

### Задача.

#### Расчет сложной цепи синусоидального тока

Цель работы. Выработка навыков применения МЭГ, МКТ и МУН для расчета установившегося синусоидального режима МКА и умения составлять баланс мощностей.

#### Задание

1. Найти параметры элементов  $L_k, C_k$  и записать зависимости тока/напряжения независимых источников от времени в виде  $e(t) = E_m \cdot \sin(\omega t + \psi_e)$
2. Найти токи и напряжения цепи методом узловых напряжений и методом контурных токов.
3. Найти указанную в таблице реакцию методом эквивалентного генератора.
4. Проверить выполнение баланса мощностей.

#### Пример выполнения задания

Структура цепи и значения параметров цепи на частоте  $\omega$  заданы таблицей 1.

Таблица 1

№	1	2	3	4	5	6	$\omega$	Реакция
49	1-4 $ Z_{C1}  = 20$	2-1 $\dot{E}_2 = 80$	2-4 $R_3 = 20$	4-2 $\dot{J}_4 = j2$	3-2 $ Z_{L5}  = 20$	3-4 $\dot{E}_6 = 40 + j80$	$200\pi$	$u_5(t)$

Схема цепи показана на рис. 1.

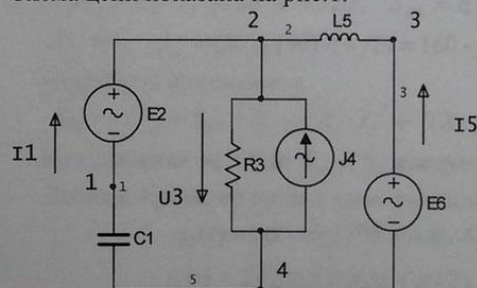


Рис. 1. Схема цепи.

Расчет производится методом комплексных амплитуд по расчетной схеме, которая получается из исходной схемы путем замены  $R, L, C$ -элементов их комплексными сопротивлениями

$$Z_R = R \quad Z_L = j\omega L = jX_L \quad Z_C = 1/j\omega C = -j \cdot 1/\omega C = -jX_C$$

и замены токов/напряжений независимых источников их комплексными амплитудами или комплексами действующих значений

$$j(t) = J_m \cdot \sin(\omega t + \psi_j) \leftrightarrow \dot{J}_m = J_m \cdot \exp(j\psi_j)$$

$$e(t) = E_m \cdot \sin(\omega t + \psi_e) \leftrightarrow \dot{E}_m = E_m \cdot \exp(j\psi_e)$$

По известным реактивным сопротивлениям находим параметры  $L, C$  элементов

$$L_5 = X_{L5}/\omega = 20/200\pi = 32 \cdot 10^{-3} \quad C_1 = 1/\omega \cdot X_{C1} = 1/200\pi \cdot 20 = 79.5 \cdot 10^{-6}$$

Найдем модуль и аргумент комплекса действующего значения напряжения источника  $\dot{E}_6$

$$E_6 = 40 \cdot \sqrt{1+4} = 40 \cdot \sqrt{5}, \quad \psi_e = \arg(\dot{E}_6) = \arctg(2) = 1.11, \quad \psi_{e6} = 63.5^\circ, \quad \dot{E}_6 = 40\sqrt{5} \cdot \exp(j1.11)$$

По заданным комплексам действующих значений токов/напряжений независимых источников восстановим временную зависимость этих величин

$$E_{2m} = \dot{E}_2 \cdot \sqrt{2} \quad \leftrightarrow \quad u_2(t) = Jm[\dot{E}_{2m} \cdot \exp(j\omega t)] = 20 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(200\pi \cdot t)$$

$$J_{2m} = \dot{J}_2 \cdot \sqrt{2} \quad \leftrightarrow \quad j_2(t) = Jm[\dot{J}_{2m} \cdot \exp(j\omega t)] = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(200\pi t + \pi/2)$$

$$\dot{E}_{6m} = \dot{E}_6 \sqrt{2} \quad \leftrightarrow \quad e_2(t) = Jm[\dot{E}_{6m} \cdot \exp(j\omega t)] = 40 \cdot \sqrt{10} \cdot \sin(200\pi t + 0.353\pi)$$

#### Метод узловых напряжений

Найдем напряжение  $\dot{U}_3$  по формуле напряжения двух узловой схемы

$$\dot{U}_3 = \frac{\dot{E}_2 \cdot Y_{C1} + \dot{J}_4 + \dot{E}_6 \cdot Y_{L5}}{Y_{C1} + Y_{R3} + Y_{L5}} = \frac{80 \cdot j0.05 + j2 + (40 + j80) \cdot (-j0.05)}{j0.05 + 0.05 - j0.05} = 80 + j80 = 80\sqrt{2} \exp(\pi/4)$$

Токи определяем по закону Ома для ветви с источником напряжения

$$I_1 = I_2 = (E_2 - U_3) \cdot Y_{C1} = [80 - (80 + j80)] \cdot j \cdot 0.05 = 4$$

$$I_5 = I_6 = (E_6 - U_3) \cdot Y_{L5} = [(40 + j80) - (80 + j80)] \cdot (-j0.05) = j2$$

$$I_3 = U_3 \cdot Y_{R3} = (80 + j80) \cdot 0.05 = 4 + j4 = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \exp(j\pi/4)$$

Проверим баланс мощностей источников и приемников

$$\sum \dot{S}_{E,J} = \sum \dot{S}_{R,L,C}$$

Мощность источников

$$\dot{S}_{E2} = \dot{E}_2 \cdot \dot{I}_2^* = 80 \cdot 4 = 320, \quad \dot{S}_{E6} = \dot{E}_6 \cdot \dot{I}_6^* = (40 + j80) \cdot (-j2) = 160 - j80,$$

$$\dot{S}_{J4} = \dot{U}_4 \cdot \dot{J}_4 = (80 + j80) \cdot (-j2) = 160 - j160, \quad \dot{S}_\Sigma = \dot{S}_{E2} + \dot{S}_{E6} + \dot{S}_{J4} = 640 - j240$$

Мощность приемников

$$\dot{S}_{RLC} = \dot{S}_{R3} + \dot{S}_{L5} + \dot{S}_{C1} = R_3 \cdot I_3^2 + j(X_{L5} \cdot I_5^2 - X_{C1} \cdot I_1^2) = 20 \cdot 32 + j(20 \cdot 4 - 20 \cdot 16) = 640 - j240$$

Из сравнения величин  $\dot{S}_{RLC}, \dot{S}_\Sigma$  следует, что баланс мощностей выполняется.

Запишем реакции цепи в виде функций времени

$$u_3(t) = 160 \cdot \sin(200\pi t + \pi/4), \quad i_1(t) = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(200\pi t),$$

$$i_5(t) = 2\sqrt{2} \sin(200\pi t + \pi/2), \quad i_3(t) = 8 \sin(200\pi t + \pi/4)$$

#### Метод контурных токов

Для расчета цепи МКТ ветвь с источником тока  $J_4$  преобразуется в ветвь с источником напряжения  $E_{J4} = R_3 \cdot J_4$  как показано на (рис.2)

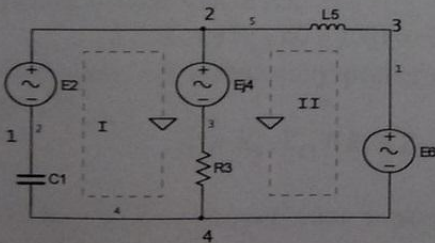


Рис.2. Расчет цепи МКТ.

Запишем матрицу контурных параметров с учетом направлений контурных токов

$$Z_k = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 - j20 & 20 \\ 20 & 20 + j20 \end{bmatrix}$$

Вектор контурных источников напряжения

$$E_k = [E_{k1} \quad E_{k2}]^T = [E_2 - J_4 \cdot R_3 \quad E_6 - J_4 \cdot R_3]^T = [80 - j40 \quad 40 + j40]^T$$

Решение системы уравнений

$$I_k = Z_k^{-1} \cdot E_k = [4 \quad j2]^T$$

Токи ветвей цепи

$$I_1 = I_{k1} = 4 \quad I_6 = I_{k2} = j2 \quad I_3 = I_1 + I_6 + J_4 = 4 + j4$$

#### Метод эквивалентного генератора

Для определения напряжения  $U_5$  на сопротивлении  $Z_{L5}$  заменим остальную часть цепи эквивалентным источником с напряжением холостого хода  $E$  и внутренним сопротивлением  $Z_i$ . Расчетная схема для определения напряжения  $E$  (рис 3) получена путем удаления из исходной схемы элемента  $L_5$ .

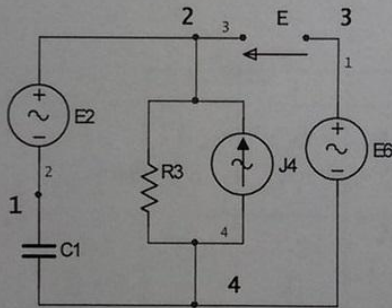


Рис.3. Расчетная схема для определения напряжения холостого хода эквивалентного источника.

Напряжение  $XX$  определяется по ЗКН

$$E = U_{3,4} - U_{2,4}, \quad U_{3,4} = E_6$$

Напряжение  $U_{2,4}$  определим методом наложения

$$U_{2,4} = E_2 \cdot \frac{R_3}{R_3 + Z_{C1}} + J_4 \cdot \frac{R_3 \cdot Z_{C1}}{R_3 + Z_{C1}} = 80 \cdot \frac{20}{20 - j20} + j2 \cdot \frac{20 \cdot (-j20)}{20 - j20} = 60 + j60$$

Искомое напряжение  $XX$

$$E = 40 + j80 - 60 - j60 = -20 + j20$$

Схема для определения внутреннего сопротивления эквивалентного источника показана на рис. 4.

$$Z_i = R_3 \cdot Z_{C1} / (R_3 + Z_{C1}) = 10 - j10$$

Напряжение на индуктивном элементе  $L_5$  определяется по расчетной схеме, показанной на рис. 5

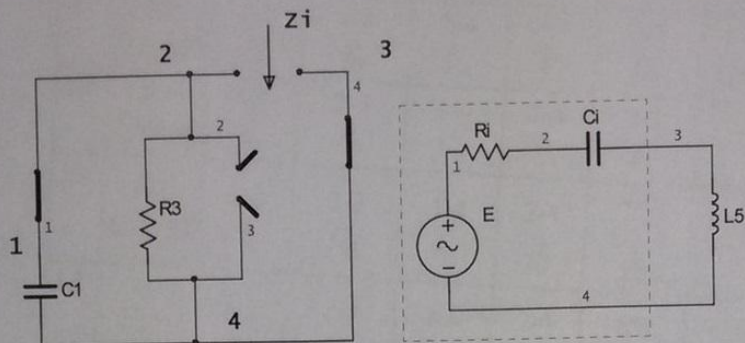


Рис..5 Расчетная схема для определения внутреннего сопротивления источника – а) и расчетная схема для определения тока/напряжения нагрузки – б).

$$U_5 = E \cdot \frac{Z_5}{R_i + Z_{Cи} + Z_{L5}} = (-20 + j20) \frac{j20}{10 - j10 + j20} = -40$$

Значение тока индуктивности  $I_5 = U_5 / Z_{L5} = -40 / j20 = j2$  совпадает со значениями тока, полученными МКТ и МУН.

Таблица 3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	Дано	Найти
1	3-1 $\dot{U}_1 = 40$	1-2 $L_2$	2-3 $R_3$	2-4 $C_4$	4-1 $\dot{U}_5 = 20j$	4-3 $C_6$	-	-	$ Z_k  = 40$ $f = 200\pi$	$i_4$
2	1-2 $\dot{I}_1 = 1$	1-2 $L_2$	1-3 $R_3$	2-4 $\dot{U}_4 = -40$	3-4 $C_5$	4-3 $\dot{I}_6 = j$	-	-	$ Z_k  = 40$ $f = 200\pi$	$u_5$
3	1-3 $\dot{I}_1 = 1 - j$	1-2 $C_2$	2-3 $C_3$	1-4 $L_4$	2-4 $L_5$	4-3 $R_6$	-	-	$ Z_k  = 30$ $f = 200\pi$	$i_6$
4	3-1 $\dot{U}_1 = j20$	1-2 $C_2$	2-3 $R_3$	2-4 $L_4$	4-1 $\dot{I}_5 = 2$	-	-	-	$ Z_k  = 10$ $f = 200\pi$	$u_2$
5	1-3 $\dot{U}_1 = 10$	1-2 $L_2$	2-3 $R_3$	4-2 $\dot{U}_4 = j20$	4-5 $R_5$	1-5 $C_6$	3-5 $\dot{I}_7 = 2$	-	$ Z_k  = 10$ $f = 200\pi$	$i_3$
6	3-1 $\dot{I}_1 = j$	1-2 $R_2$	2-3 $C_3$	2-4 $\dot{U}_4 = 30$	1-4 $L_5$	4-3 $R_6$	-	-	$ Z_k  = 30$ $f = 200\pi$	$u_5$
7	2-1 $\dot{I}_1 = j$	1-2 $C_2$	3-1 $\dot{U}_3 = 20$	3-4 $L_4$	5-2 $L_5$	4-5 $C_6$	6-4 $R_7$	6-5 $\dot{U}_8 = 40$	$ Z_k  = 20$ $f = 200\pi$	$i_4$
8	1-3 $\dot{U}_1 =$	1-2 $L_2$	2-3 $L_3$	2-4 $C_4$	1-4 $C_5$	4-3 $\dot{U}_6 =$	-	-	$ Z_k  = 20$	$u_4$

	$j20$					10			$f=200\pi$	
9	1-3 $\dot{U}_1 = 60$	1-2 $L_2$	2-3 $R_3$	2-4 $C_4$	4-5 $R_5$	5-3 $C_6$	3-4 $\dot{I}_7 = j3$	-	$ Z_k  = 10$ $f = 200\pi$	$u_4$
10	3-1 $\dot{I}_1 = 4+j2$	1-2 $L_2$	2-3 $R_3$	1-4 $C_4$	2-4 $R_5$	4-3 $L_6$	-	-	$ Z_k  = 20$ $f = 200\pi$	$i_4$
11	1-3 $\dot{U}_1 = 20$	1-2 $R_2$	2-3 $C_3$	1-4 $L_4$	2-4 $R_5$	4-3 $\dot{U}_5 = -j40$	-	-	$ Z_k  = 20$ $f = 200\pi$	$i_3$
12	1-3 $\dot{U}_1 = -10j$	1-2 $R_2$	2-3 $C_3$	1-4 $L_4$	2-4 $R_5$	4-3 $R_6$	-	-	$ Z_k  = 20$ $f = 200\pi$	$i_4$
13	1-3 $\dot{U}_1 = -j50$	1-2 $L_2$	2-3 $\dot{I}_3 = 5+j$	2-3 $C_4$	4-2 $R_5$	4-3 $\dot{U}_6 = j50$	-	-	$ Z_k  = 10$ $f = 200\pi$	$u_4$
14	1-3 $\dot{U}_1 = -j20$	1-2 $C_2$	2-3 $R_3$	4-1 $\dot{I}_4 = -1$	2-4 $R_5$	4-3 $L_6$	-	-	$ Z_k  = 20$ $f = 200\pi$	$u_2$
15	1-3 $\dot{U}_1 = 40$	1-2 $L_2$	2-3 $R_3$	2-4 $\dot{I}_4 = -j$	1-4 $C_5$	4-3 $R_6$	-	-	$ Z_k  = 40$ $f = 200\pi$	$i_2$
16	4-1 $\dot{I}_1 = -6-j2$	1-2 $R_2$	2-4 $C_3$	2-3 $L_4$	1-3 $R_5$	3-4 $R_6$	-	-	$ Z_k  = 10$ $f = 200\pi$	$i_2$
17	1-4 $\dot{I}_1 = j$	1-4 $R_2$	1-2 $L_3$	2-4 $C_4$	3-2 $R_5$	3-4 $\dot{U}_6 = 30+j30$	-	-	$ Z_k  = 10$ $f = 200\pi$	$i_3$
18	1-4 $\dot{U}_1 = j40$	1-2 $L_2$	2-4 $\dot{I}_3 = 1+j$	4-2 $R_4$	2-3 $C_5$	4-3 $\dot{U}_6 = 20-j20$	-	-	$ Z_k  = 20$ $f = 200\pi$	$i_2$
19	3-1 $\dot{I}_1 = -j10$	1-3 $L_2$	1-2 $\dot{U}_3 = -20$	4-3 $C_4$	2-4 $R_5$	2-4 $\dot{I}_6 = -j10$	-	-	$ Z_k  = 2$ $f = 200\pi$	$i_4$
20	1-3 $\dot{U}_1 = 40+j40$	1-2 $R_2$	2-3 $L_3$	2-4 $R_4$	1-4 $\dot{I}_5 = j10$	4-3 $C_6$	-	-	$ Z_k  = 2$ $f = 200\pi$	$i_4$
21	1-3 $\dot{U}_1 = 20+j20$	1-2 $R_2$	2-3 $R_3$	2-4 $C_4$	1-4 $L_5$	4-3 $C_6$	-	-	$ Z_k  = 20$ $f = 200\pi$	$u_4$
22	4-1 $\dot{U}_1 = -j40$	2-1 $C_2$	2-4 $L_3$	3-2 $R_4$	3-4 $R_5$	4-3 $\dot{I}_6 = j4$	-	-	$ Z_k  = 20$ $f = 200\pi$	$u_3$
23	4-1 $C_1$	2-1 $\dot{U}_2$	2-4 $R_3$	4-2 $\dot{I}_4 = j2$	3-2 $L_5$	3-4 $\dot{U}_6 =$	-	-	$ Z_k  = 10$ $f = 200\pi$	$u_3$

19	3-1 $\dot{I}_1 = -j10$	1-3 $L_2$	1-2 $\dot{U}_3 = -20$	4-3 $C_4$	2-4 $R_5$	2-4 $\dot{I}_6 = -j10$	-	-	$ Z_k  = 2$ $f = 200\pi$
20	1-3 $\dot{U}_1 = 40 + j40$	1-2 $R_2$	2-3 $L_3$	2-4 $R_4$	1-4 $\dot{I}_5 = j10$	4-3 $C_6$	-	-	$ Z_k  = 2$ $f = 200\pi$
21	1-3 $\dot{U}_1 = 20 + j20$	1-2 $R_2$	2-3 $R_3$	2-4 $C_4$	1-4 $L_5$	4-3 $C_6$	-	-	$ Z_k  = 20$ $f = 200\pi$
22	4-1 $\dot{U}_1 = -j40$	2-1 $C_2$	2-4 $L_3$	3-2 $R_4$	3-4 $R_5$	4-3 $\dot{I}_6 = j4$	-	-	$ Z_k  = 20$ $f = 200\pi$
23	4-1 $C_1$	2-1 $\dot{U}_2 = 40$	2-4 $R_3$	4-2 $\dot{I}_4 = j2$	3-2 $L_5$	3-4 $\dot{U}_6 = 20 + j40$	-	-	$ Z_k  = 10$ $f = 200\pi$
24	2-1 $\dot{I}_1 = 1 - j$	1-2 $L_2$	1-3 $R_3$	4-3 $\dot{I}_4 = -j$	3-4 $C_5$	2-4 $\dot{U}_6 = -j40$	-	-	$ Z_k  = 20$ $f = 200\pi$
25	1-4 $\dot{U}_1 = j10$	1-2 $C_2$	2-4 $R_3$	2-3 $L_4$	1-3 $R_5$	3-4 $\dot{U}_6 = j10$	-	-	$ Z_k  = 2$ $f = 200\pi$
26	2-1 $\dot{I}_1 = 2j$	1-2 $C_2$	3-1 $\dot{I}_3 = 2$	3-4 $L_4$	5-2 $L_5$	4-5 $C_6$	6-4 $R_7$	6-5 $\dot{U}_8 = 40$	$ Z_k  = 20$ $f = 200\pi$
16	4-1 $\dot{I}_1 = -2 - j2$	1-2 $R_2$	2-4 $C_3$	2-3 $L_4$	1-3 $\dot{U}_5 = 20$	3-4 $R_6$	-	-	$ Z_k  = 10$ $f = 200\pi$