

Контрольная работа
«Кратные и криволинейные интегралы»

Задача 1.

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

а) с помощью двойного интеграла;

б) с помощью определенного интеграла.

1. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$.

2. $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = x/\sqrt{3}$.

3. $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$.

4. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = x$.

5. $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y^2 - 10y + x^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$.

6. $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = x$.

7. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $y = x$, $x = 0$.

8. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 10x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$.

9. $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $y^2 - 10y + x^2 = 0$, $y = x$, $x = 0$.

10. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$.

11. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $x = 0$, $y = \sqrt{3}x$.

12. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$.

13. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $x = 0$.

14. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$.

15. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $x = 0$, $y = x/\sqrt{3}$.

16. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = x/\sqrt{3}$.

17. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 10y + x^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$.

18. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = x/\sqrt{3}$.

19. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 10y + x^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$.

20. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = x$.

21. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y = x$, $x = 0$.

22. $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$.

23. $y^2 - 6y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $y = x$, $x = 0$.

24. $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$.

25. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $x = 0$, $y = x$.

26. $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$.

27. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$, $x = 0$, $y = \sqrt{3}x$.

28. $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$.

29. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 10y + x^2 = 0$, $x = 0$, $y = x/\sqrt{3}$.

30. $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $x^2 - 10x + y^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x$.

Задача 2.

Вычислить двумя способами (непосредственно и с помощью формулы Грина) криволинейный интеграл

1. $\oint_L (2x + 3y - 1)dx + 5xdy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;7)$.
2. $\oint_L (5y + 3x)dx + (2x - y)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(-2;1)$, $B(1;1)$, $C(1;-5)$.
3. $\oint_L (2x - 4y + 1)dx - (3y - x)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(1;2)$, $B(1;8)$, $C(4;2)$.
4. $\oint_L (2x - y)dx + (3x + 4)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(2;6)$, $B(5;6)$, $C(5;0)$.
5. $\oint_L (1 - 2y)dx + (x - 4)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(-5;3)$, $B(-1;3)$, $C(-1;1)$.
6. $\oint_L (3x + y)dx - (3y + x)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(1;-3)$, $B(4;-3)$, $C(4;3)$.
7. $\oint_L (3x + 4y - 1)dx + (x - y)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(-1;2)$, $B(5;2)$, $C(-1;8)$.
8. $\oint_L (5x - 4y)dx - (x + 2y)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(1;0)$, $B(1;6)$, $C(3;6)$.
9. $\oint_L (x + 2y - 4)dx + (4x - 1)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(1;1)$, $B(4;1)$, $C(1;6)$.
10. $\oint_L (3x - 5y + 2)dx + (x + 1)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(-2;3)$, $B(1;3)$, $C(1;6)$.
11. $\oint_L (2x - 5y)dx + (3x + y)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(3;2)$, $B(5;2)$, $C(3;10)$;
12. $\oint_L (2x - 3y)dx + (x + y)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(2;1)$, $B(4;1)$, $C(4;5)$.
13. $\oint_L (x - y)dx + (3x - 2)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(1;5)$, $B(7;2)$, $C(1;2)$.
14. $\oint_L (2y - 5)dx + (3x + 4)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(4;1)$, $B(1;1)$, $C(4;7)$.
15. $\oint_L (3y - 2x)dx + (5x - y)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(2;6)$, $B(5;6)$, $C(5;0)$.
16. $\oint_L (3y - 4)dx + (2x - 1)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(4;1)$, $B(1;1)$, $C(4;7)$.
17. $\oint_L (6x - y)dx - (3x + 1)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(2;2)$, $B(2;6)$, $C(4;2)$.
18. $\oint_L (x + 4y - 3)dx + (x - 4y)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(1;2)$, $B(3;2)$, $C(3;6)$.
19. $\oint_L (2x - 4y)dx - (x - 6y)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(1;0)$, $B(1;6)$, $C(3;6)$.
20. $\oint_L (x - 2y + 4)dx + (4y - x)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(4;1)$, $B(1;1)$, $C(4;6)$.
21. $\oint_L (1 - 2y)dx + (x - 4)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(-5;3)$, $B(-1;3)$, $C(-1;1)$.
22. $\oint_L (3x - 5y + 2)dx + (x + 1)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(-2;3)$, $B(1;3)$, $C(1;6)$.
23. $\oint_L (2x - 4y + 1)dx - (3y - x)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(1;2)$, $B(1;8)$, $C(4;2)$.
24. $\oint_L (2x + 3y - 1)dx + 5xdy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;7)$.
25. $\oint_L (x - 2y + 4)dx + (4y - x)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(4;1)$, $B(1;1)$, $C(4;6)$.
26. $\oint_L (3x + y)dx - (3y + x)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(1;-3)$, $B(4;-3)$, $C(4;3)$.

27. $\oint_L (x-y)dx + (3x-2)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(1;5)$, $B(7;2)$, $C(1;2)$.
28. $\oint_L (2y-5)dx + (3x+4)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(4;1)$, $B(1;1)$, $C(4;7)$.
29. $\oint_L (2x-4y)dx - (x-6y)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(1;0)$, $B(1;6)$, $C(3;6)$.
30. $\oint_L (x+4y-3)dx + (x-4y)dy$, где L – замкнутая кривая $ABCA$: $A(1;2)$, $B(3;2)$, $C(3;6)$.

Задача 3

Вычислить тройные интегралы по области V , ограниченной указанными поверхностями.

1. $\iiint_V xy^2z^3 dx dy dz$, $V: z = xy, y = x, x = 1, z = 0$.
2. $\iiint_V (2x + 3y - z) dx dy dz$, $V: z = 0, z = 2, x = 0, y = 0, x + y = 3$.
3. $\iiint_V x dx dy dz$, $V: x = 0, y = 0, z = 0, y = 3, x + y = 2$.
4. $\iiint_V (1 - y)xz dx dy dz$, $V: x = 0, y = 0, z = 0, z = 1 - x - y$.
5. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$, $V: x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.
6. $\iiint_V (x + yz) dx dy dz$, $V: x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 4, x + y + z = 8$.
7. $\iiint_V y dx dy dz$, $V: z = x^2 + y^2, x = 0, y = 0, z = 3$.
8. $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$, $V: x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y + z = 3$.
9. $\iiint_V z dx dy dz$, $V: x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.
10. $\iiint_V xy dx dy dz$, $V: x = 0, y = 0, z = 0, y = 2, y = 1, y = 1, x + z = 1$.
11. $\iiint_V yz dx dy dz$, $V: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.
12. $\iiint_V xyz dx dy dz$, $V: x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$.
13. $\iiint_V xyz dx dy dz$, $V: x = 0, y = 0, z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.
14. $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, $V: x^2 + y^2 = z^2, z = 0, z = 1$.
15. $\iiint_V z^2 dx dy dz$, $V: z = x^2 + y^2, z = 2, z = 6$.
16. $\iiint_V z^3 dx dy dz$, $V: z = 4 - x^2 - y^2, z = 0, z = 3$.
17. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{z}$, $V: (x-1)^2 + y^2 = 1, z = 3, z = 6$.

18. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{z^2}, \quad V: x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad z = 1, \quad z = 2.$
19. $\iiint_V (x^2 + 2y) dx dy dz, \quad V: x^2 + z^2 = 1, \quad y = 0, \quad y = 1.$
20. $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad V: z = \frac{1}{2}(x^2 + z^2), \quad z = 2.$
21. $\iiint_V z dx dy dz, \quad V: x + y = 1, \quad x + y = 2, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z = 3.$
22. $\iiint_V (x + 2y + 3z) dx dy dz, \quad V: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 2, \quad z = 0, \quad z = 3.$
23. $\iiint_V (1 - x)^2 \sqrt{1 - y^2} dx dy dz, \quad V: x = -1, \quad x = 1, \quad y = -1, \quad y = 1, \quad z = -1, \quad z = 1.$
24. $\iiint_V y dx dy dz, \quad V: x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = 3, \quad z = 0, \quad z = 2 - y.$
25. $\iiint_V xz^2 dx dy dz, \quad V: y = 0, \quad y = 2x, \quad x = 2, \quad z = xy, \quad z = 0.$
26. $\iiint_V xyz dx dy dz, \quad V: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1 - x, \quad z = 0, \quad z = 1 - x - y.$
27. $\iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz, \quad V: 2az \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2.$
28. $\iiint_V y^2 e^{-xy} dx dy dz, \quad V: x = 0, \quad y = -2, \quad y = 4x, \quad z = 0, \quad z = 1.$
29. $\iiint_V (8y + 12z) dx dy dz, \quad V: y = x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad z = 3x^2 + 2y^2, \quad z = 0.$
30. $\iiint_V x^2 z dx dy dz, \quad V: z = xy, \quad z = 0, \quad y = 3x, \quad y = 0, \quad x = 2.$