РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА ~~№5~~ N 3

К электрической цепи, схема которой показана на рис. 1, приложено периодическое несинусоидальное напряжение u частотой $f = 50$ Гц. Форма этого напряжения задана в табл. 2. Параметры L, R, C известны и выбираются из табл. 3 по номеру цепи и номеру приложенного напряжения.

Требуется рассчитать ток i, протекающий в этой цепи. При расчетах ограничимся тремя первыми членами ряда Фурье. Данные для расчета приведены в табл. 5, 6 и 7.

Таблица 5

Номер варианта по списку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Номер схемы Номер схемы выбирается по варианту	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
Номер формы напряжения Номер формы напряжения выбирается по варианту	5	5	4	4	3	3	2	2	1	1
U_m, В Значение U_m выбирается по варианту	19,62		39,5		78,5		157		314	

Таблица 6

Номер напряжения	Наименование параметра	Номер схемы 1	2	3	4	5
1	R, Ом	2	3	4	5	10
	L, мГн	6,36	9,5	12,73	16	32
	С, мкф	1590	1062	796	636	318
	R, Ом	2	3	4	5	10

2	L, мГн	3,18	4,75	6,37	8	16
	C, мкф	795	531	398	318	159
3	*R*, Ом	2	3	4	5	10
	L, мГн	3,18	4,75	6,37	8	16
	C, мкф	795	531	398	318	159
4	*R*, Ом	2	3	4	5	10
	L, мГн	2,12	3,2	4,25	5,34	12,7
	C, мкф	530	353	266	212	106
5	*R*, Ом	2	3	4	5	10
	L, мГн	1,06	1,6	2,12	2,7	5,34
	C, мкф	265	176	133	106	53

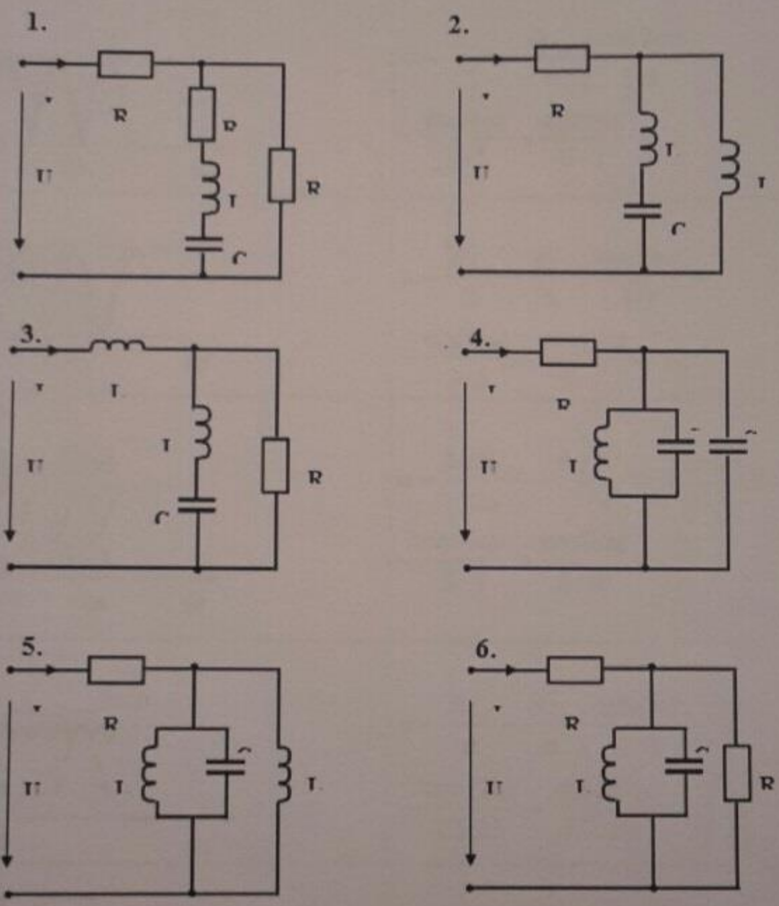


Рис. 5

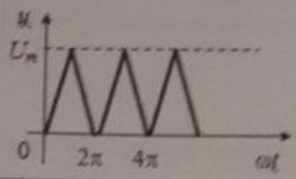
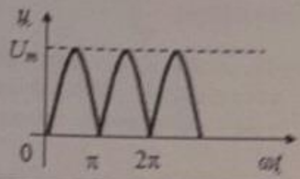
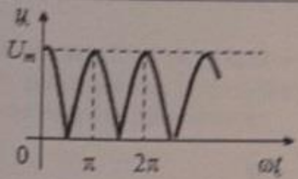
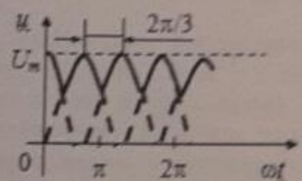
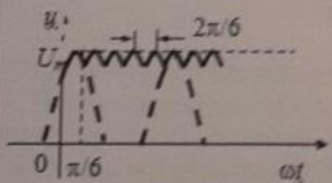
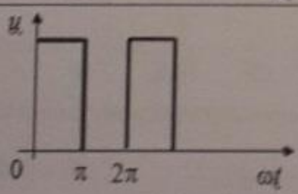
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Перед решением этой задачи необходимо изучить материал курса, относящийся к расчету линейных цепей несинусоидального тока.

Алгоритм расчета линейной цепи, находящейся под воздействием периодического несинусоидального напряжения, заключается в следующем.

1. Путем разложения несинусоидального напряжения в ряд Фурье, это напряжение представляем в виде суммы постоянной составляющей и гармоник частоты $k\omega$ ($k = 1,2,3...$), где $\omega = 2\pi f$.

Таблица 7

№	График	Формула разложения в ряд Фурье
1.		$u=\frac{U_m}{2}-\frac{4U_m}{\pi}\left(\frac{\cos 1\omega t}{1^2}+\frac{\cos 3\omega t}{3^2}+\frac{\cos 5\omega t}{5^2}+\ldots\right)$
2.		$u=\frac{2U_m}{2}-\frac{4U_m}{\pi}\left(\frac{\cos 2\omega t}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4\omega t}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6\omega t}{5\cdot 7}+\ldots\right)$
3.		$u=\frac{2U_m}{2}+\frac{4U_m}{\pi}\left(\frac{\cos 2\omega t}{1\cdot 3}-\frac{\cos 4\omega t}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6\omega t}{5\cdot 7}-\ldots\right)$
4.		$u=\frac{3\sqrt{3}U_m}{2\pi}+\frac{3\sqrt{3}U_m}{\pi}\left(\frac{\cos 3\omega t}{2\cdot 4}-\frac{\cos 6\omega t}{5\cdot 7}+\frac{\cos 9\omega t}{8\cdot 10}-\ldots\right)$
5.		$u=\frac{3U_m}{\pi}+\frac{6U_m}{\pi}\left(\frac{\cos 6\omega t}{5\cdot 7}-\frac{\cos 12\omega t}{11\cdot 13}+\frac{\cos 18\omega t}{17\cdot 19}-\ldots\right)$
6.		$u=\frac{U_m}{2}+\frac{2U_m}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\ldots\right)$

2. Рассчитываем токи в цепи от воздействия постоянной составляющей несинусоидального напряжения.

3. Рассчитываем комплексные токи в цепи от воздействия гармоники частоты $k\omega$.

4. Для найденных комплексных токов записываем соответствующие мгновенные значения.

5. В соответствии с методом наложения (суперпозиции) определяем искомые несинусоидальные токи как сумму токов по пп. 2 и 4.

Отметим, что формулы разложения в ряд Фурье для большинства несинусоидальных периодических напряжений, используемых в различных областях электроники, приводятся в электротехнических, математических и иных справочниках. В табл. 4 дано несколько примеров такого разложения. Особенность этих формул состоит в том, что, кроме гармонических составляющих вида $\sin(\omega t + \psi)$, в них могут содержаться гармонические составляющие вида $-\sin(\omega t + \psi)$, $\cos(\omega t + \psi)$, $-\cos(\omega t + \psi)$. Поэтому в п. 1 алгоритма необходимо привести ряд Фурье к виду, соответствующему комплексному виду. Это приведение осуществляется с помощью известных тригонометрических соотношений:

$$-\sin \omega t = \sin(\omega t + 180^\circ),$$

$$\pm \cos \omega t = \sin(\omega t \pm 90^\circ).$$

Так, например, формула разложения, приведенная на поз. 3 табл. 4, после приведения приобретает вид:

$$u = \frac{2U_m}{\pi} + \frac{4U_m}{3\pi}\sin(2\omega t + 90^\circ) + \frac{4U_m}{15\pi}\sin(4\omega t - 90^\circ) + \ldots$$

Пример 1. К цепи, изображенной на поз. 6 (рис. 5), приложено периодическое несинусоидальное напряжение u, (поз. 6 табл. 7.) Частота напряжения f = 50 Гц, максимальное напряжение U_m = 314 В. Параметры цепи R = 5 Ом, L = 5,34 мГн, C = 212 мкФ.

Требуется: рассчитать ток i цепи, ограничившись первыми тремя членами ряда Фурье.

Решение **1.** Представим напряжение u рядом Фурье. Для этого воспользуемся формулой разложения в ряд Фурье, данной в табл. 7, приведем ее к виду, удобному для применения метода наложения:

$$u = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi}\sin \omega t + \frac{2U_m}{3\pi}\sin 3\omega t =$$

$$157 + 200\sin \omega t + 66{,}7\sin 3\omega t \ \text{ В.}$$

2. Рассчитаем ток от воздействия постоянной составляющей напряжения (f = 0). В этом случае U_0 = 157 В, R = 5 Ом, X_L (0) = 0, X_C (0) = ∞. Ветвь с емкостью не пропускает постоянного тока (обрыв цепи), а через ветвь с индуктивностью постоянный ток проходит без сопротивления (короткое замыкание). Поэтому постоянная составляющая тока проходит только через ветвь с сопротивлением R и сразу замыкается на индуктивность L. Тока в сопротивлении R, включенном параллельно L и C, нет. Таким образом:

$$I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{157}{5} = 31{,}4 \ \text{ А.}$$

3. Определим комплексные токи первой и третьей гармоник.

3.1. Первая гармоника (f = 50 Гц), $u_1 = 200\sin \omega t$ В, R = 5 Ом.

Реактивные сопротивления для первой гармоники:

$$X_L(\omega) = \omega L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 50 \cdot 3{,}34 \cdot 10^{-3} = 1{,}67 \ \text{ Ом},$$

$$X_C(\omega) = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 212 \cdot 10^{-6}} = 15 \ \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление цепи $\underline{Z}(\omega) = \underline{Z}_R(\omega) + \underline{Z}_{RLC}(\omega)$, где

$$\underline{Z}_R(\omega) = R; \qquad \underline{Z}_{RLC}(\omega) = \frac{1}{\underline{Y}_{RLC}(\omega)}.$$

В свою очередь, проводимость параллельного участка цепи

$$\underline{Y}_{RLC}(\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L(\omega)} + \frac{1}{-jX_C(\omega)} =$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{j1{,}67} + \frac{1}{-j15} = 0{,}2 - j0{,}544 \ \text{ См.}$$

Тогда сопротивление параллельного участка цепи

$$\underline{Z}_{RLC}(\omega) = \frac{1}{0{,}2 - j0{,}544} = 0{,}62 + j1{,}64 \ \text{ См.}$$

Комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z}(\omega) = \underline{Z}_R(\omega) + \underline{Z}_{RLC}(\omega) = 5 + 0{,}62 + j1{,}64 = 5{,}85e^{j16{,}3^\circ} \text{ Ом.}$$

Комплексный ток определяется как отношение комплексного напряжения к комплексному сопротивлению. Расчет будем вести в амплитудных значениях тока и напряжения.

$$\dot{I}_{m1} = \frac{\dot{U}_{m1}}{\underline{Z}(\omega)} = \frac{200e^{j0}}{5{,}85e^{j16{,}3}} = 17{,}1e^{-j16{,}3^\circ} \quad \text{А.}$$

3.2. Третья гармоника (f = 150 Гц).

$u_3 = 66{,}7\sin 3\omega t$ В; $R = 5$ Ом; $X_L = (3\omega) = 3X_L(\omega) = 3 \cdot 1{,}67 = 5$ Ом;

$$X_C(3\omega) = \frac{1}{3}X_C(\omega) = \frac{15}{3} = 5 \text{ Ом}.$$

Расчет можно производить аналогично предыдущему с учетом изменившихся величин реактивных сопротивлений. Однако в данном конкретном случае расчет будет упрощен, если заметить, что на параллельном участке L, C имеет место резонанс токов (индуктивное и емкостное сопротивления одинаковы). Сопротивление этого участка имеет бесконечно большое значение и тока на этом участке не будет. Он протекает только через два следующих друг за другом активных сопротивления. Сдвиг фаз между напряжением и током при этом отсутствует, как в чисто реактивной цепи. Поэтому

$$\dot{I}_{m3} = \frac{\dot{U}_{m3}}{2R} = \frac{66{,}7e^{j^\circ}}{10} = 6{,}67e^{j^\circ} \text{ А.}$$

4. Для найденных комплексных амплитуд $\dot{I}_{m1}$ и $\dot{I}_{m3}$ запишем соответствующие мгновенные значения:

$$i_1 = 17{,}1\sin(\omega t - 16{,}3^\circ) \quad \text{А;}$$

$$i_3 = 6{,}67\sin 3\omega t \quad \text{А.}$$

Методом наложения определим несинусоидальный ток в цепи.

$$i = I_0 + i_1 + i_3 = 31{,}4 + 17{,}1\sin(\omega t - 16{,}3^\circ) + 6{,}67\sin 3\omega t \quad \text{А.}$$