

# СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

## ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

*Случайный процесс* (сл. пр.) характеризуется тем, что какая-либо физическая величина (например, ток, напряжение, напряженность поля и др.) изменяется во времени, причем это изменение управляется вероятностными законами. Конкретный вид сл. пр. (т. е. его фактическая запись в виде фотографии или осциллограммы) в определенном опыте называется *реализацией случайного процесса*. В качестве синонимов употребляются также термины *траектория случайного процесса* и *выборочная функция*.

Для формального обозначения зависимости сл. пр. (наблюдаемой величины) от аргументов применяются случайные функции. Будем обозначать случайные функции буквами греческого алфавита с указанием в скобках аргумента. *Случайной функцией*  $\xi(t)$  называется такая функция, которая при любом фиксированном значении аргумента является сл. в. Это означает, что при неизменных условиях опыта значения  $\xi(t)$ ,  $t = \text{const}$ , в реализациях, полученных для нескольких полностью идентичных систем, будут сл. в. В этом состоит существенное отличие случайной функции от детерминированной, значение которой однозначно определяется значениями аргументов. Очевидно, что если физические причины случайного характера, порождающие случайный процесс, отсутствуют полностью, что в действительности никогда не имеет места, то случайная функция переходит в детерминированную. При записи случайной функции обычно указывается область ее задания, т. е. область возможного изменения аргумента.

Случайная функция может зависеть не от одного, а от нескольких аргументов (например, скорость ветра зависит от времени и пространственных координат). Случайные процессы такого характера принято называть *случайными полями*. В зависимости от того, какая случайная функция рассматривается, различают скалярные и векторные случайные поля.

Можно ввести следующую классификацию: 1) *скалярный случайный процесс*  $\xi(t)$  — случайный процесс, область значений которого есть множество в пространстве действительных чисел; 2) *векторный случайный процесс*  $\xi(t)$  — случайный процесс, область значений которого есть множество в соответствующем координатном пространстве; 3) *скалярное случайное поле*  $\xi(\mathbf{r}, t)$  — случайный процесс, область значений которого есть множество из действительных чисел в соответствующем координатном пространстве; 4) *векторное случайное поле*  $\xi(\mathbf{r}, t)$  — случайный процесс, представимый в виде компонент, являющихся скалярными полями.

Случайные процессы и соответствующие им случайные функции можно классифицировать по разным признакам: 1) по характеру реализаций  $x(t)$ , т. е. в зависимости от возможных значений, принимаемых случайной функцией  $\xi(t)$  и аргументом  $t$ ; 2) по виду отдельных вероятностных характеристик, используемых для описания сл. пр. Приведем классификацию по первому признаку (классификация по второму признаку будет дана ниже).

В зависимости от того, непрерывное или дискретное множество значений принимают  $\xi(t)$  и ее параметр, можно различать следующие основные виды сл. пр.

1. *Дискретная случайная последовательность* (дискретный процесс с дискретным временем) — сл. пр., у которого область значений и область определения — дискретные множества. В данном случае время  $t$  пробегает дискретный ряд значений  $t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_M$ , а сл. в.  $x_i = \xi(t_i)$  может принимать лишь дискретное множество значений  $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_K$ . Множества значений  $\{t_i\}$  и  $\{x_k\}$  могут быть конечными или бесконечными; в последнем случае  $M \rightarrow \infty, K \rightarrow \infty$ . Процессы такого вида непосредственно встречаются на практике (случайное подбрасывание монеты, радиотелеграфия, радиолокация и др.), а также могут быть получены квантованием по уровню и по времени непрерывно изменяющихся процессов с непрерывным временем. Такое квантование часто применяется при машинной обработке различной информации.

2. *Случайная последовательность* (непрерывнозначный процесс с дискретным временем) — сл. пр., у которого область значений — непрерывное множество, а область определения — дискретное. Такой процесс отличается от процесса первого вида лишь тем, что теперь случайная величина  $\xi(t_i), i=1, 2, \dots, M$ , может принимать бесконечное число значений. В качестве примера можно указать временные выборки из непрерывного случайного процесса.

3. *Дискретный случайный процесс* (дискретный процесс с непрерывным временем)—сл. пр., у которого область значений—дискретное, а область определения—непрерывное множество. В этом случае  $\xi(t)$  может принимать дискретные значения  $x_k$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ , а время  $t$ —континуум значений:  $t \in (0, T)$ , где  $T$ —длина временного интервала, на котором задан процесс  $\xi(t)$ . Примерами могут служить показания счетчика числа случайно появляющихся частиц, результат квантования непрерывного случайного процесса только по уровню и др.

4. *Непрерывнозначный случайный процесс*—сл. пр., область значений и область определения которого—непрерывные множества. В данном случае  $\xi(t)$  принимает значения из некоторого непрерывного пространства и аргумент  $t$  изменяется также непрерывно, причем реализации процесса могут иметь разрывы первого рода. Если подобные скачки отсутствуют, то такой процесс называется *непрерывным*.

Процесс называется *комплексным*, если он принимает комплексные значения.

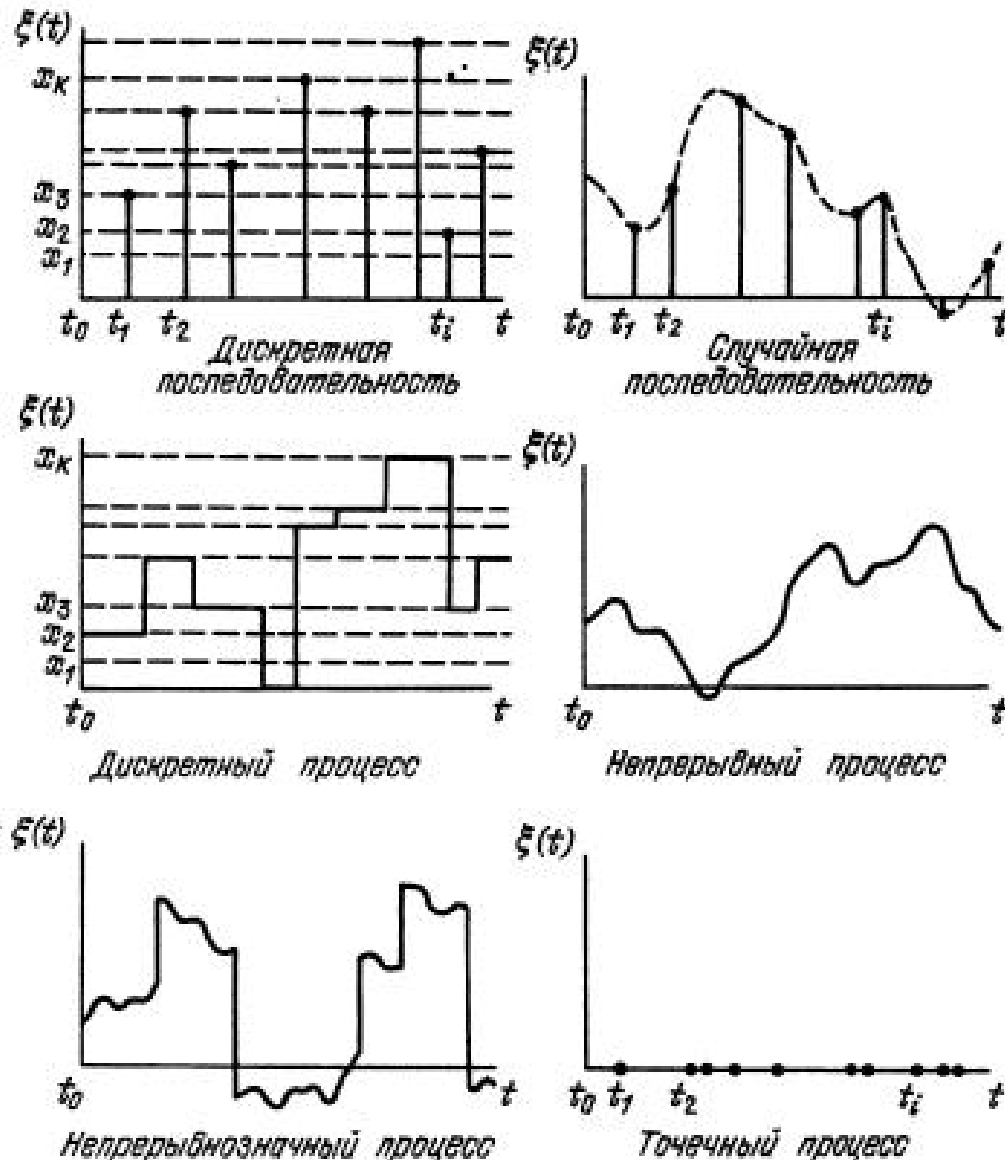


Рис. 2.1. Основные виды случайных процессов

5. *Случайный точечный процесс* (поток) представляет собой последовательность точек, расположенных случайным образом, например, на оси времени. Такие точки могут соответствовать различным событиям (например, моментам времени наступления отказов в какой-либо системе или аппаратуре, временам поступления требований или заявок на обслуживание и др.). Характер временных реализаций перечисленных процессов показан на рис. 2.1.

Помимо пяти указанных видов возможны разнообразные, более сложные, смешанные виды случайных процессов. Например, при рассмотрении радиосигналов с разными видами комбинированной модуляции часто приходится встречаться со сл. пр. вида  $\xi(t) = F(t, \lambda_1(t), \lambda_2(t))$ , где  $F$  — детерминированная функция первого аргумента  $t$  и параметров  $\lambda_1(t)$  и  $\lambda_2(t)$ , представляющих собой сл. пр. Если один из параметров, допустим  $\lambda_1(t)$ , является дискретным сл. пр., а другой  $\lambda_2(t)$  — непрерывнозначным сл. пр., то результирующий процесс  $\xi(t)$  можно назвать случайным процессом (сигналом) *смешанного вида*. В том частном случае, когда  $\xi(t) = F(t, \lambda_1, \lambda_2)$ , т. е. параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  не зависят от времени, а являются сл. в., процесс  $\xi(t)$  называется *квазидетерминированным*. В общем случае это процесс, реализации которого описываются функциями времени заданного вида  $F(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , содержащими один или несколько случайных параметров  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , не зависящих от времени.

Классификация случайных полей является более разнообразной в зависимости от разных комбинаций характера областей значений, принимаемых как компонентами самого поля  $\xi$ , так и компонентами вектора  $\mathbf{r}$  и времени  $t$ .

## ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Так как сл. пр.  $\xi(t)$  или скалярное случайное поле  $\xi(x, y)$  при фиксированных значениях аргументов представляют собой сл. в., то для их описания (задания) применяются те же вероятностные характеристики, что и для сл. в., а именно: плотности вероятности (законы распределения), функции распределения вероятностей, характеристические функции, моментные и корреляционные (кумулянтные) функции. Напомним их определения и основные свойства.

Для значений сл. пр.  $\xi(t)$  в любые возможные моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  из области определения процесса  $n$ -мерная функция распределения вероятностей определяется выражением<sup>1</sup>

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbf{P} \{ \xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \dots,$$

<sup>1</sup> Функция распределения вероятностей зависит от  $t_1, t_2, \dots, t_n$  как от параметров. В записи это отражено тем, что основной аргумент  $x_i$  отделен от параметра  $t_i$  точкой с запятой.

$$\xi(t_n) < x_n\}. \quad (2.2.1)$$

При этом на функции  $F_n(\cdot)$  налагаются следующие условия:

1) они неотрицательные и неубывающие функции аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , причем

$$F_n(-\infty, \dots, -\infty; t_1, \dots, t_n) = 0, \quad F_n(\infty, \dots, \infty; t_1, \dots, t_n) = 1; \quad (2.2.2)$$

2) удовлетворяют условию симметрии: для любой перестановки  $i_1, i_2, \dots, i_n$  чисел  $1, 2, \dots, n$  выполняется равенство

$$F_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}; t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n); \quad (2.2.3)$$

3) удовлетворяют условию согласованности: при  $m < n$  и любых  $t_{m+1}, t_{m+2}, \dots, t_n$  имеет место равенство

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty; t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n) = F_m(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m). \quad (2.2.4)$$

Производная от функции распределения вероятностей

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (2.2.5)$$

определяет  $n$ -мерную плотность вероятности. Ее также можно определить соотношением

$$p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n = \mathbf{P}\{x_1 < \xi(t_1) \leq x_1 + dx_1, \dots, x_n < \xi(t_n) \leq x_n + dx_n\}. \quad (2.2.6)$$

Функция распределения вероятностей находится интегрированием плотности вероятности:

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} p_n(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) du_1 \dots du_n. \quad (2.2.7)$$

В частности, одномерные п. в. и функция распределения связаны соотношениями

$$p_1(x; t) = \frac{d}{dx} F_1(x; t), \quad F_1(x; t) = \int_{-\infty}^x p_1(u; t) du. \quad (2.2.8)$$

Плотности вероятности случайного процесса должны удовлетворять следующим четырем условиям:

1) условию неотрицательности

$$p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \geq 0; \quad (2.2.9)$$

2) условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n = 1; \quad (2.2.10)$$

3) условию симметрии — функции  $p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$  должны быть симметричны относительно любых перестановок аргументов  $x_i$ , как в (3);

4) условию согласованности: при любом  $m < n$

$$p_m(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) dx_{m+1} \dots dx_n. \quad (2.2.11)$$

Последнее соотношение показывает, что из  $n$ -мерной п. в. всегда можно получить любую п. в. меньшей мерности путем интегрирования первой по «лишним» аргументам. Поэтому можно сказать, что сл. пр. в общем случае описывается  $n$ -мерной п. в. (функцией распределения), и тем детальнее, чем больше  $n$ . Два случайных процесса, у которых все конечномерные функции распределения совпадают, называются *эквивалентными*.

Описание случайных процессов с помощью п. в. является физически более наглядным, чем с помощью функций распределения. Однако математическое оперирование функциями распределения позволяет однообразно охватить разные виды сл. пр. (дискретных, непрерывных и др.).

Отметим, что изучение сл. пр. не сводится полностью к изучению совокупности сл. в., а имеет некоторые принципиальные особенности. Хотя интегрированием  $n$ -мерной п. в. сл. пр. по «лишним» аргументам всегда можно найти все другие п. в. меньшей кратности  $m < n$ , однако само наибольшее значение  $n$  для случайного процесса ничем не ограничено. По-видимому, исчерпывающим было бы описание случайного процесса одной п. в. максимального порядка, если бы она существовала. При непрерывном изменении параметра  $t$  такого конечного максимального порядка в общем случае не существует. Здесь можно указать два частных, но очень важных и наиболее изученных класса случайных процессов, для которых  $n$ -мерные плотности вероятности  $p_n$  при  $n \geq 3$  выражаются через двумерные плотности вероятности  $p_2$ : это гауссовские (§ 2.6) и марковские (§ 3.1) процессы.

Для совместного вероятностного описания двух или нескольких сл. пр. (например, на входе и выходе системы) вводят совместные функции распределения и плотности вероятности. Так, для двух процессов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  их определяют с помощью следующих соотношений:

$$F_{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m) = \\ = \mathbf{P} \{ \xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n, \eta(t'_1) < y_1, \dots, \eta(t'_m) < y_m \}, \quad (2.2.12)$$

$$p_{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m) dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_m = \mathbf{P} \{x_1 < \xi(t_1) \leq x_1 + dx_1, \dots, x_n < \xi(t_n) \leq x_n + dx_n, y_1 < \eta(t'_1) \leq y_1 + dy_1, \dots, y_m < \eta(t'_m) \leq y_m + dy_m\}, \quad (2.2.13)$$

где  $n, m$  — целые неотрицательные числа.

Два сл. пр.  $\xi(t)$  и  $\eta(t')$  называются *независимыми*, если совокупность значений первого процесса  $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$  не зависит от совокупности значений второго процесса  $\eta(t'_1), \dots, \eta(t'_m)$  при любых  $t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m$ . Необходимое и достаточное условие независимости процессов состоит в том, что совместная п. в. (13) распадается на произведение п. в. каждого из процессов:

$$p_{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n, t'_1, \dots, t'_m) = p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) p_m(y_1, \dots, y_m; t'_1, \dots, t'_m). \quad (2.2.14)$$

Определения функций распределения и плотностей вероятностей распространяются и на случайные поля. Пусть, например, имеется ансамбль реализаций случайного поля  $\xi(x, y)$ , полученный для момента времени  $t$ . Так как в фиксированной точке пространства с координатами  $(x_1, y_1)$  значение функции  $\xi$  для разных реализаций есть сл. в., то можно ввести одномерную функцию распределения случайного поля

$$F_1(\xi_1; x_1, y_1) = \mathbf{P} \{ \xi(x_1, y_1) < \xi_1 \}. \quad (2.2.15)$$

Если необходимо знать поведение и взаимосвязь значений поля в двух точках пространства  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , то вводится двумерная функция распределения

$$F_2(\xi_1, \xi_2; x_1, y_1, x_2, y_2) = \mathbf{P} \{ \xi(x_1, y_1) < \xi_1, \xi(x_2, y_2) < \xi_2 \}. \quad (2.2.16)$$

Аналогично определяются  $n$ -мерные функции распределения.

Если в формулах (15), (16) функции  $F_i$  имеют частные производные по  $\xi$ , то можно определить соответствующие плотности вероятности

$$p_1(\xi_1) = \partial F_1(\xi_1; x_1, y_1) / \partial \xi_1, \quad (2.2.17)$$

$$p_2(\xi_1, \xi_2) = \partial^2 F_2(\xi_1, \xi_2; x_1, y_1, x_2, y_2) / \partial \xi_1 \partial \xi_2. \quad (2.2.18)$$

Для случайных процессов и полей можно ввести условные плотности вероятности. Так, случайное значение процесса  $\xi(t_1)$  при известном значении его в другой момент времени  $\xi(t_2) = x_2$  описывается условной п. в.

$$p(x_1; t_1 | x_2; t_2) = p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) / p_1(x_2; t_2), \quad (2.2.19)$$

где

$$p_1(x_2; t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1. \quad (2.2.20)$$

Условная п. в.  $p(x_1; t_1 | x_2; t_2)$  содержит больше (по крайней мере не меньше) сведений о  $\xi(t_1)$ , чем безусловная п. в.  $p_1(x_1; t_1)$ . Насколько именно увеличилась информация о  $\xi(t_1)$  в результате того, что стало известным значение  $\xi(t_2) = x_2$ , зависит от конкретных условий. В некоторых случаях информации о  $\xi(t_1)$  вообще не прибавляется, каким бы ни оказалось значение  $x_2$ . Это значит, что

$$p(x_1; t_1 | x_2; t_2) = p(x_1; t_1), \quad (2.2.21)$$

при этом

$$p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p(x_1; t_1) p_1(x_2; t_2). \quad (2.2.22)$$

Эта формула выражает необходимое и достаточное условие независимости значений сл. пр.  $\xi(t)$  в два момента времени  $t_1$  и  $t_2$ . Для физически реальных процессов, наблюдаемых в системах с конечной памятью, равенства (21) и (22) выполняются в пределе при  $|t_2 - t_1| \rightarrow \infty$  почти всегда.

В другом противоположном крайнем случае, когда разность  $(t_2 - t_1) \rightarrow 0$ , физически очевидно, что для непрерывнозначных процессов  $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} p(x_1; t_1 | x_2; t_2) = \delta(x_1 - x_2)$  и, следовательно,

$$p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_1(x_2; t_2) \delta(x_1 - x_2), \quad (2.2.23)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция. Между этими двумя крайними случаями возможно большое число промежуточных случаев.

Формулы (19) ... (23) можно обобщить на различные многомерные условные п. в., которые по «левым» переменным должны удовлетворять обычным четырем условиям.



В качестве характеристик случайных процессов и полей, более простых, чем п. в., можно использовать моментные и корреляционные (кумулянтные) функции. При этом различают начальные и центральные моментные функции. Под *начальными моментными функциями* сл. пр.  $\xi(t)$ , заданного на некотором интервале, принимают функции  $m_{v_1}(t)$ ,  $m_{v_1 v_2}(t_1, t_2)$ , ...,  $m_{v_1 v_2 \dots v_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , симметричные относительно всех своих аргументов, являющиеся математическими ожиданиями соответствующих произведений:

$$\begin{aligned}
 m_{v_1}(t) &= \mathbf{M} \{ \xi^{v_1}(t) \} = \int x^{v_1} p_1(x; t) dx, \\
 m_{v_1 v_2}(t_1, t_2) &= \mathbf{M} \{ \xi^{v_1}(t_1) \xi^{v_2}(t_2) \} = \iint x_1^{v_1} x_2^{v_2} p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 m_{v_1 v_2 \dots v_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \mathbf{M} \{ \xi^{v_1}(t_1) \xi^{v_2}(t_2) \dots \xi^{v_n}(t_n) \} = \\
 &= \int \dots \int x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_n^{v_n} p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n,
 \end{aligned}
 \tag{2.2.27}$$

где  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) — неотрицательные целые числа. Момент  $m_{v_1 v_2 \dots v_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , зависящий от  $n$  несовпадающих аргументов  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , называется  *$n$ -мерным моментом* ( $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ )-го порядка.

Вместо начальных моментов можно рассматривать *центральные моменты*, которые определяются формулой

$$\begin{aligned}
 \mu_{v_1 v_2 \dots v_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \mathbf{M} \{ [\xi(t_1) - m_1(t_1)]^{v_1} \dots [\xi(t_n) - m_1(t_n)]^{v_n} \} = \\
 &= \int \dots \int [x_1 - m_1(t_1)]^{v_1} \dots [x_n - m_1(t_n)]^{v_n} \times \\
 &\times p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n.
 \end{aligned}
 \tag{2.2.28}$$

В дальнейшем особую роль будут играть математическое ожидание случайного процесса ( м. о. сл. пр. )

$$m_{\xi}(t) = m_1(t) = \mathbf{M} \{ \xi(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x; t) dx, \quad (2.2.35)$$

а также начальный момент  $m_{11}(t_1, t_2)$

$$\begin{aligned} K_{\xi}(t_1, t_2) &= m_{11}(t_1, t_2) = \mathbf{M} \{ \xi(t_1) \xi(t_2) \} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

и центральный момент  $\mu_{11}(t_1, t_2) = R_2(t_1, t_2)$ , называемый ковариационной ( корреляционной ) функцией сл. пр.:

$$\begin{aligned} R_{\xi}(t_1, t_2) &= \mu_{11}(t_1, t_2) = \mathbf{M} \{ [\xi(t_1) - m_{\xi}(t_1)] [\xi(t_2) - m_{\xi}(t_2)] \} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_{\xi}(t_1)] [x_2 - m_{\xi}(t_2)] p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

Из (36) и (37) следует связь

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) + m_{\xi}(t_1) m_{\xi}(t_2). \quad (2.2.38)$$

Раздел теории, посвященный изучению лишь тех свойств сл. пр., которые определяются этими характеристиками, называется *корреляционной теорией*. Корреляционная теория дает полное описание одного очень важного класса случайных процессов — гауссовских (§ 2.6).

Отправляясь от совместных и условных п. в. типа (13) и (19), можно ввести совместные и *условные моментные и корреляционные функции*. Они определяются формулами, аналогичными (27), (28) и (32), только теперь нужно оперировать соответственно совместными и условными п. в. и условными характеристическими функциями.

## КЛАССИФИКАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основываясь на введенных характеристиках сл. пр., можно провести их классификацию.

**1. Нестационарные и стационарные процессы и поля.** Важным классом сл. пр. являются стационарные сл. пр. Случайный процесс  $\xi(t)$  называется *стационарным в узком смысле*, если все конечномерные функции распределения вероятностей любого порядка инвариантны относительно сдвига по времени<sup>1</sup>, т. е. при любых  $n$  и  $t_0$  справедливо равенство

$$F_n(x_1, \dots, x_n; t_1 - t_0, \dots, t_n - t_0) = F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n). \quad (2.3.1)$$

Это означает, что два процесса  $\xi(t)$  и  $\xi(t - t_0)$  имеют одинаковые вероятностные характеристики при любом  $t_0$ . Случайные процессы, не удовлетворяющие этому условию, называются *нестационарными в узком смысле*. Разумеется, что аналогичное равенство должно выполняться для п. в.

$$p_n(x_1, \dots, x_n; t_1 - t_0, \dots, t_n - t_0) = p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n), \quad (2.3.2)$$

а также для характеристических, моментных и корреляционных функций.

Стационарный в узком смысле сл. пр., в отличие от нестационарного, ведет себя однородно (однообразно) во времени. Стационарные сл. пр. аналогично установившимся детерминированным процессам получают в установившемся режиме работы системы при неизменных внешних условиях. Стационарные процессы являются частным случаем более широкого класса *нестационарных процессов* (рис. 2.2). Примером последнего может быть любой сл. пр. в переходном режиме работы системы (например, сл. пр. на выходе инерционной системы в начальный

<sup>1</sup> В литературе такие случайные процессы часто называют также *стационарными в строгом смысле*.



Рис. 2.2. Иллюстрация соотношения между различными видами случайных процессов

минированные функции, очевидным образом сводятся к стационарному процессу  $\xi(t)$ . Однако если нестационарный процесс  $\eta(t)$  задан выражением типа

$$\eta(t) = \int_0^t h(t, \tau) \xi(\tau) d\tau,$$

где  $h(t, \tau)$  — некоторая детерминированная функция, то сведение нестационарного процесса к стационарному в общем случае невозможно.

Понятие стационарности в узком смысле обобщается на два и несколько сл. пр. Два сл. пр.  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  называются *совместно стационарно связанными в узком смысле*, если их совместные функции распределения вероятностей любого порядка инвариантны относительно сдвига по времени:

$$\begin{aligned} F_{n+m}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t_1, \dots, t_n; t'_1, \dots, t'_m) = \\ = F_{n+m}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m; t_1 - t_0, \dots, t_n - t_0; t'_1 - t_0, \dots, t'_m - t_0). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Отметим, что если каждый из процессов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  сам по себе стационарный, то отсюда вовсе не следует, что они будут стационарно связанными в узком смысле.

Из определения стационарности (2), в частности, следует

$$p(x; t_1) = p(x; t_1 - t_1) = p_1(x); \quad (2.3.4)$$

$$p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2; t_1 - t_1, t_2 - t_1) = p_2(x_1, x_2; \tau), \quad \tau = t_2 - t_1.$$

Таким образом, для стационарного в узком смысле сл. пр.  $n$ -мерная плотность вероятности,  $n$ -мерные моменты и корреляционные функции зависят не от  $n$ , а от  $(n-1)$  моментов времени, так как один из выбранных моментов времени можно всегда принять за начало отсчета времени (например, положить  $t_1 = 0$ ).

Из первой формулы (4) видно, что одномерная п. в. стационарного в узком смысле сл. пр. вообще не зависит от времени. Поэтому одномерная п. в. и одномерные моменты не учитывают временных характеристик стационарного процесса: процесс, про-

период при воздействии на вход системы даже стационарного случайного сигнала). В некоторых простых случаях нестационарный процесс можно преобразовать в стационарный. Например, нестационарные процессы  $\eta(t) = \xi(t) + f(t)$  или  $\eta(t) = f(t)\xi(t) + f_1(t)$ , где  $\xi(t)$  — стационарный процесс,  $f(t)$  и  $f_1(t)$  — некоторые детер-

текающий в  $\nu$  раз быстрее или медленнее, будет иметь одну и ту же одномерную п. в.

Математическое ожидание (среднее значение) стационарного в узком смысле случайного процесса не зависит от времени:

$$m_{\xi} = \mathbf{M}\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x) dx. \quad (2.3.5)$$

Ковариационная  $K_{\xi}(t_1, t_2)$  и корреляционная  $R_{\xi}(t_1, t_2)$  функции зависят лишь от разности аргументов  $\tau = t_2 - t_1$ , причем

$$\begin{aligned} R_{\xi}(\tau) &= \mathbf{M}\{[\xi(t) - m_{\xi}][\xi(t + \tau) - m_{\xi}]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{\xi})(x_2 - m_{\xi}) p_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 = \\ &= \mathbf{M}\{\xi(t)\xi(t + \tau)\} - m_{\xi}^2 = K_{\xi}(\tau) - m_{\xi}^2. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Дисперсия стационарного процесса

$$\begin{aligned} D_{\xi} = \sigma_{\xi}^2 &= \mathbf{M}\{[\xi(t) - m_{\xi}]^2\} = R_{\xi}(0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^2 p_1(x) dx = \mathbf{M}\{\xi^2(t)\} - m_{\xi}^2 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

постоянна и равна значению корреляционной функции при нулевом значении аргумента.

При решении некоторых практических задач (в рамках корреляционной теории) многомерные п. в. не рассматривают, а оперируют только м. о. и ковариационной (корреляционной) функцией. В связи с этим введено понятие стационарности в широком смысле.

Случайный процесс  $\xi(t)$  с конечной дисперсией называется *стационарным в широком смысле*, если его м. о. и ковариационная функция инвариантны относительно сдвига по времени, т. е. м. о. постоянно (не зависит от времени), а ковариационная функция зависит только от разности аргументов  $t_2 - t_1$ :

$$m_{\xi} = \text{const}, \quad K_{\xi}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_2 - t_1). \quad (2.3.8)$$

На основании формул (5) и (6) заключаем, что сл. пр., стационарные в узком смысле, всегда стационарны и в широком смысле. Однако обратное утверждение в общем случае неверно.

Два стационарных сл. пр.  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  называются *стационарно связанными в широком смысле*, если их взаимная ковариационная функция инвариантна относительно сдвига по времени:

$$\begin{aligned} K_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= \mathbf{M}\{\xi(t_1)\eta(t_2)\} = \mathbf{M}\{\xi(t_1 - t_1)\eta(t_2 - t_1)\} = \\ &= K_{\xi\eta}(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Отметим, что если каждый из процессов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  является стационарным в широком смысле, то это вовсе не озна-

чает, что они являются стационарно связанными в широком смысле.

Помимо указанных двух основных определений стационарности встречаются и другие понятия стационарности.

Случайный процесс  $\xi(t)$  называется *стационарным порядка  $k$* , если равенство (1) или (2) выполняется не для любых  $n$ , а только для  $n \leq k$ . Ясно, что если (2) справедливо при  $n = k$ , то в силу условия согласованности (1.2.11) оно будет также выполняться и при  $n \leq k$ .

Случайный процесс  $\xi(t)$  называется *асимптотически стационарным в узком смысле*, если существует предел

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} p_n(x_1, \dots, x_n; t_1 + t_0, \dots, t_n + t_0).$$

Случайный процесс  $\xi(t)$  называется *стационарным в узком смысле на конечном интервале*, если равенство (2) выполняется для всех временных точек этого интервала.

Процесс  $\xi(t)$  называется *периодически стационарным* или *циклостационарным в узком смысле* с периодом  $T$ , если равенство (2) выполняется только при  $t_0 = mT$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Это означает, что случайные величины  $\xi(t)$ ,  $\xi(t + T)$ , ...,  $\xi(t + mT)$  имеют одинаковые плотности вероятности. Можно сформулировать аналогичные определения стационарности в широком смысле.

Приведенные определения распространяются на случайные поля. Однородность случайного поля является аналогом стационарности сл. пр. Случайное поле  $\xi(\mathbf{r})$  называется *однородным*, если его плотности вероятности любого порядка не меняются при произвольном сдвиге начала координат, т. е.

$$p_n(\xi_1, \dots, \xi_n; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = p_n(\xi_1, \dots, \xi_n; \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_0). \quad (2.3.10)$$

Физически однородность поля указывает на то, что в любой точке пространства  $\mathbf{r}$  поле ведет себя «в среднем» одинаково. Если равенство (10) не выполняется, то поле является неоднородным.

В более общем случае поле определено как функция координат пространства  $\mathbf{r}$  и времени  $t$ , т. е.  $\xi(\mathbf{r}, t)$ . Если учитывать временную зависимость, то к полю применимо понятие стационарности, относящееся к сл. пр. Случайное поле называется *стационарным (во времени) в узком смысле*, если его плотности вероятности не меняются при изменении начала отсчета времени. Поместив начало отсчета в точки  $\mathbf{r}_1$  и  $t_1$ , для одномерных и двумерных плотностей вероятностей однородных и стационарных полей можем написать

$$\begin{aligned} p(\xi_1; \mathbf{r}_1; t_1) &= p(\xi_1; \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1; t_1 - t_1) = p(\xi_1), \\ p_2(\xi_1, \xi_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2) &= p_2(\xi_1, \xi_2; \Delta \mathbf{r}; \tau), \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

где  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ;  $\tau = t_2 - t_1$ .

Случайное поле называется *однородным в широком смысле*, если его м. о. не зависит от координат пространства, а пространственная ковариационная функция  $K_{\xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  является функцией только разности аргументов, т. е.

$$K_{\xi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = K_{\xi}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = K_{\xi}(\Delta\mathbf{r}). \quad (2.3.12)$$

Стационарность случайного поля в широком смысле предполагает постоянство м. о. поля во времени и зависимость временной ковариационной (корреляционной) функции только от разности  $\tau = t_2 - t_1$ .

Аргументом корреляционной (ковариационной) функции однородного случайного поля является разность координат пространства  $\Delta\mathbf{r}$ , что дает основание называть  $R_{\xi}(\Delta\mathbf{r})$  *пространственной корреляционной функцией*. Вектор  $\Delta\mathbf{r}$  имеет те же проекции, что и  $\mathbf{r}$ . Поэтому корреляционная функция скалярного поля является функцией нескольких переменных. В этом состоит существенное отличие случайного поля от случайного процесса, где корреляционная функция зависит только от одного аргумента  $t$ .

Если имеется однородное поле вида  $\xi(x, y)$ , то его корреляционная функция зависит от двух переменных  $R_{\xi}(\Delta x, \Delta y)$ , для трехмерного поля  $\xi(x, y, z)$  — от трех переменных  $R_{\xi}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ .

**2. Эргодические и неэргодические стационарные процессы.** До сих пор характеристики сл. пр. и полей (п. в., моментные функции и др.) были определены через соответствующие статистические средние значения, т. е. средние значения большего числа реализаций в ансамбле идентичных систем. Оказывается, что для некоторых стационарных сл. пр. указанные характеристики можно получить путем осреднения соответствующих величин по одной реализации достаточно большой длительности.

Например, представляется естественным за оценку м. о.  $m_{\xi}$  стационарного процесса  $\xi(t)$  принять величину

$$\hat{m} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt, \quad (2.3.13)$$

а в качестве оценок дисперсии  $D_{\xi}$  и корреляционной функции  $R_{\xi}(\tau)$  взять соответственно величины

$$\hat{D} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - m_{\xi}]^2 dt, \quad (2.3.14)$$

$$\hat{R}_{\xi}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t + \tau) - m_{\xi}] [\xi(t) - m_{\xi}] dt. \quad (2.3.15)$$

На практике временной интервал осреднения  $T$  берут конечным, но по возможности большим.

Такая возможность физически может быть оправдана тем, что стационарный сл. пр. протекает однородно во времени. Поэтому одна реализация достаточно большой продолжительности может содержать все сведения о свойствах случайного процесса. Это можно также пояснить иначе. Представим себе мысленно, что длинная реализация стационарного процесса разбита на «куски» примерно одинаковой длительности. Для ряда стационарных процессов каждый из таких «кусков» можно рассматривать в качестве «полномочного представителя» отрезка реализации на выходе отдельного члена статистического ансамбля одинаковых систем. Стационарные сл. пр., для которых это справедливо, называются *эргодическими* или говорят, что *стационарный процесс обладает эргодическим свойством* (рис. 2.2).

Стационарный процесс  $\xi(t)$  называется *эргодическим в строгом смысле*, если с вероятностью единицы все его вероятностные характеристики могут быть получены по одной реализации процесса. Имея в виду, что различные характеристики эргодического процесса обычно определяются путем осреднения по времени, можно сказать, что стационарный сл. пр.  $\xi(t)$  является эргодическим, если результаты осреднения по времени совпадают с соответствующими результатами осреднения по ансамблю, т. е. с м. о.

Практически часто интересуются не всеми, а только отдельными характеристиками процесса (в частности, м. о., корреляционной функцией и одномерной функцией распределения или п. в.). Ясно, что процесс может быть эргодическим относительно одной характеристики (параметра) и не эргодическим относительно других. В связи с этим можно ввести понятие эргодичности относительно отдельных характеристик процесса [2].

Отметим, что каждый из перечисленных частных видов сл. пр. в свою очередь можно дополнительно классифицировать в зависимости от формы частных характеристик, описывающих рассматриваемый процесс. Например, за основу классификации можно принять вид п. в. (нормальные и ненормальные), характер корреляционных функций (широкополосные и узкополосные процессы) и т. д. Такая классификация будет приведена позже, при рассмотрении частных видов случайных процессов.

## КОВАРИАЦИОННАЯ (КОРРЕЛЯЦИОННАЯ) ФУНКЦИЯ

При решении многих практических задач часто оперируют м. о. и корреляционной или ковариационной функцией сл. пр. Их определения для действительного случайного процесса даются формулами (2.2.35)...(2.2.38). Для комплексного сл. пр.  $\xi(t) = \xi_1(t) + j\xi_2(t)$  аналогичные формулы имеют следующий вид:



$$m_{\xi}(t) = \mathbf{M}\{\xi_1(t) + j\xi_2(t)\} = \mathbf{M}\{\xi_1(t)\} + j\mathbf{M}\{\xi_2(t)\} = m_{\xi_1}(t) + jm_{\xi_2}(t), \quad (2.4.1)$$

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{[\xi(t_1) - m_{\xi}(t_1)][\xi^*(t_2) - m_{\xi}^*(t_2)]\}, \quad (2.4.2)$$

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{\xi(t_1)\xi^*(t_2)\} = R_{\xi}(t_1, t_2) + m_{\xi}(t_1)m_{\xi}^*(t_2), \quad (2.4.3)$$

где звездочкой отмечены комплексно-сопряженные функции. Очевидно, что соответствующие определения и результаты для вещественного процесса получаются отсюда автоматически, если положить мнимую часть соответствующих сл. в. равной нулю.

Из последней формулы видно, что ковариационная функция отличается от корреляционной наличием детерминированного слагаемого  $m_{\xi}(t_1)m_{\xi}^*(t_2)$ . Если м. о. процесса  $m_{\xi}(t) \equiv 0$ , то ковариационная и корреляционная функции совпадают.

Значения сл. пр.  $\xi(t)$  в два момента времени  $t_1$  и  $t_2$  называются *некоррелированными*, если  $R_{\xi}(t_1, t_2) = 0$ , т. е.

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = m_{\xi}(t_1)m_{\xi}^*(t_2). \quad (2.4.4)$$

Рассматриваемые два значения называются *ортгоналными*, если

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = 0. \quad (2.4.5)$$

Пусть имеется два не обязательно вещественных случайных процесса  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  с корреляционными функциями  $R_{\xi}(t_1, t_2)$  и  $R_{\eta}(t_1, t_2)$  или ковариационными функциями  $K_{\xi}(t_1, t_2)$  и  $K_{\eta}(t_1, t_2)$  соответственно. В дополнение к ним теперь можно рассматривать две взаимные корреляционные или ковариационные функции

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{[\xi(t_1) - m_{\xi}(t_1)][\eta^*(t_2) - m_{\eta}^*(t_2)]\}, \quad (2.4.6)$$

$$R_{\eta\xi}(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{[\eta(t_1) - m_{\eta}(t_1)][\xi^*(t_2) - m_{\xi}^*(t_2)]\},$$

или

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{\xi(t_1)\eta^*(t_2)\}, \quad K_{\eta\xi}(t_1, t_2) = \mathbf{M}\{\eta(t_1)\xi^*(t_2)\}. \quad (2.4.7)$$

Следовательно, корреляционные свойства между отсчетными значениями сл. пр.  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  в два различных момента времени задаются корреляционной или ковариационной матрицей:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{\xi}(t_1, t_2) & R_{\xi\eta}(t_1, t_2) \\ R_{\eta\xi}(t_1, t_2) & R_{\eta}(t_1, t_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{\xi}(t_1, t_2) & K_{\xi\eta}(t_1, t_2) \\ K_{\eta\xi}(t_1, t_2) & K_{\eta}(t_1, t_2) \end{bmatrix}. \quad (2.4.8)$$

В общем случае, если нужно задавать корреляции (ковариации) для двух процессов в  $n$  моментов времени или для совокупности  $n$  разных процессов в два момента времени, то потребуется корреляционная (ковариационная) матрица размером  $n \times n$ .

Два сл. пр.  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  называются *некоррелированными*, если взаимная корреляционная функция для двух произвольных моментов времени равна нулю:

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = 0; \quad K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = m_\xi(t_1)m_\eta^*(t_2). \quad (2.4.9)$$

Процессы  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  называются *ортогональными*, если ковариационная функция равна нулю:

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = 0. \quad (2.4.10)$$

В ряде случаев оказывается целесообразным вместо  $R_\xi(t_1, t_2)$  или  $R_{\xi\eta}(t_1, t_2)$  рассматривать соответственно *нормированную корреляционную функцию*  $r_\xi(t_1, t_2)$  или *нормированную взаимную корреляционную функцию*  $r_{\xi\eta}(t_1, t_2)$ :

$$r_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_1, t_2) / \sqrt{D_\xi(t_1)D_\xi(t_2)}, \quad (2.4.11)$$

$$r_{\xi\eta}(t_1, t_2) = R_{\xi\eta}(t_1, t_2) / \sqrt{D_\xi(t_1)D_\eta(t_2)}. \quad (2.4.12)$$

Эти функции количественно характеризуют степень линейной зависимости между соответствующими значениями одного или двух процессов.

Перечислим основные свойства корреляционных функций. При этом будут использованы обозначения

$$R_\xi(t_1, t_2) = R_{\xi\xi}(t_1, t_2), \quad r_\xi(t_1, t_2) = r_{\xi\xi}(t_1, t_2). \quad (2.4.13)$$

Все свойства взаимной корреляционной функции  $R_{\xi\eta}(t_1, t_2)$  распространяются на корреляционную функцию  $R_\xi(t_1, t_2)$ .

1. Корреляционная функция обладает так называемым *эрмитовым свойством*

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = R_{\eta\xi}^*(t_2, t_1), \quad r_{\xi\eta}(t_1, t_2) = r_{\eta\xi}^*(t_2, t_1). \quad (2.4.14)$$

В справедливости этих равенств можно убедиться на основании определения взаимной корреляционной функции (6). Отсюда следует, что корреляционная функция вещественного сл. пр.  $\xi(t)$  является симметричной относительно своих аргументов:

$$R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(t_2, t_1). \quad (2.4.15)$$

2. Для корреляционной функции справедливо неравенство Коши — Шварца

$$\begin{aligned} |R_{\xi\eta}(t_1, t_2)|^2 &\leq \mathbf{M}\{|\xi(t_1)|^2\} \mathbf{M}\{|\eta(t_2)|^2\} = D_\xi(t_1)D_\eta(t_2), \\ |r_{\xi\eta}(t_1, t_2)| &\leq 1. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

5. Приведенное свойство неотрицательной определенности является характеристическим свойством класса всех корреляционных функций. Это означает, что если какая-нибудь функция  $R_{\xi}(t_1, t_2)$  обладает этим свойством, то в принципе можно найти сл. пр., для которого она будет корреляционной функцией.

Конкретизируем свойства корреляционных функций применительно к вещественным стационарным в широком смысле сл. пр.  $\xi(t)$ .

Напомним, что для стационарного в широком смысле сл. пр.  $\xi(t)$  согласно (2.3.8) справедливы следующие соотношения:

$$m_{\xi} = \mathbf{M} \{ \xi(t) \} = \text{const}, \quad D_{\xi} = \sigma_{\xi}^2 = \mathbf{M} \{ [\xi(t) - m_{\xi}]^2 \} = \text{const}, \quad (2.4.24)$$

$$R_{\xi}(\tau) = D_{\xi} r_{\xi}(\tau) = \mathbf{M} \{ [\xi(t) - m_{\xi}] [\xi(t + \tau) - m_{\xi}] \}, \quad (2.4.25)$$

$$r_{\xi}(\tau) = \mathbf{M} \{ \tilde{\xi}(t) \tilde{\xi}(t + \tau) \}, \quad (2.4.26)$$

где тильдой сверху обозначены нормированные величины (20).

1. Абсолютное значение корреляционной функции при любом  $\tau$  не может превышать ее значения при  $\tau=0$ , т. е.

$$|R_{\xi}(\tau)| \leq D_{\xi}, \quad |r_{\xi}(\tau)| \leq 1. \quad (2.4.27)$$

Этот результат следует из (16), а также из очевидного неравенства, что м. о. положительной функции не может быть отрицательным:

$$\mathbf{M} \{ [\tilde{\xi}(t + \tau) \pm \tilde{\xi}(t)]^2 \} = 2 [1 \pm r_{\xi}(\tau)] \geq 0.$$

2. Корреляционная функция вещественного стационарного процесса  $\xi(t)$  является четной функцией своего аргумента:

$$R_{\xi}(\tau) = R_{\xi}(-\tau), \quad r_{\xi}(\tau) = r_{\xi}(-\tau). \quad (2.4.28)$$

Этот результат следует из (23), а также из того факта, что значение корреляционной функции стационарного процесса не зависит от выбора начала отсчета времени.

Отметим, что взаимная корреляционная функция двух совместно стационарных в широком смысле вещественных сл. пр.  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  является вещественной и не обладает свойством симметрии: если  $\xi$  и  $\eta$  поменять местами, то

$$R_{\xi\eta}(\tau) = R_{\eta\xi}(-\tau), \quad r_{\xi\eta}(\tau) = r_{\eta\xi}(-\tau). \quad (2.4.29)$$

3. Если корреляционная функция непрерывна при  $\tau=0$ , то она непрерывна при всех других значениях  $\tau$ .

## Спектральная плотность

Определим *спектральную плотность*  $S(f)$  *стационарного в широком смысле сл. пр.*  $\xi(t)$  как преобразование Фурье от ковариационной функции:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \quad (2.5.7)$$

На основании обратного преобразования Фурье можем написать

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(j2\pi f\tau) df. \quad (2.5.8)$$

Таким образом, спектральная плотность и ковариационная функция стационарного процесса представляют собой пару взаимных преобразований Фурье.

В отличие от спектрального анализа детерминированных сигналов спектральная плотность случайного процесса не дает возможности восстановить какую-либо реализацию процесса, так как она не содержит сведений о фазах отдельных спектральных составляющих. Можно указать несколько различных по характеру случайных процессов, имеющих одинаковую спектральную плотность и корреляционную функцию. Поэтому эти две характеристики описывают случайный процесс явно неполно.

**Взаимная спектральная плотность.** Аналогично спектральной плотности  $S_{\xi}(\omega)$  одного процесса  $\xi(t)$  определяется *взаимная спектральная плотность* двух стационарно связанных случайных процессов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  как прямое преобразование Фурье от взаимных ковариационных функций

$$S_{\xi\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi\eta}(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = S_{\eta\xi}^*(\omega). \quad (2.5.28)$$

На основании обратного преобразования Фурье можем написать

$$K_{\xi\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi\eta}(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega. \quad (2.5.29)$$

Отметим, что в отличие от спектральной плотности одного случайного процесса, которая является действительной функцией частоты, взаимная спектральная плотность двух стационарно связанных процессов является обычно комплексной функцией частоты.

Можно показать, что взаимная спектральная плотность при каждой частоте удовлетворяет неравенству

$$|S_{\xi\eta}(\omega)|^2 \leq S_{\xi}(\omega) S_{\eta}(\omega). \quad (2.5.30)$$

Поясним теперь физический смысл спектральной плотности. Если понимать под  $\xi(t)$  случайный (флюктуационный) ток или напряжение, то величины  $S(f)$  и  $S_0(f)$  в формулах (7) и (9) будут иметь размерность энергии<sup>1</sup>. Полагая в формуле (10)  $\tau=0$ , имеем

$$D_{\xi} = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df.$$

Эта формула показывает, что дисперсия («полная энергия») стационарного центрированного сл. пр. равна площади под кривой спектральной плотности. Размерную величину  $S(f)df$  можно трактовать как долю «энергии», сосредоточенную в малом интервале частот от  $f-(df/2)$  до  $f+(df/2)$ .

## ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В дополнение к классификации сл. пр. по виду реализаций (§ 2.1) укажем другой подход к классификации, из которого будет ясно, какое место занимают гауссовские процессы среди других сл. пр. После этого приведем определение гауссовского сл. пр. и перечислим его характерные свойства.

При перечислении методов описания случайных процессов указывалось (с. 59), что последовательность функций распределения  $F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$  или п. в.  $p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ , представляет собой своеобразную лестницу: с ростом  $n$  они описывают сл. пр. последовательно все более и более детально.

Однако многие физические процессы оказываются не столь сложными, чтобы для получения исчерпывающей информации о них требовалось знание всех  $p_n(\cdot)$ ; часто бывает достаточно знать лишь одномерную  $p_1(x; t)$  или двумерную  $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$  п. в. Если эти п. в. содержат все сведения о процессе, то по ним можно найти многомерные п. в. Отметим, что при решении многих научно-прикладных задач вообще не возникает необходимости обращаться к многомерным плотностям вероятности.

Сложность описания сл. пр., т. е. наибольший порядок  $n$ -мерной п. в., дающей достаточно полное описание сл. пр., можно положить в основу классификации сл. пр. По-видимому, простейшим классом являются сл. пр., полное описание которых достигается указанием одномерной п. в.  $p_1(x; t)$ , следующим классом являются процессы, описание которых дается двумерной п. в.  $p_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$  и т. д.

Приведем определение гауссовских процессов. Вещественный случайный процесс  $\xi(t)$  называется *гауссовским*, если для любого конечного множества моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  случайные величины  $\xi_1 = \xi(t_1), \dots, \xi_n = \xi(t_n)$  имеют совместную нормальную п. в.

$$p_n(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{R}|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{m})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{m}) \right]. \quad (2.6.4)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$m_\mu = \mathbf{M} \{ \xi_\mu \}, \quad D_\mu = R_{\mu\mu}(t_\mu, t_\mu) = \mathbf{M} \{ (\xi_\mu - m_\mu)^2 \}, \quad R_{\mu\nu} = \\ = R_{\nu\mu} = \mathbf{M} \{ (\xi_\mu - m_\mu)(\xi_\nu - m_\nu) \} = r_{\mu\nu} (D_\mu D_\nu)^{1/2}, \quad \mu, \nu = \overline{1, n},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.6.5)$$

$|\mathbf{R}| = \det \mathbf{R}$  — детерминант корреляционной матрицы  $\mathbf{R}$ ;  $\mathbf{R}^{-1}$  — матрица, обратная  $\mathbf{R}$ ; символ  $t$  сверху обозначает транспонированную матрицу.

Укажем несколько важных свойств гауссовских сл. пр., которые следуют из (4) и (6).

1. Гауссовский сл. пр. полностью определяется заданием м. о.  $m_\xi(t)$  и корреляционной функции  $R_\xi(t_1, t_2)$ . Действительно, в выражения для характеристической функции и п. в. входят только м. о. и корреляционная функция. Если на основании каких-либо соображений известно, что сл. пр. является гауссовским, то его  $n$ -мерные п. в. и характеристические функции однозначно определяются м. о. и корреляционной функцией. Поэтому гауссовские процессы могут отличаться друг от друга только характером м. о. и видом корреляционной функции (спектральной плотности). Следовательно, корреляционная теория дает полное описание гауссовских процессов.

2. Для гауссовских процессов некоррелированность значений процесса тождественна их независимости, т. е. если  $R_\xi(t_\mu, t_\nu) = 0$  при  $\mu \neq \nu$ , то

$$p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = p(x_1; t_1) \dots p(x_n; t_n) = \\ = (2\pi)^{-n/2} [D_\xi(t_1) \dots D_\xi(t_n)]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^n \frac{[x_\mu - m_\xi(t_\mu)]^2}{D_\xi(t_\mu)} \right\}. \quad (2.6.8)$$

Нетрудно убедиться в обратном: если значения независимы, т. е. справедлива формула (8), то они некоррелированы.

$n$ -мерные п. в. и характеристические функции однозначно определяются м. о. и корреляционной функцией. Поэтому гауссовские процессы могут отличаться друг от друга только характером м. о. и видом корреляционной функции (спектральной плотности). Следовательно, корреляционная теория дает полное описание гауссовских процессов.

2. Для гауссовских процессов некоррелированность значений процесса тождественна их независимости, т. е. если  $R_{\xi}(t_{\mu}, t_{\nu})=0$  при  $\mu \neq \nu$ , то

$$p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = p(x_1; t_1) \dots p(x_n; t_n) = \\ = (2\pi)^{-n/2} [D_{\xi}(t_1) \dots D_{\xi}(t_n)]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^n \frac{[x_{\mu} - m_{\xi}(t_{\mu})]^2}{D_{\xi}(t_{\mu})} \right\}. \quad (2.6.8)$$

Нетрудно убедиться в обратном: если значения независимы, т. е. справедлива формула (8), то они некоррелированы.

3. Для гауссовских процессов понятия стационарности в широком и узком смысле совпадают. Предположим, что гауссовский процесс стационарен в широком смысле:

$$m_{\xi}(t) = m_{\xi} = \text{const}, \quad R_{\xi}(t_{\mu}, t_{\nu}) = R_{\xi}(|t_{\mu} - t_{\nu}|) = R_{\xi}(\tau_{\mu\nu}), \quad \mu, \nu = \overline{1, n}. \quad (2.6.9)$$

Тогда он будет одновременно стационарным и в узком смысле, так как при этом характеристические функции и п. в. не будут изменяться при любом сдвиге всей группы точек  $t_1, t_2, \dots, t_n$  вдоль оси времени на произвольную постоянную величину.

Приведем явные выражения для одномерных и двумерных п. в. и характеристических функций гауссовского стационарного процесса, которые легко получаются из основных формул (4) и (6):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\xi}}} \exp \left[ -\frac{(x - m_{\xi})^2}{2D_{\xi}} \right], \quad (2.6.10)$$

$$\Phi(j\vartheta) = \exp(jm_{\xi}\vartheta - D_{\xi}\vartheta^2/2), \quad (2.6.11)$$

$$p_2(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi D_{\xi} \sqrt{1 - r_{\xi}^2(\tau)}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{(x_1 - m_{\xi})^2 - 2r_{\xi}(\tau)(x_1 - m_{\xi})(x_2 - m_{\xi}) + (x_2 - m_{\xi})^2}{2D_{\xi}[1 - r_{\xi}^2(\tau)]} \right\}, \quad (2.6.12)$$

$$\Phi_2(j\vartheta_1, j\vartheta_2; \tau) = \exp \{ jm_{\xi}(\vartheta_1 + \vartheta_2) - (1/2) D_{\xi} \times \\ \times [\vartheta_1^2 + 2r_{\xi}(\tau)\vartheta_1\vartheta_2 + \vartheta_2^2] \}. \quad (2.6.13)$$

4. Условные п. в. значений совместно гауссовских процессов  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  или значений одного гауссовского процесса являются нормальными. Этот результат следует из известной формулы

$$p_{\xi/\eta}(X|Y) = p_{\xi\eta}(X, Y) / p_{\eta}(Y). \quad (2.6.14)$$



6. При линейных преобразованиях гауссовских сл. пр. свойство гауссовости сохраняется. Если на вход линейной системы с импульсной характеристикой  $h(t, \tau)$  воздействует гауссовский сл. пр.  $\xi(t)$ , то при выполнении надлежащих условий интегрируемости процесс

$$\eta(t) = \int_0^t h(t, \tau) \xi(\tau) d\tau, \quad (2.6.23)$$

получающийся на выходе системы, будет также гауссовским (с. 260). Справедливо и обратное утверждение: если каждый линейный функционал от  $\xi(t)$  есть гауссовская сл. в.  $\eta(t)$ , то  $\xi(t)$  является гауссовским сл. пр. Это важное свойство часто принимается за исходное определение гауссовского процесса  $\xi(t)$ . Можно сказать, что гауссовские процессы обладают свойством «устойчивости» по отношению к линейным преобразованиям.

7. При нелинейных преобразованиях свойство гауссовости утрачивается. Если гауссовский процесс  $\xi(t)$  подвергается нелинейному преобразованию, например, вида  $\eta(t) = f(t, \xi(t))$ , где  $f(\cdot)$  — нелинейная функция относительно  $\xi$ , то процесс  $\eta(t)$  будет негауссовским.

8. С помощью линейного преобразования коррелированные значения гауссовского сл. пр. можно привести к некоррелированным. Заметим, что если корреляционная матрица (5) диагональная, т. е. все  $R_{\mu\nu} = 0$  при  $\mu \neq \nu$ , то совместно гауссовские сл. в. некоррелированные. Поэтому линейное преобразование, в результате которого корреляционная матрица для преобразованных величин будет диагональной, приводит к совместно гауссовским некоррелированным величинам. Методика приведения матрицы к диагональной форме с помощью линейного преобразования известна.

9. Гауссовские сл. пр. с дробно-рациональной спектральной плотностью являются одновременно марковскими [4].

Гауссовские сл. пр. наиболее часто встречаются на практике и поэтому занимают особое место среди других сл. пр. Большинство встречающихся на практике электрических сл. пр., таких, например, как дробовой шум, тепловые флуктуации, собственный шум типового радиоприемника до детектора, атмосферные и космические шумы, представляют собой суммарный эффект большого числа сравнительно слабых элементарных импульсов, возникающих в случайные моменты времени. Согласно центральной предельной теореме теории вероятностей п. в. суммы неограниченно приближаются к нормальной с увеличением числа слагаемых, независимо от того, какие п. в. имеют отдельные слагаемые. При этом важно лишь, чтобы влияние отдельных слагаемых на сумму было равномерно малым (приблизительно одинаковым).

## БЕЛЫЙ ГАУССОВСКИЙ ШУМ

В дальнейшем будет часто использоваться идеализированный сл. пр.—белый гауссовский шум (БГШ). Приведем его определение и укажем специфические свойства.

Под *БГШ*  $n(t)$  понимается стационарный гауссовский сл. пр. с нулевым м. о. и дельтаобразной корреляционной функцией:

$$M\{n(t)\} = 0, \quad R_n(\tau) = M\{n(t)n(t+\tau)\} = (N/2)\delta(\tau). \quad (2.7.1)$$

Такой корреляционной функции соответствует спектральная плотность (рис. 2.7)

$$S_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = \frac{N}{2}, \quad S_0^+(f) = N. \quad (2.7.2)$$

Таким образом, спектральная плотность постоянна при всех частотах. Величину  $N$  называют *односторонней спектральной плотностью БГШ*  $n(t)$ , в отличие от двусторонней, равной  $N/2$ .

Случайный процесс  $n(t)$ , обладающий равномерным спектром в очень широком (математически бесконечном) диапазоне частот, принято называть *белым шумом* по аналогии с белым светом, имеющим в видимой части равномерный сплошной спектр.

Поскольку дельта-функция  $\delta(\tau)$  всюду равна нулю, за исключением точки  $\tau=0$ , где  $\delta(0)=\infty$ , то значения процесса  $n(t)$  в любые два несовпадающих, но сколь угодно близких момента времени не коррелированы, а если процесс  $n(t)$  гауссовский, то они и независимы. Поэтому БГШ  $n(t)$  можно назвать *абсолютно случайным процессом*.

Из (1) следует физически неправдоподобный результат: дисперсия (средняя мощность) белого шума  $D_n = R_n(0) = \infty$  и для него нельзя аналитически записать даже одномерную п. в. Его реализации невозможно изобразить графически: процесс бесконечно быстро меняет свои значения с бесконечным размахом. Корректно определить и продуктивно использовать другой белый шум с конечной дисперсией невозможно (см. примечание на с. 204).

Такое физически нереальное поведение процесса  $n(t)$  объясняется тем, что его следует рассматривать как идеализированную математическую модель, применимую для некоторых широкополосных процессов. Основное преимущество использования такой модели состоит в существенном упрощении математических вычислений различных выражений (в частности, м. о. интегралов), содержащих БГШ.

Однако все реальные сл. пр. всегда имеют спектральную плотность, убывающую при очень высоких частотах, и, следовательно, имеют конечный интервал корреляции  $\tau_k \neq 0$  и ограниченную среднюю мощность. БГШ является полезной математической идеализацией, применимой в тех случаях, когда интервал корреляции входного процесса, воздействующего на систему, много меньше всех существенных постоянных времени системы (например, длительности переходного процесса в системе), а применительно к линейным системам с постоянными параметрами — когда в пределах амплитудно-частотной характеристики системы спектральную плотность воздействующего процесса можно приближенно считать постоянной.

Можно указать следующее условие и правило приближенной замены реального стационарного процесса на белый шум. Пусть анализируется воздействие на некоторую систему с характерной постоянной времени  $\tau_c$  реального стационарного процесса  $\xi(t)$  с достаточно широкой непрерывной спектральной плотностью  $S_0(f)$  и, следовательно, узкой корреляционной функцией  $R_\xi(\tau)$ , имеющей малый, но конечный интервал корреляции  $\tau_k \ll \tau_c$ . В данном случае реальный сл. пр. можно приближенно трактовать как белый шум. За значение спектральной плотности  $N/2$  «эквивалентного» белого шума можно взять значение  $S_0(0)$ , которое по формуле (2.5.9) равно

$$\frac{N}{2} = S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_\xi(\tau) d\tau. \quad (2.7.3)$$

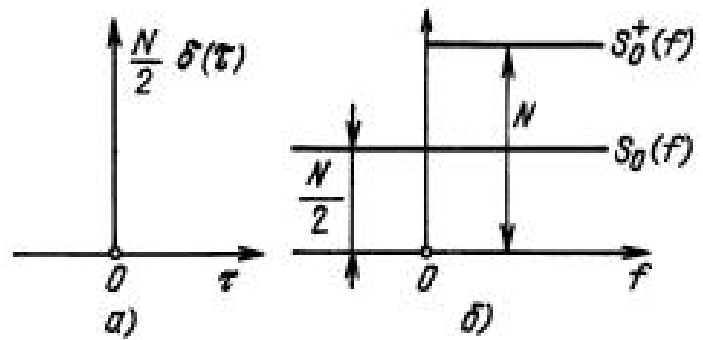


Рис. 2.7. Корреляционная функция (а) и спектральная плотность (б) белого шума

# МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

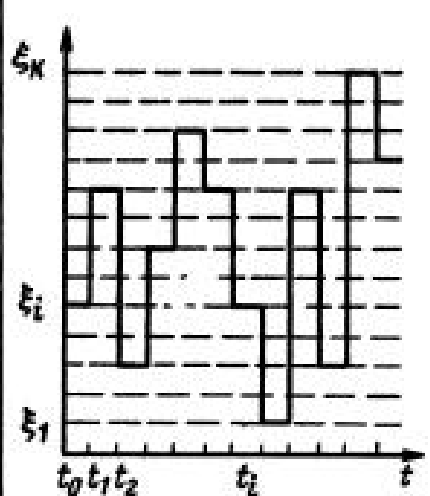
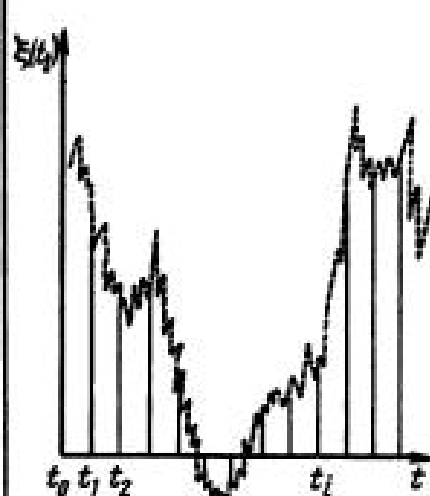
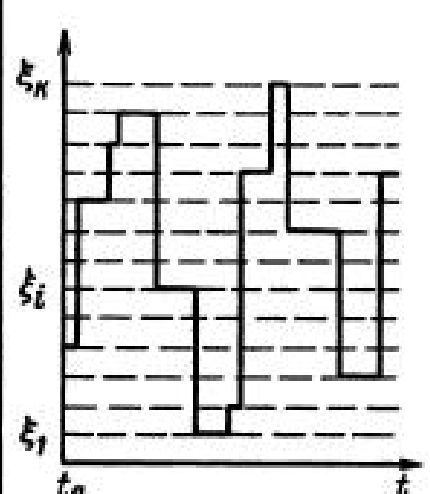
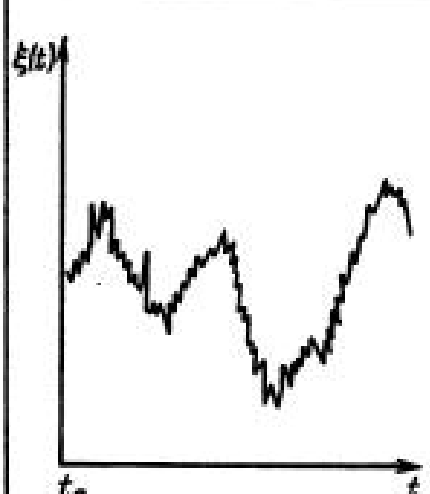
## КЛАССИФИКАЦИЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Как и при общей классификации сл. пр. (см. рис. 2.1), в зависимости от того, непрерывное или дискретное множество есть область значений процесса  $\xi(t)$  и область определения параметра  $t$ , различают четыре основных вида марковских процессов: марковские цепи (марковский процесс, у которого область значений и область определения — дискретные множества), марковские последовательности (марковский процесс, у которого область значений — непрерывное множество, а область определения — дискретное), дискретный марковский процесс (марковский процесс, у которого область значений — дискретное, а область определения — непрерывное множество) и непрерывнозначный марковский процесс (марковский процесс, область значений и область определения которого — непрерывные множества). Характер скалярных временных реализаций перечисленных процессов показан в табл. 3.1. Помимо четырех основных видов возможны другие, более сложные процессы марковского типа (различного характера смешанные процессы и т. д.).

*Марковским процессом называется сл. пр., для которого при фиксированном  $\xi(u)$  сл. в.  $\xi(t)$ ,  $t > u$ , не зависят от  $\xi(s)$ ,  $s < u$ .*

Таким образом, определяющее свойство всех видов марковских процессов состоит в следующем. Сл. пр.  $\xi(t)$  является марковским, если для любых  $n$  моментов времени  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  из отрезка  $[0, T]$  условная функция распределения «последнего» значения  $\xi(t_n)$  при фиксированных значениях  $\xi(t_1)$ ,  $\xi(t_2)$ , ...,  $\xi(t_{n-1})$  зависит только от  $\xi(t_{n-1})$ , т. е. при заданных значениях  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , ...,  $\xi_n$  справедливо соотношение

$$P\{\xi(t_n) \leq \xi_n \mid \xi(t_1) = \xi_1, \dots, \xi(t_{n-1}) = \xi_{n-1}\} = P\{\xi(t_n) \leq \xi_n \mid \xi(t_{n-1}) = \xi_{n-1}\}. \quad (3.1.1)$$

| Значения аргумента | Значения процесса  |  |
|--------------------|--|--|
|                    | Дискретное   | Непрерывное  |
| Дискретные         |  <p>Цепь Маркова</p>                    |  <p>Марковская последовательность</p>          |
| Непрерывные        |  <p>Дискретный марковский процесс</p> |  <p>Непрерывнозначный марковский процесс</p> |

Для трех моментов времени  $t_i > t_j > t_k$  формула (1) принимает вид

$$P\{\xi(t_i) \leq \xi_i \mid \xi(t_k) = \xi_k, \xi(t_j) = \xi_j\} = P\{\xi(t_i) \leq \xi_i \mid \xi(t_j) = \xi_j\}. \quad (3.1.2)$$

Поэтому часто говорят, что характерное свойство марковских процессов состоит в следующем: если точно известно состояние марковского процесса в настоящий момент времени ( $t_j$ ), то будущее состояние (при  $t_i$ ) не зависит от прошлого состояния (при  $t_k$ ).

В качестве определения марковского процесса можно также принять следующее соотношение, имеющее симметричный вид относительно времени:

$$P\{\xi(t_i) \leq \xi_i, \xi(t_k) \leq \xi_k | \xi(t_j) = \xi_j\} = P\{\xi(t_i) \leq \xi_i | \xi(t_j) = \xi_j\} \times \\ \times P\{\xi(t_k) \leq \xi_k | \xi(t_j) = \xi_j\}. \quad (3.1.3)$$

Такая запись означает, что при фиксированном состоянии процесса в настоящий момент времени  $t_j$  будущее (при  $t_i$ ) и прошлое (при  $t_k$ ) состояния марковского процесса независимы.

Из приведенных определений следует, что для марковских процессов  $n$ -мерная п.в. (или функции распределения), которая дает полное описание любого сл.пр., может быть представлена в виде

$$p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = p(\xi_1) \prod_{i=1}^{n-1} p(\xi_{i+1} | \xi_i). \quad (3.1.4)$$

Это означает, что любое  $n$ -мерное распределение марковского процесса может быть найдено по формуле (4), если известны одномерное распределение процесса и условные п.в. (или вероятности) перехода. Иначе говоря, описание простого марковского процесса достигается заданием его двумерной п.в.

$$p_2(\xi_1, \xi_2) = p(\xi_1) p(\xi_2 | \xi_1). \quad (3.1.5)$$

Укажем еще одно общее и важное свойство непрерывных во времени марковских процессов: для них эволюция вероятности перехода  $P\{\xi(t) \leq \xi | \xi(t_0) = \xi_0\}$  описывается уравнением вида

$$dP/dt = \mathcal{L}P, \quad (3.1.6)$$

где  $\mathcal{L}$  — некоторый линейный оператор (матрица, дифференциальный оператор и др.). Это позволяет исследовать статистические характеристики подобных марковских процессов при помощи хорошо разработанных методов решения соответствующих дифференциальных уравнений. Характер начальных и граничных условий для уравнения (6) может быть различным и определяется существом рассматриваемой физической задачи.

Рассмотрим способы описания и методы решения основных задач для указанных четырех видов марковских процессов. Процессы с дискретными значениями обозначим  $\theta(t)$ , а с непрерывными  $\lambda(t)$ .

## МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

### Теоретические сведения

Цепи Маркова [3, 4] являются разновидностью марковских процессов, когда и область определения и область значений процесса являются дискретными, т.е. все возможные значения процесса образуют дискретное множество, а сами значения определены только в дискретные моменты времени:

$$\xi(t) = \theta_1, \dots, \theta_M, \quad t = t_0, \dots, t_k, \dots,$$

где  $\theta_1, \dots, \theta_M$  — возможные значения процесса  $\xi(t)$ ;  $t_0, \dots, t_k, \dots$  — моменты времени, в которые определен процесс  $\xi(t)$ . Далее будем использовать обозначение  $\xi_k = \xi(t_k)$ .

Для цепей Маркова общего вида (сложных цепей) справедливо свойство

$$P\{\xi_k | \xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \dots, \xi_0\} = P\{\xi_k | \xi_{k-1}, \dots, \xi_{k-l}\}, \quad (2.1)$$

где  $l$  — порядок цепи, т.е. количество значений цепи, непосредственно предшествующих значению  $\xi_k$ , от которых оно зависит.

Поскольку сложная цепь ( $l > 1$ ) может сведена к простой цепи ( $l = 1$ ) для  $l$ -мерного вектора, далее рассматриваются только простые цепи, для которых (2.1) переходит в

$$P\{\xi_k | \xi_{k-1}, \xi_{k-2}, \dots, \xi_0\} = P\{\xi_k | \xi_{k-1}\}. \quad (2.2)$$

Основной вероятностной характеристикой цепи Маркова является совокупность условных вероятностей

$$\pi_{ij}(m, n) = P\{\xi_n = \theta_j | \xi_m = \theta_i\}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad 0 \leq m \leq n,$$

которые образуют матрицу вероятностей перехода

$$\pi(m, n) = \begin{bmatrix} \pi_{11}(m, n) & \dots & \pi_{1N}(m, n) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{N1}(m, n) & \dots & \pi_{NN}(m, n) \end{bmatrix}.$$

Вероятности перехода должны удовлетворять условиям

$$\pi_{ij}(m, n) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \pi_{ij}(m, n) = 1.$$

С помощью матрицы  $\pi(m, n)$  можно вычислить безусловные вероятности значений цепи на произвольном шаге  $n$ :

$$P(n) = \pi^T(m, n)P(m), \quad 0 \leq m \leq n,$$

$$P(n) = [P\{\xi_n = \theta_1\}, \dots, P\{\xi_n = \theta_N\}]^T,$$

$$P(m) = [P\{\xi_m = \theta_1\}, \dots, P\{\xi_m = \theta_N\}]^T,$$

где  $P(n)$  – вектор искомых вероятностей;  $P(m)$  – вектор известных вероятностей значений цепи на одном из предшествующих шагов  $m$ .

Матрица  $\pi(m, n)$  может быть выражена через матрицы одношаговых вероятностей перехода:

$$\pi(m, n) = \prod_{k=m}^{n-1} \pi(k, k+1), \quad 0 \leq m < n, \quad n \geq 1.$$

В том случае, если цепь является однородной, т.е. матрица  $\pi(m, n)$  зависит от разности своих аргументов:

$$\pi(l, k) = \pi(k-l) = \pi(n), \quad n = k-l \geq 0,$$



то матрица вероятностей перехода на  $n$  шагов может быть представлена в виде

$$\pi(n) = [\pi(1)]^n = \pi^n, \quad \pi = \pi(1), \quad (2.3)$$

где  $\pi$  – матрица одношаговых вероятностей перехода однородной цепи.

Вектор безусловных вероятностей в этом случае определяется выражением

$$P(n) = [\pi^n]^T P(0), \quad (2.4)$$

где  $P(0)$  – вектор вероятностей значений цепи в начальный момент времени.

Для стационарных цепей существует предел

$$P_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(n),$$

где  $P_{\infty}$  – вектор финальных (стационарных) вероятностей, которые можно найти также из уравнения

$$P_{\infty} = \pi^T P_{\infty}$$

с соблюдением ограничения для элементов  $P_{\infty}$ :

$$\sum_{i=1}^N [P_{\infty}]_i = 1.$$

### Пример решения задачи

Дана однородная цепь Маркова  $\xi(t_k)$  с двумя состояниями  $\theta_1$  и  $\theta_2$  (рис. 1).

Ваданы вероятности переходов из состояния в состояние за один шаг:

$$P\{\theta_1 \rightarrow \theta_2\} = \alpha, \quad P\{\theta_1 \rightarrow \theta_1\} = 1 - \alpha, \quad P\{\theta_2 \rightarrow \theta_1\} = \beta, \quad P\{\theta_2 \rightarrow \theta_2\} = 1 - \beta, \\ 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1,$$

а также вероятности состояний в начальный момент времени:

$$P\{\xi_0 = \theta_1\} = p_1(0), \quad P\{\xi_0 = \theta_2\} = p_2(0).$$

Требуется найти вероятности состояний на произвольном шаге  $n$  и финальные вероятности.

**Решение.** Для нахождения вероятностей состояний цепи на  $n$ -м шаге требуется знать матрицу вероятностей перехода на  $n$  шагов, которая для рассматриваемой однородной цепи определяется вы-

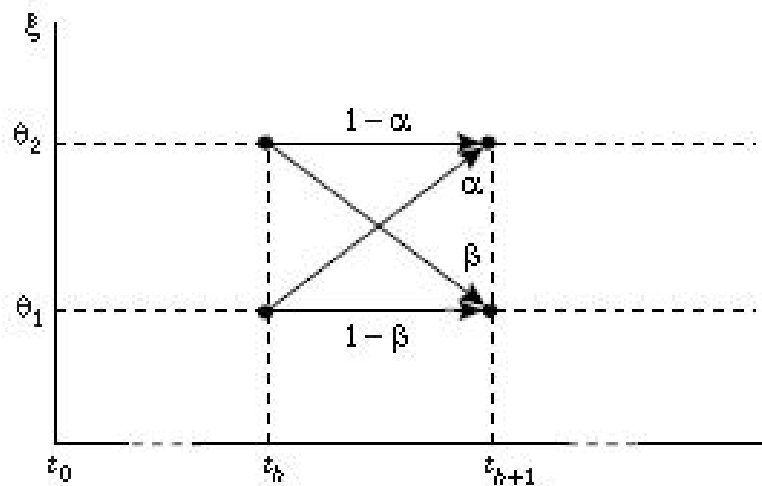


Рис. 1. Цепь Маркова с двумя состояниями

ражением (2.3). Таким образом, необходимо возвести в  $n$ -ю степень матрицу одношаговых вероятностей перехода, которая в соответствии с исходными данными имеет вид

$$\pi = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}.$$

Возведение матрицы  $\pi$  в степень можно коренным образом упростить, если использовать для  $\pi$  каноническое разложение [6]

$$\pi = B\Lambda B^{-1}, \quad (2.5)$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица, составленная из собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $\pi$ :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix};$$

$B$  — матрица, составленная из собственных векторов матрицы  $\pi$ ;  $B^{-1}$  — матрица, обратная  $B$ .

На основе разложения (2.5) можно записать

$$\begin{aligned} \pi^n &= B \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} B^{-1} B \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} B^{-1} \dots B \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} B^{-1} = \\ &= B \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} I \dots I \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} B^{-1} = \\ &= B \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} B^{-1} = \end{aligned}$$

$$= B \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^n B^{-1} = B \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} B^{-1} = B \Lambda^n B^{-1}, \quad (2.6)$$

где  $I = B^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  — единичная матрица.

Собственные числа матрицы  $A$  равны корням характеристического уравнения  $|\pi - \lambda I| = 0$  при условии, что корни различны:

$$|\pi - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \alpha - \lambda & \alpha \\ \beta & 1 - \beta - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \alpha - \lambda)(1 - \beta - \lambda) - \alpha\beta = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения соответственно равны:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 - \alpha - \beta$  и при  $\alpha \neq -\beta$  условие  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  выполнено ( $\lambda_1 = \lambda_2$  при  $\alpha = \beta = 0$ , но такие значения  $\alpha$  и  $\beta$  не соответствуют исходным данным).

Для определения матрицы  $B$  представим ее в виде  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

и на основании (2.5) запишем для нее уравнение

$$\pi B - B \Lambda = 0,$$

или в скалярном виде:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha - \lambda_1)b_{11} + \alpha b_{21} &= 0, & \beta b_{11} + (1 - \beta - \lambda_1)b_{21} &= 0, \\ (1 - \alpha - \lambda_2)b_{12} + \alpha b_{22} &= 0, & \beta b_{12} + (1 - \beta - \lambda_2)b_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Данная система равносильна двум соотношениям

$$b_{21} = b_{11}, \quad b_{22} = -\frac{\beta}{\alpha} b_{12}, \quad b_{11} \neq 0, \quad b_{12} \neq 0,$$

где элементы  $b_{11}, b_{12}$  можно задавать любыми, лишь бы они не были нулевыми.

Пусть  $b_{11} = 1, b_{12} = \alpha/\beta$ , тогда получим

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \alpha/\beta \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} 1 & \alpha/\beta \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Теперь на основании (2.6) определяем матрицу  $\pi^n$ :

$$\pi^n = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} 1 & \alpha/\beta \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - \alpha - \beta)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha/\beta \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta + \alpha(1 - \alpha - \beta)^n & \alpha [1 - (1 - \alpha - \beta)^n] \\ \beta [1 - (1 - \alpha - \beta)^n] & \alpha + \beta(1 - \alpha - \beta)^n \end{bmatrix}.$$

Вероятности состояний на  $n$ -м шаге определяем согласно (2.4):

$$\begin{aligned} P(n) &= \begin{bmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \end{bmatrix} = (\pi^n)^T \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta + \alpha(1 - \alpha - \beta)^n & \beta [1 - (1 - \alpha - \beta)^n] \\ \alpha [1 - (1 - \alpha - \beta)^n] & \alpha + \beta(1 - \alpha - \beta)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta + [\alpha p_1(0) - \beta p_2(0)](1 - \alpha - \beta)^n \\ \alpha + [\beta p_2(0) - \alpha p_1(0)](1 - \alpha - \beta)^n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где было учтено, что  $p_1(0) + p_2(0) = 1$ .

Устремляя  $n \rightarrow \infty$  и учитывая, что  $|1 - \alpha - \beta| < 1$ , и, следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha - \beta)^n = 0$ , убеждаемся, что финальные вероятности существуют:

$$\begin{aligned} P_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta + [\alpha p_1(0) - \beta p_2(0)](1 - \alpha - \beta)^n \\ \alpha + [\beta p_2(0) - \alpha p_1(0)](1 - \alpha - \beta)^n \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## ДИСКРЕТНЫЙ МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС

### Теоретические сведения

Процесс данного вида также как и цепь Маркова имеет конечное (счетное) множество возможных значений [3, 4], но в отличие от цепи переходы между состояниями могут происходить в любые моменты времени, поэтому процесс является непрерывным по времени в смысле вероятностных характеристик, но реализации процесса таковыми конечно же не являются.

Основной вероятностной характеристикой дискретного марковского процесса также как у цепи Маркова является матрица вероятностей перехода, но временные ее аргументы теперь являются непрерывными величинами:

$$\pi(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} \pi_{11}(t_1, t_2) & \dots & \pi_{1N}(t_1, t_2) \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{N1}(t_1, t_2) & \dots & \pi_{NN}(t_1, t_2) \end{bmatrix},$$

$$\pi_{ij}(t_1, t_2) = P\{\xi(t_2) = \theta_j | \xi(t_1) = \theta_i\}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2.$$

Обычно в качестве более раннего момента времени  $t_1$  записывают начальный момент  $t_0$ , а в качестве  $t_2$  — момент времени  $t$ , поэтому  $\pi(t_1, t_2) = \pi(t_0, t)$ .

Вероятности перехода должны удовлетворять начальным условиям

$$\pi_{ij}(t_0, t_0) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

и условию нормировки

$$\sum_{j=1}^N \pi_{ij}(t_0, t) = 1, \quad \pi_{ij}(t_0, t) \geq 0. \quad (3.1)$$

Основным уравнением, описывающим изменение  $\pi(t_0, t)$  во времени, является уравнение Колмогорова

$$\frac{d\pi(t_0, t)}{dt} = \pi(t_0, t)A(t), \quad \pi(t_0, t_0) = I, \quad (3.2)$$

где  $I$  — единичная матрица, задающая начальные условия;  $A(t)$  — матрица инфинитесимальных вероятностей перехода, т.е. величина, определяющая приращение  $\pi$  за бесконечно малое время  $\Delta t$ :

$$\pi(t, t + \Delta t) = I + A(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad (3.3)$$

где  $o(\Delta t)$  — величина, пренебрежимо малая по сравнению с  $\Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Для элементов матрицы  $A$  должны выполняться условия

$$a_{ii}(t) = - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N a_{ij}(t), \quad a_{ij}(t) \geq 0. \quad (3.4)$$

Безусловные вероятности состояния определяются соотношением, аналогичным (2.4),

$$P(t) = \pi^T(t_0, t)P(t_0). \quad (3.5)$$

Заметим, что для безусловных вероятностей можно записать дифференциальное уравнение, аналогичное (3.2),

$$\frac{dP(t)}{dt} = A^T(t)P(t), \quad P(t)|_{t=t_0} = P(t_0), \quad (3.6)$$

Уравнения (3.2), (3.6) по своему виду относятся к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям. В общем случае для их решения необходимо использовать приближенные методы. Однако, если матрицы  $A$  не изменяется во времени, т.е.  $A(t) = A = \text{const}$ , то существуют аналитические их решения

$$\pi(t_0, t) = e^{A(t-t_0)}, \quad P(t) = e^{A^T(t-t_0)}P(t_0),$$

где  $e^{At}$  — матричная экспонента. Марковский процесс в этом случае является однородным, и матрица  $\pi(t_0, t)$  обладает свойством

$$\pi(t_0, t) = \pi(t - t_0) = \pi(\tau), \quad \tau = t - t_0.$$

Если существует предел

$$\pi_\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \pi(\tau),$$

то существуют и финальные (стационарные) вероятности состояний  $P_\infty$ , которые могут быть найдены из уравнения (3.6) при подстановке  $dP(t)/dt = 0$ :

$$A^T P_\infty = 0,$$

при этом элементы вектора  $P_\infty$  должны также удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^N [P_\infty]_i = 1.$$

### Пример решения задачи

Дан дискретный марковский процесс  $\xi(t)$ , имеющий только два возможных состояния  $\theta_1$  и  $\theta_2$  (рис. 2), и заданы вероятности перехода за малое время  $\Delta t$ :

$$P\{\theta_1 \rightarrow \theta_2\} = \alpha \Delta t, \quad P\{\theta_2 \rightarrow \theta_1\} = \beta \Delta t, \quad \alpha, \beta > 0,$$

а также вероятности состояний в начальный момент времени:

$$P\{\xi(t_0) = \theta_1\} = p_1(t_0), \quad P\{\xi(t_0) = \theta_2\} = p_2(t_0).$$

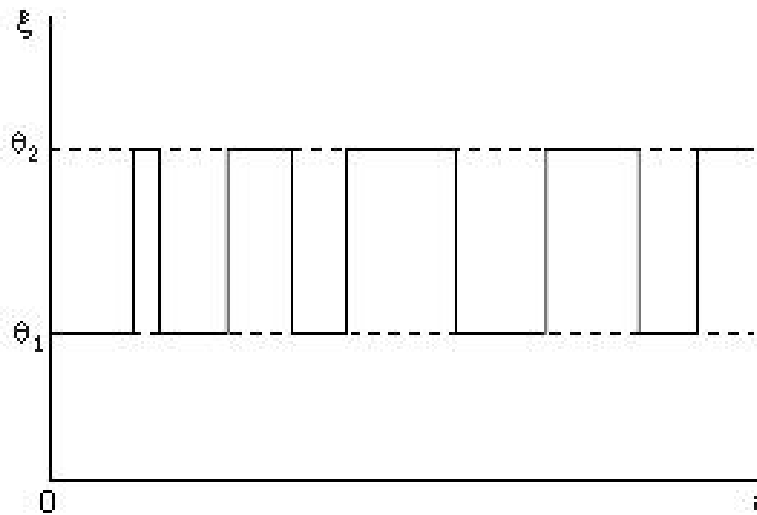


Рис. 2. Дискретный марковский процесс с двумя состояниями

Требуется найти вероятности состояний в произвольный момент времени  $t$  и финальные вероятности.

**Решение.** Внедиагональные элементы матрицы  $A$  определяются на основании (3.3) непосредственно:  $a_{12} = \alpha$ ,  $a_{21} = \beta$ . Диагональные элементы матрицы  $A$  определяются на основании (3.4) с учетом значений элементов  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ :

$$a_{11} = -\alpha, \quad a_{22} = -\beta.$$

Поскольку  $a_{ij} = \text{const}$ , то процесс  $\xi(t)$  является однородным. Уравнение Колмогорова (3.2) в скалярной записи имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \pi_{11}(t_0, t) &= -\alpha \pi_{11}(t_0, t) + \beta \pi_{12}(t_0, t), \\ \frac{d}{dt} \pi_{12}(t_0, t) &= -\beta \pi_{12}(t_0, t) + \alpha \pi_{11}(t_0, t), \\ \frac{d}{dt} \pi_{21}(t_0, t) &= -\alpha \pi_{21}(t_0, t) + \beta \pi_{22}(t_0, t), \\ \frac{d}{dt} \pi_{22}(t_0, t) &= -\beta \pi_{22}(t_0, t) + \alpha \pi_{21}(t_0, t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Используя вытекающее из (3.1) представление  $\pi_{12}(t_0, t) = 1 - \pi_{11}(t_0, t)$ , первое из четырех уравнений системы становится независимым от других:

$$\frac{d}{dt} \pi_{11}(t_0, t) = -(\alpha + \beta) \pi_{11}(t_0, t) + \beta, \quad \pi_{11}(t_0, t_0) = 1, \quad t \geq t_0.$$

Решая это линейное дифференциальное неоднородное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, получим

$$\begin{aligned} \pi_{11}(t_0, t) &= \beta e^{-(\alpha+\beta)t} \int_{t_0}^t e^{(\alpha+\beta)u} du + e^{-(\alpha+\beta)(t-t_0)} = \\ &= \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)\tau}, \quad \tau = t - t_0 \geq 0. \end{aligned}$$

Решая остальные уравнения системы, получим

$$\begin{aligned} \pi_{12}(\tau) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left[ 1 - e^{-(\alpha+\beta)\tau} \right], \quad \pi_{21}(\tau) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \left[ 1 - e^{-(\alpha+\beta)\tau} \right], \\ \pi_{22}(\tau) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)\tau}. \end{aligned}$$

Безусловные вероятности состояний определим на основании (3.5):

$$\begin{aligned} P(t) &= \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} = \pi^T(t-t_0) \begin{bmatrix} p_1(t_0) \\ p_2(t_0) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{bmatrix} \beta + \alpha e^{-(\alpha+\beta)(t-t_0)} & \beta \left[ 1 - e^{-(\alpha+\beta)(t-t_0)} \right] \\ \alpha \left[ 1 - e^{-(\alpha+\beta)(t-t_0)} \right] & \alpha + \beta e^{-(\alpha+\beta)(t-t_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t_0) \\ p_2(t_0) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{bmatrix} \beta + [\alpha p_1(t_0) - \beta p_2(t_0)] e^{-(\alpha+\beta)(t-t_0)} \\ \alpha + [\beta p_2(t_0) - \alpha p_1(t_0)] e^{-(\alpha+\beta)(t-t_0)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Финальные вероятности получим посредством предельного перехода при  $t \rightarrow \infty$ :

$$P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{bmatrix} \beta + [\alpha p_1(t_0) - \beta p_2(t_0)] e^{-(\alpha+\beta)(t-t_0)} \\ \alpha + [\beta p_2(t_0) - \alpha p_1(t_0)] e^{-(\alpha+\beta)(t-t_0)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

## НЕПРЕРЫВНЫЙ МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС

### Теоретические сведения

Главной особенностью непрерывного марковского процесса является то, что его значения могут быть любыми из заданного числового интервала, и что его состояние за малое время  $\Delta t$  может



измениться тоже только на малую величину. Наиболее распространенным видом непрерывного марковского процесса является рассматриваемый далее диффузионный марковский процесс [3, 4], исчерпывающими параметрами которого являются:

1) коэффициент сноса

$$a(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M\{\xi(t + \Delta t) - \xi(t) | \xi(t) = x\} \quad (4.1)$$

– средняя скорость изменения значения процесса  $\xi(t)$  в момент времени  $t$  при условии, что в этот момент процесс имеет значение  $x$ ;

2) коэффициент диффузии

$$b(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M\{[\xi(t + \Delta t) - \xi(t)]^2 | \xi(t) = x\} \quad (4.2)$$

– скорость увеличения дисперсии процесса  $\xi(t)$  на бесконечно малом отрезке времени  $[t, t + \Delta t]$  при условии, что в момент  $t$  процесс имеет значение  $x$ .

Так как значения процесса имеют непрерывное распределение, то главной вероятностной характеристикой процесса  $\xi(t)$  является плотность вероятности перехода  $\pi(x, t | x_0, t_0)$ , подчиняющаяся уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), или прямому уравнению Колмогорова

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \pi(x, t | x_0, t_0) = \\ & = -\frac{\partial}{\partial x} [a(t, x) \pi(x, t | x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [b(t, x) \pi(x, t | x_0, t_0)], \quad t \geq t_0, \quad (4.3) \end{aligned}$$

с начальным условием  $\pi(x, t | x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$ .

В общем случае для  $\pi(x, t | x_0, t_0)$  должны задаваться также и граничные условия. Если процесс  $\xi(t)$  не имеет ограничений на свои значения, то граничные условия специально задавать не нужно, а достаточно выполнения нулевых (естественных) граничных условий

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \pi(x, t | x_0, t_0) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x} \pi(x, t | x_0, t_0) = 0.$$

Безусловную плотность вероятности процесса  $\xi(t)$  в произвольный момент времени  $t$  можно определить при помощи выражения

$$p(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x, t | x_0, t_0) p(x_0) dx_0,$$

где  $p(x, t)$  – искомая безусловную плотность вероятности;  $p(x_0)$  – плотность вероятности начального значения  $\xi(t_0)$ .

Если коэффициенты сноса и диффузии не зависят от времени, т. е.

$$a(t, x) = a(x), \quad b(t, x) = b(x),$$

то может существовать стационарная плотность вероятности перехода, которая не будет зависеть от начальной плотности вероятности:  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t | x_0, t_0) = p_{\infty}(x)$ . Поэтому  $p_{\infty}(x)$  будет совпадать с безусловной стационарной плотностью вероятности:  $p_{\infty}(x) = p_{\infty}(x)$ . Най-

ти  $p_{\infty}(x)$  можно из уравнения (4.3) заменив в нем  $p(x, t | x_0, t_0)$  на  $p_{\infty}(x)$ , приравняв  $\frac{\partial}{\partial t} p_{\infty}(x) = 0$ , а затем проинтегрировав один раз по  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} [b(x)p_{\infty}(x)] - 2a(x)p_{\infty}(x) = 0,$$

где приняты нулевые граничные условия.

Основной моделью диффузионного марковского процесса является стохастическое дифференциальное уравнение

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = g(t, \xi(t)) + f(t, \xi(t))n(t), \quad (4.4)$$

$g(t, \xi(t))$ ,  $f(t, \xi(t))$  – заданные детерминированные функции, удовлетворяющие условию

$$[g(t, x)]^2 + [f(t, x)]^2 \leq c(1 + |x|)^2, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad c = \text{const} > 0;$$

$n(t)$  – белый гауссовский шум.

Коэффициенты сноса и диффузии, соответствующие функциям  $g(t, \xi(t))$ ,  $f(t, \xi(t))$  определяются (для симметризованной формы стохастических интегралов) соотношениями

$$a(t, x) = g(t, x) + \frac{1}{2}Nf(t, x)\frac{df(t, x)}{dx},$$

$$b(t, x) = Nf^2(t, x),$$

где  $N$  – интенсивность шума  $n(t)$ . Если  $f(t, x) = f(t)$ , то  $a(t, x) = g(t, x)$ .

Все приведенные соотношения имеют обобщения на случай векторного процесса  $\xi(t)$ .

## Пример решения задачи

Случайный процесс задается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = -\beta\xi(t) + \beta n(t), \quad \xi(t_0) = \xi_0, \quad (4.5)$$

где  $\beta > 0$  – коэффициент уравнения;  $n(t)$  – центрированный стационарный белый гауссовский шум с ковариационной (корреляционной) функцией  $K(\tau) = N\delta(\tau)$ ,  $N$  – интенсивность шума.

Требуется составить уравнение ФПК для плотности вероятности перехода и найти стационарное распределение.

**Решение.** Для нахождения коэффициентов сноса и диффузии процесса  $\xi(t)$  (см. (4.1), (4.2)), необходимых для составления уравнения ФПК, потребуется решение уравнения (4.5):

$$\xi(t) = \xi_0 e^{-\beta(t-t_0)} + \beta \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\tau)} n(\tau) d\tau. \quad (4.6)$$

Приращение процесса будет определяться выражением

$$\xi(t+\Delta t) - \xi(t) = \int_t^{t+\Delta t} [-\beta\xi(\tau) + \beta n(\tau)] d\tau.$$

Для условного математического ожидания приращения можно записать

$$\begin{aligned} M\{\xi(t+\Delta t) - \xi(t) | \xi(t) = x\} &= M\left\{\int_t^{t+\Delta t} [-\beta\xi(\tau) + \beta n(\tau)] d\tau | \xi(t) = x\right\} = \\ &= -\beta \int_t^{t+\Delta t} M\{\xi(\tau) | \xi(t) = x\} d\tau + \beta \int_t^{t+\Delta t} M\{n(\tau) | \xi(t) = x\} d\tau. \end{aligned}$$

Второе слагаемое равно нулю, так как шум центрирован, т. е.  $M\{n(t)\} = 0$ . Определяем коэффициент сноса

$$a(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ -\beta \int_t^{t+\Delta t} M\{\xi(\tau) | \xi(t) = x\} d\tau \right] = -\beta \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} x \Delta t = -\beta x.$$

Для условного математического ожидания квадрата приращения можно записать

$$\begin{aligned}
M\left\{[\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]^2 \mid \xi(t) = x\right\} &= M\left\{\left[\int_t^{t+\Delta t} [-\beta \xi(\tau) + \beta n(\tau)] d\tau\right]^2 \mid \xi(t) = x\right\} = \\
&= \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} M\{[-\beta \xi(\tau_1) + \beta n(\tau_1)][-\beta \xi(\tau_2) + \beta n(\tau_2)] \mid \xi(t) = x\} d\tau_1 d\tau_2 =
\end{aligned}$$

(учитывая, что  $\Delta t \rightarrow 0$ )

$$= (\beta x)^2 \left(\int_t^{t+\Delta t} d\tau\right)^2 + \beta^2 M\left\{\left[\int_t^{t+\Delta t} n(\tau) d\tau\right]^2\right\} = (\beta x)^2 (\Delta t)^2 + \beta^2 N \Delta t.$$

Откуда определяем коэффициент диффузии

$$b(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ (\beta x)^2 (\Delta t)^2 + \beta^2 N \Delta t \right\} = \beta^2 N.$$

Записываем теперь уравнение ФПК

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \pi(x, t \mid x_0, t_0) &= -\frac{\partial}{\partial x} [-\beta x \pi(x, t \mid x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\beta^2 N \pi(x, t \mid x_0, t_0)] = \\
&= \beta \frac{\partial}{\partial x} [x \pi(x, t \mid x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \beta^2 N \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\pi(x, t \mid x_0, t_0)]. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Так как коэффициент сноса линейно зависит от значения процесса, а коэффициент диффузии является константой, то решением уравнения ФПК будет гауссовская плотность вероятности

$$\pi(x, t \mid x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(t \mid x_0, t_0)}} \exp\left\{-\frac{[x - m(t \mid x_0, t_0)]^2}{2D(t \mid x_0, t_0)}\right\}, \quad (4.8)$$

где  $m(t \mid x_0, t_0)$ ,  $D(t \mid x_0, t_0)$  — условные математическое ожидание и дисперсия. Для нахождения этих параметров необходимо подставить (4.8) в (4.7) и получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для них, решение которой имеет вид

$$\begin{aligned}
m(t \mid x_0, t_0) &= x_0 e^{-\beta(t-t_0)}, \\
D(t \mid x_0, t_0) &= D(t, t_0) = \frac{\beta N}{2} \left[1 - e^{-2\beta(t-t_0)}\right].
\end{aligned}$$

Параметры стационарной плотности вероятности найдем при помощи предельных переходов

$$m_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} m(t | x_0, t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_0 e^{-\beta(t-t_0)} = 0,$$

$$D_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} D(t, t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta N}{2} [1 - e^{-2\beta(t-t_0)}] = \frac{\beta N}{2}.$$

Заметим, что условные математическое ожидание и дисперсию процесса  $\xi(t)$  можно было бы найти, работая непосредственно с выражением (4.6), не прибегая к решению уравнения (4.7), приняв  $\xi_0 = x_0$ .