

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Цель работы: приобретение практических навыков по решению оптимизационных задач. Решение транспортных задач методами линейного программирования.

Содержание работы:

- Изучить методы решения оптимизационных задач
- Решить задачи методами линейного программирования
- Оформит отчет о выполненной работе
- Ответить на контрольные вопросы

Основные понятия теории оптимизации. Геометрическая интерпретация задач оптимизации.

Задачами оптимизации называют задачи отыскания точек минимума и максимума функций, заданных на множествах.

Общая задача теории оптимизации может быть сформулирована следующим образом:

Дана система неравенств и уравнений с переменными

$$\begin{cases} g_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i; i = 1, 2, \dots, k \\ \text{.....} \\ g_j(x_1, \dots, x_n) \leq b_j; j = k + 1, \dots, m \end{cases} \quad (1.1)$$

и функция $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

В области решений системы (1.1) требуется найти такое решение, при котором функция z принимает наибольшее (наименьшее) значение, т.е.

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min)$$

Функция z называется целевой функцией, а условия (1.1) ограничениями. Если ограничения (1.1) отсутствуют, то такая задача называется задачей безусловной оптимизации.

Целевая функция – это глобальный критерий оптимальности в математических моделях, с помощью которых описываются инженерные или экономические задачи.

В качестве примера рассмотрим линейную задачу

Область решений системы (1.2) представляет собой гипермногогранник (полиэдр) в n -мерном пространстве, а уравнение $Z = C_1X_1 + \dots + C_nX_n$ задает в этом пространстве гиперплоскость. Если $n=2$ то решение системы (1.2) есть плоский многогранник, а целевая функция описывает прямую на плоскости. В случае $n=3$, решение системы (1.2) образует многогранник в пространстве. При этом $\alpha=f(x_1, x_2, x_3)$ задает плоскость в этом пространстве

Производство обеспечено сырьем каждого типа в количестве b_1 кг, b_2 кг, b_3 кг соответственно.

Рыночная цена единицы Изделия 1 составляет c_1 тыс. руб., а единицы Изделия 2 c_2 тыс.руб.

Требуется:

- 1) построить экономико-математическую модель задачи;
- 2) составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную выручку от их реализации при помощи графического метода решения задачи линейного программирования.
- 3) составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную выручку от их реализации при помощи табличного симплекс – метода решения задачи линейного программирования, используя надстройку «Поиск решения» в среде MS Excel

$a_{11} = 2$	$a_{12} = 7$	$b_1 = 560$	$c_1 = 55$
$a_{21} = 3$	$a_{22} = 3$	$b_2 = 300$	$c_2 = 35$
$a_{31} = 5$	$a_{32} = 1$	$b_3 = 332$	

Решение задачи

- ## 1) Математическая модель задачи

Переменные задачи:

В задаче требуется определить оптимальное число изделий каждого вида, обеспечивающее максимальную прибыль от их реализации, а значит, переменными задачи являются количество каждого вида изделий:

x_1 – количество изделий вида 1;

x_2 – количество изделий вида 2.

Целевая функция.

Критерием эффективности служит параметр прибыли, который должен стремиться к максимуму. Для расчета величины прибыли от реализации изделий, необходимо знать:

- Выпускаемое количество изделий каждого вида, т.е. x_1 и x_2 ;
- Прибыль от реализации согласно условию, соответственно 55 и 35 тыс.руб.

Таким образом, прибыль от реализации выпускаемых изделий вида 1 составит $55x_1$ тыс.руб., а от реализации изделий вида 2 составит $35x_2$ тыс.руб. Поэтому целевая функция прибыли от продажи каждого вида изделий примет вид

$$z(x) = 55x_1 + 35x_2 \rightarrow \max$$

Ограничения:

Возможное оптимальное количество изделий каждого вида ограничивается следующими условиями:

- Заданными ресурсами 1,2,3, которые используются на выпуск каждого вида изделия, не могут превышать общего запаса ресурсов;
- Количество каждого вида изделия не может быть отрицательным.

Запишем эти ограничения в **математической** форме:

По расходу ресурса 1: $2x_1 + 7x_2 \leq 560$

По расходу ресурса 2: $3x_1 + 3x_2 \leq 300$

По расходу ресурса 3: $5x_1 + x_2 \leq 332$

Неотрицательность количества выпускаемых изделий:

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0$$

Таким образом, **математическая модель** данной задачи имеет вид:

$$z(x) = 55x_1 + 35x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 7x_2 \leq 560$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 300$$

$$5x_1 + x_2 \leq 332$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Так как переменные задачи x_1 и x_2 входят в целевую линейную функцию и ограничения задачи линейны, то соответствующая задача оптимизации – задача линейного программирования.

Построим в декартовой системе координат X_1OX_2 многоугольник решений, или допустимых планов, который является пересечением полуплоскостей – решений каждого из неравенств системы ограничений.

1. $2x_1 + 7x_2 \leq 560$. Построим разделяющую прямую на плоскости $2x_1 + 7x_2 = 560$. Для этого найдем две точки, через которые она проходит:

x_1	0	280
x_2	80	0

Подставим точку $(0;0)$ в неравенство $2x_1 + 7x_2 \leq 560$ и проверим условие. Если условие соблюдается, указать стрелками направление на полуплоскость к нулю. Если нет, в противоположную сторону.

2. $3x_1 + 3x_2 \leq 300$. Построим разделяющую прямую на плоскости $3x_1 + 3x_2 = 300$. Для этого найдем две точки, через которые она проходит:

x_1	0	100
x_2	100	0

Подставим точку $(0;0)$ в неравенство $3x_1 + 3x_2 \leq 300$ и проверим условие. Если условие соблюдается, указать стрелками направление на полуплоскость к нулю. Если нет, в противоположную сторону.

3. $5x_1 + x_2 \leq 332$. Построим разделяющую прямую на плоскости $5x_1 + x_2 = 332$. Для этого найдем две точки, через которые она проходит:

x_1	0	66,4
x_2	332	0

Подставим точку $(0;0)$ в неравенство $5x_1 + x_2 \leq 332$ и проверим условие. Если условие соблюдается, указать стрелками направление на полуплоскость к нулю. Если нет, в противоположную сторону.

4. Найдем многоугольник, в котором пересекаются и накладываются друг на друга все построенные полуплоскости. Многоугольник допустимых решений заштриховывается (рис.1).

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq -3a \\ 2x_1 + (c - b)x_2 \leq 2c \\ (a - 1)x_1 + (b - 3)x_2 \leq b + ab - 6 \\ x_1 \geq 0; i = 1, 2 \end{cases}$$

№ вар	a	b	c	№ вар	a	b	c	№ вар	a	b	c
1	3	8	9	11	4	9	10	21	5	8	10
2	3	8	10	12	4	9	11	22	5	6	7
3	3	8	11	13	4	8	11	23	5	7	8
4	3	8	12	14	4	8	10	24	5	8	9
5	3	5	6	15	4	5	6	25	5	9	10
6	3	7	9	16	4	8	9	26	5	9	11
7	3	7	10	17	4	7	9	27	5	10	11
8	3	6	7	18	4	6	7	28	5	10	12
9	3	6	8	19	4	7	8	29	6	8	9
10	3	7	8	20	4	9	12	30	6	9	10

Задача линейного программирования. Симплекс-метод. Применение надстройки «Поиск решения» в MS Excel

Для решения задач линейного программирования **симплекс-методом** в среде MS Excel заполняются ячейки исходными данными в режиме чисел и формулами математической модели.

MS Excel позволяет получить оптимальное решение без ограничения размерности системы неравенств целевой функции.

Решим задачу о выпускаемых изделиях симплекс-методом применяя надстройку «Поиск решения» в MS Excel.

1. Заполните таблицу Excel в режиме чисел (рис.1)
2. Заполните таблицу Excel в режиме формул (рис.2)

	A	B	C	D
1	Ресурсы	Вид изделия		Запасы
2		Изделие1	Изделие2	
3	1	2	7	560
4	2	3	3	300
5	3	5	1	332
6	Прибыль, тыс.руб.	55	35	
7				
8				
9	План	1	1	
10	Функция цели	90		
11				
12	Ограничения	9	<=	560
13		6	<=	300
14		6	<=	332
15				

Рис.1 Таблица в режиме чисел

	A	B	C	D
1	Ресурсы	Вид изделия		Запасы
2		Изделие1	Изделие2	
3	1	2	7	560
4	2	3	3	300
5	3	5	1	332
6	Прибыль, тыс.руб.	55	35	
7				
8				
9	План	1	1	
10	Функция цели	=СУММПРОИЗВ(B6:C6;B9:C9)		
11				
12	Ограничения	=СУММПРОИЗВ(B3:C3;B9:C9)	<=	560
13		=СУММПРОИЗВ(B4:C4;B9:C9)	<=	300
14		=СУММПРОИЗВ(B5:C5;B9:C9)	<=	332

Рис.1 Таблица в режиме формул

Здесь: B9:C9 – результат (оптимальное количество изделий каждого вида);
 B6:C6 – коэффициенты целевой функции;
 B10 – значение целевой функции;
 B3:C5 – коэффициенты ограничений;
 D12:D14 – правая часть ограничений;
 B12:B14 – вычисляемые (фактические) значения левой части ограничений.

Решим задачу с помощью команды Данные/Поиск решения. На экране появляется диалоговое окно Поиск решения.

В поле Установить целевую функцию будет показана ссылка на активную ячейку, т.е. на B10. Причем эта ссылка абсолютная. В секции Равной устанавливаем переключатель Максимальному (минимальному) значению в зависимости от целевой функции. Ограничения устанавливаются с помощью кнопки Добавить, которая вызывает диалоговое окно их ввода. Добавление ограничения.

В поле ввода Ссылка на ячейку: указывается адрес ячейки, содержащей формулу левой части ограничения. Затем выбирается из списка знак соотношения. В поле Ограничение указывается адрес ячейки, содержащей правую часть ограничения. Щёлкаем на кнопку Добавить и повторяем до следующего ограничения. После ввода всех ограничений нажимаем ОК.

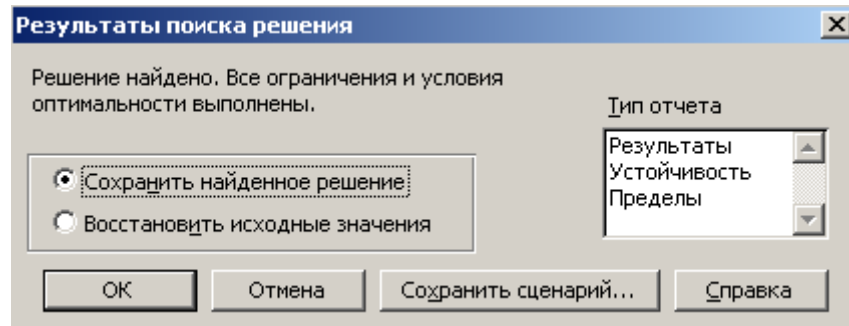
Так как все переменные несут условия неотрицательности, то их положительность задается через кнопку Параметры в окне диалога Поиск решения. После щелчка по ней, на экране окно Параметры поиска решения.

Устанавливаем флажок Сделать переменные без ограничений неотрицательными и выбрать Метод решения Поиск решения линейных задач симплекс-методом. Щёлкаем на кнопке Найти решение.

Excel предъявит окно Результаты поиска решения с сообщением о том, что

решениенайдено, или о том, что неможет найти подходящего решения.

Если вычисления оказались успешными, Excel предъявит следующее окно итогов. Их можно сохранить или отказаться. Кроме того, можно получить один из трёх видов отчётов (Результаты, Устойчивость, Пределы), позволяющие лучше осознать полученные результаты, в том числе, оценить их достоверность.



После найденного решения, в ячейках B9:C9 появится оптимальное количество изделий каждого вида.

	А	В	С	Д
1	Ресурсы	Вид изделия		Запасы
2		Изделие1	Изделие2	
3	1	2	7	560
4	2	3	3	300
5	3	5	1	332
6	Прибыль, тыс.руб.	55	35	
7				
8				
9	План	58	42	
10	Функция цели	4660		
11				
12	Ограничения	410	<=	560
13		300	<=	300
14		332	<=	332

При сохранении отчета выберите – Отчет по результатам (рис.3).

Из отчета видно, что ресурс 1 не используется полностью на 150 кг, а ресурс 2 и 3 используется полностью.

В результате получен оптимальный план, при котором изделий 1 вида необходимо выпустить в количестве 58 шт., а изделий 2 вида в количестве 42 шт. При этом прибыль от их реализации максимальная и составляет 4660 тыс.руб.

A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам					
2	Рабочий лист: [201.xls]Лист3					
3	Отчет создан: 24.12.2012 20:02:31					
4						
5						
6	Целевая ячейка (Максимум)					
7	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
8	\$B\$10	Функция цели Изделие1	90	4660		
9						
10						
11	Изменяемые ячейки					
12	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
13	\$B\$9	План Изделие1	1	58		
14	\$C\$9	План Изделие2	1	42		
15						
16						
17	Ограничения					
18	Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
19	\$B\$12	Ограничения Изделие1	410	\$B\$12<=\$D\$12	не связан.	150
20	\$B\$13	Изделие1	300	\$B\$13<=\$D\$13	связанное	0
21	\$B\$14	Изделие1	332	\$B\$14<=\$D\$14	связанное	0

Рис.3 Отчет по результатам

Задание для самостоятельного решения: Решить симплекс-методом задачу линейного программирования в среде *MS Excel*.

Со станции формирования ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда, составленные из плацкартных, купейных и мягких вагонов. Число мест в плацкартном вагоне – 54, в купейном – 36, в мягком – 18. В таблице указаны состав поезда каждого типа и количество имеющихся в парке вагонов различного типа. Определить число скорых и пассажирских поездов, которые необходимо формировать ежедневно, чтобы число перевозимых пассажиров было максимальным.

1	плац	куп	мягк
скор	2	6	2
пасс	5	3	2
парк	50	60	26

2	плац	куп	мягк
скор	2	6	2
пасс	5	4	2
парк	50	66	26

3	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	2	6	2
<i>пасс</i>	5	3	2
<i>парк</i>	55	60	26

4	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	3	6	2
<i>пасс</i>	5	4	2
<i>парк</i>	55	66	26

5	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	2	7	2
<i>пасс</i>	5	4	2
<i>парк</i>	55	77	28

6	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	2	7	2
<i>пасс</i>	5	5	2
<i>парк</i>	55	84	28

8	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	4	6	2
<i>пасс</i>	5	4	2
<i>парк</i>	60	66	26

7	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	4	6	2
<i>пасс</i>	5	3	2
<i>парк</i>	60	60	26

9	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	4	6	2
<i>пасс</i>	5	2	2
<i>парк</i>	60	72	26

10	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	2	7	2
<i>пасс</i>	5	6	2
<i>парк</i>	55	91	28

11	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	3	7	2
<i>пасс</i>	5	3	2
<i>парк</i>	60	70	28

12	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	2	6	2
<i>пасс</i>	5	5	2
<i>парк</i>	50	72	26

13	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	3	7	2
<i>пасс</i>	5	4	2
<i>парк</i>	60	70	28

14	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	3	7	2
<i>пасс</i>	5	5	2
<i>парк</i>	60	84	28

15	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	3	6	2
<i>пасс</i>	5	5	2
<i>парк</i>	55	72	26

16	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	3	7	2
<i>пасс</i>	5	6	2
<i>парк</i>	60	91	28

17	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	2	8	2
<i>пасс</i>	5	5	2
<i>парк</i>	60	96	30

18	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	2	8	2
<i>пасс</i>	5	5	2
<i>парк</i>	60	96	30

19	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	2	8	2
<i>пасс</i>	5	6	2
<i>парк</i>	60	104	30

20	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	2	8	2
<i>пасс</i>	5	7	2
<i>парк</i>	60	112	30

21	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	1	8	2
<i>пасс</i>	5	5	2
<i>парк</i>	55	96	30

22	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	1	8	2
<i>пасс</i>	5	6	2
<i>парк</i>	55	104	30

23	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	4	7	2
<i>пасс</i>	5	6	2
<i>парк</i>	65	91	28

24	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	4	7	2
<i>пасс</i>	5	5	2
<i>парк</i>	65	84	28

25	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	4	7	2
<i>пасс</i>	5	3	2
<i>парк</i>	65	70	28

26	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	4	7	2
<i>пасс</i>	5	4	2
<i>парк</i>	65	77	28

27	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	1	7	2
<i>пасс</i>	5	3	2
<i>парк</i>	50	70	28

28	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	1	7	2
<i>пасс</i>	5	4	2
<i>парк</i>	50	77	28

29	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	1	7	2
<i>пасс</i>	5	5	2
<i>парк</i>	50	84	28

30	<i>плац</i>	<i>куп</i>	<i>мягк</i>
<i>скор</i>	1	7	2
<i>пасс</i>	5	6	2
<i>парк</i>	50	91	28

По заданию преподавателя построить математическую модель задачи и решить её симплекс-методом в среде *MS Excel* одну из представленных задач.

ЗАДАЧА 1

Построить математическую модель задачи и решить её средствами *Excel*. Записать сопряжённую задачу. Провести анализ и сделать выводы по полученным результатам.

Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует различные ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в таблице.

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	
Древесина 1 вида	0,2	0,1	40
Древесина 2 вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость	1,2	1,5	371,1
Прибыль от реализации одного изделия	6	9	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует выпускать, чтобы прибыль от реализации была максимальной.

ЗАДАЧА 2

Заданы удельные транспортные затраты на перевозку единицы груза, слева указаны мощности поставщиков, а сверху - мощности потребителей.

Сформулировать экономико-математическую модель исходной транспортной задачи, найти оптимальный план закрепления поставщиков за потребителями, установить единственность или не единственность оптимального плана, используя Поиск решений.

	150	40	110	50
70	9	5	10	7
80	11	8	9	6
90	7	6	5	4
110	6	4	3	2

ЗАДАЧА 3

Фирма «Компьютер-сервис» поставляет компьютеры под ключ четырех базовых комплектаций: «домашний», «игровой», «офисный» и «экстрим». Известны средние затраты времени на сборку, проверку и подключение компьютеров. Каждый компьютер приносит определенный уровень прибыли, но спрос ограничен. Кроме того, в плановом периоде ограничен ресурс человеко-часов, отведенных на выполнение каждой производственной операции. Определить, сколько компьютеров каждого типа необходимо произвести в плановом периоде, имея целью максимизировать прибыль.

Компьютер	Прибыль за модель у.е.	Максимальный спрос на товар	Требуется часов на подключение	Требуется часов на сборку	Требуется часов на проверку
Домашний	33	87	0,9	1,2	1,3
Игровой	39	67	1,1	1,5	1,5
Офисный	36	110	0,7	0,9	0,9
Экстрим	43	45	1,3	1,1	1,2
Доступно человеко-часов на каждую операцию			70	55	35

ЗАДАЧА 4

На лесопилку поступают доски длиной 10 м. По контракту лесопилка должна поставить клиенту не менее 100 досок длиной 5 м, не менее 200 досок длиной 4 м и не менее 300 досок длиной 3 м. Как работникам лесопилки выполнить условия контракта, разрезав наименьшее количество досок?

ЗАДАЧА 5

Компания «Евростройтур» организует экскурсионные автобусные туры по странам Европы. Компания получила 4 новых автобуса и предполагает направить их на маршруты во Францию, Италию, Чехию и Испанию. Каждый автобус обслуживают 2 водителя. Компанией приглашены 8 водителей, в различной степени знакомых с дорогами европейских стран (в % от экскурсионного маршрута):

	Франция	Италия	Чехия	Испания
Александр	56	43	85	68
Алексей	56	38	99	70
Валентин	63	94	54	84
Василий	96	89	65	24
Николай	44	62	63	72
Виктор	74	85	42	68
Андрей	23	59	37	92
Юрий	89	45	53	78

Необходимо распределить водителей так, чтобы общий показатель освоения маршрутов был максимальным

Решение транспортных задач

Транспортными задачами называются задачи определения оптимального плана перевозок груза из данных пунктов отправления в заданные пункты потребления.

Таблица 1.

	b_1	b_2	...	b_k	...	b_g
a_1	$[c_{11}]$ x_{11}	$[c_{12}]$ x_{12}	...	$[c_{1k}]$ x_{1k}	...	$[c_{1g}]$ x_{1g}
a_2	$[c_{21}]$ x_{21}	$[c_{22}]$ x_{22}	...	$[c_{2k}]$ x_{2k}	...	$[c_{2g}]$ x_{2g}
...	...	...	...	...	...	...
a_i	$[c_{i1}]$ x_{i1}	$[c_{i2}]$ x_{i2}	...	$[c_{ik}]$ x_{ik}	...	$[c_{ig}]$ x_{ig}
...	...	...	...	...	...	...
a_p	$[c_{p1}]$ x_{p1}	$[c_{p2}]$ x_{p2}	...	$[c_{pk}]$ x_{pk}	...	$[c_{pg}]$ x_{pg}

Если $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{k=1}^g b_k$ закрытая модель транспортной задачи

Переменные должны удовлетворять условиям

$$\sum_{k=1}^g x_{ik} = a_i, i = 1, \dots, p$$

$$\sum_{i=1}^p x_{ik} = b_k, i = 1, \dots, g$$

$$x_{ik} \geq 0$$

Суммарные затраты на перевозки

$$Z = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + \dots + C_{pg}x_{pg} \rightarrow \min$$

Решение такой задачи разбивается на два этапа:

1. Определение опорного (базисного) решения;
2. Построение последовательных итераций, т.е. приближение к оптимальному решению.

Для каждого из этих этапов существует несколько методов.

Для построения опорного решения чаще всего используют метод «северо-западного угла» и метод минимальных тарифов.

1. Метод «северо-западного угла»

Заполняем таблицу, начиная с верхнего (северо-западного) угла, двигаясь затем по строке вправо или по столбцу вниз. Записываем в клетку 1.1 меньшее из чисел a_1 и b_1 , то есть $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$. Если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ и первый столбец закрыт, то есть потребности первого потребителя удовлетворены полностью. Двигаясь дальше по первой строке, записываем в соседнюю клетку 1.2 меньшее из чисел $a_1 - b_1$ и b_2 , то есть $x_{12} = \min\{a_1 - b_1, b_2\}$. Если же $a_1 < b_1$, аналогично закрывается первая строка (ресурсы первого отправителя исчерпаны), и далее заполняется соседняя клетка 2.1, куда заносится $x_{21} = \min\{a_2, b_1 - a_1\}$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока на каждом этапе не исчерпываются ресурсы a_p и потребности b_g . Может оказаться, что на каком-то промежуточном, а не только последнем этапе, построение опорного плана при внесении очередной величины x_{ik} закрываются одновременно i -ая строка и k -ый столбец. Это происходит, когда очередной остаток в k -ом столбце будет равен a_i или остаток в i -ой строке равен b_k . Тогда заносим в следующую по строке или столбцу клетку (в ту из них, которой соответствуют меньшие затраты) величину $x_{ik+1} = 0$ или $x_{L+1k} = 0$. Такие нули называются в отличие от пустых клеток базисными. Они необходимы для предотвращения вырождения опорного плана.

Пример

Найти опорный план методом «северо-западного угла» для транспортной задачи (Таблица 2).

Таблица 2.

a_i / b_k	40	100	60	80	Итого
60	[4	[3	[7	[8	60
140	[9	[5	[4	[2	140
80	[6	[3	[8	[4	80
Итого	40	100	60	80	280

Решение:

Построим математическую модель задачи

Целевая функция

$$Z = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + \dots + C_{pg}x_{pg} \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{k=1}^g b_k = 280 \text{ закрытая модель транспортной задачи}$$

Переменные должны удовлетворять условиям

$$\sum_{k=1}^g x_{ik} = a_i, i = 1, \dots, p$$

$$\sum_{i=1}^p x_{ik} = b_k, k = 1, \dots, g$$

$$x_{ik} \geq 0$$

Заполняем таблицу, начиная с верхнего (северо-западного) угла, двигаясь затем по строке вправо или по столбцу вниз. Записываем в клетку 1.1 меньшее из чисел a_1 и b_1 (60 и 40), то есть $x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = 40$. Если $a_1 > b_1$ (60 > 40), то $x_{11} = b_1 = 40$ и первый столбец закрыт, то есть потребности первого потребителя удовлетворены полностью. Двигаясь дальше по первой строке, записываем в соседнюю клетку 1.2 меньшее из чисел $a_1 - b_1 = 60 - 40 = 20$ и $b_2 = 100$, то есть $x_{12} = \min\{a_1 - b_1, b_2\} = \min\{20, 100\}$. Если же $a_1 < b_1$, аналогично закрывается первая строка (ресурсы первого отправителя исчерпаны), и далее заполняется соседняя клетка 2.1, куда заносится $x_{21} = \min\{a_2, b_1 - a_1\}$. Этот

процесс продолжается до тех пор, пока на каждом этапе не исчерпываются ресурсы a_p и потребности b_g . Итог решения представлен в таблице 3.

Таблица 3.

a_i / b_k	40	100	60	80	Итого
60	^[4] 40	^[3] 20	^[7]	^[8]	60
140	^[9]	^[5] 80	^[4] 60	^[2]	140
80	^[6]	^[3]	^[8]	^[4] 80	80
Итого	40	100	60	80	280

Переменные удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^g x_{ik} = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} = a_i = 40 + 20 + 0 + 0 = 60, i = 1, 4$$

$$\sum_{k=1}^g x_{ik} = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a_2 = 0 + 80 + 60 + 0 = 140, i = 1, 4$$

$$\sum_{k=1}^g x_{ik} = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = a_3 = 0 + 0 + 0 + 80 = 80, i = 1, 4$$

$$\sum_{i=1}^p x_{ik} = x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40 + 0 + 0 = b_1 = 40, i = 1, 3$$

$$\sum_{i=1}^p x_{ik} = x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20 + 80 + 0 = b_2 = 100, i = 1, 3$$

$$\sum_{i=1}^p x_{ik} = x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3 = 0 + 60 + 0 = 60, i = 1, 3$$

$$\sum_{i=1}^p x_{ik} = x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4 = 0 + 0 + 80 = 80, i = 1, 3$$

$$x_{ik} \geq 0$$

$$z = 4 \cdot 40 + 3 \cdot 20 + 5 \cdot 80 + 4 \cdot 60 + 4 \cdot 80 = 1180 \text{ руб}$$

2. Метод минимального тарифа

Сущность метода заключается в том, что на каждом шаге заполняется клетка с наименьшей величиной c_{ik} . Начинаем заполнение таблицы с клетки, которой соответствует наименьший элемент c_{ik} из всей таблицы. Затем остаток по столбцу или строке помещаем в клетку того же столбца или строки, которой соответствует следующее по величине значение c_{ik} и так далее, а помещаемые в этих клетках величины x_{ik} определяются как и в методе «северо-западного угла». В результате получаем другое опорное решение.

Пример

Найти опорный план методом «минимального тарифа» для транспортной задачи (Таблица 4).

Таблица 4.

a_i / b_k	40	100	60	80	Итого
60	[4]	[3]	[7]	[8]	60
140	[9]	[5]	[4]	[2]	140
80	[6]	[3]	[8]	[4]	80
Итого	40	100	60	80	280

Решение:

Построим математическую модель задачи

Целевая функция

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{pg}x_{pg} \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{k=1}^g b_k = 280 \text{ закрытая модель транспортной задачи}$$

Переменные должны удовлетворять условиям

$$\sum_{k=1}^g x_{ik} = a_i, i = 1, \dots, p$$

$$\sum_{i=1}^p x_{ik} = b_k, i = 1, \dots, g$$

$$x_{ik} \geq 0$$

Начинаем заполнение таблицы с клетки, которой соответствует наименьший элемент $c_{ik} = c_{24} = 2$ из всей таблицы ($x_{24} = 80$). Затем остаток по столбцу или строке помещаем в клетку того же столбца или строки, которой соответствует следующее по величине значение $c_{ik} = c_{23} = 4$ и так далее, а помещаемые в этих клетках величины x_{ik} определяются как и в методе «северо-западного угла». Итог решения представлен в таблице 5.

Таблица 5.

a_i / b_k	40	100	60	80	Итого
60	^[4] 40	^[3] 20	^[7]	^[8]	60
140	^[9]	^[5]	^[4] 60	^[2] 80	140
80	^[6]	^[3] 80	^[8]	^[4]	80
Итого	40	100	60	80	280

В результате получаем другое опорное решение

Переменные удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^g x_{ik} = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} = a_i = 40 + 20 + 0 + 0 = 60, i = 1, 4$$

$$\sum_{k=1}^g x_{ik} = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a_2 = 0 + 0 + 60 + 80 = 140, i = 1, 4$$

$$\sum_{k=1}^g x_{ik} = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = a_3 = 0 + 80 + 0 + 0 = 80, i = 1, 4$$

$$\sum_{i=1}^p x_{ik} = x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40 + 0 + 0 = b_1 = 40, i = 1, 3$$

$$\sum_{i=1}^p x_{ik} = x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20 + 0 + 80 = b_2 = 100, i = 1, 3$$

$$\sum_{i=1}^p x_{ik} = x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3 = 0 + 60 + 0 = 60, i = 1, 3$$

$$\sum_{i=1}^p x_{ik} = x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4 = 0 + 80 + 0 = 80, i = 1, 3$$

$$x_{ik} \geq 0$$

$$z = 4 \cdot 40 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 80 + 4 \cdot 60 + 2 \cdot 80 = 940 \text{ руб}$$

Сравнивая результаты опорного решения, видно, что затраты на перевозку груза из данных пунктов отправления в заданные пункты потребления при нахождении опорного плана методом минимальных тарифов сократились на 240 руб. ($1180-940=240$)

Для выполнения **второго этапа** решения транспортной задачи используют метод потенциалов и распределительный метод.

Решение транспортной задачи методом потенциалов

Любой опорный план ТЗ должен удовлетворять двум условиям:

1. Количество занятых клеток должно равняться числу $m+n-1$
2. Опорный план должен быть ациклическим, т.е. в таблице с опорным планом невозможно построить замкнутую ломаную линию вершины которой располагались бы в занятых клетках, а звенья вдоль строк или столбцов.

Теорема

Если для некоторого опорного плана

$x^*=(x_{ij}) \ i=1,m; j=1,n$ существуют такие числа

$U_1, \dots, U_m,$

$V_1, \dots, V_n,$ что

$$U_i + V_j = C_{ij}; x_{ij} > 0 \quad (3)$$

$$U_i + V_j \leq C_{ij}; x_{ij} = 0 \quad (4)$$

То $x^*=(x_{ij})$ – оптимальный опорный план ТЗ

Числа U_i и V_j называются **потенциалами** соответственно пунктов отправления и пунктов назначения. Данная теорема позволяет определить алгоритм поиска оптимального решения ТЗ.

Пусть построен опорный план ТЗ. Для каждого пункта отправления и назначения определяются потенциалы U_i и V_j . Эти числа определяются из системы линейных уравнений (3). Поскольку достаточно найти любое частное решение (3), то одну из неизвестных можно приравнять к произвольному числу, например $U_i = 0$ и найти из (3) остальные неизвестные. После того как найдены все потенциалы, для каждой из свободных клеток определяются числа,

$$S_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j) \quad (5)$$

которые называются **оценками свободных клеток**.

Если среди оценок нет отрицательных, что соответствует условию (4), то найденный опорный план будет оптимальным.

Если среди этих оценок есть отрицательные, то план не является оптимальным и необходимо перейти к новому опорному плану. Для этого выбирается клетка с наибольшей по абсолютной величине отрицательной разностью S_{ij} и построим цикл, в котором кроме этой клетки все остальные являются базисными. Такой цикл всегда существует и **единственен**. **Циклом** в транспортной таблице называется несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией так, чтобы две соседние вершины ломаной были расположены либо в одной строке, либо в одном столбце. Причем, одно звено каждой вершины находится в строке, другое в столбце.

Переход к новому опорному плану осуществляется путем изменения грузов в пределах клеток по следующему алгоритму:

1. По вершинам цикла расставляются чередующиеся знаки «+» и «-», причем в свободную клетку цикла ставится «+»
2. Находим минимальное значение груза в ячейках цикла имеющих знак «-» и вписываем его в свободную ячейку со знаком «+». Затем последовательно обходим все ячейки цикла, поочередно вычитая и прибавляя к ним минимальное значение (в соответствии со знаками, которыми эти ячейки помечены: где минус - вычитаем, где плюс - прибавляем).

Получем новый опорный план и снова вычисляем значения потенциалов и разности S_{ij} .

Пример: Решить транспортную задачу методом потенциалов.

Для опорного плана (таблица 3) найдем **потенциалы** пунктов отправления и пунктов назначения U_i и V_j . Эти числа определяются из системы линейных уравнений (3). Поскольку достаточно найти любое частное решение (3), то одну из неизвестных можно приравнять к произвольному числу, например $U_i = 0$ и найти из (3) остальные неизвестные. После того как найдены все потенциалы, для каждой из свободных клеток определяется **оценка свободных клеток** из (5)

a_i / b_k	40	100	60	80	U_i
60	^[4] 40	^[3] 20	^[7] $(s_{13}=5)$	^[8] $(s_{14}=6)$	0
140	^[9] $(s_{21}=3)$	^[5] 80	^[4] 60	^[2] $(s_{24}=-2)$	2
80	^[6] $(s_{31}=0)$	^[3] $(s_{32}=-2)$	^[8] $(s_{33}=4)$	^[4] 80	2
V_j	4	3	2	2	

Если среди этих оценок есть отрицательные, что не соответствует условию (4), то план не является оптимальным и необходимо перейти к новому опорному плану. Для этого выбирается клетка с наибольшей по абсолютной величине отрицательной разностью S_{ij} ($S_{24}=-2$ и $S_{32}=-2$) и строится цикл, в котором кроме этой клетки все остальные являются базисными.

Начинаем строить **цикл** с клетки 2.4, в которой ставим «+». По вершинам цикла расставляются чередующиеся знаки «+» и «-»

a_i / b_k	40	100	60	80
60	$l^4 \mathbf{40}$	$l^3 \mathbf{20}$	l^7	l^8
140	l^9	$l^5 \mathbf{80}_{(-)}$	$l^4 \mathbf{60}$	$l^2 (+)$
80	l^6	$l^3 (+)$	l^8	$l^4 \mathbf{80}_{(-)}$

Находим минимальное значение груза в ячейках цикла имеющих знак «-» (80) и вписываем его в свободную ячейку со знаком «+». Затем последовательно обходим все ячейки цикла, поочередно вычитая и прибавляя к ним минимальное значение (в соответствии со знаками, которыми эти ячейки помечены: где минус - вычитаем, где плюс - прибавляем).

Получем новый опорный план и снова вычисляем значения потенциалов и разности S_{ij} .

a_i / b_k	40	100	60	80	U_i
60	$l^4 \mathbf{40}$	$l^3 \mathbf{20}$	$l^7 (s_{13}=3)$	$l^8 (s_{14}=6)$	0
140	$l^9 (s_{21}=5)$	$l^5 (s_{22}=2)$	$l^4 \mathbf{60}$	$l^2 \mathbf{80}$	0
80	$l^6 (s_{31}=2)$	$l^3 \mathbf{80}$	$l^8 (s_{33}=4)$	$l^4 (s_{34}=2)$	0
V_j	4	3	4	2	

Найденный опорный план оптимален, так как среди оценок нет отрицательных, что соответствует условию (4).

Затраты на перевозку груза из данных пунктов отправления в заданные пункты потребления при нахождении оптимального опорного плана составляют:

$$z = 4 \cdot 40 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 60 + 2 \cdot 80 + 3 \cdot 80 = 860 \text{ руб}$$

1. Построить опорное решение методом «северо-западного» угла и методом минимального тарифа. Решить транспортную задачу методом потенциала для опорного плана, полученного при решении методом «северо-западного» угла.

$1a_i/b_i$	50	60	60	70
60	[4	[5	[7	[2
100	[9	[8	[7	[9
80	[4	[6	[8	[7

$2a_i/b_i$	50	40	70	80
80	[4	[8	[5	[7
90	[7	[6	[4	[6
70	[5	[9	[8	[3

$3a_i/b_i$	70	40	90	100
100	[7	[4	[8	[6
90	[3	[9	[5	[4
110	[8	[7	[4	[5

$4a_i/b_i$	80	70	50	70
120	[5	[6	[6	[4
70	[7	[5	[6	[3
80	[4	[5	[9	[3

$5a_i/b_i$	80	70	60	60
90	[8	[7	[6	[7
100	[4	[8	[3	[7
80	[5	[6	[4	[5

$6a_i/b_i$	50	40	100	110
110	[7	[5	[6	[5
90	[4	[3	[5	[6
100	[8	[7	[5	[7

$7a_i/b_i$	70	80	100	80
120	[8	[7	[4	[4
100	[6	[9	[6	[8
110	[5	[8	[5	[6

$8a_i/b_i$	40	50	100	80
90	[7	[6	[8	[7
100	[6	[7	[5	[9
80	[7	[6	[6	[9

$9a_i/b_i$	70	60	90	100
100	[7]	[6]	[5]	[8]
120	[9]	[8]	[7]	[7]
100	[8]	[9]	[7]	[8]

$10a_i/b_i$	70	80	40	100
90	[4]	[6]	[7]	[6]
80	[5]	[3]	[4]	[5]
120	[4]	[5]	[8]	[9]

$11a_i/b_i$	100	70	90	100
100	[8]	[4]	[7]	[3]
110	[6]	[8]	[6]	[8]
150	[5]	[4]	[5]	[6]

$12a_i/b_i$	60	70	120	90
110	[7]	[6]	[8]	[7]
150	[4]	[5]	[6]	[3]
80	[8]	[6]	[7]	[9]

$13a_i/b_i$	50	60	80	90
70	[5]	[6]	[4]	[3]
90	[8]	[4]	[9]	[5]
120	[7]	[5]	[7]	[4]

$14a_i/b_i$	120	100	90	70
110	[8]	[4]	[7]	[3]
100	[6]	[8]	[6]	[8]
170	[5]	[4]	[5]	[6]

$15a_i/b_i$	170	100	160	140
200	[9]	[6]	[7]	[5]
180	[8]	[7]	[9]	[6]
190	[7]	[8]	[6]	[7]

$16a_i/b_i$	180	100	110	90
170	[8]	[9]	[7]	[8]
150	[7]	[6]	[8]	[7]
160	[6]	[5]	[6]	[4]

$17a_i/b_i$	80	70	100	70
100	[4]	[3]	[2]	[3]
90	[5]	[6]	[4]	[5]
130	[6]	[5]	[2]	[3]

$18a_i/b_i$	110	80	150	100
140	[8]	[7]	[8]	[9]
120	[6]	[6]	[5]	[7]
180	[8]	[7]	[6]	[8]

$19a_i/b_i$	110	100	80	60
120	[8]	[5]	[7]	[7]
170	[6]	[6]	[8]	[7]
60	[7]	[5]	[6]	[6]

$20a_i/b_i$	60	70	90	130
140	[7]	[8]	[6]	[3]
80	[9]	[7]	[5]	[8]
130	[6]	[7]	[4]	[6]

$21a_i/b_i$	80	70	100	50
120	[5]	[8]	[3]	[5]
90	[5]	[4]	[6]	[4]
90	[4]	[7]	[6]	[5]

$22a_i/b_i$	60	70	80	70
70	[7]	[7]	[6]	[5]
90	[9]	[8]	[9]	[7]
120	[8]	[6]	[7]	[8]

$23a_i/b_i$	70	80	100	70
80	[6]	[9]	[8]	[7]
100	[8]	[7]	[6]	[8]
140	[7]	[5]	[6]	[8]

$24a_i/b_i$	100	110	70	110
130	[7]	[8]	[6]	[7]
110	[8]	[9]	[7]	[8]
150	[6]	[7]	[6]	[7]

$25a_i/b_i$	90	100	130	120
160	[5]	[4]	[6]	[3]
180	[7]	[8]	[9]	[6]
100	[6]	[7]	[4]	[5]

$26a_i/b_i$	90	80	50	50
80	[4]	[5]	[4]	[6]
70	[3]	[4]	[5]	[2]
120	[6]	[3]	[6]	[5]

$27a_i/b_i$	70	80	90	110
90	[5]	[6]	[7]	[6]
10	[8]	[8]	[7]	[9]
60	[7]	[4]	[6]	[7]

$28a_i/b_i$	100	90	60	130
130	[8]	[8]	[7]	[8]
140	[6]	[7]	[9]	[8]
110	[7]	[8]	[6]	[7]

$29a_i/b_i$	110	70	40	160
150	[7]	[8]	[7]	[9]
110	[8]	[7]	[6]	[8]
120	[6]	[8]	[5]	[6]

$30a_i/b_i$	70	80	60	80
100	[7]	[8]	[7]	[9]
90	[8]	[6]	[8]	[7]
100	[7]	[8]	[7]	[6]

Транспортная задача на сети

Транспортная задача может быть сформулирована не только в матричном виде, но и на схеме сети. Матричный метод достаточно прост и не требует большого количества вычислений, но дает возможность учесть пропускную способность только приемных пунктов. Сетевой метод позволяет учесть пропускную способность коммуникаций, связывающих пункты. Для решения такой задачи необходимо составить план реальной сети с указанием длины каждого участка или стоимости перевозки по нему. Когда планируют погрузку и выгрузку на промежуточных станциях, каждую из них представляют, как узел. При этом на сети будет столько узлов, сколько станций, включая и промежуточные. Некоторые узлы могут быть соединены друг с другом звеньями. Таким образом, транспортная задача может быть схематически изображена в виде вершин (станций) соединенных звеньями. Каждая вершина характеризуется числом p_i - объемом поставок ($p_i > 0$) или объемом потребления ($p_i < 0$). Для перевалочных пунктов $p_i = 0$. В середине каждого звена проставляется стоимость перевозки c_{ij} . Направление грузопотока характеризуют стрелками. Цифра около стрелки показывает величину перевозки x_{ij} . Если пропускная способность звена ограничена величиной d_{ij} , то эта величина проставляется знаменателем к стоимости c_{ij} . Наличие звена означает возможность только одностороннего движения. В случае, когда допустимы перевозки в обоих направлениях между p_i и p_j эти два пункта должны быть соединены парой коммуникаций противоположного направления.

Целью задачи является нахождение величин x_{ij} ($0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}$), обращающих в минимум целевую функцию z . При этом для совместности задачи необходимо выполнение условия $\sum p_i = 0$. Это означает равенство общего объема поставок общему объему потребления. Будем рассматривать задачу с неограниченными пропускными способностями.

Алгоритм решения транспортной задачи на сети можно описать так:

1. Составляют начальный план таким образом, чтобы весь груз был бы

отправлен и все потребности были бы удовлетворены. Стрелками показывают направление грузопотоков, а числами - их величины.

2. Всем вершинам присваивают числа (потенциалы) следующим образом: одной из вершин p_1 присваивают любое число, желательно такое, чтобы не иметь дела с отрицательными числами. Далее, двигаясь по звеньям в направлении стрелок грузопотока, прибавляют к потенциалу предыдущей вершины стоимость перевозки по звену. При движении против потока стоимость из потенциала вычитается. Таким образом, потенциалы присваиваются всем вершинам сети.

3. Проверяют план на оптимальность. Для этого оценивают незагруженные звенья ($x_{ij}=0$). Для этих звеньев модуль разности потенциалов вершин должен быть не больше стоимости перевозок $k_{ij}=|V_i - V_j| \leq c_{ij}$. Если хотя бы для одного звена $k_{ij} > c_{ij}$, то план можно улучшить.

4. Для исправления плана выбирают звено с наибольшим нарушением $k_{ij} - c_{ij}$. На этом звене направляют поток от меньшего потенциала к большему и далее находят замкнутый контур с этим звеном только по загруженным звеньям. Двигаясь по этому контуру в указанном направлении звена с нарушением (от меньшего потенциала к большему), находят звено с минимальным встречным потоком. Величину этого потока прибавляют ко всем попутным потокам и вычитают из встречных. Затем возвращаются ко второму пункту алгоритма.

Рассмотрим схему сети на рисунке 4.

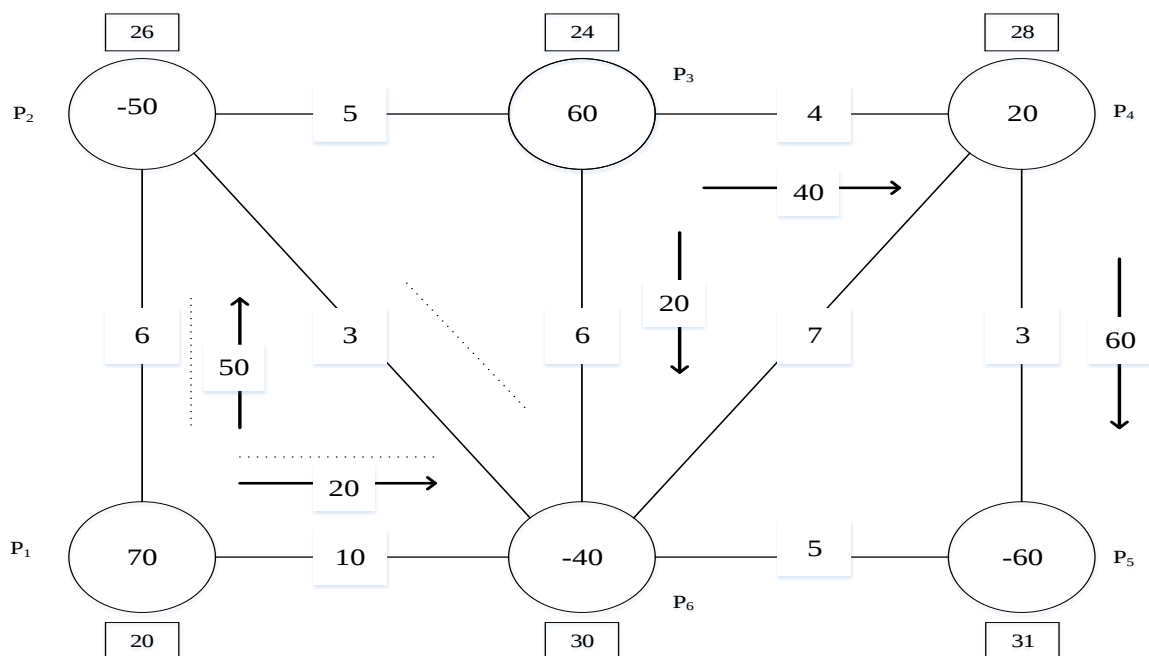


Рис.4 Схема сети

В кружках (станциях) проставлены величины поставок (>0) или

потребностей (<0). В серединах звеньев записаны стоимости перевозок единицы груза c_{ij} . Выполняем пункт 1 и составляем начальный план, показанный на рисунке стрелками и соответствующими цифрами около стрелок. Затем выполняем пункт 2 и присваиваем каждой вершине определенный потенциал, начиная с любой вершины. Например, $V_1=20$, тогда $V_2=20+6=26$, $V_6=20+10=30$, $V_3=30-6=24$, $V_4=24+4=28$, $V_5=28+3=31$. При этом двигаемся только по занятым стрелками звеньям. В частности, при движении от p_1 к p_4 мы прибавляем к потенциалу V_1 стоимость c_{16} . При движении от p_6 к p_3 вычитаем из V_6 стоимость c_{63} , так как в этом случае движение происходит против стрелки и так далее. Потенциалы проставляем в квадратной рамке около соответствующих вершин. Далее выполняем пункт 3 для незанятых звеньев.

$$k_{26} = |26-30|=4 > 3 = c_{26}$$

$$k_{23} = |26-24|=2 < 5 = c_{23}$$

$$k_{46} = |28-30|=2 < 7 = c_{46}$$

$$k_{56} = |31-30|=1 < 5 = c_{56}$$

Условие пункта 3 нарушено на звене 2-6. Направим поток на этом звене от пункта с меньшим потенциалом p_2 к пункту с большим потенциалом p_6 и создадим замкнутый контур по загруженным звеньям. На рисунке ... этот контур отмечен пунктирными стрелками. Выбираем минимальный из встречных потоков x_{ij} . В данном случае это $x_{ij}=20$. Прибавляем эту величину ко всем попутным потокам и вычитаем из встречных. В итоге получаем новый план (рис.5).

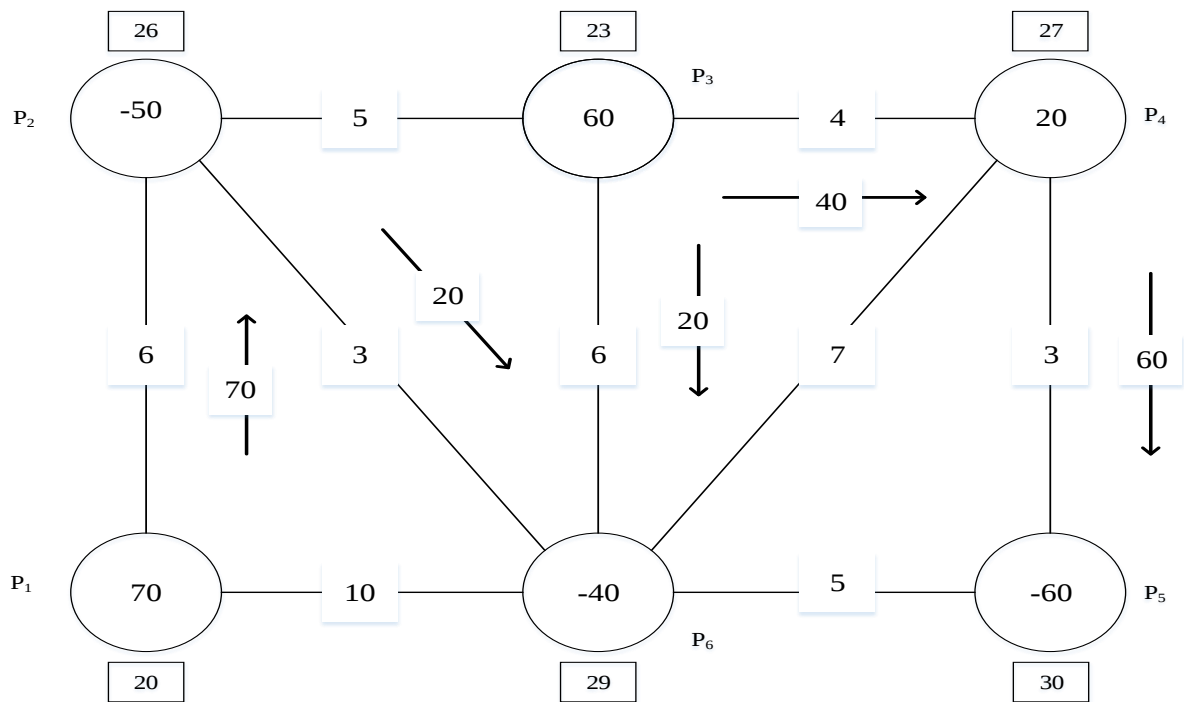


Рис.5 Новый сетевой план

Заново зададим потенциалы, например, $V_1 = 20$, тогда $V_2 = 20 + 6 = 26$, $V_6 = 26 + 3 = 29$, $V_3 = 29 - 6 = 23$, $V_4 = 23 + 4 = 27$, $V_5 = 27 + 3 = 30$ и выполним пункт 3.

$$k_{23} = |26 - 23| = 3 < 5 = c_{23}$$

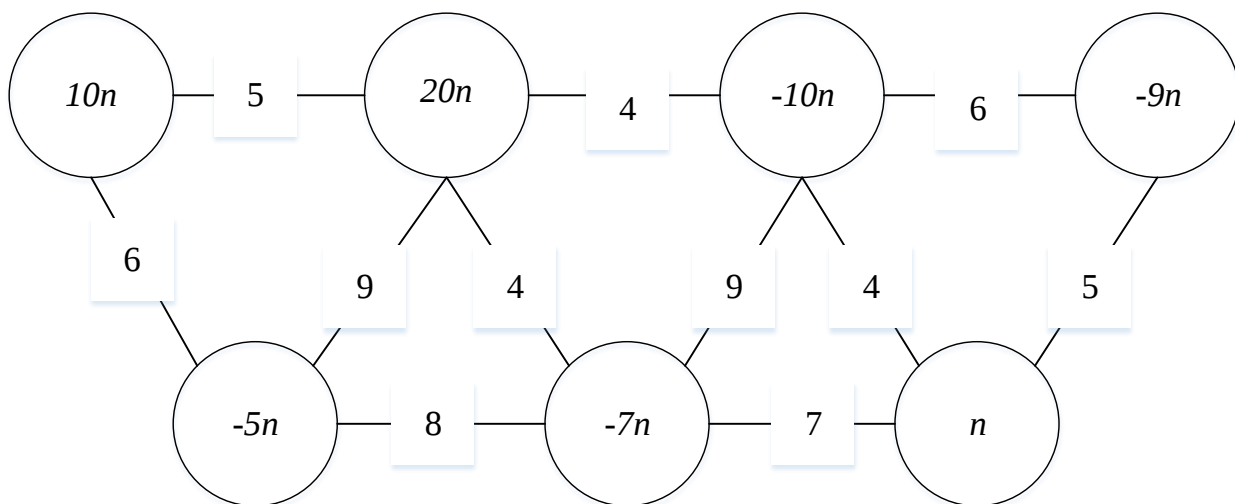
$$k_{16} = |29 - 20| = 9 < 10 = c_{16}$$

$$k_{56} = |29 - 30| = 1 < 5 = c_{56}$$

$$k_{46} = |27 - 29| = 2 < 7 = c_{46}$$

Все модули разностей потенциалов вершин незагруженных звеньев меньше соответствующих стоимостей. Это означает, что полученный план является **ОПТИМАЛЬНЫМ**.

2. Решить транспортную задачу на сети



n – номер варианта

Контрольные вопросы

1. Что такое транспортная задача?
2. Что такое целевая функция и система ограничений?
3. Какие методы линейного программирования для решения транспортной задачи вы знаете?
4. В чем суть метода минимального тарифа?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Петербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I»
(ФГБОУ ВО ПГУПС)

Кафедра: *Логистика и коммерческая работа*

**ОТЧЕТ
ПО ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №3**

Математическое моделирование. Решение оптимизационных задач

Вариант 1

**по дисциплине
«Информационные технологии в профессиональной
деятельности»**

Выполнил обучающийся

(подпись, дата)

И.А Петров

Учебная группа

КБ-707

Руководитель

К.Т.Н.

(ученое звание или должность, подпись, дата)

О.А. Медведь

Санкт-Петербург 2020