

К простейшим видам нагружения относят также кручение бруса круглого сечения.

3.1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

При работе бруса на кручение в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор — *крутящий момент* T .

Для расчета на прочность и определения перемещений поперечных сечений бруса надо знать закон изменения крутящих моментов по длине бруса. Величина T определяется с помощью метода сечений через внешние силы (моменты): *крутящий момент* в произвольном поперечном сечении бруса численно равен сумме моментов относительно продольной оси z бруса всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого поперечного сечения

$$T = \sum_{i=1}^n M_i. \quad (3.1)$$

Момент считают положительным, если он стремится вращать ту часть бруса, равновесие которой рассматривается, против часовой стрелки (смотреть со стороны внешней нормали к мысленно проведенному сечению, т. е. со стороны заделки).

Методика построения эпюр при кручении аналогична методике при растяжении (сжатии).

Пример 3.1. Построить эпюру крутящих моментов T для бруса, изображенного на рис. 3.1, *а*.

Решение. Брус имеет три участка нагружения. Используя метод сечений, проводим на каждом из участков произвольное сечение. Задачу решаем со свободного незакрепленного конца бруса, чтобы не определять реакции заделки.

I участок, сечение $I-I$, $0 \leq z_1 \leq a$. Уравнение равновесия (рис. 3.1, *б*) имеет вид

$$T_1 - 3M = 0; \quad T_1 = 3M.$$

Так как крутящий момент по длине этого участка не меняется по величине, он изображен на эпюре прямой линией, параллельной оси бруса.

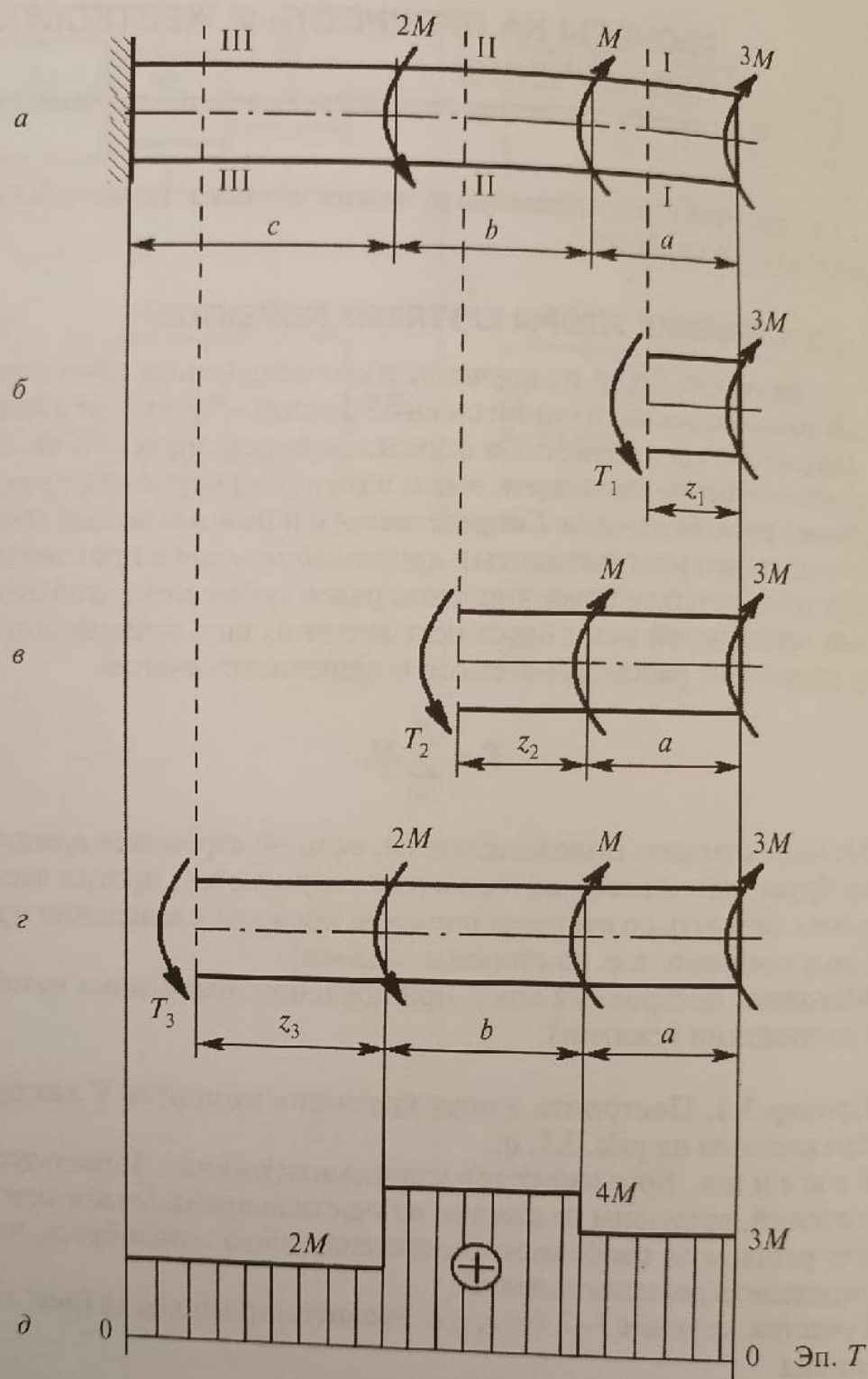


Рис. 3.1. Построение эпюры крутящих моментов:

a — схема нагружения бруса; b — сечение I;

$в$ — сечение II; $г$ — сечение III;

$д$ — эпюра крутящих моментов

II участок, сечение II–II, $0 \leq z_2 \leq b$ (рис. 3.1, в)

$$T_2 - M - 3M = 0; T_2 = 3M + M = 4M.$$

Эпюра T представлена прямой линией, параллельной оси бруса.
III участок, сечение III–III, $0 \leq z_3 \leq c$ (рис. 3.1, г)

$$T_3 + 2M - M - 3M = 0; T_3 = -2M + M + 3M = 2M.$$

Эпюра T также представлена прямой линией, параллельной оси бруса.

Закон изменения крутящего момента по длине бруса представлен в виде эпюры T на рис. 3.1, д.

3.2. НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КРУЧЕНИИ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

При кручении бруса круглого (сплошного или кольцевого) поперечного сечения справедлива гипотеза плоских сечений: расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными и их радиусы не искривляются. Касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения определяется по формуле

$$\tau = \frac{T}{J_p} \rho, \quad (3.2)$$

где J_p — полярный момент инерции поперечного сечения; ρ — расстояние от центра сечения до рассматриваемой точки.

Полярный момент инерции представляет собой сумму произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до центра сечения, т.е.

$$J_p = \int_A \rho^2 dA.$$

Вычисление полярного момента инерции производится по следующим формулам:

для круга

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = 0,1d^4, \quad (3.3)$$

для кольца

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4) = 0,1D^4 (1 - c^4), \quad (3.4)$$

где $c = \frac{d}{D}$ — отношение внутреннего диаметра сечения к наружному.

Наибольшие касательные напряжения возникают в точках внешнего контура сечения и определяются по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}, \quad (3.5)$$

где $W_p = \frac{J_p}{d/2}$ — полярный момент сопротивления сечения, равный отношению полярного момента инерции к наружному радиусу сечения. Эта величина является геометрической характеристикой прочности при кручении бруса круглого поперечного сечения.

Для круга

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3, \quad (3.6)$$

для кольца

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4) \approx 0,2D^3(1 - c^4). \quad (3.7)$$

Условие прочности имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau], \quad (3.8)$$

где $[\tau]$ — допускаемое напряжение при кручении.

Формула (3.8) представляет собой зависимость для проверочного расчета. Для проектного расчета (определения требуемых размеров сечения) из (3.8) получаем

$$W_p \geq \frac{T}{[\tau]} \quad (3.9)$$

или согласно формулам (3.6) и (3.7)
для круга

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau]}}, \quad (3.10)$$

для кольца

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau](1 - c^4)}}. \quad (3.11)$$

Для расчетов на жесткость необходимо вычисление углов поворота поперечных сечений.

В наиболее общем случае, когда крутящий момент изменяется непрерывно, угол закручивания (взаимный угол поворота концевых сечений бруса) вычисляют по формуле

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \int_l \frac{T(z) dz}{GJ_p} \quad (3.12)$$

Для стали модуль сдвига $G \approx 8 \cdot 10^4$ МПа. Произведение GJ_p называют *жесткостью сечения* бруса при кручении. Знак Σ показывает, что интеграл следует вычислять в пределах каждого участка и результаты суммировать.

$$\varphi = \int_0^l \frac{T(z) dz}{GJ_p} \quad (3.13)$$

Если крутящий момент и поперечное сечение постоянны в пределах каждого из участков, то формула (3.12) принимает вид

$$\varphi = \sum \frac{T_i l_i}{GJ_{p_i}} \quad (3.14)$$

где T_i — момент на i -ом участке; l_i — длина i -го участка; GJ_{p_i} — жесткость i -го участка.

Для отдельного участка постоянного сечения при $T = \text{const}$ угол закручивания определяют по формуле

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_p} \quad (3.15)$$

Все приведенные формулы дают значение угла φ в радианах.

Расчет на жесткость должен обеспечить условие, при котором относительный угол закручивания θ (т. е. угол закручивания на единицу длины, например, 1 метр) не превышал допускаемого угла закручивания $[\theta]$, зависящего от назначения рассчитываемого вала. Единых норм жесткости, общих для различных отраслей машиностроения, не существует. В качестве наиболее распространенных значений можно указать

$$[\theta] = (4,38 \dots 17,5) \cdot 10^{-3} \text{ рад/м} = (0,25 \dots 1,0) \text{ град/м.}$$

Формула для расчета на жесткость (проверочный расчет) имеет вид

$$\theta = \frac{T}{GJ_p} \leq [\theta] \quad (3.16)$$

Пример 3.2. Для бруса (рис. 3.2, *a*) подобрать из условия прочности кольцевое поперечное сечение с отношением $d / D = 0,8$. Округлить найденные в результате расчета размеры d и D по нормальному ряду размеров (прил. 4). Вычислить фактические напряжения в опасном сечении, построить эпюру напряжений. Оценить жесткость вала, предварительно построив эпюру перемещений. При вычислениях принять $M_1 = 15$ кНм; $M_2 = 30$ кНм; $m = 20$ кНм/м; $a = 0,5$ м; $b = 1$ м; $c = 2$ м; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $[\tau] = 100$ МПа.

Решение. 1. Строим эпюру крутящих моментов T , используя метод сечений. На каждом из 3-х участков нагружения мысленно проводим сечения (координаты этих сечений z_1 ; z_2 и z_3). Задачу решаем со свободного незакрепленного конца, чтобы не определять реакции заделки:

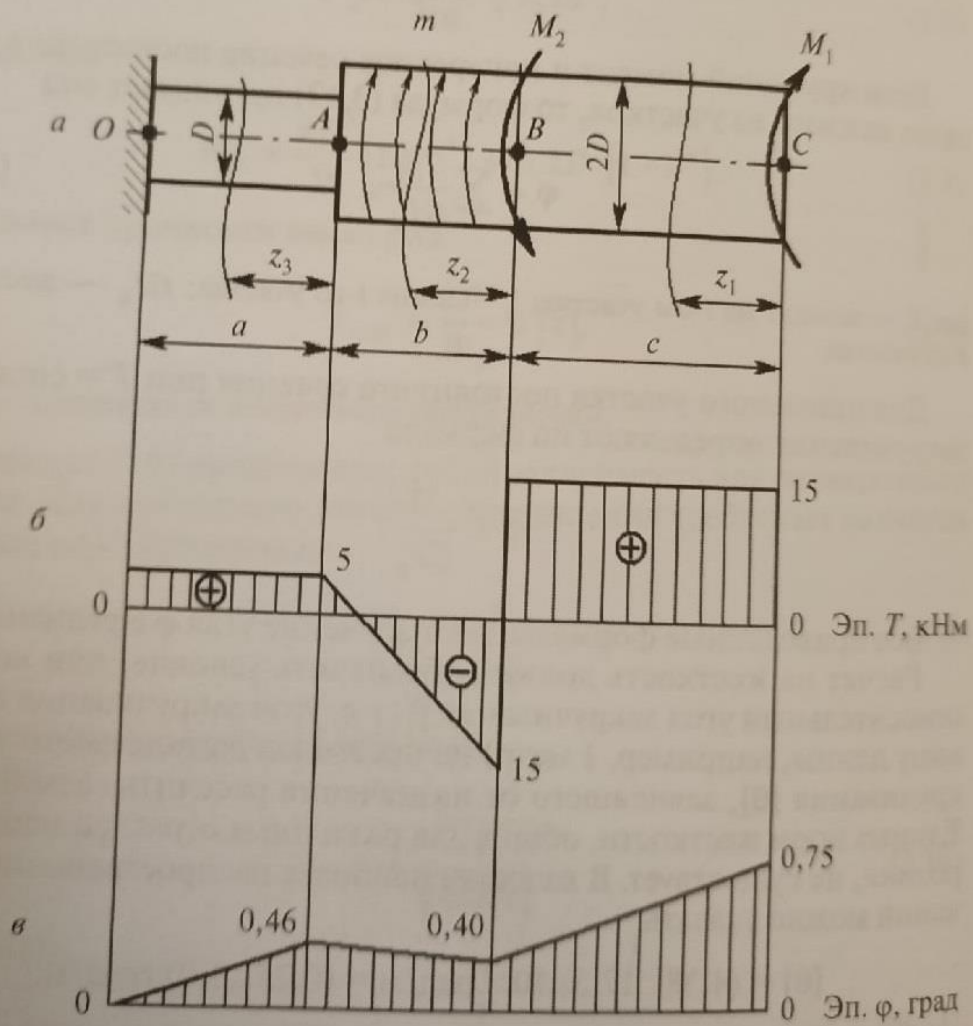


Рис. 3.2. Брус кольцевого поперечного сечения:
a — схема нагружения; *b* — эпюра крутящих моментов;
в — эпюра перемещений

I участок $0 \leq z_1 \leq 2$ м

$$T_1 = M_1 = 15 \text{ кНм.}$$

Крутящий момент остается постоянным по всей длине участка, поэтому эпюра представляет собой прямую линию, параллельную оси бруса.

II участок $0 \leq z_2 \leq 1$ м

$$T_2 = M_1 - M_2 + mz_2;$$

$$\text{при } z_2 = 0 \quad T_2 = M_1 - M_2 + m \cdot 0 = 15 - 30 + 0 = -15 \text{ кНм.}$$

$$\text{при } z_2 = 1 \text{ м} \quad T_2 = M_1 - M_2 + m \cdot 1 = 15 - 30 + 20 \cdot 1 = 5 \text{ кНм.}$$

На этом участке нагружения крутящий момент изменяется по линейному закону (прямая наклонная линия на эпюре).

III участок $0 \leq z_3 \leq 0,5$ м

$$T_3 = M_1 - M_2 + mb = 15 - 30 + 20 \cdot 1 = 5 \text{ кНм.}$$

Момент — величина постоянная по всей длине участка, изображен на эпюре прямой линией, параллельной оси бруса.

Эпюра крутящих моментов приведена на рис. 3.2, б.

2. Определяем положение опасного сечения. Для этого находим максимальные по модулю напряжения на каждом из участков нагружения

$$\tau_1 = \left| \frac{T_1}{W_{\rho 1}} \right| = \left| \frac{-15}{0,2(2D)^3(1-c^4)} \right| = \frac{1,875}{0,2D^3(1-c^4)};$$

$$\tau_{2\max} = \left| \frac{T_{2\max}}{W_2} \right| = \left| \frac{15}{0,2(2D)^3(1-c^4)} \right| = \frac{1,875}{0,2D^3(1-c^4)};$$

$$\tau_3 = \left| \frac{T_3}{W_3} \right| = \left| \frac{5}{0,2D^3(1-c^4)} \right|.$$

Сравнение τ_1 ; $\tau_{2\max}$ и τ_3 показывает, что максимальные напряжения действуют на третьем участке нагружения

$$\tau_{\max} = \tau_3 = \left| \frac{5}{0,2D^3(1-c^4)} \right|.$$

3. Используя условие прочности, находим размеры D и d кольцевого поперечного сечения бруса.

Условие прочности имеет вид

$$\tau_{\max} \leq [\tau]; \text{ или } \frac{5 \cdot 10^6}{0,2D^3(1 - e^4)} \leq [100].$$

Отсюда

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 10^6}{0,2(1 - 0,8^4) \cdot 100}} \geq 75,1 \text{ мм.}$$

$$d \geq 0,8D = 0,8 \cdot 75,1 = 60,1 \text{ мм.}$$

По нормальному ряду размеров (прил. 4, ряд *Ra40*) принимаем $D = 75 \text{ мм}$, $d = 60 \text{ мм}$.

4. Вычисляем фактические напряжения в опасном сечении и строим их эпюру

$$\tau_{\text{факт}} = \frac{5 \cdot 10^6}{0,2 \cdot 75^3 \left[1 - \left(\frac{60}{75} \right)^4 \right]} = 100,4 \text{ МПа.}$$

Перегрузка составляет

$$\frac{\tau_{\text{факт}} - [\tau]}{[\tau]} \cdot 100\% = \frac{100,4 - 100}{100} \cdot 100\% = 0,4\%.$$

Допускается недогрузка до 20%, перегрузка до 5%.

Строим эпюру фактических напряжений в опасном сечении (рис. 3.3).

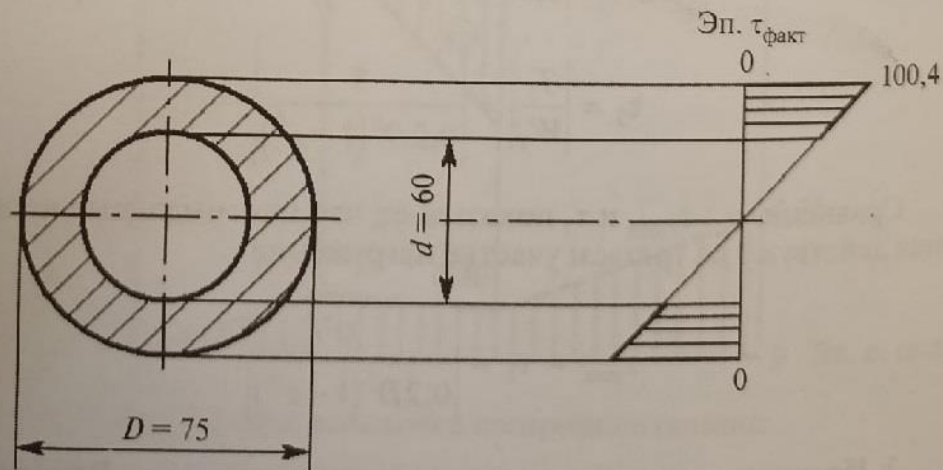


Рис. 3.3. Эпюра фактических касательных напряжений в опасном сечении бруса

5. Строим эпюру углов закручивания. Для этого определяем углы закручивания на каждом из участков нагружения.

На участке I нагрузка постоянная, поэтому пользуемся формулой (3.15)

$$\varphi_1 = \frac{T_1 l_1}{GJ_{p1}} = \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot (2 \cdot 75)^4 \left[1 - \left(\frac{60}{75} \right)^4 \right]} = 0,0062 \text{ рад} = 0,35^\circ,$$

здесь $J_{p1} = 0,1 \cdot (2D)^4 (1 - c^4) = 0,1 \cdot (2 \cdot 75)^4 \left[1 - \left(\frac{60}{75} \right)^4 \right]$.

На участке II момент меняется по линейному закону (эпюра T , рис. 3.2, б), следовательно, угол закручивания находим по формуле (3.13)

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \int_{l_2} \frac{T_2(z) dz}{GJ_{p2}} = \int_0^1 \frac{(M_1 - M_2 + qz) dz}{GJ_{p2}} = \int_0^1 \frac{(M_1 - M_2) dz}{GJ_{p2}} + \int_0^1 \frac{qz dz}{GJ_{p2}} = \\ &= \frac{(M_1 - M_2)z}{GJ_{p2}} \Big|_0^1 + \frac{qz^2}{2GJ_{p2}} \Big|_0^1 = \frac{(15 - 30) \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot (2 \cdot 75)^4 \left[1 - \left(\frac{60}{75} \right)^4 \right]} + \\ &+ \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^6}{2 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot (2 \cdot 75)^4 \left[1 - \left(\frac{60}{75} \right)^4 \right]} = -0,0010 \text{ рад} = -0,06^\circ. \end{aligned}$$

На участке III, как и на первом, момент T_3 — величина постоянная.

$$\varphi_3 = \frac{T_3 l_3}{GJ_{p3}} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 75^4 \left[1 - \left(\frac{60}{75} \right)^4 \right]} = 0,0080 \text{ рад} = 0,46^\circ.$$

Следует заметить, что, избегая интегрирования, угол закручивания можно найти (при линейном законе изменения момента) через усредненное значение крутящего момента. Так, угол участка II

$$\varphi_2 = \frac{T_{cp2} \cdot l_2}{GJ_{p2}} = \frac{\frac{5 + (-15)}{2} \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot (2 \cdot 75)^4 \left[1 - \left(\frac{60}{75} \right)^4 \right]} = -0,0010 \text{ рад}.$$

Построение эпюры начинаем с сечения, поворот которого исключен (заделка, т. O).

Сечение A повернется относительно O на угол

$$\varphi_{OA} = \varphi_3 = 0,46^\circ.$$

Сечение B относительно O

$$\varphi_{BO} = \varphi_{OA} + \varphi_2 = 0,46^\circ - 0,06^\circ = 0,40^\circ.$$

Сечение C относительно O

$$\varphi_{CO} = \varphi_{BO} + \varphi_1 = 0,40^\circ + 0,35^\circ = 0,75^\circ.$$

Эпюра углов закручивания представлена на рис. 3.2, *в*. Парабола на участке AB условно заменена прямой ввиду малости деформаций.

6. По формуле (3.16) оцениваем жесткость бруса

$$\theta = \frac{T}{GJ_p} \leq [\theta].$$

Так как брус имеет ступенчатую форму и на каждой ступени действует свой момент T , необходимо оценить жесткость каждого из участков нагружения:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{T_1}{GJ_{p1}} = \frac{15 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot (2 \cdot 75)^4 \left[1 - \left(\frac{60}{75} \right)^4 \right]} = \\ &= 0,031 \cdot 10^{-4} \text{ рад/мм} = 3,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{T_{2cp}}{GJ_{p2}} = \frac{\frac{5 + (-15)}{2} \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot (2 \cdot 75)^4 \left[1 - \left(\frac{60}{75} \right)^4 \right]} = \\ &= 0,01 \cdot 10^{-4} \text{ рад/мм} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \frac{T_3}{GJ_{p3}} = \frac{5 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot 75^4 \left[1 - \left(\frac{60}{75} \right)^4 \right]} = \\ &= 0,16 \cdot 10^{-4} \text{ рад/мм} = 16 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}. \end{aligned}$$

Наименьшей жесткостью обладает тот участок, на котором относительный угол закручивания θ достигает максимального значения.

Это участок III. Сравнивая θ_3 с допусковым значением $[\theta] = (4,38 \dots 17,5) \cdot 10^{-3}$ рад/м, делаем вывод, что жесткость бруса находится в рекомендуемых пределах.

Контрольные вопросы

1. Как определяют крутящий момент в сечении вала?
2. Сформулируйте правило знаков для крутящих моментов.
3. Как построить эпюру крутящих моментов?
4. Запишите формулу для определения касательных напряжений в любой точке сечения круглого вала.
5. Сформулируйте условие прочности при кручении.
6. Что такое момент сопротивления сечения при кручении?
7. Как найти диаметр сечения вала, удовлетворяющий условиям прочности?
8. Запишите формулу для определения угла закручивания вала.
9. В чем заключается условие жесткости при кручении вала?

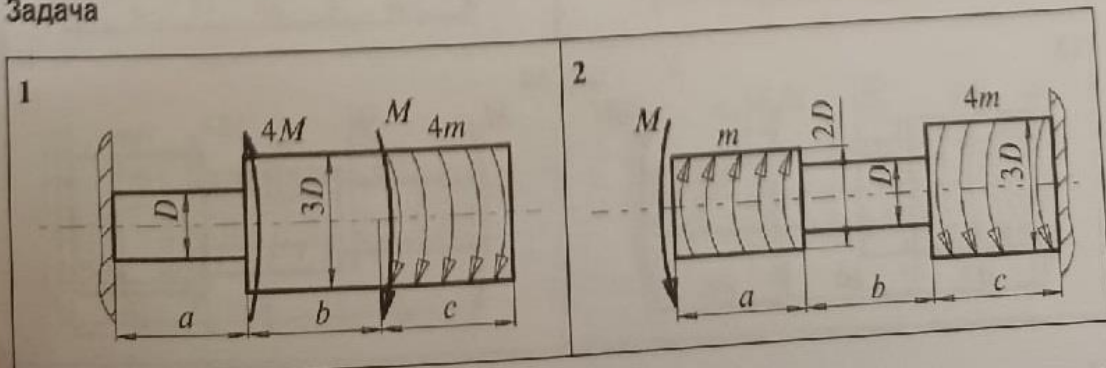
Задания для самостоятельной работы

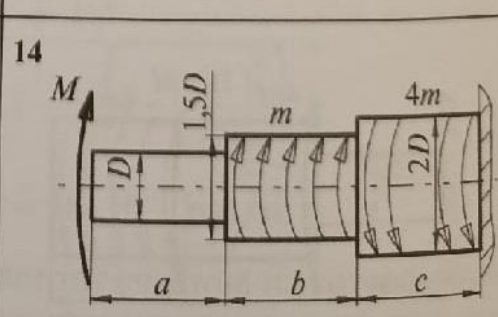
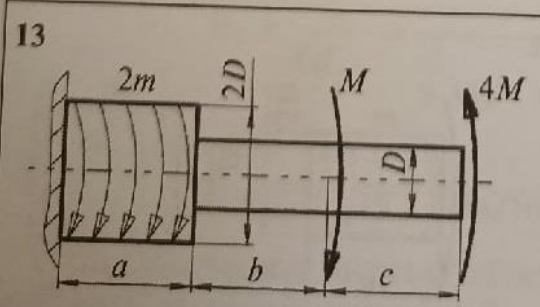
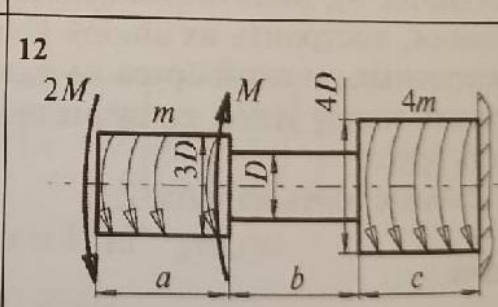
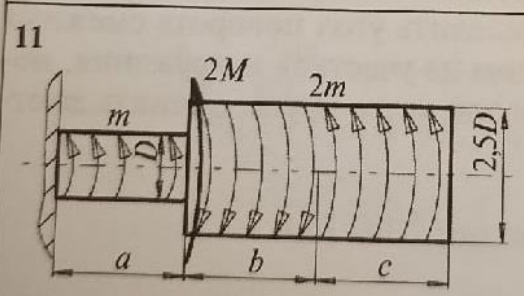
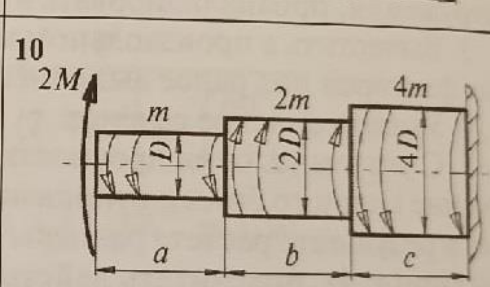
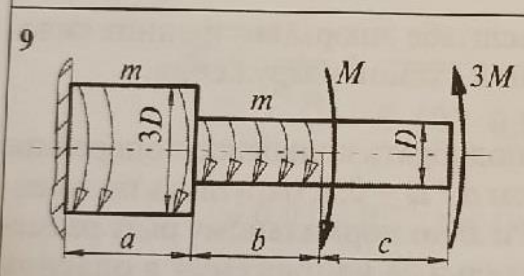
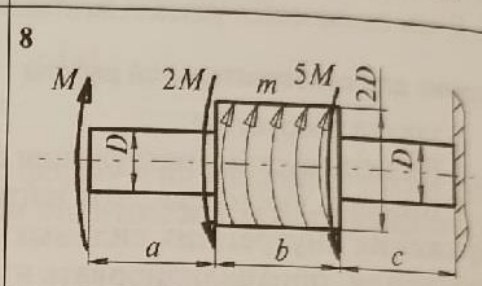
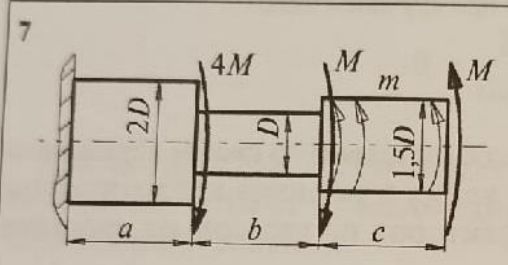
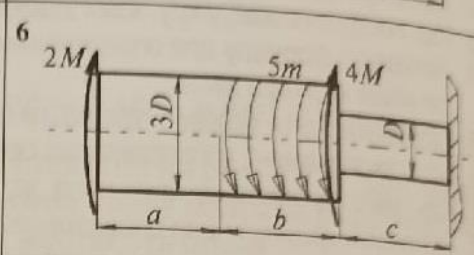
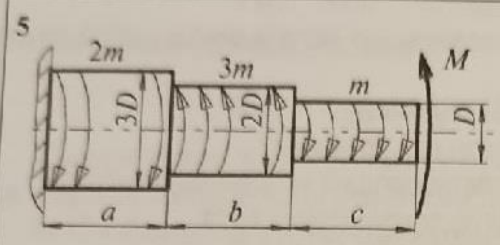
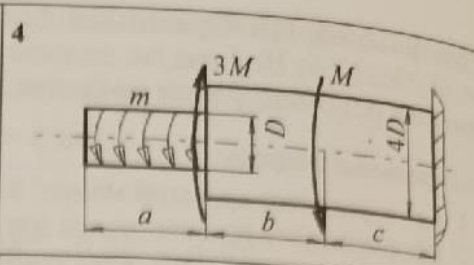
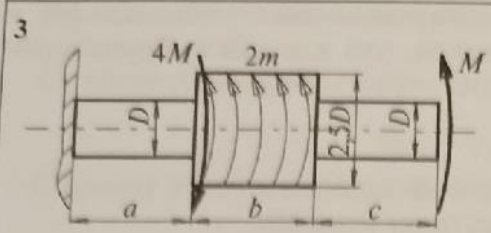
В задаче требуется:

1. Вычертить схему нагружения в соответствии со своим вариантом.
2. Выявить число участков нагружения и записать аналитические выражения внутренних силовых факторов на каждом из участков нагружения, проанализировать их.
3. Вычертить в произвольном масштабе эпюры внутренних силовых факторов под ранее выполненной схемой нагружения.
4. Указать опасное сечение.
5. С учетом условия прочности подобрать кольцевое поперечное сечение круглого бруса с отношением $d/D = 0,8$; округлить полученные в результате расчета размеры d и D по нормальному ряду размеров (прил. 4), подсчитать действительные напряжения в опасном сечении, построить их эпюру. Определить угол поворота смежных поперечных сечений бруса на каждом из участков нагружения, построить эпюру углов закручивания для всего бруса, оценить жесткость бруса.

Данные взять из табл. 2.1.

Задача





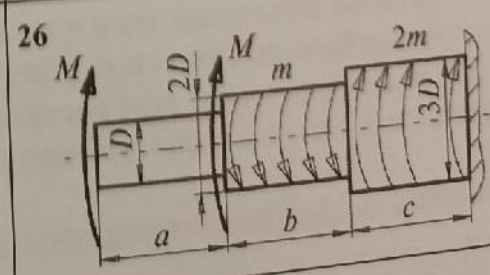
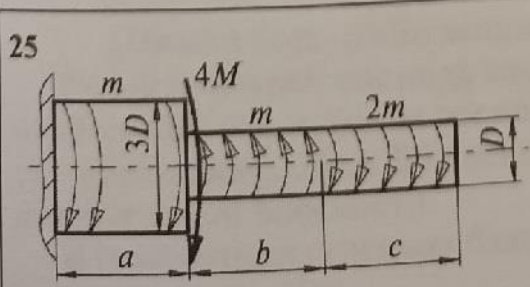
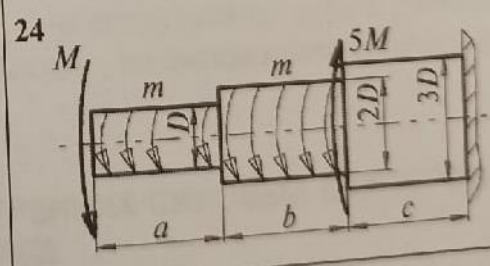
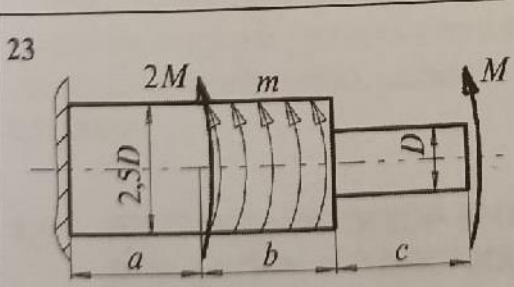
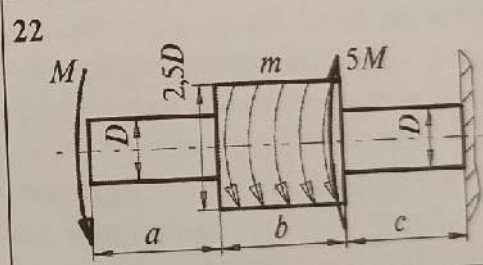
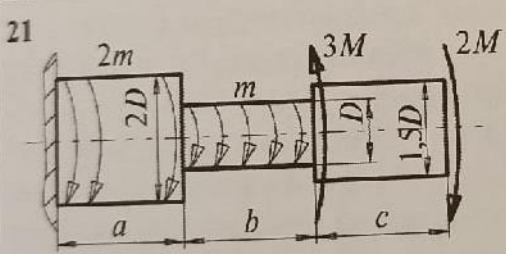
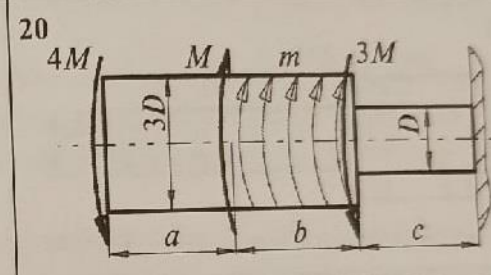
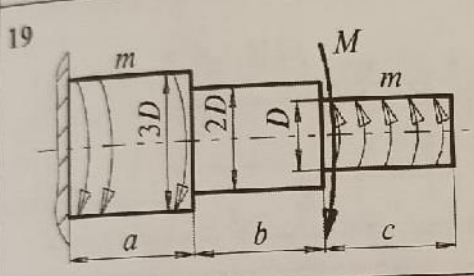
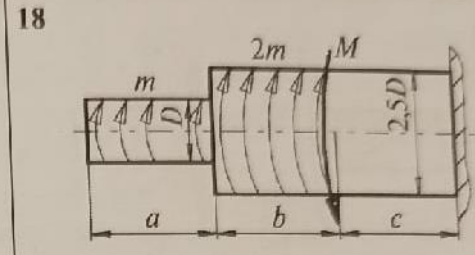
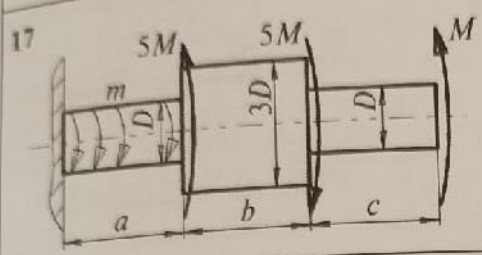
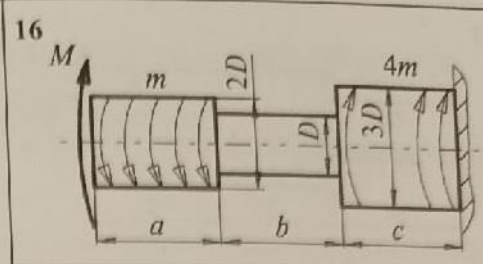
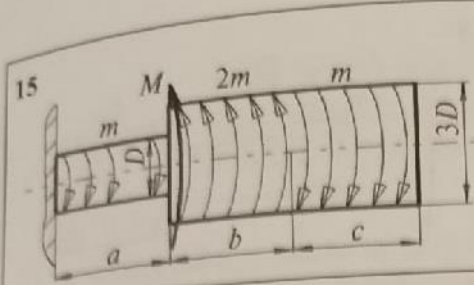


Таблица 2.1

Данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F , кН	10	15	20	10	15	20	20	10	10	15
q , кН/м	10	10	20	20	30	30	10	20	20	30
M , кНм	10	30	40	30	10	30	40	30	20	20
m , кНм/м	10	10	20	20	20	10	20	20	10	30
a , м	4	3	1	2	4	2	3	5	4	1
b , м	1	2	3	4	5	5	1	2	3	4
c , м	3	5	4	5	3	2	5	4	2	4
$[\sigma]$, МПа	160	180	200	170	190	160	170	180	190	200
$[\tau]$, МПа	80	90	100	80	90	100	80	90	100	80
E , МПа	$2 \cdot 10^5$									
G , МПа	$8 \cdot 10^4$									