Разработка и сравнение инструментальных средств численного интегрирования с заданной точностью

В процессе выполнения курсовой работы необходимо разработать средства вычисления определенного интеграла от заданной функции с указанной точностью, используя различные методы.

Вычисления следует провести в MS Excel с использованием функций листа и с помощью формы, разработанной с применением языка программирования VBA. Также нужно будет в Mathcad привести решение и график подынтегральной функции, а также вычислить значение шага, обеспечивающее требуемую точность. В конце работы сделать вывод об особенностях и эффективности вычислений различными методами.

Форма, создаваемая в MS Excel средствами языка VBA, должна позволять вычислять определенный интеграл для заданной функции с переменными параметрами. Форма должна вызываться кнопкой, расположенной на листе MS Excel. Вычисленный в форме результат должен копироваться на лист в выделенную ячейку. Предусмотреть вычисление тремя методами: прямоугольников, трапеций и парабол (Симпсона). Форма должна позволять указывать требуемую точность вычисления, а также показывать количество отрезков, на которое пришлось разбить интервал интегрирования для достижения указанной точности и оценку точности. Перед вычислением должно проверяться корректное заполнение всех необходимых для расчета параметров. При попытке вычисления в случае отсутствия или недопустимости какого-либо параметра должно выдаваться соответствующее сообщение. Должны выдаваться значения интеграла, вычисленные каждым из указанных методов. Данные для сравнения методов вычисления должны быть записаны на отдельный лист и по ним должна быть автоматически построена диаграмма.

Основные теоретические сведения

Во многих случаях для вычисления определенного интеграла нельзя воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, так как первообразная F не является конечной комбинацией элементарных функций. То есть существует множество так называемых «неберущихся» интегралов. Помимо этого сама подынтегральная функция может быть задана не аналитически, а в виде таблицы. В таких случаях получить значение определенного интеграла можно только с помощью численных методов.

Простейшие формулы для приближённого вычисления определённого интеграла называются *квадратурными.*

К простейшим квадратурным формулам относятся формулы прямоугольников, трапеций и формула парабол (Симпсона), объединённые общим названием – квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Все эти формулы основаны на *свойстве аддитивности определённого интеграла*, а именно: **интеграл по сумме отрезков равен сумме интегралов по этим отрезкам**.

Из выражения для интеграла от непрерывной функции как предела интегральных сумм

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

(здесь задано разбиение отрезка $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $x_{i-1} \le t_i \le x_i, i = 1,2,\ldots,n$, $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1})$) непосредственно следует возможность применения квадратурных формул

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i)$$

для вычисления интеграла (интеграл заменяется суммой).

Точки t_i из отрезка $[a,b]$ - узлы квадратурной формулы; A_i - числовые коэффициенты, называемые весами квадратурной формулы. Сумма, принимаемая за приближенное значение интеграла, называется квадратурной суммой. Величина

$$R=\int_a^b f(x)dx-\sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i) \quad (1)$$

называется погрешностью квадратурной формулы.

Простейшие квадратурные формулы можно вывести из наглядных геометрических соображений, представляя интеграл криволинейной трапецией, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$, $x=b$. Задача заключается в выборе фигуры, хорошо приближающей криволинейную трапецию, а площадь которой легко бы вычислялась.

Введем обозначения: $h=x_i-x_{i-1}$ - шаг интегрирования, $f_i=f(x_i)$, $f_{i-1/2}=f(x_{i-1/2})$, где $x_{i-1/2}=(x_i+x_{i-1})/2$ - середина элементарного отрезка.

Если в качестве фигур, используемых для приближения криволинейной трапеции, использовать прямоугольники, то получаем методы прямоугольников. При этом если в качестве значения высоты каждого элементарного прямоугольника брать значение подынтегральной функции в середине элементарного отрезка, получим метод средних прямоугольников. Можно также брать значение подынтегральной функции на левой стороне каждого элементарного отрезка (метод левых прямоугольников) или на правой стороне каждого элементарного отрезка (метод правых прямоугольников).

Графическая иллюстрация метода средних прямоугольников представлена на рисунке 1. Из рисунка видно, что площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из n прямоугольников.

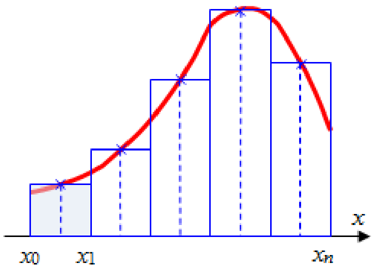


Рисунок 1

Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы n элементарных прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-0,5})\cdot h$$

Если в качестве фигур, используемых для приближения криволинейной трапеции, использовать трапеции, то получаем метод трапеций. Графически метод трапеций представлен на рисунке 2.

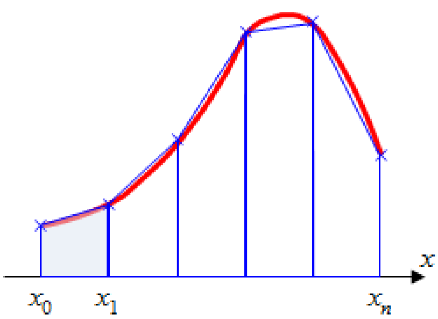


Рисунок 2

Площадь криволинейной трапеции заменяется площадью многоугольника, составленного из n трапеций, при этом кривая заменяется вписанной в нее ломаной. В итоге получаем формулу для метода трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(f_0/2 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + f_n/2\right) = h\left((f_0 + f_n)/2 + \sum_{i=1}^{n} f_i\right)$$

Погрешность метода трапеций выше, чем у метода средних прямоугольников. Однако на практике найти среднее значение на элементарном интервале можно только у функций, заданных аналитически (а не таблично), поэтому использовать метод средних прямоугольников удается далеко не всегда.

Метод Симпсона (метод парабол). Это более совершенный способ – график подынтегральной функции приближается не ломаной линией, а отрезками парабол. Если мы разобъем отрезок интегрирования на два элементарных отрезка, то получим три узла, по которым можно мостроить параболу.

Если разбить отрезок интегрирования $[a,b]$ на **четное** количество (2N) равных частей с шагом $h = \dfrac{b-a}{2N}$. Тогда можно построить параболу на каждом сдвоенном частичном отрезке по трем точкам. Итоговая квадратурная формула для вычисления методом парабол:

$$\bar{I} = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n\right]$$

Каждая из представленных формул дает приближенное значение интеграла. Обычно нужно получить значение с заданной точностью, то есть погрешность вычисления должна быть не более заданной.

Различают абсолютную и относительную погрешности.

Абсолютная погрешность равна абсолютной величине разности между вычисленным и точным значениями интеграла. Поскольку точное значение интеграла обычно не известно, то и точное значение абсолютной погрешности тоже неизвестно. Поэтому используется оценка абсолютной погрешности – некое число Δ, значения которого абсолютная погрешность не превосходит, т.е.

$$\left|\int_a^b f(x)dx - I_{выч}\right| \le \Delta \qquad (2)$$

где $I_{выч}$ – вычисленное значение интеграла.

Точность вычисления обычно оценивается с помощью относительной погрешности ε:

$$\left|\frac{\int_a^b f(x)dx - I_{выч}}{I_{выч}}\right| \le \varepsilon \qquad (3)$$

Чем меньше шаг интегрирования, тем выше точность вычислений. Для достижения требуемой точности обычно проводят вычисления интеграла с неким начальным шагом, затем шаг уменьшают (обычно в два раза) и проводят повторные вычисления с уменьшенным шагом и вычисляют погрешность.

Можно оценить абсолютную погрешность вычисления, используя правило Рунге:

$$\Delta_{2n} \approx \Theta\left|I_{2n} - I_n\right|,$$

где I_{2n} – значение интеграла при числе отрезков 2n,

I_n – значение интеграла при числе отрезков n (в два раза меньшем).

Для методов прямоугольников и трапеций Θ=1/3, для метода парабол Θ=1/15.

Вышеприведенная оценка не учитывает погрешность, связанную с особенностями представления чисел в компьютере.

На практике для оценки точности вычислений обычно используют следующую формулу для оценки относительной погрешности (считают Θ=1, то есть полагают погрешность несколько больше, чем дает правило Рунге, чем косвенно учитывают неточность представления чисел в компьютере):

$$\varepsilon \approx \left| \frac{I_i - I_{i-1}}{I_i} \right|,$$

где I_i – вычисленное значение интеграла при меньшем шаге,

I_{i-1} – вычисленное значение интеграла при большем шаге.

Если значение погрешности оказалось больше требуемой, продолжают уменьшать шаг и вычислять значения с уменьшенным шагом. Таким образом, погрешность получается гарантированно не больше требуемой, правда, может быть с некоторой избыточностью вычислений.

Помимо вышеприведенной методики можно заранее оценить требуемый шаг и начать вычисления с полученного значения. Для этого можно воспользоваться формулами для оценки погрешности квадратурных формул.

Для метода прямоугольников

$$\left|R_{пр}\right| \le \frac{(b-a)h^2}{24} \cdot M_2, где\ M_2 = \max_{a<x\le b}\left|f''(x)\right|.$$

Для метода трапеций

$$\left|R_{тр}\right| \le \frac{(b-a)h^2}{12} \cdot M_2, где\ M_2 = \max_{a<x\le b}\left|f''(x)\right|.$$

Для метода парабол

$$\left|R_{пар}\right| \le \frac{(b-a)h^4}{180} \cdot M_4, где\ M_4 = \max_{a<x\le b}\left|f^{(IV)}(x)\right|.$$

Выразив из этих неравенств h, получим примерное значение шага, дающее нужную абсолютную погрешность Δ≈R (правда, без учета погрешностей вычислений в компьютере). Как видим, потребуется найти максимальное значение второй и четвертой производных подынтегральной функции на интервале интегрирования.

Кроме того нам задана относительная, а не абсолютная погрешность. Учитывая выражения 1, 2 и 3, можно принять $R \approx \varepsilon \cdot I$, где ε – заданная относительная погрешность, I – вычисленное в итоге значение интеграла. Но до начала вычислений I неизвестно, поэтому определить нужный шаг заранее можно только, если задана абсолютная погрешность или примерно известно значение интеграла.

Воспользуемся приведенными формулами, чтобы сравнить теоретический шаг с реальным.

Для метода прямоугольников получим $h \approx \sqrt{\frac{24 \cdot \varepsilon \cdot I}{(b-a) \cdot M_2}}$.

Для метода трапеций получим $h \approx \sqrt{\frac{12 \cdot \varepsilon \cdot I}{(b-a) \cdot M_2}}$.

Для метода парабол получим $h \approx \sqrt[4]{\frac{180 \cdot \varepsilon \cdot I}{(b-a) \cdot M_4}}$.

Значение шага по этим формулам – это его оценка сверху, то есть реальный шаг для достижения требуемой точности должен быть меньше.

Пример выполнения задания

Задание. Вычислить $\int_1^5 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ с относительной погрешностью не более 0,001 методами прямоугольников, трапеций и парабол, используя функции листа MS Excel. Построить диаграммы, показывающие подынтегральную функцию и пределы интегрирования, зависимость относительной погрешности от количества узлов для метода прямоугольников и зависимость относительной погрешности от количества отрезков для всех методов (на одной диаграмме).

Создать форму средствами языка VBA, позволяющую вычислять определенный интеграл для заданной функции всеми тремя методами с переменными пределами интегрирования и точностью, выводить результаты для сравнения методов интегрирования на лист и строить диаграмму для сравнения методов.

Привести решение и график подынтегральной функции, полученные в Mathcad.

Порядок выполнения

Для начала следует проанализировать подынтегральную функцию $e^{-\frac{x^2}{2}}$. Данная функция определена на всей числовой оси. Средствами MS Excel строим график (тип – точечный) на интервале интегрирования. На этом же графике показываем пределы интегрирования в виде вертикальных пунктирных линий. Результат приведен на рисунке 3.

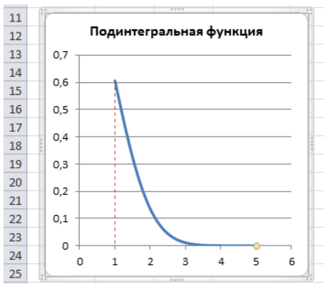


Рисунок 3

Из графика видно, что функция на интервале интегрирования непрерывна. То есть можно проводить вычисления любым из трех методов. Кроме того, весь график функции на указанном интервале расположен выше числовой оси, то есть значение интеграла будет положительным.

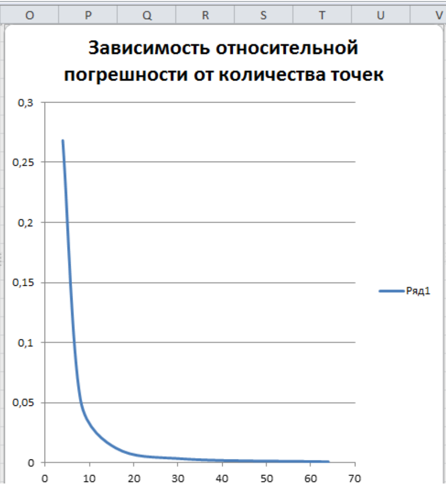
Для вычисления методом прямоугольников на листе, названном «Метод прямоугольников», вводим исходные данные – значения пределов интегрирования a и b. Начинаем вычисления с количества отрезков n=2, вычисляем шаг интегрирования $h = \frac{b-a}{n}$, вычисляем промежуточные значения и результат – значение интеграла. Затем увеличиваем n в два раза и повторяем все вычисления для нового количества отрезков. После этого вычисляем оценку для относительной погрешности ε=0,268260293 и, поскольку она оказывается больше заданной (0,001), опять увеличиваем в два раза n.

При n=64 получаем ε= 0,000745708<0,001. На этом вычисления данным методом заканчиваем. Округляем вычисленное значение интеграла до тысячных. То есть, $\int_1^5 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx 0{,}398$.

Строим диаграмму, в качестве исходных данных для горизонтальной оси указываем значения числа отрезков n, а в качестве данных для оси y – значения ε , полученные при соответствующих значениях n.

На рисунке 4 показан лист с результатами вычислений и построенной диаграммой, а на рисунке 5 – тот же лист в режиме показа формул.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	b	h	n	h	n	h	n	h	n	h	n	h	n
2	5	2	2	1	4	0,5	8	0,25	16	0,125	32	0,0625	64
3		x	S	x	S	x	S	x	S	x	S	x	S
4		1		1		1		1		1		1	
5		3	0,135335	2	0,324652	1,5	0,457833	1,25	0,531096	1,125	0,568671	1,0625	0,587583
6		5	0,000335	3	0,043937	2	0,216265	1,5	0,388558	1,25	0,49407	1,125	0,549831
7		Интеграл	0,271341	4	0,002187	2,5	0,07956	1,75	0,267052	1,375	0,4226	1,1875	0,512499
8				5	4,01E-05	3	0,022794	2	0,172422	1,5	0,355865	1,25	0,475839
9				Интеграл	0,370817	3,5	0,005086	2,25	0,104579	1,625	0,295023	1,3125	0,440079
10				ε	0,26826	4	0,000884	2,5	0,059587	1,75	0,24079	1,375	0,40542
11						4,5	0,00012	2,75	0,031895	1,875	0,193481	1,4375	0,372034
12						5	1,26E-05	3	0,016038	2	0,153056	1,5	0,340067
13						Интеграл	0,391277	3,25	0,007576	2,125	0,1192	1,5625	0,309634
14						ε	0,052291	3,5	0,003362	2,25	0,091394	1,625	0,280826
15								3,75	0,001401	2,375	0,068988	1,6875	0,253705
16								4	0,000549	2,5	0,051267	1,75	0,22831
17								4,25	0,000202	2,625	0,037508	1,8125	0,204656
18								4,5	6,98E-05	2,75	0,027016	1,875	0,182737
19								4,75	2,27E-05	2,875	0,019157	1,9375	0,16253
20								5	6,91E-06	3	0,013374	2	0,143993
21								Интеграл	0,396104	3,125	0,009192	2,0625	0,127074
22								ε	0,012185	3,25	0,006219	2,125	0,111705
23										3,375	0,004143	2,1875	0,097812
24										3,5	0,002717	2,25	0,085313
25										3,625	0,001754	2,3125	0,074121
62												4,625	2,62E-05
63												4,6875	1,96E-05
64												4,75	1,46E-05
65												4,8125	1,09E-05
66												4,875	8,04E-06
67												4,9375	5,93E-06
68												5	4,35E-06
69												Интеграл	0,39759
70												ε	0,000746



Метод прямоугольников | Метод трапеций | Метод парабол | VBA | Метод прямоугольников (2) | Метод трапец

Рисунок 4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	a	b	h	n	h	n	h	n	h	n	h	n	h
2	1	5	=(B2-A2)/2	2	=C2/2	=D2*2	=E2/2	=F2*2	=G2/2	=H2*2	=I2/2	=J2*2	=K2/2
3			x	S	x	S	x	S	x	S	x	S	x
4			=$A$2		=$A$2		=$A$2		=$A$2		=$A$2		=$A$2
5			=C4+C$2	=EXP(-((C4+C$2/2)^2)/2)	=E4+E$2	=EXP(-((E4+E$2/2)^2)/2)	=G4+G$2	=EXP(-((G4+G$2/2)^2)/2)	=I4+I$2	=EXP(-((I4+I$2/2)^2)/2)	=K4+K$2	=EXP(-((K4+K$2/2)^2	=M4+M$2
6			=C5+C$2	=EXP(-((C5+C$2/2)^2)/2)	=E5+E$2	=EXP(-((E5+E$2/2)^2)/2)	=G5+G$2	=EXP(-((G5+G$2/2)^2)/2)	=I5+I$2	=EXP(-((I5+I$2/2)^2)/2)	=K5+K$2	=EXP(-((K5+K$2/2)^2	=M5+M$2
7			Интеграл=	=C2*СУММ(D5:D6)	=E6+E$2	=EXP(-((E6+E$2/2)^2)/2)	=G6+G$2	=EXP(-((G6+G$2/2)^2)/2)	=I6+I$2	=EXP(-((I6+I$2/2)^2)/2)	=K6+K$2	=EXP(-((K6+K$2/2)^2	=M6+M$2
8					=E7+E$2	=EXP(-((E7+E$2/2)^2)/2)	=G7+G$2	=EXP(-((G7+G$2/2)^2)/2)	=I7+I$2	=EXP(-((I7+I$2/2)^2)/2)	=K7+K$2	=EXP(-((K7+K$2/2)^2	=M7+M$2
9					Интеграл=	=E2*СУММ(F5:F8)	=G8+G$2	=EXP(-((G8+G$2/2)^2)/2)	=I8+I$2	=EXP(-((I8+I$2/2)^2)/2)	=K8+K$2	=EXP(-((K8+K$2/2)^2	=M8+M$2
10					ε	=ABS((F9-D7)/F9)	=G9+G$2	=EXP(-((G9+G$2/2)^2)/2)	=I9+I$2	=EXP(-((I9+I$2/2)^2)/2)	=K9+K$2	=EXP(-((K9+K$2/2)^2	=M9+M$2
11							=G10+G$2	=EXP(-((G10+G$2/2)^2)/2)	=I10+I$2	=EXP(-((I10+I$2/2)^2)/2)	=K10+K$2	=EXP(-((K10+K$2/2)^	=M10+M$2
12							=G11+G$2	=EXP(-((G11+G$2/2)^2)/2)	=I11+I$2	=EXP(-((I11+I$2/2)^2)/2)	=K11+K$2	=EXP(-((K11+K$2/2)^	=M11+M$2
13							Интеграл=	=G2*СУММ(H5:H12)	=I12+I$2	=EXP(-((I12+I$2/2)^2)/2)	=K12+K$2	=EXP(-((K12+K$2/2)^	=M12+M$2
14							ε	=ABS((H13-F9)/H13)	=I13+I$2	=EXP(-((I13+I$2/2)^2)/2)	=K13+K$2	=EXP(-((K13+K$2/2)^	=M13+M$2
15									=I14+I$2	=EXP(-((I14+I$2/2)^2)/2)	=K14+K$2	=EXP(-((K14+K$2/2)^	=M14+M$2
16									=I15+I$2	=EXP(-((I15+I$2/2)^2)/2)	=K15+K$2	=EXP(-((K15+K$2/2)^	=M15+M$2
17									=I16+I$2	=EXP(-((I16+I$2/2)^2)/2)	=K16+K$2	=EXP(-((K16+K$2/2)^	=M16+M$2
18									=I17+I$2	=EXP(-((I17+I$2/2)^2)/2)	=K17+K$2	=EXP(-((K17+K$2/2)^	=M17+M$2
19									=I18+I$2	=EXP(-((I18+I$2/2)^2)/2)	=K18+K$2	=EXP(-((K18+K$2/2)^	=M18+M$2
20									=I19+I$2	=EXP(-((I19+I$2/2)^2)/2)	=K19+K$2	=EXP(-((K19+K$2/2)^	=M19+M$2
21									Интеграл=	=I2*СУММ(J5:J20)	=K20+K$2	=EXP(-((K20+K$2/2)^	=M20+M$2
22									ε	=ABS((J21-H13)/J21)	=K21+K$2	=EXP(-((K21+K$2/2)^	=M21+M$2
23											=K22+K$2	=EXP(-((K22+K$2/2)^	=M22+M$2
24											=K23+K$2	=EXP(-((K23+K$2/2)^	=M23+M$2

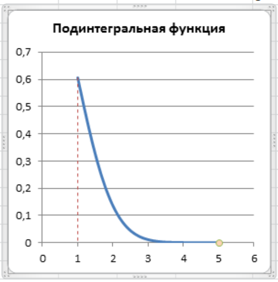
Рисунок 5

Для вычисления методом трапеций на листе, названном «Метод трапеций», вводим исходные данные – значения пределов интегрирования a и b. Начинаем вычисления с количества отрезков n=2. Дальнейший ход вычислений такой же, как и в предыдущем методе, то есть, используя формулу трапеций, вычисляем значения интеграла и оцениваем относительную погрешность вычислений. Если погрешность превышает заданную, удваиваем значение n и повторяем вычисления.

При n=128 получаем ε= 0,000372351<0,001. На этом вычисления данным методом заканчиваем. Округляем вычисленное значение интеграла до тысячных. То есть, $\int_1^5 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx 0{,}398$.

На рисунке 6 показан лист с результатами вычислений и построенным графиком подынтегральной функции, а на рисунке 7 – тот же лист в режиме показа формул.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	a	b	h	n	h	n	h	n	h	n	h	n	h	n	h	n	
2	1	5	2	2	1	4	0,5	8	0,25	16	0,125	32	0,0625	64	0,03125	128	
3			x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	
4			1	0,60653066	1	0,606531	1	0,606531	1	0,606531	1	0,606531	1	0,606531	1	0,606531	0
5			3	0,011108997	2	0,135335	1,5	0,324652	1,25	0,457833	1,125	0,531096	1,0625	0,568671	1,03125	0,587583	
6			5	3,72665E-06	3	0,011109	2	0,135335	1,5	0,324652	1,25	0,457833	1,125	0,531096	1,0625	0,568671	
7			Интеграл	0,628752379	4	0,000335	2,5	0,043937	1,75	0,216265	1,375	0,388558	1,1875	0,49407	1,09375	0,549831	
8					5	3,73E-06	3	0,011109	2	0,135335	1,5	0,324652	1,25	0,457833	1,125	0,531096	
9					Интеграл	0,450047	3,5	0,002187	2,25	0,07956	1,625	0,267052	1,3125	0,4226	1,15625	0,512499	
10					ε	0,397082	4	0,000335	2,5	0,043937	1,75	0,216265	1,375	0,388558	1,1875	0,49407	
11							4,5	4,01E-05	2,75	0,022794	1,875	0,172422	1,4375	0,355865	1,21875	0,475839	
12							5	3,73E-06	3	0,011109	2	0,135335	1,5	0,324652	1,25	0,457833	
13							Интеграл	0,410432	3,25	0,005086	2,125	0,104579	1,5625	0,295023	1,28125	0,440079	
14							ε	0,09652	3,5	0,002187	2,25	0,07956	1,625	0,267052	1,3125	0,4226	
15									3,75	0,000884	2,375	0,059587	1,6875	0,24079	1,34375	0,40542	
16									4	0,000335	2,5	0,043937	1,75	0,216265	1,375	0,388558	
17									4,25	0,00012	2,625	0,031895	1,8125	0,193481	1,40625	0,372034	
18									4,5	4,01E-05	2,75	0,022794	1,875	0,172422	1,4375	0,355865	
19									4,75	1,26E-05	2,875	0,016038	1,9375	0,153056	1,46875	0,340067	
20									5	3,73E-06	3	0,011109	2	0,135335	1,5	0,324652	
21									Интеграл	0,400855	3,125	0,007576	2,0625	0,1192	1,53125	0,309634	
22									ε	0,023892	3,25	0,005086	2,125	0,104579	1,5625	0,295023	
23											3,375	0,003362	2,1875	0,091394	1,59375	0,280826	
24											3,5	0,002187	2,25	0,07956	1,625	0,267052	
25											3,625	0,001401	2,3125	0,068988	1,65625	0,253705	
128															4,875	6,91E-06	
129															4,90625	5,93E-06	
130															4,9375	5,08E-06	
131															4,96875	4,35E-06	
132															5	3,73E-06	
133															Интеграл	0,397738	



Метод прямоугольников | Метод трапеций | Метод парабол | VBA

Рисунок 6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	a	b	h	n	h	n	h	n	h	n	h
2	1	5	=(B2-A2)/2	2	=C2/2	=D2*2	=E2/2	=F2*2	=G2/2	=H2*2	=I2/2
3			x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x
4			=$A$2	=EXP(-(C4^2)/2)	=$A$2	=EXP(-(E4^2)/2)	=$A$2	=EXP(-(G4^2)/2)	=$A$2	=EXP(-(I4^2)/2)	=$A$2
5			=C4+C$2	=EXP(-(C5^2)/2)	=E4+E$2	=EXP(-(E5^2)/2)	=G4+G$2	=EXP(-(G5^2)/2)	=I4+I$2	=EXP(-(I5^2)/2)	=K4+K$2
6			=C5+C$2	=EXP(-(C6^2)/2)	=E5+E$2	=EXP(-(E6^2)/2)	=G5+G$2	=EXP(-(G6^2)/2)	=I5+I$2	=EXP(-(I6^2)/2)	=K5+K$2
7			Интеграл=	=C$2*(СУММ(D$5:D5)+D$4/2+D6/2)	=E6+E$2	=EXP(-(E7^2)/2)	=G6+G$2	=EXP(-(G7^2)/2)	=I6+I$2	=EXP(-(I7^2)/2)	=K6+K$2
8					=E7+E$2	=EXP(-(E8^2)/2)	=G7+G$2	=EXP(-(G8^2)/2)	=I7+I$2	=EXP(-(I8^2)/2)	=K7+K$2
9					Интеграл=	=E$2*(СУММ(F$5:F7)+F$4/2+F8/2)	=G8+G$2	=EXP(-(G9^2)/2)	=I8+I$2	=EXP(-(I9^2)/2)	=K8+K$2
10					ε	=ABS((F9-D7)/F9)	=G9+G$2	=EXP(-(G10^2)/2)	=I9+I$2	=EXP(-(I10^2)/2)	=K9+K$2
11							=G10+G$2	=EXP(-(G11^2)/2)	=I10+I$2	=EXP(-(I11^2)/2)	=K10+K$2
12							=G11+G$2	=EXP(-(G12^2)/2)	=I11+I$2	=EXP(-(I12^2)/2)	=K11+K$2
13							Интеграл=	=G$2*(СУММ(H$5:H11)+H$4/2+H12/2)	=I12+I$2	=EXP(-(I13^2)/2)	=K12+K$2
14							ε	=ABS((H13-F9)/H13)	=I13+I$2	=EXP(-(I14^2)/2)	=K13+K$2
15									=I14+I$2	=EXP(-(I15^2)/2)	=K14+K$2
16									=I15+I$2	=EXP(-(I16^2)/2)	=K15+K$2
17									=I16+I$2	=EXP(-(I17^2)/2)	=K16+K$2
18									=I17+I$2	=EXP(-(I18^2)/2)	=K17+K$2
19									=I18+I$2	=EXP(-(I19^2)/2)	=K18+K$2
20									=I19+I$2	=EXP(-(I20^2)/2)	=K19+K$2
21									Интеграл=	=I$2*(СУММ(J$5:J19)+J$4/2+J20/2)	=K20+K$2
22									ε	=ABS((J21-H13)/J21)	=K21+K$2
23											=K22+K$2
24											=K23+K$2
25											=K24+K$2

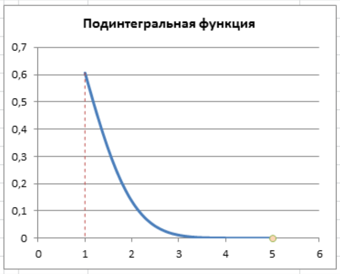


Рисунок 7

Для вычисления методом парабол на листе, названном «Метод парабол», вводим исходные данные – значения пределов интегрирования a и b. Поскольку шаг для метода парабол вычисляется по формуле $h=\dfrac{b-a}{2n}$ (то есть в знаменателе может быть только четное число), сначала принимаем n=1 и вычисляем шаг. Поскольку в формуле паребол слагаемые с четными и нечетными порядковыми номерами, а также первое и последнее слагаемые умножаются на разные коэффициенты, дополнительно предусмотрен столбец коэффициентов k. Дополнительно считается количество отрезков, на которое разбивается интервал интегрирования при конкретном шаге. Это значение знаменателя в формуле для вычисления шага, то есть 2n. Это понадобится для сравнения методов вычисления, так как объем вычислений пропорционален количеству точек, в которых определяется значение функции.

В остальном ход вычислений такой же, как и в предыдущих методах, то есть, используя формулу парабол, вычисляем значения интеграла и оцениваем относительную погрешность вычислений. Если погрешность превышает заданную, удваиваем значение n и повторяем вычисления.

При n=16 (отрезков 32) получаем ε= 6,35635E-05<0,001. На этом вычисления данным методом заканчиваем. Округляем вычисленное значение интеграла до тысячных. То есть,

$$\int_1^5 e^{-\frac{x^2}{2}}dx \approx 0{,}398.$$

После этого строим диаграмму, показывающую изменение относительной погрешности в зависимости от количества отрезков, на которое разбивается интервал интегрирования для всех трех методов. Для большей наглядности ось значений (y) сделана логарифмической. Это указывается в настройках формата оси, когда диаграмма уже будет построена.

На рисунке 8 показан лист с результатами вычислений и построенной диаграммой.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	a	b	h	n		h	n		h	n		h	n		h	n
2	1	5	2	1		1	2		0,5	4		0,25	8		0,125	16
3		k	x	k*f(x)	k	x	k*f(x)	k	x	k*f(x)	k	x	k*f(x)	k	x	k*f(x)
4		1	1	0,60653066	1	1	0,60653066	1	1	0,60653066	1	1	0,60653066	1	1	0,60653066
5		4	3	0,044435986	4	2	0,541341133	4	1,5	1,298609869	4	1,25	1,831333447	4	1,125	2,124383964
6		1	5	3,72665E-06	2	3	0,022217993	2	2	0,270670566	2	1,5	0,649304935	2	1,25	0,915666724
7			Интеграл=	0,433980248	4	4	0,001341851	4	2,5	0,175747734	4	1,75	0,865060667	4	1,375	1,55423251
8					1	5	3,72665E-06	2	3	0,022217993	2	2	0,270670566	2	1,5	0,649304935
9						Интеграл=	0,390478454	4	3,5	0,008749964	4	2,25	0,318238035	4	1,625	1,068207341
10						ε	0,111406388	2	4	0,000670925	2	2,5	0,087873867	2	1,75	0,432530334
11						отрезков	4	4	4,5	0,000160261	4	2,75	0,091176724	4	1,875	0,689686496
12								1	5	3,72665E-06	2	3	0,022217993	2	2	0,270670566
13									Интеграл=	0,39722695	4	3,25	0,020344277	4	2,125	0,418316005
14									ε	0,016989018	2	3,5	0,004374982	2	2,25	0,159119017
15									отрезков	8	4	3,75	0,003535305	4	2,375	0,238349275
16											2	4	0,000670925	2	2,5	0,087873867
17											4	4,25	0,000478452	4	2,625	0,127579173
18											2	4,5	8,01306E-05	2	2,75	0,045588362
19											4	4,75	5,04284E-05	4	2,875	0,064150837
20											1	5	3,72665E-06	2	3	0,022217993
21												Интеграл	0,397662093	4	3,125	0,03030271
22												ε	0,001094254	2	3,25	0,010172138
23												отрезков	16	4	3,375	0,013446746
24														2	3,5	0,004374982
33														4	4,625	9,06035E-05
34														2	4,75	2,52142E-05
35														4	4,875	2,76325E-05
36														1	5	3,72665E-06
37															Интеграл=	0,397687372
38															ε	6,35635E-05
39															отрезков	32

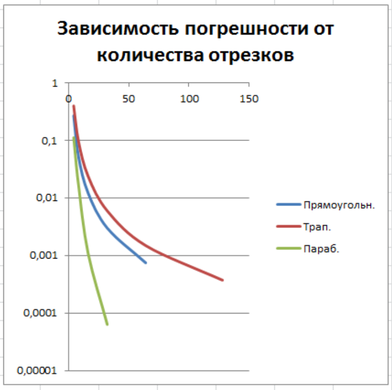


Рисунок 8

Из диаграммы видно, что быстрее всех погрешность уменьшается при использовании метода парабол, затем для метода прямоугольников и медленнее всех она уменьшается для метода трапеций.

На рисунке 9 приведен тот же лист в режиме показа формул.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	a	b	h	n		h	n		h	n		h	n		h	n
2	1	5	=(B2-A2)/(2*D2)	1		=C2/2	=D2*2		=F2/2	=G2*2		=I2/2	=J2*2		=L2/2	=M2*2
3		k	x	k*f(x)	k	x	k*f(x)	k	x	k*f(x)	k	x	k*f(x)	k	x	k*f(x)
4		1	=$A$2	=EXP(-(C4^2)/2)*B4	1	=$A$2	=EXP(-(F4^2)/2)*E4	1	=$A$2	=EXP(-(I4^2)/2)*H4	1	=$A$2	=EXP(-(L4^2)/2)*K4	1	=$A$2	=EXP(-(O4^2)/2)*N4
5		4	=C4+C$2	=EXP(-(C5^2)/2)*B5	4	=F4+F$2	=EXP(-(F5^2)/2)*E5	4	=I4+I$2	=EXP(-(I5^2)/2)*H5	4	=L4+L$2	=EXP(-(L5^2)/2)*K5	4	=O4+O$2	=EXP(-(O5^2)/2)*N5
6		1	=C5+C$2	=EXP(-(C6^2)/2)*B6	2	=F5+F$2	=EXP(-(F6^2)/2)*E6	2	=I5+I$2	=EXP(-(I6^2)/2)*H6	2	=L5+L$2	=EXP(-(L6^2)/2)*K6	2	=O5+O$2	=EXP(-(O6^2)/2)*N6
7			Интеграл=	=C$2/3*СУММ(D$4:D6)	4	=F6+F$2	=EXP(-(F7^2)/2)*E7	4	=I6+I$2	=EXP(-(I7^2)/2)*H7	4	=L6+L$2	=EXP(-(L7^2)/2)*K7	4	=O6+O$2	=EXP(-(O7^2)/2)*N7
8					1	=F7+F$2	=EXP(-(F8^2)/2)*E8	=H6	=I7+I$2	=EXP(-(I8^2)/2)*H8	=K6	=L7+L$2	=EXP(-(L8^2)/2)*K8	=N6	=O7+O$2	=EXP(-(O8^2)/2)*N8
9						Интеграл=	=F$2/3*СУММ(G$4:G8)	=H7	=I8+I$2	=EXP(-(I9^2)/2)*H9	=K7	=L8+L$2	=EXP(-(L9^2)/2)*K9	=N7	=O8+O$2	=EXP(-(O9^2)/2)*N9
10						ε	=ABS((G9-D7)/G9)	=H8	=I9+I$2	=EXP(-(I10^2)/2)*H10	=K8	=L9+L$2	=EXP(-(L10^2)/2)*K10	=N8	=O9+O$2	=EXP(-(O10^2)/2)*N1
11						отрезков	=G$2*2	=H9	=I10+I$2	=EXP(-(I11^2)/2)*H11	=K9	=L10+L$2	=EXP(-(L11^2)/2)*K11	=N9	=O10+O$2	=EXP(-(O11^2)/2)*N1
12								1	=I11+I$2	=EXP(-(I12^2)/2)*H12	=K10	=L11+L$2	=EXP(-(L12^2)/2)*K12	=N10	=O11+O$2	=EXP(-(O12^2)/2)*N1
13									Интеграл=	=I$2/3*СУММ(J$4:J12)	=K11	=L12+L$2	=EXP(-(L13^2)/2)*K13	=N11	=O12+O$2	=EXP(-(O13^2)/2)*N1
14									ε	=ABS((J13-G9)/J13)	=K12	=L13+L$2	=EXP(-(L14^2)/2)*K14	=N12	=O13+O$2	=EXP(-(O14^2)/2)*N1
15									отрезков	=J$2*2	=K13	=L14+L$2	=EXP(-(L15^2)/2)*K15	=N13	=O14+O$2	=EXP(-(O15^2)/2)*N1
16											=K14	=L15+L$2	=EXP(-(L16^2)/2)*K16	=N14	=O15+O$2	=EXP(-(O16^2)/2)*N1
17											=K15	=L16+L$2	=EXP(-(L17^2)/2)*K17	=N15	=O16+O$2	=EXP(-(O17^2)/2)*N1
18											=K16	=L17+L$2	=EXP(-(L18^2)/2)*K18	=N16	=O17+O$2	=EXP(-(O18^2)/2)*N1
19											=K17	=L18+L$2	=EXP(-(L19^2)/2)*K19	=N17	=O18+O$2	=EXP(-(O19^2)/2)*N1
20											1	=L19+L$2	=EXP(-(L20^2)/2)*K20	=N18	=O19+O$2	=EXP(-(O20^2)/2)*N2
21												Интеграл=	=L$2/3*СУММ(M$4:M20)	=N19	=O20+O$2	=EXP(-(O21^2)/2)*N2
22												ε	=ABS((M21-J13)/M21)	=N20	=O21+O$2	=EXP(-(O22^2)/2)*N2
23												отрезков	=M$2*2	=N21	=O22+O$2	=EXP(-(O23^2)/2)*N2
24														=N22	=O23+O$2	=EXP(-(O24^2)/2)*N2
25														=N23	=O24+O$2	=EXP(-(O25^2)/2)*N2

Рисунок 9

Как видим, использование любого из методов связано с довольно большим объемом вычислений. При этом обычно заранее неизвестно, на сколько отрезков придется разбить интервал интегрирования для достижения заданной точности.

Средствами языка VBA создадим форму, позволяющую не только вычислить указанный интеграл с заданной точностью, но и настраивать пределы интегрирования и саму точность, а также получать результаты сравнения методов вычислений.

Результаты вычислений будем выводить на лист с именем «VBA». На этом листе создадим кнопку для запуска формы и назначим ей макрос с именем Вызов_формы (рисунок 10).

Далее создаем форму средствами редактора VBA. На рисунке 11 показан вид полученной формы, а на рисунке 12 – та же форма с указанием имен объектов (свойство Name).

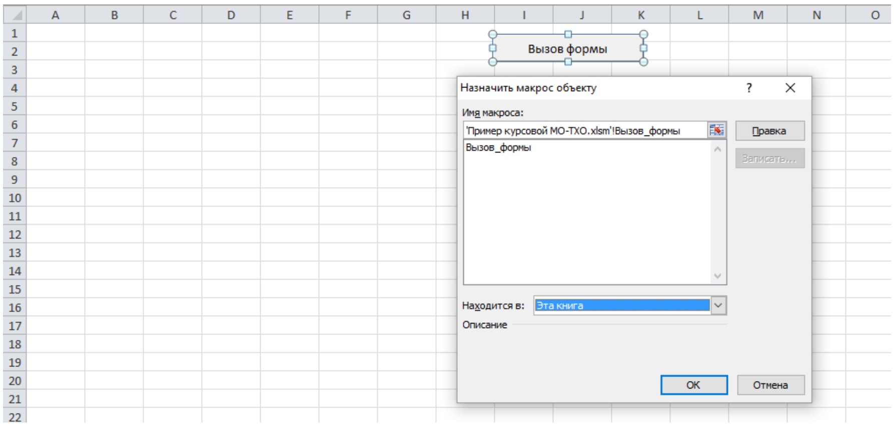


Рисунок 10

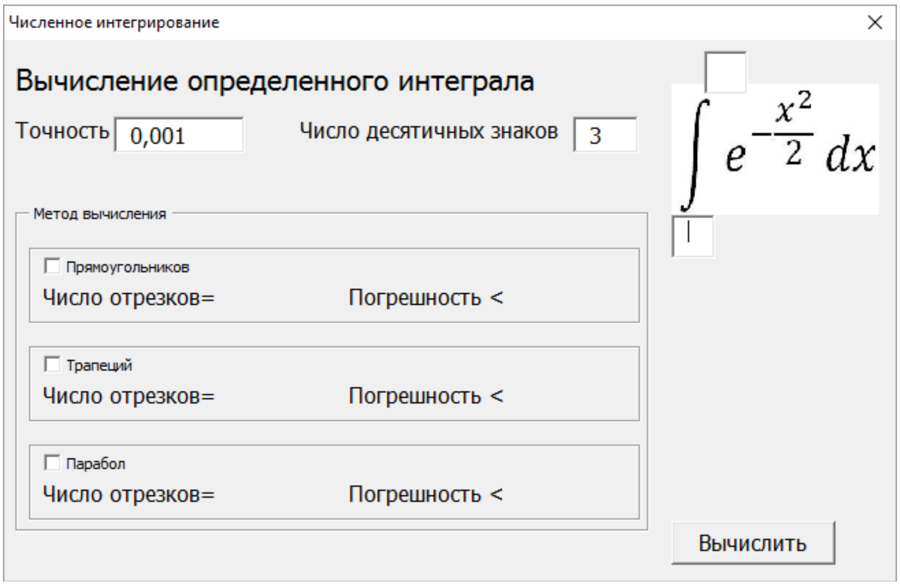


Рисунок 11

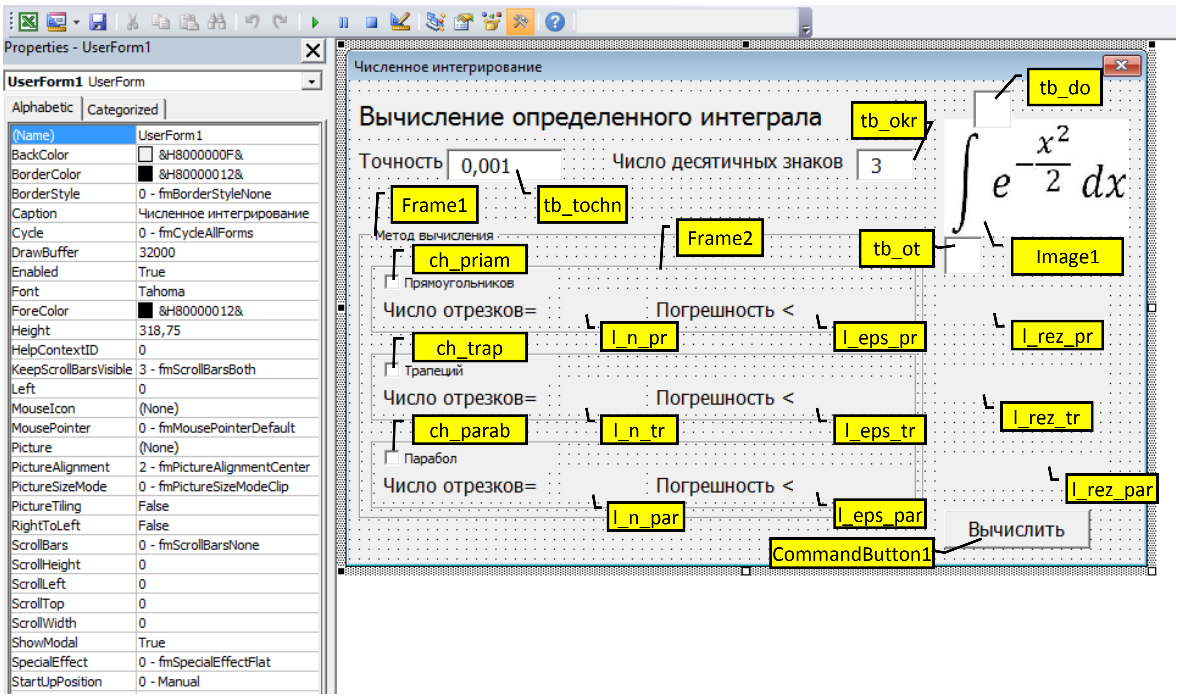


Рисунок 12

Для изображения Image1 был создан и сохранен в виде файла соответствующий рисунок, который затем был подключен через настройку свойства Picture этого объекта. Кроме того свойство PictureSizeMode было установлено в fmPictureSizeModeStretch, чтобы изображение занимало всю отведенную для него область.

Для всех объектов кроме изображения и текстовых полей настраиваем в окне свойств свойство Caption и нужные параметры шрифта (Font), там, где это целесообразно для улучшения наглядности. Для текстовых полей кроме tb_tochn и tb_okr очищаем значение свойства Text.

Для текстового поля tb_tochn помимо размера шрифта указываем для свойства text значение 0,001 – содержимое этого поля по умолчанию. Так же настраиваем значение 3 для свойства text текстового поля tb_okr.

После настройки внешнего вида формы приступаем к написанию кода на VBA.

Поскольку все вычисления должны начинаться со щелчка по кнопке Выполнить, делаем по ней на форме двойной щелчок и записываем обработчик этого события.

Программа на языке VBA приведена ниже (рисунки 13-14).

```
(General)                                    Integr3
'объявление общих переменных, доступных во всей программе
Dim e1 As Double, e2 As Double, e3 As Double 'вычисленные оценки относит.погрешностей для каждого метода
Dim Tol  As Double 'заданная относительная погрешность
Dim a As Double, b As Double 'пределы интегрирования
Dim n As Long 'заданное кол-во десятич.знаков результата
Dim n1 As Long, n2 As Long, n3 As Long 'получившееся кол-во отрезков
Dim I1 As Double, I2 As Double, I3 As Double 'значения интеграла, получ.разными методами
Dim eps1() As Double, eps2() As Double, eps3() As Double 'массивы для хранения данных о погрешностях
Dim k1 As Integer, k2 As Integer, k3 As Integer 'размеры массивов для погрешностей
Private Sub CommandButton1_Click()
'основная программа вычислений

'чтение и проверка исходных данных из формы

If Trim(tb_ot) = "" Or Trim(tb_do) = "" Or Trim(tb_tochn) = "" Then
    MsgBox "Задайте необходимые данные для расчета"
    Exit Sub
End If
If ch_priam = False And ch_trap = False And ch_parab = False Then
    MsgBox "Отметьте хотя бы один метод вычисления"
    Exit Sub
End If
Tol = tb_tochn
a = tb_ot
b = tb_do
If a >= b Then
    MsgBox "Пределы интегрирования указаны неверно"
    Exit Sub
End If
If Trim(tb_okr) = "" Then
    n = 3
Else
    n = Val(tb_okr)
End If

If ch_priam Then 'вычисление по формуле прямоугольников
    I1 = Integr1(a, b, eps1)
    l_rez_pr.Caption = CStr(Round(I1, n)) 'вывод результата
    l_n_pr.Caption = CStr(n1) 'вывод числа отрезков
    l_eps_pr.Caption = Format(e1, "#0.00000") 'вывод отн.погрешности вычисления с указанием формата
End If
If ch_trap Then 'вычисление по формуле трапеций
    I2 = Integr2(a, b, eps2)
    l_rez_tr.Caption = CStr(Round(I2, n)) 'вывод результата
    l_n_tr.Caption = CStr(n2) 'вывод числа отрезков
    l_eps_tr.Caption = Format(e2, "#0.00000") 'вывод отн.погрешности вычисления с указанием формата
End If
If ch_parab Then 'вычисление по формуле парабол
    I3 = Integr3(a, b, eps3)
    l_rez_par.Caption = CStr(Round(I3, n)) 'вывод результата
    l_n_par.Caption = CStr(n3)  'вывод числа отрезков
    l_eps_par.Caption = Format(e3, "#0.00000") 'вывод отн.погрешности вычисления с указанием формата
End If

'обработка результатов вычислений

Worksheets("VBA").Activate 'переход на лист с именем VBA
'очистка листа от результатов предыдущих вычислений, если форма не закрывалась
ActiveSheet.Cells.Clear 'очистка листа
On Error Resume Next 'в случае ошибки выполнять следующий оператор
n = ActiveSheet.ChartObjects.Count 'определение количества имеющихся диагарамм на листе
For i = 1 To n 'удаление всех имеющихся диаграмм на листе
    ActiveSheet.ChartObjects(i).Delete
Next i
'запись данных на лист
Cells(1, 3) = "Сравнение методов вычислений"
If ch_priam Then
Cells(2, 1) = "Метод прямоугольников"
Cells(3, 1) = "Кол.отрезков."
Cells(3, 2) = "Погрешность"
For i = 1 To k1
    Cells(i + 3, 1) = 2 ^ i
    Cells(i + 3, 2) = eps1(i)
Next i
End If
If ch_trap Then
Cells(2, 3) = "Метод трапеций"
Cells(3, 3) = "Кол.отрезков."
Cells(3, 4) = "Погрешность"
For i = 1 To k2
    Cells(i + 3, 3) = 2 ^ (i + 1)
    Cells(i + 3, 4) = eps2(i)
Next i
End If
If ch_parab Then
Cells(2, 5) = "Метод парабол"
Cells(3, 5) = "Кол.отрезков."
Cells(3, 6) = "Погрешность"
For i = 1 To k3
    Cells(i + 3, 5) = 2 ^ (i + 1)
    Cells(i + 3, 6) = eps3(i)
Next i
End If
```

Рисунок 13

```vb
' Построение диаграммы по полученным данным

ActiveSheet.Shapes.AddChart.Select 'Создание области диаграммы на текущем листе
ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmoothNoMarkers 'Указание типа диаграммы
i = 1
With ActiveChart
        If ch_priam Then 'если были вычисления методом прямоугольников
        .SeriesCollection.NewSeries 'создание нового ряда данных
        .SeriesCollection(i).Name = "=""Прям.""" 'имя нового ряда данных для легенды
        .SeriesCollection(i).XValues = Range(Cells(4, 1), Cells(k1 + 3, 1)) 'указание диапазона изменениея аргумента
        .SeriesCollection(i).Values = Range(Cells(4, 2), Cells(k1 + 3, 2)) 'указание диапазона изменения значений
        i = i + 1 'увеличение счетчика рядов данных
        End If
        If ch_trap Then
        .SeriesCollection.NewSeries
        .SeriesCollection(i).Name = "=""Трап."""
        .SeriesCollection(i).XValues = Range(Cells(4, 3), Cells(k2 + 3, 3))
        .SeriesCollection(i).Values = Range(Cells(4, 4), Cells(k2 + 3, 4))
        i = i + 1
        End If
        If ch_parab Then
        .SeriesCollection.NewSeries
        .SeriesCollection(i).Name = "=""Параб."""
        .SeriesCollection(i).XValues = Range(Cells(4, 5), Cells(k3 + 3, 5))
        .SeriesCollection(i).Values = Range(Cells(4, 6), Cells(k3 + 3, 6))
        End If
        .Axes(xlValue).Select 'переход к настройке оси значений
        .Axes(xlValue).ScaleType = xlLogarithmic 'указание логарифмической шкалы для выбранной оси
End With
ActiveChart.SetElement (msoElementChartTitleAboveChart) 'создание области заголовка диаграммы над диаграммой
Selection.Caption = "Зависимость погрешности от кол-ва отрезков" 'указание названия диаграммы

End Sub
```

```vb
Public Function Integr1(a, b, eps() As Double) As Double
'вычисление по формуле прямоугольников
Dim I0 As Double, I1 As Double, dt As Double, t As Double
n1 = 1
I0 = 0
I1 = F((b - a) / 2) * (b - a)
e1 = Abs((I1 - I0) / I1)
k1 = 0
While e1 > Tol
    k1 = k1 + 1
    I0 = I1
    I1 = 0
    n1 = 2 * n1
    dt = (b - a) / n1
    t = a
    While t < b
        I1 = I1 + F(t + dt / 2) * dt
        t = t + dt
    Wend
    e1 = Abs((I1 - I0) / I1)
    ReDim Preserve eps(1 To k1)
    eps(k1) = e1
Wend
Integr1 = I1 'Передача значения в вызывающую программу
End Function
```

```vb
Public Function Integr2(a, b, eps() As Double) As Double
'вычисление интеграла по формуле трапеций
Dim I0 As Double, I1 As Double, dt As Double, t As Double
n2 = 2
dt = (b - a) / n2
I0 = 0
I1 = (((F(a) + F(b)) / 2) + F(a + dt)) * dt
e2 = Abs((I1 - I0) / I1)
k2 = 0
While e2 > Tol
    k2 = k2 + 1
    I0 = I1
    I1 = 0
    n2 = 2 * n2
    dt = (b - a) / n2
    For t = a To b - dt Step dt
        I1 = I1 + (F(t) + F(t + dt)) / 2 * dt
    Next t
    e2 = Abs((I1 - I0) / I1)
    ReDim Preserve eps(1 To k2)
    eps(k2) = e2
Wend
Integr2 = I1 'Передача значения в вызывающую программу
End Function
```

```vb
Public Function Integr3(a, b, eps() As Double) As Double
'вычисление интеграла по формуле парабол
Dim I0 As Double, I1 As Double, dt As Double, t As Double, i As Long

n3 = 2
dt = (b - a) / n3
I0 = 0
I1 = (F(a) + F(b) + 4 * F(a + dt)) * dt / 3
e3 = Abs((I1 - I0) / I1)
k3 = 0
While e3 > Tol
    k3 = k3 + 1
    I0 = I1
    I1 = 0
    n3 = 2 * n3
    dt = (b - a) / n3
    t = a
    While t < b
        I1 = I1 + F(t) + 4 * F(t + dt) + F(t + 2 * dt)
        t = t + 2 * dt
    Wend
    I1 = I1 * dt / 3
    e3 = Abs((I1 - I0) / I1)
    ReDim Preserve eps(1 To k3)
    eps(k3) = e3
Wend
Integr3 = I1 'Передача значения в вызывающую программу
End Function
```

```vb
Public Function F(t) As Double
'вычисление подинтегральной функции

F = Exp(-(t * t / 2))

End Function
```

```vb
Private Sub UserForm_Initialize()
'очистка листа при вызове формы
Dim n As Variant, i As Integer
Worksheets("VBA").Activate
ActiveSheet.Cells.Clear
On Error Resume Next
n = ActiveSheet.ChartObjects.Count
For i = 1 To n
    ActiveSheet.ChartObjects(i).Delete
```

```
Next i
End Sub
```

Рисунок 14

Текст макроса для вызова формы сохраняем в Module1 (рисунок 15).

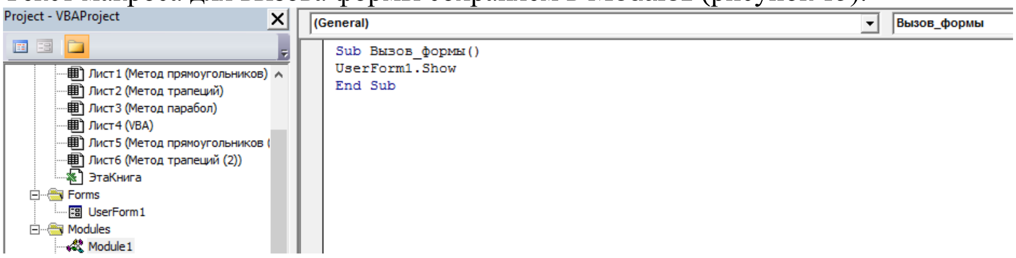


Рисунок 15

На листе VBA вызываем кнопкой форму, указываем необходимые параметры и щелкаем по кнопке «Вычислить».

На рисунках 16 и 17 показана форма и лист VBA с результатами расчета.

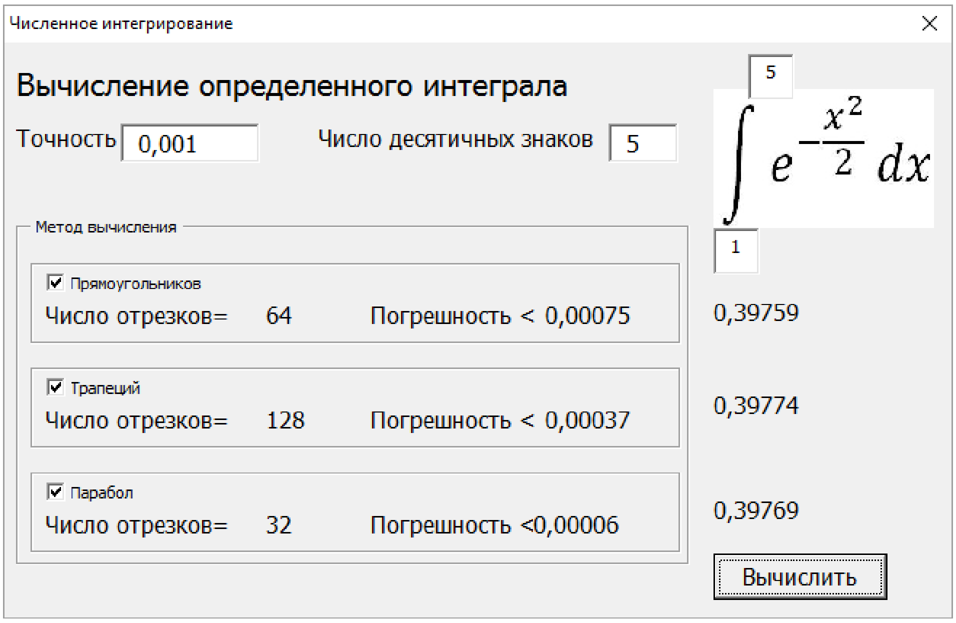


Рисунок 16

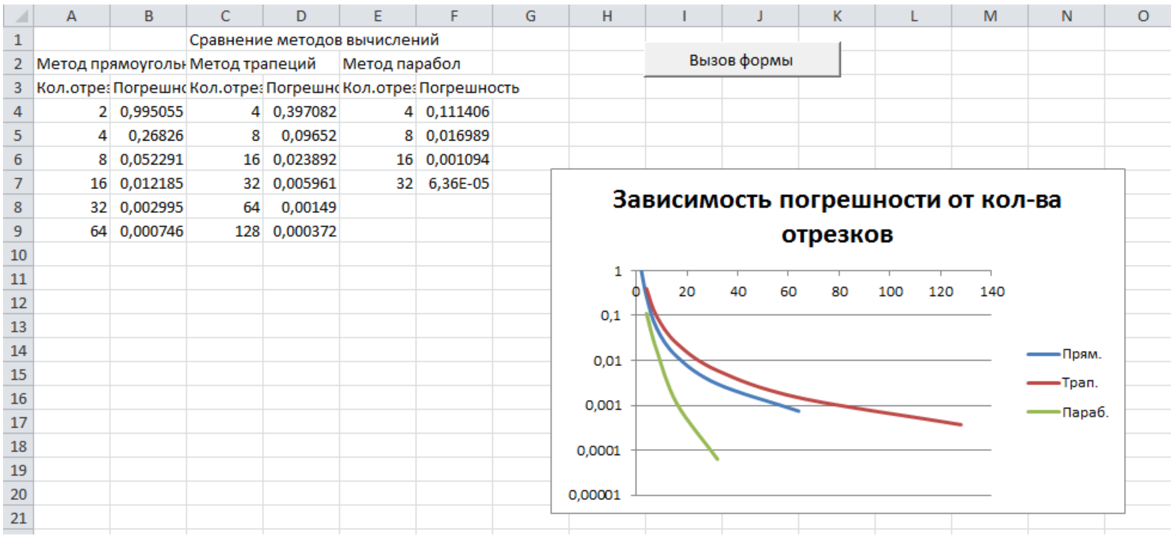


Рисунок 17

Вычисление интеграла в программе Mathcad показано на рисунке 18.

$$f1(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$x := 1, 1.1 .. 5$$

$$\int_1^5 f1(x)\,dx = 0.397689$$

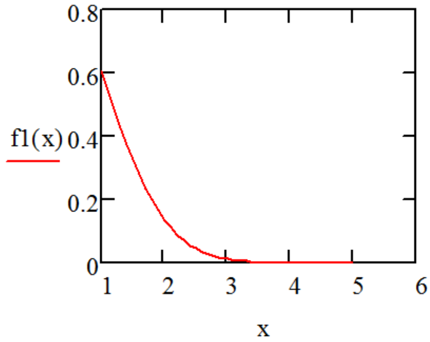
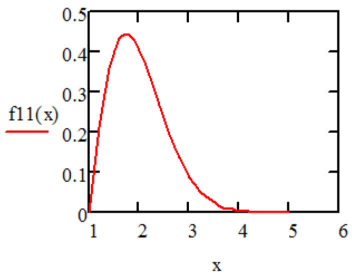


Рисунок 18

На рисунке 19 показаны вычисления по оценке шага, исходя из погрешностей квадратурных формул для методов прямоугольников и трапеций, а на рисунке 20 – для метода парабол.

$$f11(x) := \frac{d^2}{dx^2} f1(x)$$



$$f111(x) := \frac{d}{dx} f11(x)$$

$$M2 := f11(root(f111(x), x, 1, 5))$$

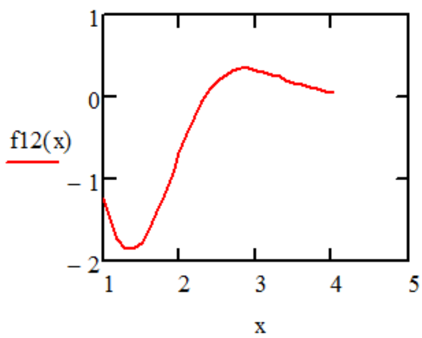
$$M2 = 0.446$$

$$h1 := \sqrt{\frac{0.001 \cdot 0.389 \cdot 24}{(5-1) \cdot M2}} \qquad h1 = 0.072$$

$$h2 := \sqrt{\frac{0.001 \cdot 0.398 \cdot 12}{(5-1) \cdot M2}} \qquad h2 = 0.052$$

Рисунок 19

$$f12(x) := \frac{d^4}{dx^4} f1(x)$$



$$f121(x) := \frac{d}{dx} f12(x)$$

$$M4 := f12(root(f121(x), x, 2, 4))$$

$$M4 = 0.348$$

$$h3 := \sqrt{\sqrt{\frac{0.001 \cdot 0.398 \cdot 180}{(5-1) \cdot M4}}}$$

$$h3 = 0.476$$

Рисунок 20

При вычислениях на листах MS Excel мы получили погрешность меньше, чем 0,001 при значениях шага для метода прямоугольников 0,0625<(h1=0,072); для метода трапеций 0,03125<(h2=0,052) и для метода парабол 0,125<(h3=0,476). При использовании метода парабол можно было закончить вычисления при шаге 0,25, обеспечив относительную погрешность не более 0,001. Это видно и по вычисленному значению ε на листе: при шаге 0,25 она равна 0,001094, то есть чуть больше 0,001, а по правилу Рунге это значение следует разделить на 15, чего мы не делали.

Заключение

Написать самостоятельно. Указать, какие задачи нужно было решить, какие средства были использованы для решения, что получили в результате. Кроме того провести сравнение методов вычисления и использованных инструментов (формулы листа MS Excel, программа на VBA и Mathcad), указав их достоинства и недостатки.

Варианты заданий

Вариант	Подынтегральная функция	Пределы интегрирования		Относительная погрешность не более
		a	b	
1	$\frac{\sin x}{x}$	0	3	0,0002
2	$\frac{\sin x}{x^2}$	1	4	0,0005
3	$\frac{\cos x}{x}$	1	5	0,001
4	$\frac{\cos^2 x}{x}$	0,5	3,5	0,0015
5	$\frac{\sin^2 x}{x}$	0,5	3,5	0,0002
6	$\sin x^2$	0	3	0,0005
7	$\cos x^2$	1	4	0,001
8	$\frac{e^x}{x}$	0,5	3,5	0,0015
9	$\frac{e^x}{x^2}$	0,5	3,5	0,0002
10	$\frac{e^x}{x^3}$	0,5	3,5	0,0005
11	$\frac{1}{\ln x}$	1,5	5,5	0,001
12	$\sin\frac{\pi x^2}{2}$	0	2	0,0015
13	$\cos\frac{\pi x^2}{2}$	-1	1	0,0002
14	$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$	0	2	0,0005
15	$\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$	1,5	4,5	0,001
16	$x \cdot tg\, x$	0	1,5	0,0015
17	$\frac{tg\, x}{x}$	0,5	1,5	0,0002
18	$\frac{x}{\sin x}$	0,5	3	0,0005
19	$\frac{x^2}{\sin x}$	0,1	2	0,001

20	$\frac{x^2}{\ln x}$	1,5	3,5	0,0015
21	$\frac{x}{\ln x}$	1,5	4,5	0,002
22	$\frac{x}{\cos^3 x}$	0	1	0,0005
23	$\frac{\cos x}{x^2}$	1,5	4,5	0,001
24	$\frac{\cos x}{x^3}$	0,5	4,5	0,0015
25	e^{-x^2}	-1	3	0,0002
26	e^{x^2}	-1	1	0,0025
27	$e^x \ln x$	1,1	3	0,001
28	$\ln(tg\, x)$	0,5	1,5	0,0015
29	$\ln(\sin x)$	0,5	3	0,002
30	$\ln(\cos x)$	-1	1,5	0,0005
31	$\frac{\cos x}{x^4}$	0,5	1,5	0,001
32	$\frac{\sin x}{x^3}$	0,5	2,5	0,0015
33	$\frac{\sin x}{x^4}$	0,3	2,3	0,0002
34	$\frac{e^x}{x^4}$	1	2,5	0,0005
35	$\frac{1}{x^2 \ln x}$	0,1	0,9	0,001