1.2 Пример решения контрольной работы 1

Условие задания

Считая известными величины силы $\vec{F}$, интенсивности распределенной нагрузки q и момента пары сил M, найти реакции связей в заданном положении равновесия твердого тела, расположенного в плоскости рисунка.

Дано: $F = 4\ кН;\ q = 1{,}5\ кН/м;\ M = 5\ кН \cdot м.$

Модель 1 (в соответствии с рисунком 14).

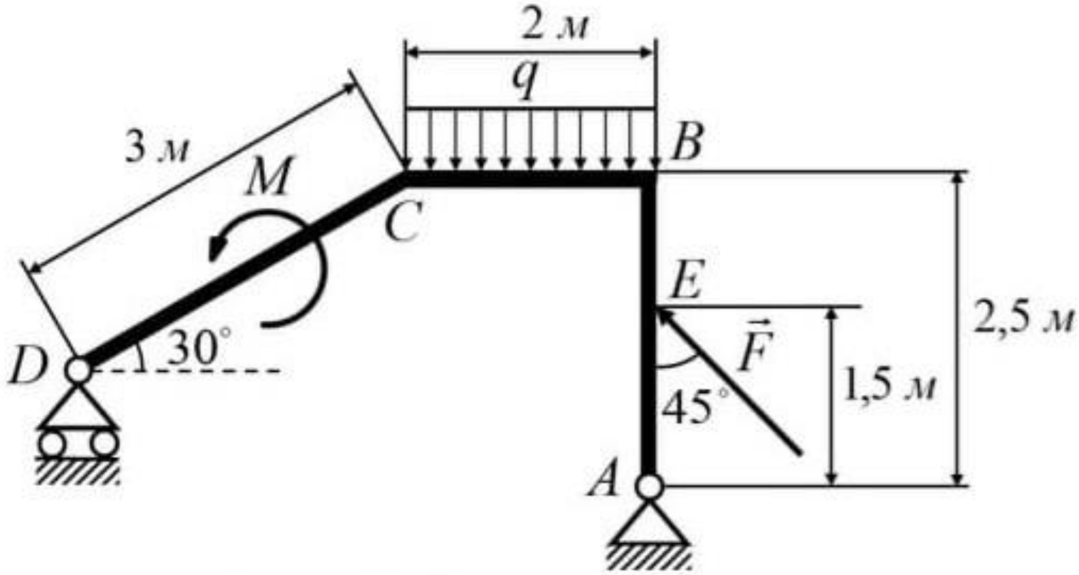

Рисунок 14 - Условие модели 1

Найти реакции шарниров в точках A и D.

Решение

Модель 1

Составим расчетную схему (в соответствии с рисунком 17).

Равномерно распределенную нагрузку интенсивности q заменим эквивалентной сосредоточенной силой $\vec{Q}$.

Величина силы $Q = q \cdot BC = 1{,}5 \cdot 2 = 3\ кН$.

Вектор $\vec{Q}$ приложен к середине отрезка распределения нагрузки.

Выбираем систему координат xAy.

В соответствии с принципом освобождаемости от связей, действие мысленно отброшенных связей заменим их реакциями.

Реакция подвижного шарнира в точке D перпендикулярна опорной поверхности.

Так как направление реакции неподвижного шарнира в точке A заранее неизвестно, будем определять ее как геометрическую сумму двух составляющих по осям координат: $\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay}$.

Векторы $\vec{R}_{Ax}$ и $\vec{R}_{Ay}$ условно направим по положительным направлениям осей Ax и Ay.

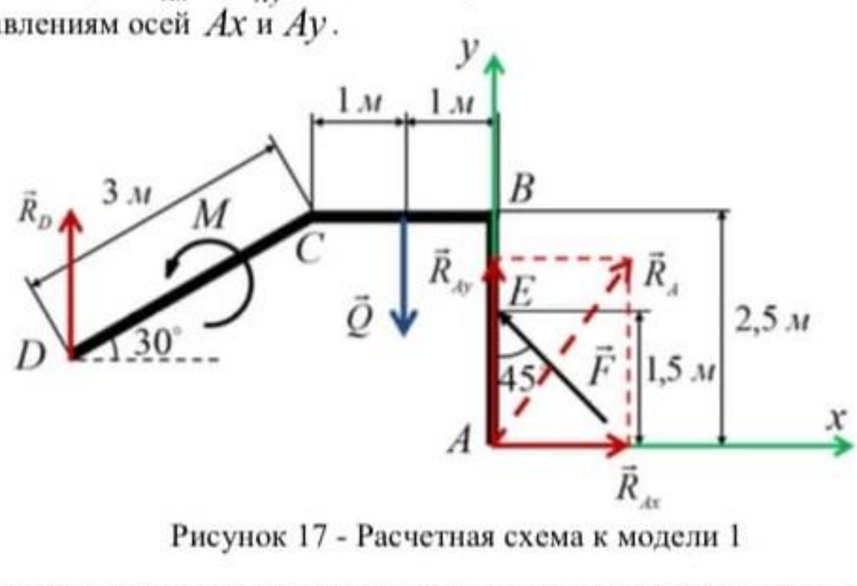

Рисунок 17 - Расчетная схема к модели 1

Тело находится в равновесии под действием плоской системы сил: $\vec{F}; \vec{Q}; M; \vec{R}_D; \vec{R}_{Ax}; \vec{R}_{Ay}$.

Составим систему уравнений равновесия. Алгебраические суммы проекций сил на оси координат равны нулю:

$$\sum F_{ix} = 0: \ R_{Ax} - F \cdot \sin 45^\circ = 0$$
$$\sum F_{iy} = 0: \ R_D - Q + R_{Ay} + F \cdot \cos 45^\circ = 0$$

Алгебраическая сумма моментов сил относительно произвольного центра на плоскости равна нулю. Так как центр может быть выбран произвольно, целесообразно выбрать точку пересечения линий действия двух неизвестных сил, например, точку A. В этом случае уравнение моментов будет содержать только одну неизвестную величину.

$$\sum M_{iA} = 0: - R_D(3\cos 30^\circ + 2) + M + Q \cdot 1 + F \sin 45^\circ \cdot 1{,}5 = 0 \ (3)$$

Решение системы уравнений.

Из уравнения суммы проекций сил на ось x:

$$R_{Ax} = F \cdot \sin 45^\circ = 4 \cdot 0{,}707 = 2{,}83 \ кН$$

Из уравнения суммы моментов сил относительно точки A:

$$R_D = \frac{M + Q \cdot 1 + F \sin 45^\circ \cdot 1{,}5}{3\cos 30^\circ + 2} = \frac{5 + 3 + 4 \cdot 1{,}5}{3 \cdot 0{,}866 + 2} = 2{,}66 \ кН$$

Из уравнения суммы проекций сил на ось y:

$$R_{Ay} = -R_D + Q - F \cdot \cos 45^\circ = -2{,}66 + 3 - 4 \cdot 0{,}707 = -2{,}49 \ кН$$

Так как $R_{Ay} < 0$, то истинное направление составляющей $\vec{R}_{Ay}$ противоположно указанному предположительно.

Для проверки правильности решения составим уравнение моментов относительно какого-либо нового центра (при верном решении задачи любое лишнее уравнение должно обращаться в тождество).

Центр выбирается таким образом, чтобы он не находился на линиях действия ни одной из искомых реакций связей. В этом случае все искомые силы войдут в уравнение проверки.

Выберем, например, точку C.

Ввиду геометрических особенностей данной модели линия действия силы $\vec{F}$ пройдет через середину отрезка BC, что дает возможность легко найти ее момент.

$$\sum M_{iC} = 0:$$
$$-R_D \cdot 3\cos 30^\circ + M - Q \cdot 1 + F\sin 45^\circ \cdot 1 + R_{Ax} \cdot 2{,}5 + R_{Ay} \cdot 2 = 0$$
$$-2{,}66 \cdot 0{,}866^\circ + 5 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0{,}707 \cdot 1 + 2{,}83 \cdot 2{,}5 + (-2{,}49) \cdot 2 = 0$$
$$-6{,}91 + 5 - 3 + 2{,}83 + 7{,}08 + -4{,}98 = 0$$
$$-17{,}72 + 17{,}74 = 0{,}02 \approx 0$$

Задача решена верно.

Модуль полной реакции неподвижного шарнира в точке A:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{2{,}83^2 + \left(-2{,}49^2\right)} = 3{,}77\ кН$$

Ответ: $R_A = 3{,}77\ кН$, $R_D = 2{,}66\ кН$