$ рад/с^3. Определить действующий на цилиндр момент сил M в момент времени $t = 3$ с.

Задача 98. По касательной к шкиву маховика в виде диска диаметром $D = 75$ см и массой $m = 40$ кг приложена сила $F = 1$ кН. Определить угловое ускорение и частоту вращения n маховика через

время $t = 10$ с после начала действия силы, если радиус шкива $r = 12$ см. Силой трения пренебречь.

Задача 99. Какую работу нужно произвести, чтобы увеличить частоту оборотов маховика от 0 до 120 об./мин? Масса маховика 0,5 т равномерно распределена по ободу диаметром $D = 1{,}5$ м. Трением пренебречь.

Задача 100. Шар массой $m = 10$ кг и радиусом $R = 20$ см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $B = 4$ рад/с; $C = -1$ рад/с^3. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить момент сил M в момент времени $t = 2$ с.

Задача 101. Маховик вращается по закону, выражаемому уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 2$ рад; $B = 16$ рад/с; $C = -2$ рад/с^2. Момент инерции маховика $I = 50$ кг·м^2. Найти законы, по которым меняются вращающий момент M и мощность N. Чему равна мощность в момент времени $t = 3$ с?

Задача 102. Кинетическая энергия вращающегося маховика $T = 1$ кДж. Под действием постоянного тормозящего момента маховик начал вращаться равнозамедленно и, сделав 80 оборотов, остановился. Определить момент M силы торможения.

Задача 103. Нить, с привязанными к ее концам грузами, массой $m_1 = 50$ г и $m_2 = 60$ г перекинута через блок диаметром $D = 4$ см. Определить момент инерции блока, если под действием силы тяжести грузов он получил угловое ускорение $\varepsilon = 1{,}5$ рад/с^2.

Задача 104. На вал массой $m_1 = 20$ кг намотана нить, к концу которой привязали груз массой $m_2 = 1$ кг. Определить ускорение груза, опускающегося под действием силы тяжести Трением пренебречь.

Задача 105. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязали грузы массой $m_1 = 100$ г и $m_2 = 110$ г. С каким ускорением a будут двигаться грузы, если масса блока $m = 400$ г? Трение при вращении блока ничтожно мало.

Задача 106. Пуля массой $m = 10$ г летит со скоростью $\upsilon = 800$ м/с, вращаясь около продольной оси с частотой $n = 3000$ с$^{-1}$. Принимая пулю за цилиндр диаметром $d = 8$ мм, определить полную кинетическую энергию пули $E_к$.

Задача 107. Обруч и сплошной цилиндр, имеющие одинаковую массу ($m = 2$ кг), катятся без скольжения с одинаковой скоростью ($\upsilon = 5$ м/с). Найти кинетические энергии этих тел.

Задача 108. Шар катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Полная кинетическая энергия шара $E_к = 14$ Дж. Определить кинетическую энергию поступательного $E_{к1}$ и вращательного $E_{к2}$ движения шара.

Задача 109. Определить линейную скорость υ центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой $h = 1$ м.

Задача 110. Определить скорость поступательного движения сплошного цилиндра, скатившегося с наклонной плоскости высотой $h = 20$ см.

Задача 111. По плоской горизонтальной поверхности катится диск со скоростью $\upsilon = 8$ м/с. Определить коэффициент сопротивления, если диск, будучи предоставленным самому себе, остановился, пройдя путь $S = 18$ м.

Задача 112. Шар катится по горизонтальной плоскости. Какую часть составляет энергия поступательного движения от общей кинетической энергии?

Задача 113. Шар и сплошной цилиндр, двигаясь с одинаковой скоростью, по инерции вкатываются вверх по наклонной плоскости. Какое из тел поднимется выше? Найти отношение высот подъема.

Задача 114. Шар и сплошной цилиндр имеют одинаковую массу ($m = 5$ кг) и катятся с одинаковой скоростью ($\upsilon = 10$ м/с). Найти кинетические энергии этих тел.

Задача 115. Диск катится в течение $t = 3$ с по горизонтальной поверхности и останавливается, пройдя расстояние $S = 10$ м. Определить коэффициент трения качения, если радиус диска $r = 0,1$ м.

Задача 116. Карандаш длиной $l = 15$ см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую (ω) и линейную (υ) скорости будет иметь в конце падения середина карандаша и верхний его конец? Считать, что трение настолько велико, что нижний конец карандаша не проскальзывает.

Задача 117. На краю платформы в виде диска диаметром 2 м, вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси с частотой $n_1 = 8$ мин$^{-1}$, стоит человек массой $m_1 = 70$ кг. Когда человек перешел в центр платформы, она начала вращаться с частотой $n_2 = 10$ мин$^{-1}$. Определить массу m_2 платформы. Момент инерции человека рассчитать как момент инерции материальной точки.

Задача 118. На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром $D = 0,8$ м и массой $m_1 = 6$ кг стоит человек массой $m_2 = 60$ кг. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий мяч массой $m = 0,5$ кг? Траектория мяча горизонтальна и проходит на расстоянии $r = 0,4$ м от оси скамьи. Скорость мяча $\upsilon = 5$ м/с.

Задача 119. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках вертикально, вдоль оси вращения скамьи стержень. Стержень служит осью вращения колеса, расположенного на его верхнем конце. Скамья неподвижна, колесо вращается с частотой $n_1 = 15$ с$^{-1}$. С какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться скамья, если человек повернет стержень на угол $\varphi = 180°$ и колесо окажется на нижнем конце стержня? Суммарный момент инерции человека и скамьи $I = 8$ кг·м^2, радиус колеса $R = 25$ см. Массу колеса $m = 2,5$ кг можно считать равномерно распределенной по ободу. Считать, что центр масс человека с колесом находится на оси платформы.

Задача 120. Платформа в виде диска диаметром $D = 3$ м и массой $m_1 = 180$ кг может вращаться вокруг вертикальной оси. С какой угловой скоростью ω_1 будет вращаться эта платформа, если по ее краю пойдет человек массой $m_2 = 70$ кг со скоростью $\upsilon = 1,8$ м/с относительно платформы?

Задача 121. Шарик массой $m = 60$ г, привязанный к концу нити длиной $l = 1,2$ м, вращается с частотой $n_1 = 2$ с$^{-1}$, опираясь на горизонтальную плоскость. Нить укорачивается, приближая шарик к оси вращения до расстояния $l_2 = 0,6$ м. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться шарик? Какую работу A совершает внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

4. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Кинематическое уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где x – смещение; A – амплитуда колебаний; ω_0 – собственная угловая (циклическая) частота; φ_0 – начальная фаза.

Собственная циклическая частота математического маятника $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ (здесь l – длина нити), пружинного маятника $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (здесь k – коэффициент жесткости; m – масса материальной точки), физического маятника $\omega_0 = \sqrt{mgl/I}$ (здесь I – момент инерции; l – расстояние от оси вращения до центра масс; m – масса твердого тела).

Кинематическое уравнение затухающих колебаний материальной точки имеет вид

$$x = A_0 e^{(-\beta t)}\cos(\omega t + \varphi_0) = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где A_0 – амплитуда колебаний; β – коэффициент затухания; ω – частота затухающих колебаний, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln A(t)/[A(t+T)]$$

связан с коэффициентом затухания соотношением $\lambda = \beta T$.

Добротность для случая слабого затухания ($\beta^2 << \omega_0^2$)

$$Q = 2\pi\frac{E}{-\Delta E},$$

где E – полная энергия колебаний; $-\Delta E$ – убыль энергии за период.

С другими характеристиками затухания добротность связана выражениями

$$Q = \omega/2\beta; \quad Q \cong \pi/\lambda.$$

В случае вынужденных колебаний материальной точки под действием силы $F = F_0\cos\omega t$ уравнение колебаний имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где ω – частота вынуждающей силы; A и φ_0 – амплитуда и начальная фаза соответственно,

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}; \quad tg\varphi_0 = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

$f_0 = F_0/m$; m – масса материальной точки.

Резонанс наблюдается при частоте вынуждающей силы $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Если незатухающие колебания распространяются со скоростью v вдоль направления x (плоская бегущая волна), то смещение любой точки среды с координатой x в момент времени t

$$y = A\cos(\omega t - kx),$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны, $\lambda = vT$.

Две точки с координатами x_1 и x_2 имеют разность фаз

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda}.$$

Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси Ox, имеет вид

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx),$$

где $\xi(x, t)$ – смещение точек среды с координатой x в момент времени t; ω – угловая (циклическая) частота; k – волновое число, $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$; λ – длина волны; v – скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость).

Длина волны связана с частотой колебаний ν и периодом колебаний T соотношением $\lambda = v/\nu = vT$.

Разность фаз колебаний двух точек среды, расстояние между которыми (разность хода) равно Δx,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x.$$

Уравнение стоячей волны имеет вид

$$\xi(x,t) = A\cos kx \cos \omega t .$$

ПРИМЕР 21. Материальная точка массой $m = 0{,}2$ кг совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 2$ Гц. Написать уравнение колебаний материальной точки, если в начальный момент времени смещение $x_0 = 0{,}15$ см, а скорость $\upsilon_0 = 0{,}7$ м/с. Определить максимальную силу, действующую на точку, и полную энергию точки.

Решение. Уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Для определения амплитуды и начальной фазы колебаний воспользуемся начальными условиями x_0 и υ_0. Смещение материальной точки в начальный момент времени

$$x(t=0) = x_0 = A\cos\varphi_0. \qquad (22)$$

Выражение для скорости материальной точки получим, продифференцировав по времени функцию $x(t)$:

$$\upsilon = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (23)$$

В начальный момент времени скорость

$$\upsilon(t=0) = \upsilon_0 = -A\omega\sin\varphi_0 . \qquad (24)$$

Определим начальную фазу, решив совместно уравнения (22) и (24):

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\upsilon_0}{\omega x_0}\right); \qquad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{0{,}7}{2\pi\cdot 2\cdot 0{,}15}\right).$$

Заключенному в скобки значению тангенса соответствуют два значения угла, отстоящие друг от друга на 180°: $\varphi_{01} = -20{,}4°$ и $\varphi_{02} = 159{,}6°$.

Учитывая, что начальное значение скорости, по условию, положительно, величина $\sin\varphi_0$ должна быть отрицательной. Следовательно, начальным условиям задачи отвечает $\varphi_{01} = -20{,}4° = -0{,}356$ рад.

Получим, пользуясь (22), выражение для амплитуды колебаний: $A = x_0/\cos\varphi_0$, отсюда

$$A = \frac{0{,}15}{\cos(-20{,}4°)} = 0{,}16 \text{ см}.$$

Итак, уравнение колебаний материальной точки будет иметь вид

$$x = 0{,}16\cos(4\pi t - 0{,}356),$$

где фаза выражена в радианах.

Сила, действующая на материальную точку, может быть определена по второму закону Ньютона: $F = ma$. Выражение для ускорения получим, взяв производную по времени от скорости:

$$a = \dot{\upsilon}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -4\pi^2\nu^2 A\cos(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

Тогда

$$F = -4\pi^2\nu^2 mA\cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$$

и

$$F_{max} = 4\pi^2\nu^2 mA;$$

$$F_{max} = 50{,}5 \text{ мН}.$$

Полная энергия колеблющейся точки представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий в любой момент времени. Проще всего вычислить полную энергию в тот момент, когда потенциальная энергия равна нулю, а кинетическая достигает своего максимального значения. Итак,

$$E = E_{k\,max} = m\upsilon^2_{max}/2,$$

где $\upsilon_{max} = A\omega = 2\pi A\nu$ согласно (23).

Таким образом,

$$E = 4\pi^2 m\nu^2 A^2/2 = 2\pi^2 m\nu^2 A^2$$

или

$$E = F_{max}A/2; \qquad E = 40{,}4 \text{ мкДж}.$$

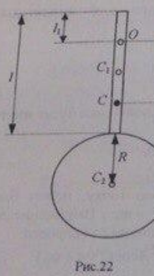

Рис.22

ПРИМЕР 22. Маятник представляет собой стержень длиной $l = 70$ см и массой $m_1 = 600$ г с прикрепленным к одному из его концов шаром диаметром $D = 8$ см и массой $m_2 = 1{,}2$ кг. Маятник может совершать колебания относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O, лежащую на расстоянии $l_1 = 5$ см от верхнего конца стержня (рис.22). Определить период колебаний маятника.

Решение. Период колебания физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{I/(mgl_C)},$$

где I – момент инерции маятника относительно оси колебаний; m – его масса; l_C – расстояние от центра масс маятника до оси колебаний.

Момент инерции маятника относительно оси колебаний $I = I_1 + I_2$, где I_1 и I_2 – соответственно моменты инерции стержня и шара относительно той же оси.

Определим их, пользуясь теоремой Штейнера: $I = I_C + ma^2$, где I – момент инерции относительно произвольной оси; I_C – момент инерции относительно оси, проходящей параллельно через центр масс тела на расстоянии a от произвольной оси.

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс C_1 перпендикулярно стержню, $I_{C_1} = m_1 l^2/12$. Тогда момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку O,

$$I_1 = \frac{m_1 l^2}{12} + m_1\left(\frac{l}{2} - l_1\right)^2.$$

Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр масс C_2, $I_{C_2} = 2m_2R^2/5$, где $R = D/2$ – радиус шара. Момент инерции шара относительно оси, проходящей через точку O,

$$I_2 = \frac{2}{5}m_2R^2 + m_2(l - l_1 + R)^2.$$

Таким образом, $I_1 = 0{,}0785$ кг·м^2; $I_2 = 0{,}5721$ кг·м^2. Соответственно момент инерции маятника относительно оси колебаний $I = 0{,}6506$ кг·м^2.

Полная масса маятника $m = m_1 + m_2$; $m = 1{,}8$ кг. Определим положение центра масс C маятника относительно точки O:

$$l_C = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m_1\left(\frac{l}{2} - l_1\right) + m_2(l - l_1 + R)}{m_1 + m_2}; \quad l_C = 0{,}56 \text{ м}.$$

Итак, период колебаний маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}6506}{1{,}8\cdot 9{,}8\cdot 0{,}56}} = 1{,}61 \text{ с}.$$

ПРИМЕР 23. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, задаваемых уравнениями: $x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ и $y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$, где $\varphi_1 = 3/2\pi$; $\varphi_2 = \pi$. Вывести уравнение траектории точки. Построить траекторию и указать на графике направление движения точки.

Решение. Исключим время из заданных уравнений, преобразовав их к виду

$$\frac{x}{A_1} = \cos\left(\omega t + \pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\omega t;$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \pi) = -\cos\omega t;$$

возведем их в квадрат и сложим, учитывая, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Тогда

$$x^2/A_1^2 + y^2/A_2^2 = 1.$$

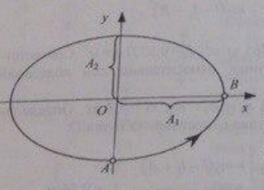

Рис.23

Полученное уравнение траектории представляет собой уравнение эллипса, отнесенного к осям Ox и Oy (рис.23). Для того, чтобы определить направление движения материальной точки по траектории, перепишем преобразованные уравнения в виде

$$x = A_1 \sin \frac{2\pi}{T} t;$$

$$y = -A_2 \cos \frac{2\pi}{T} t.$$

В момент времени $t = 0$ координаты материальной точки $x_A = 0$, $y_A = -A_2$ (точка A на рис.23). В последующий момент времени (например, $t = T/4$) материальная точка будет иметь координаты $x_B = A_1$, $y_B = 0$ (точка B на рис.23). Таким образом, точка будет двигаться по эллипсу против часовой стрелки.

ПРИМЕР 24. Определить логарифмический декремент колебаний маятника длиной $l = 50$ см, если он за 8 мин качаний теряет 99 % своей энергии.

Решение. Обозначим E_0 энергию колебаний маятника в начальный момент времени и E_t энергию его колебаний через время t. Тогда в соответствии с условием $E_t / E_0 = 1/100$. Так как энергия колебаний прямо пропорциональна квадрату амплитуды, то $A_t / A_0 = \sqrt{E_t / E_0} = 0{,}1$.

Амплитуда колебаний через время t

$$A_t = A_0 \exp(-\lambda t / T),$$

где A_0 – амплитуда в начальный момент времени; T – период колебаний маятника; λ – логарифмический декремент.

Следовательно, $A_t / A_0 = \exp(-\lambda t / T) = 0{,}1$, а искомый декремент затухания

$$\lambda = \frac{T}{t} \ln 10.$$

Ввиду слабости затухания можно приближенно выразить период колебаний, пользуясь обычной формулой для периода колебаний математического маятника: $T \cong 2\pi\sqrt{l/g}$. Тогда логарифмический декремент колебаний

$$\lambda \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\ln 10}{t};$$

$$\lambda \cong 2\pi \sqrt{0{,}5/9{,}8} \cdot \ln 10/(8 \cdot 60) = 0{,}0068.$$

ПРИМЕР 25. Поперечная волна распространяется в упругой среде со скоростью $v = 15$ м/с. Период колебаний точек среды равен 1,2 с, амплитуда 2 см. Определить длину волны λ; фазу колебаний, смещение, скорость и ускорение точки, отстоящей на расстоянии 45 м от источника волн в момент времени 4 с; разность фаз колебаний двух точек, лежащих на луче, идущем из источника волны, на расстояниях 20 и 30 м от источника.

Решение. Длина волны связана с периодом колебаний T и фазовой скоростью v и может быть найдена из соотношения $\lambda = vT$; подставив численные значения, получим $\lambda = 18$ м.

Запишем уравнение волны в виде

$$\xi = A\cos(\omega t - kx) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

где x – расстояние от источника волны до колеблющейся точки среды.

Фаза колебаний точки с координатой x в момент времени t определяется выражением, стоящим под знаком косинуса:

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right); \quad \varphi = 5{,}24 \text{ рад} = 300°.$$

Вычислим смещение точки от положения равновесия: $\xi = 0{,}02 \cdot \cos 5{,}24 = 0{,}01$ м.

Скорость точки определим, взяв первую производную от смещения по времени:

$$\dot{\xi} = -A\omega \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = -\frac{2\pi A}{T}\sin\varphi; \quad \dot{\xi} = 9 \text{ см/с}.$$

Ускорение точки находим как первую производную от скорости по времени, т.е. как вторую производную от смещения:

$$\ddot{\xi} = -A\omega^2 \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = -\frac{4\pi^2}{T^2} A\cos\varphi; \quad \ddot{\xi} = 27{,}4 \text{ см/с}^2.$$

Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек волны связана с расстоянием Δx между этими точками соотношением

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1); \quad \Delta\varphi = 3{,}49 \text{ рад} = 200°.$$

ПРИМЕР 26. На расстоянии $l = 4$ м от источника плоской волны частотой $\nu = 440$ Гц перпендикулярно направлению распространения волны расположена стена. Определить расстояния от источника волны до точек, в которых будут находиться первые три узла и три пучности стоячей волны, возникшей в результате сложения бегущей и отраженной от стены волн. Скорость волны 440 м/с.

Решение. Направим координатную ось Ox перпендикулярно фронту бегущей волны и совместим начало координат O с точкой, находящейся на источнике MN плоской волны (рис.24). Тогда уравнение распространяющейся слева направо бегущей волны можно записать в виде

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx).$$

Волна возвратится в точку B с координатой x после отражения от стены, пройдя дважды расстояние $l - x$. Фаза волны при отражении от стены – среды более плотной – изменится на π. Следовательно, уравнение отраженной волны, распространяющейся справа налево, может быть записано в виде

$$\xi_2 = A\cos(\omega t - k[x + 2(l - x)] + \pi)$$

или

$$\xi_2 = -A\cos[\omega t - k(2l - x)].$$

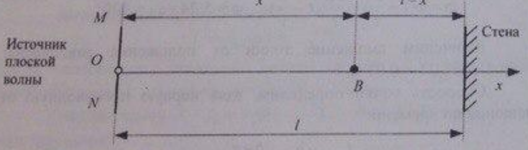

Рис.24

Уравнение стоячей волны

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos(\omega t - kx) - A\cos[\omega t - k(2l - x)].$$

Воспользовавшись формулой для разности косинусов, преобразуем его к виду $\xi = -2A\sin k(l - x)\sin(\omega t - kl)$. Не зависящее от времени выражение $2A\sin k(l - x)$, взятое по модулю, может рассматриваться как амплитуда стоячей волны

$$A_{ст} = |2A\sin k(l - x)|,$$

что дает возможность найти координаты узлов и пучностей.

Узлы образуются в тех точках, где амплитуда стоячей волны равна нулю: $|2A\sin k(l - x)| = 0$. Это равенство выполняется для точек, координаты x_n которых удовлетворяют условию $k(l - x_n) = n\pi (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$ и $\lambda = v/\nu$, получим

$$2\pi\nu(l - x_n) = n\pi v; \quad x_n = l - nv/2\nu.$$

Подставив численные значения, найдем координаты первых трех узлов: $x_0 = 4$ м, $x_1 = 3{,}61$ м, $x_2 = 3{,}23$ м.

Пучности образуются в тех точках, где амплитуда стоячей волны максимальна: $|2A\sin k(l - x')| = 2A$. Это равенство выполняется для точек, координаты x'_n которых удовлетворяют условию $k(l - x'_n) = (2n + 1)\pi/2 (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Преобразуем выражение для пучностей к виду $4\nu x'_n = 4\nu l - (2n + 1)v$, найдем координаты пучностей: $x'_n = l - (2n + 1)v/(4\nu)$ и численные значения координат первых трех пучностей: $x'_0 = 3{,}81$ м, $x'_1 = 3{,}42$ м, $x'_2 = 3{,}04$ м.

Задача 122. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки $x_{max} = 10$ см, наибольшая скорость $\dot{x} = 20$ см/с. Найти частоту колебаний ω и максимальное ускорение точки $\ddot{x}_{max}$.

Задача 123. Начальная фаза колебаний точки равна $\pi/3$. Период колебаний $T = 0{,}06$ с. Определить ближайшие моменты времени, в которые скорость и ускорение меньше амплитудных значений в два раза.

Задача 124. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой 5 см, если в 1 мин совершается 150 колебаний и начальная фаза колебаний равна 45°.

Задача 125. Какая доля периода требуется, чтобы тело, совершающее гармоническое колебание, прошло весь путь от среднего положения до крайнего, первую его половину, вторую его половину?

Задача 126. Материальная точка совершает гармоническое колебание. В некоторый момент времени смещение точки равнялось 5 см. При увеличении фазы вдвое смещение точки стало равным 8 см. Найти амплитуду колебаний A.

Задача 127. Найти амплитуду, период колебания, частоту и начальную фазу колебания, заданного уравнением $x = 5\sin(39{,}2t + 5{,}2)/5$, где x – в сантиметрах.

Задача 128. Математический маятник, имеющий период колебаний 1,5 с, совершает колебания с амплитудой 1,2 см. Определить скорость υ и ускорение a маятника в крайнем положении и в момент прохождения его через положение равновесия.

Задача 129. Определить максимальное ускорение a_{max} материальной точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A = 15$ см, если наибольшая скорость точки $\upsilon_{max} = 30$ см/с. Написать также уравнение колебаний.

Задача 130. Складываются два колебания одинакового направления и одинакового периода: $x_1 = A_1\sin\omega_1 t$ и $x_2 = A_2\sin\omega_2(t + \tau)$, где $A_1 = A_2 = 3$ см; $\omega_1 = \omega_2 = \pi$ $с^{-1}$; $\tau = 0{,}5$ с. Определить амплитуду A и начальную фазу φ_0 результирующего колебания. Написать его уравнение. Построить векторную диаграмму для момента времени $t = 0$.

Задача 131. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, происходящих согласно уравнениям $x = A_1\cos\omega_1 t$ и $y = A_2\sin\omega_2 t$, где $A_1 = 2$ см; $\omega_1 = 2$ $с^{-1}$; $A_2 = 4$ см; $\omega_2 = 2$ $с^{-1}$. Определить траекторию точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба, указать направления движения точки.

Задача 132. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = A_1\cos\omega_1 t$ и $y = A_2\sin\omega_2 t$, где $A_1 = 4$ см; $A_2 = 6$ см; $\omega_1 = 2\omega_2$. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже; показать направление движения точки.

Задача 133. Материальная точка участвует в двух гармонических колебаниях, происходящих по одной прямой и выражаемых уравнениями $x_1 = \sin t$ и $x_2 = 2\cos t$. Найти амплитуду результирующего движения, его частоту и начальную фазу. Написать уравнение движения.

Задача 134. В результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и одинаковыми периодами получается результирующее колебание того же периода и той же амплитуды. Найти разность фаз складываемых колебаний.

Задача 135. Определить период колебаний T маятника длиной $l = 0{,}8$ м, помещенного в лифте, опускающемся вниз с ускорением 1,2 м/с^2.

Задача 136. Определить возвращающую силу F в момент времени $t = 0{,}2$ с и полную энергию E точки массой $m = 20$ г, совершающей гармонические колебания согласно уравнению $x = A\sin\omega t$, где $A = 15$ см; $\omega = 4\pi$ $с^{-1}$.

Задача 137. Точка совершает гармонические колебания, уравнение которых $x = A\sin\omega t$, где $A = 5$ см; $\omega = 2$ $с^{-1}$. В момент, когда на точку действовала возвращающая сила $F = +5$ мН, точка обладала потенциальной энергией $E_p = 0{,}1$ мДж. Найти этот момент времени t и соответствующую фазу колебаний φ.

Задача 138. Определить период T гармонических колебаний диска радиусом $R = 40$ см около горизонтальной оси, проходящей через образующую диска.

Задача 139. Найти максимальную кинетическую энергию T_{max} материальной точки массой $m = 2$ г, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A = 4$ см и частотой $\nu = 5$ Гц.

Задача 140. Шар радиусом $R = 5$ см подвешен на нити длиной $l = 10$ см. Определить погрешность в определении периода ко-

лебаний, которую мы делаем, приняв шар за математический маятник длиной $l_1 = l + R = 15$ см.

Задача 141. Как изменится период вертикальных колебаний груза, висящего на двух одинаковых пружинах, если последовательное соединение пружин заменить параллельным?

Задача 142. Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, равна $3\cdot10^{-5}$ Дж, максимальная сила, действующая на тело, $1{,}5\cdot10^{-3}$ Н. Написать уравнение движения этого тела, если период колебаний 2 с, а начальная фаза 60°.

Задача 143. К пружине подвесили грузик, в результате чего пружина растянулась на 9 см. Каков будет период колебаний T грузика, если его немного оттянуть вниз и затем отпустить?

Задача 144. Предположим, что по диаметру Земли просверлен канал. Принимая Землю за однородный шар плотностью 5,5 г/см^3, показать, что при отсутствии трения тело, падающее в этом канале, совершает гармоническое колебательное движение. Найти время движения тела от поверхности Земли до ее центра.

Задача 145. Математический маятник длиной 1,2 м совершает колебания в среде с малым сопротивлением. Считая, что сопротивление среды не влияет на период колебаний маятника, найти коэффициент затухания β и логарифмический декремент λ, если за 8 мин амплитуда колебаний маятника уменьшилась в 3 раза.

Задача 146. Гиря массой 500 г подвешена к пружине жесткостью 0,2 Н/см и совершает упругие затухающие колебания. Коэффициент затухания 0,04 с. Сколько колебаний должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза.

Задача 147. Математический маятник длиной $l = 24{,}7$ см совершает затухающие колебания с декрементом колебаний, равным 0,01. Через какое время энергия колебаний маятника уменьшится в 9,4 раза?

Задача 148. Найти число полных колебаний системы, в течение которых энергия системы уменьшилась в 2 раза. Декремент колебаний равен 0,01.

Задача 149. Определить период колебаний T ртути, находящейся в U-образной трубке. Площадь сечения канала трубки $S = 0{,}3$ см^2. Масса ртути $m = 121$ г.

Задача 150. Задано уравнение плоской волны $\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx)$, где $A = 0{,}5$ см, $\omega = 628$ $с^{-1}$, $k = 2$ $м^{-1}$. Определить частоту колебаний ν и длину волны λ; фазовую скорость v; максимальные скорость $\dot{\xi}_{max}$ и ускорение $\ddot{\xi}_{max}$ колебаний частиц среды.

Задача 151. Плоская звуковая волна имеет период $T = 3$ мс, амплитуду $A = 0{,}2$ мм и длину волны $\lambda = 1{,}2$ м. Для точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние $x = 2$ м, найти смещение ξ (x, t) в момент $t = 7$ мс; скорость $\dot{\xi}$ и ускорение $\ddot{\xi}$ для того же момента времени. Начальную фазу колебаний принять равной нулю.

Задача 152. От источника колебаний распространяется волна вдоль прямой линии. Амплитуда колебаний $A = 10$ см. Как велико смещение точки, удаленной от источника на расстояние $x = 3/4\lambda$, в момент, когда от начала колебаний прошло время $t = 0{,}9T$?

Задача 153. Две точки находятся на расстоянии $\Delta x = 50$ см друг от друга на прямой, вдоль которой распространяется волна со скоростью $v = 50$ м/с. Период колебаний $T = 0{,}05$ с. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний в этих точках.

Задача 154. Волна распространяется в упругой среде со скоростью $v = 100$ м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, $\Delta x = 1$ м. Определить частоту колебаний ν.

Задача 155. Уравнение плоской звуковой волны имеет вид $\xi = 60\cos(1800t - 5{,}3x)$ мкм, где t – в секундах, x – в метрах. Найти отношение амплитуды смещения частиц среды к длине волны, амплитуду колебаний скорости частиц среды и ее отношение к скорости распространения волны.

Задача 156. Найти скорость v распространения упругих продольных колебаний в алюминии, меди, вольфраме.

Задача 157. Определить максимальное и минимальное значения длины λ звуковых волн, воспринимаемых человеческим ухом, соответствующие граничным частотам $\nu_1 = 16$ Гц и $\nu_2 = 20$ кГц. Скорость звука принять равной 340 м/с.

Задача 158. Найти скорость звука v в воздухе при температурах $T_1 = 290$ K и $T_2 = 350$ K.

Задача 159. Скорость звука v в некотором газе при нормальных условиях равна 308 м/с. Плотность газа $\rho = 1{,}78$ кг/м^3. Определить отношение теплоемкостей C_P / C_V для данного газа.

Задача 160. Найти отношение скоростей v_1 / v_2 звука в водороде и углекислом газе при одинаковой температуре газов.

Задача 161. Определить длину λ бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между первой и седьмой пучностями $l = 15$ см, между первым и четвертым узлом $l = 15$ см. Скорость звука принять равной 332 м/с.

Задача 162. Мимо неподвижного электровоза, гудок которого дает сигнал частотой $v_0 = 300$ Гц, проезжает поезд со скоростью $u = 40$ м/с. Какова кажущаяся частота v тона для пассажира, когда поезд приближается к электровозу? Когда удаляется от него? Скорость звука принять равной 332 м/с.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Савельев И.В. Курс физики. М.: Наука, 1989. Т. 1-3

Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М.: Высшая школа, 1989.

Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М.: Наука, 1990.

Варианты заданий для студентов заочной формы обучения

Вариант 1.	Задачи	1, 16, 29, 46, 92, 93, 117, 122, 130.
Вариант 2.	Задачи	2, 17, 30, 47, 91, 94, 118, 123, 145.
Вариант 3.	Задачи	3, 18, 31, 48, 90, 95, 119, 124, 144.
Вариант 4.	Задачи	4, 19, 32, 49, 89, 96, 120, 125, 131.
Вариант 5.	Задачи	5, 20, 33, 50, 88, 105, 121, 126, 132.
Вариант 6.	Задачи	6, 21, 34, 51, 87, 106, 116, 127, 133.
Вариант 7.	Задачи	7, 22, 35, 52, 86, 107, 117, 128, 134.
Вариант 8.	Задачи	8, 23, 36, 53, 85, 108, 118, 129, 147.
Вариант 9.	Задачи	9, 24, 37, 54, 84, 109, 119, 135, 149.
Вариант 10.	Задачи	10, 25, 38, 55, 83, 97, 115, 136, 150.
Вариант 11.	Задачи	11, 26, 39, 56, 82, 98, 121, 137, 151.
Вариант 12.	Задачи	12, 27, 40, 57, 81, 99, 119, 138, 152.
Вариант 13.	Задачи	13, 28, 41, 58, 79, 100, 110, 139, 153.
Вариант 14.	Задачи	14, 22, 42, 59, 78, 101, 111, 140, 154.
Вариант 15.	Задачи	15, 24, 43, 66, 77, 102, 112, 141, 156.
Вариант 16.	Задачи	1, 20, 44, 69, 76, 103, 113, 142, 158.
Вариант 17.	Задачи	2, 26, 45, 71, 75, 104, 114, 143, 161.

18
19
20
21
23

87