Минобрнауки России

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»
(СПбГТИ(ТУ))

Кафедра механики

Л.И. Погребная, Л.Н. Галуза

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ И КУРСОВЫХ РАБОТ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2018

УДК 531

Погребная, Л.И. Теоретическая механика. Руководство к решению контрольных и курсовых работ: учебное пособие / Погребная Л.И., Галуза Л.Н.-СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2018.- 79 с.

В пособии изложены краткие рекомендации к решению различных типов задач теоретической механики по кинематике, статике, динамике и примеры с подробными решениями. Разработаны варианты задач, решение которых должно отражать практическое применение теоретического материала по темам, предусмотренными программой для студентов первого и второго курса очного отделения бакалавриата, обучающихся по направлениям 15.03.02 – Технологические машины и оборудование, и соответствует содержанию рабочей программы учебной дисциплины «Теоретическая механика».

Пособие формирует у студентов следующие компетенции: ОПК-1 – способность к приобретению с большей степенью самостоятельности новых знаний; ПК-2 – умением моделировать технические объекты и технологические процессы.

Данное пособие может быть рекомендовано и для студентов химических специальностей, а также студентов заочного отделения.

Рис. 38, библ. 5 назв.

Рецензенты:

1 СПбПУ. Е.М.Смирнов, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. гидродинамики, горения и теплообмена

2 Т.А Уланова, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики СПбТИ(ТУ)

Издание подготовлено в рамках выполнения государственного задания по оказанию образовательных услуг Минобрнауки России.

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии механического факультета 24.04.18.

Рекомендовано к изданию РИС СПбГТИ(ТУ)

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика служит научным фундаментом для многих технических дисциплин. Ее методами и приемами пользуются при всех технических расчетах, связанных с проектированием различных сооружений и машин и их эксплуатацией. Таким образом, помимо важного общеобразовательного значения, изучение теоретической механики играет огромную роль в формировании будущего инженера как специалиста. Чем лучше и глубже будут усвоены студентами основные положения теоретической механики, тем легче будет переход к продуктивному изучению специальных технических дисциплин.

Предлагаемое методическое пособие охватывает те темы теоретической механики, по которым предусматривается решения задач, предлагаемых на практических занятиях и для самостоятельной работы по всем разделам.

В руководство входят:

- краткая теоретическая часть;
- рекомендации к решению задач;
- примеры решения задач;
- варианты заданий и исходные данные;
- контрольные вопросы, предназначенные для самостоятельной проверки усвоения теоретического материала.

Отличительной особенностью этих этапов является то, что структура расчетной модели и математическое описание на базе законов механики подчинены единой цели – научить студентов логическому мышлению, начиная от постановки задачи до конечного результата.

1 СТАТИКА

1.1 Основные теоретические положения

Статика – раздел механики, в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и устанавливаются условия равновесия сил, приложенных к твердому телу.

Законы классической механики выведены для свободных материальных объектов (материальных точек, механических систем). В связи с этим возникает задача определения связей и правильного освобождения от них.

Связи и реакции связей

Тела, ограничивающие перемещения данного тела в пространстве, являются по отношению к нему связями.

Силы, с которыми связи действуют на данное тело, препятствуя его перемещениям, называются реакциями связей. Вычисление реакций связей является одной из важных практических задач механики.

При решении большинства задач статики несвободное тело условно изображают как свободное применяя аксиому (принцип освобождения от связей): несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно освободить его от связей и заменить действие отброшенных связей их реакциями.

Рассмотрим некоторые типы связей, используемые в задачах о равновесии плоской системы сил, и их реакции.

1) Реакция гладкой поверхности

Реакция гладкой поверхности направлена по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке. Если одна из соприкасающихся поверхностей является точкой, то реакция направлена по нормали к другой поверхности (в соответствии с рисунком 1).

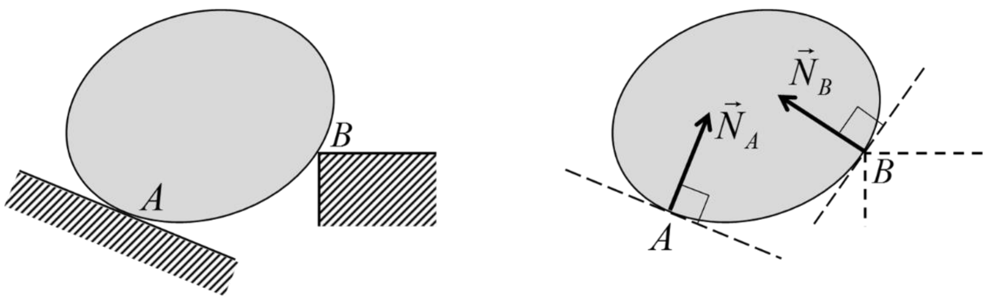


Рисунок 1 - Реакция гладкой поверхности

2) Реакция гибкой нерастяжимой нити.

Реакция гибкой нерастяжимой натянутой нити направлена вдоль нити к точке подвеса (в соответствии с рисунком 2).

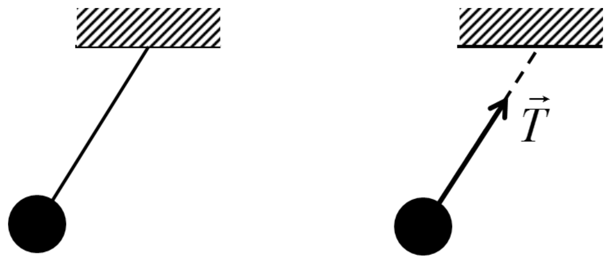


Рисунок 2 - Реакция гибкой нерастяжимой нити

3) Реакция подвижной шарнирной опоры.

Реакция подвижной шарнирной опоры направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки подвижной опоры (в соответствии с рисунком 3).

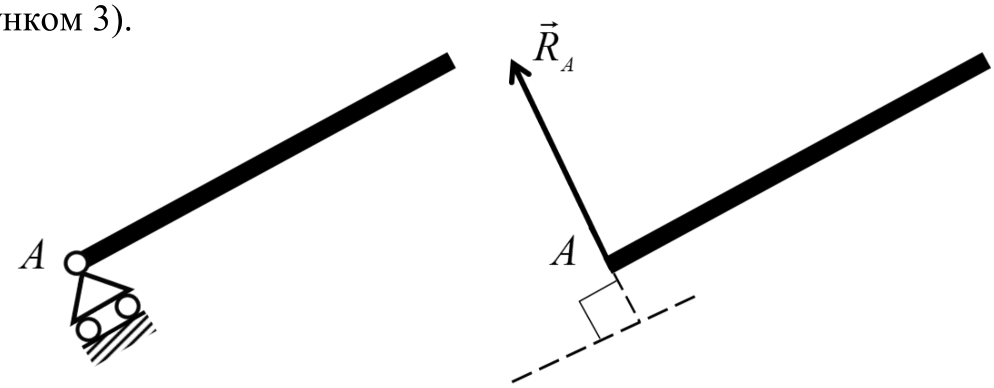
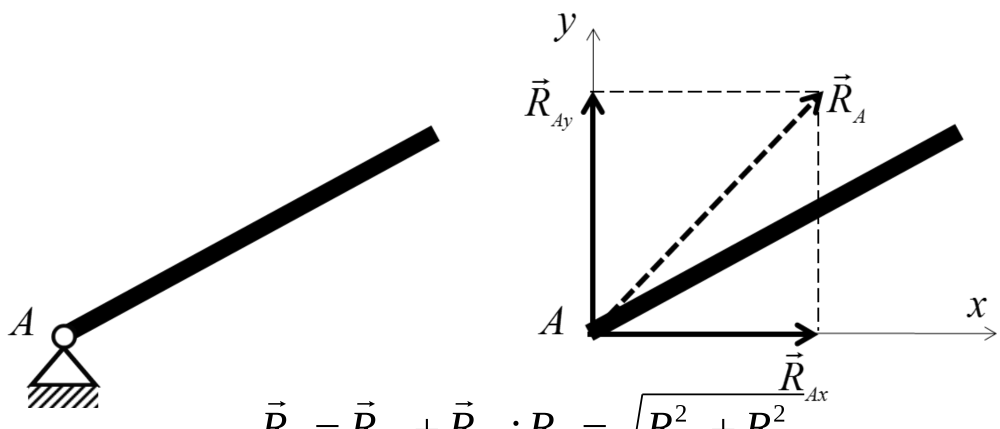


Рисунок 3 - Реакция подвижной шарнирной опоры

4) Реакция неподвижного шарнира.

Реакция неподвижной шарнирной опоры проходит через ось шарнира и может иметь любое направление в плоскости чертежа. При решении задач эту реакцию изображают в виде совокупности двух составляющих по направлениям осей координат (в соответствии с рисунком 4).



$$\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay}\,;\, R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}\,.$$

Рисунок 4 - Реакция неподвижного шарнира

5) Реакция невесомого стержня.
Реакция невесомого стержня с шарнирами на концах направлена вдоль оси стержня, если он прямолинейный, или вдоль прямой, соединяющей его концы, если криволинейный. Направление реакции заранее не известно, т.к. стержень может быть как растянут, так и сжат (в соответствии с рисунком 5).

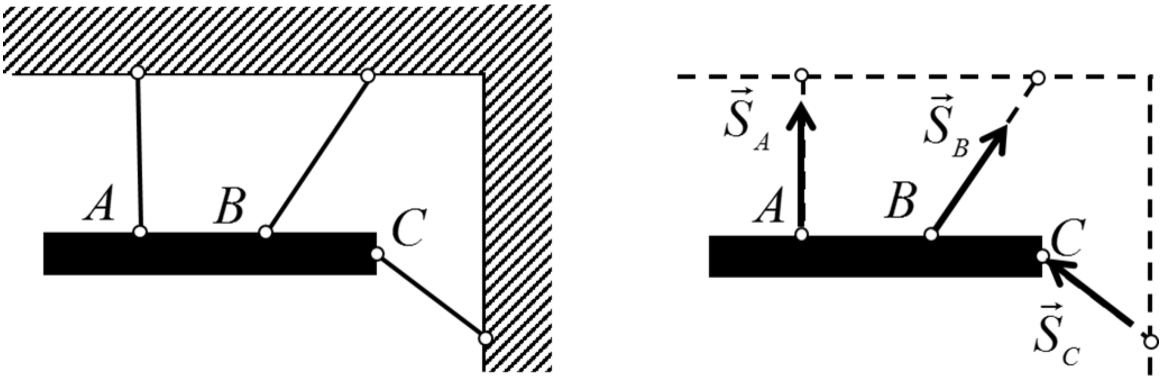


Рисунок 5 - Реакция невесомого стержня

6) Реакция жесткой заделки.
Реакция жесткой заделки представлена в виде совокупности двух составляющих по осям координат $\vec{R}_{Ax}$ и $\vec{R}_{Ay}$ и пары сил с наперед неизвестным реактивным моментом M_A (в соответствии с рисунком 6).

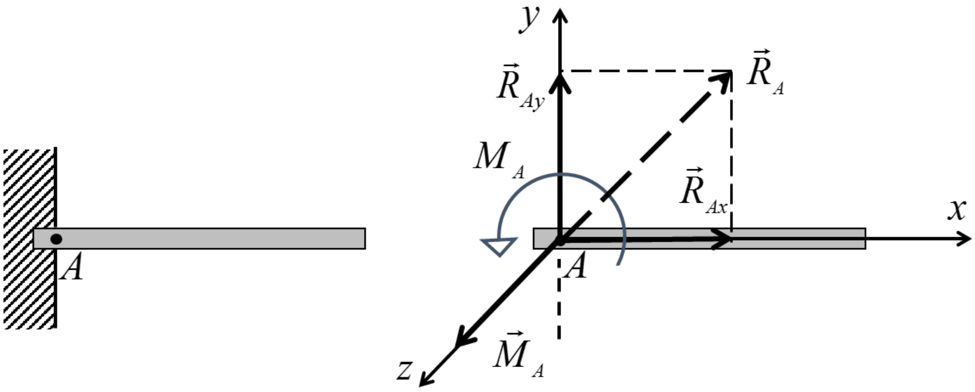


Рисунок 6 - Реакция жесткой заделки

Момент силы относительно центра (точки).

Моментом силы $\vec{F}$ относительно центра O называется вектор, определяемый равенством

$$\vec{M}_o\left(\vec{F}\right)=\vec{r}\times\vec{F}\ , \tag{1}$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки приложения силы $\vec{F}$ относительно центра O.

Вектор $\vec{F}$ приложен в точке O и направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центра O и силу $\vec{F}$ («плоскости поворота» OAB) в ту сторону, откуда вращение, которое стремится совершить сила, будет видно происходящим против хода часовой стрелки (в соответствии с рисунком 7).

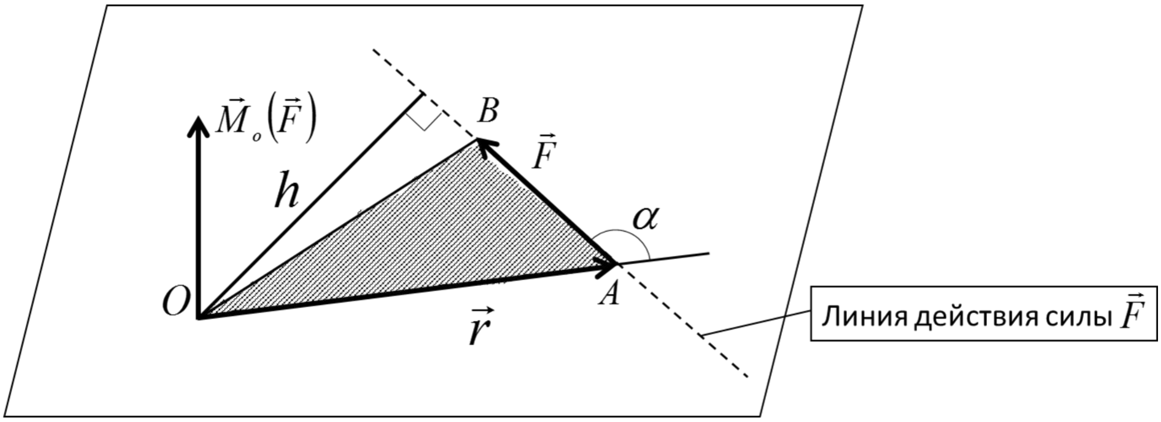


Рисунок 7 - Вектор момента силы относительно центра

Модуль момента силы относительно центра определяется по формуле

$$\left|\vec{M}_o(\vec{F})\right| = F \cdot h, \tag{2}$$

где h – длина перпендикуляра, опущенного из центра О на линию действия силы $\vec{F}$. Этот перпендикуляр называется **плечом силы** относительно центра.

Свойства момента силы:

а) момент силы относительно центра не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль линии ее действия;

б) момент силы относительно центра равен нулю или когда сила равна нулю, или когда центр расположен на линии действия силы – в этом случае плечо равно нулю (в соответствии с рисунком 8).

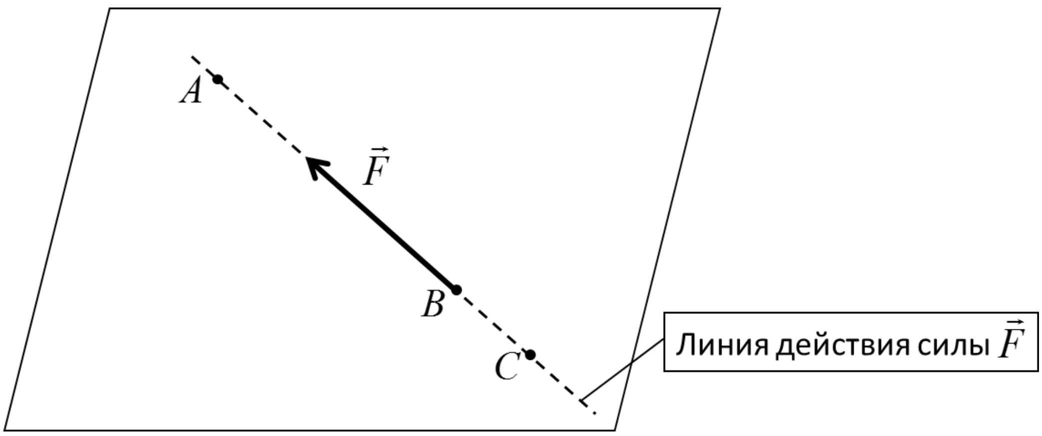


Рисунок 8 - Случаи равенства нулю плеча и момента силы

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_C(\vec{F}) = 0$$

Алгебраический момент силы относительно центра

Алгебраическим моментом силы относительно центра называется взятое со знаком «плюс» или «минус» произведение модуля силы на длину плеча.

$$M_o\left(\vec{F}\right)=\pm F\cdot h.$$

Момент считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг центра О против хода часовой стрелки, и отрицательным – по ходу часовой стрелки (в соответствии с рисунком 9).

$$M_o\left(\vec{F}\right)=F\cdot h_1;\; M_o\left(\vec{Q}\right)=-Q\cdot h_2\,.$$

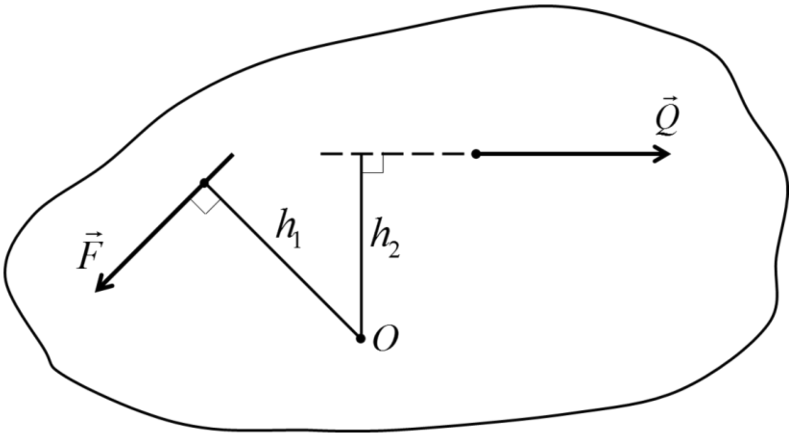


Рисунок 9 - Определение знаков алгебраических моментов сил

Пара сил и её момент

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело. Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется плоскостью действия пары.

Расстояние между линиями действия сил пары называется плечом пары (в соответствии с рисунком 10).

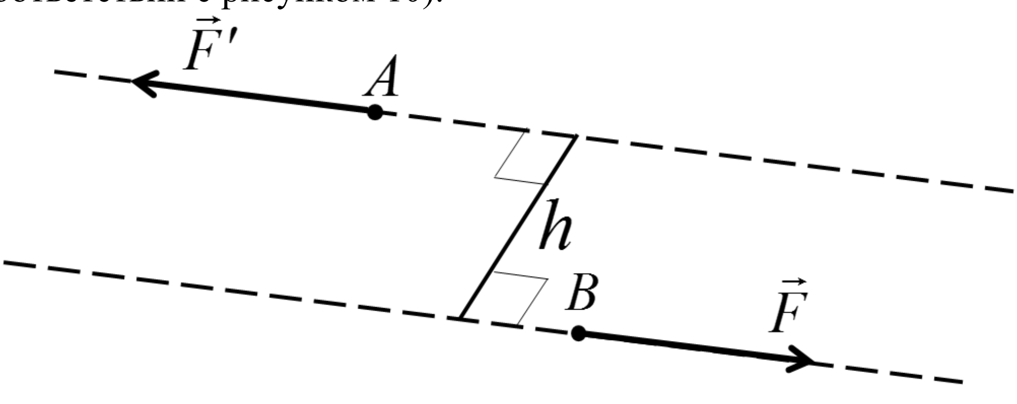


Рисунок 10 - Пара сил и ее плечо

Моментом пары сил называется вектор, равный геометрической сумме моментов каждой из ее сил относительно произвольного центра в пространстве:

$$\vec{M}\left(\vec{F};\vec{F}'\right)=\vec{M}_o\left(\vec{F}\right)+\vec{M}_o\left(\vec{F}'\right).$$

Модуль момента пары равен произведению модуля любой из ее сил на плечо пары: $\left|\vec{M}\left(\vec{F};\vec{F}'\right)\right|=F\cdot h=F'\cdot h$.

Вектор момента пары перпендикулярен плоскости ее действия и направлен так, чтобы из его острия вращение, которое стремится сообщить телу пара сил, было видно происходящим против часовой стрелки (в соответствии с рисунком 11).

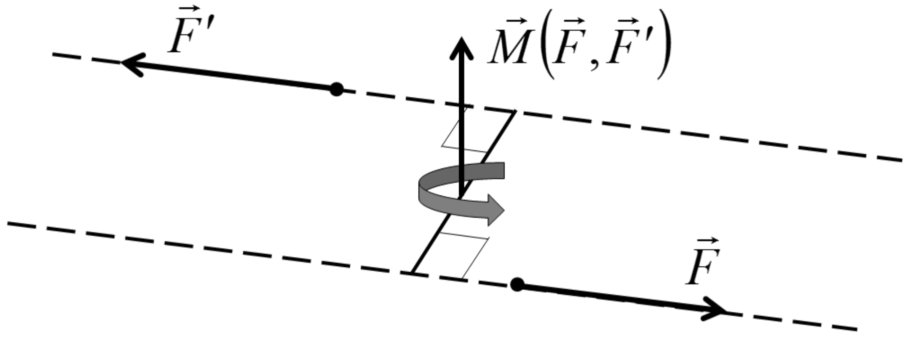
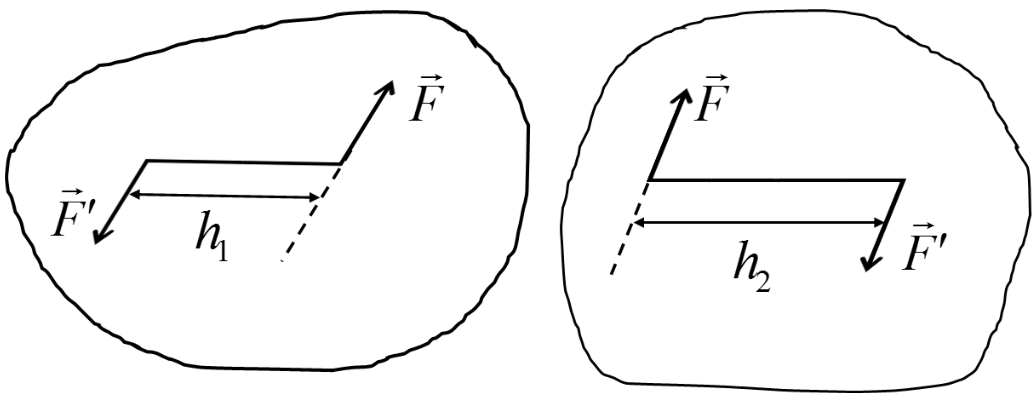


Рисунок 11 - Определение направления вектора момента пары

Для пар, лежащих в одной плоскости, момент пары можно рассматривать как алгебраическую величину. Алгебраический момент пары равен взятому со знаком «плюс» или «минус» модулю ее момента. Момент пары сил считаем положительным, если он стремится вращать плоскость против хода часовой стрелки и наоборот (в соответствии с рисунком 12).



$$M\left(\vec{F};\vec{F}'\right)=+F\cdot h_1 \qquad\qquad M\left(\vec{F};\vec{F}'\right)=-F'\cdot h_2\,.$$

Рисунок 12 - Определение знака алгебраического момента пары сил

Свойства пар сил

Так как пара сил полностью характеризуется ее моментом, то на рисунках ее часто изображают дуговой стрелкой, показывающей направление вращательного момента действия пары (в соответствии с рисунком 13).

Рисунок 13 - Различные способы изображения пар сил

Уравнение равновесия произвольной плоской системы сил

Для равновесия произвольной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы ее главный вектор и ее главный момент относительно произвольного центра были равны нулю:

$$\vec{R}^{*} = \sum \vec{F}_i = 0;\ \vec{M}_O = \sum \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$

Вытекающие отсюда аналитические условия равновесия плоской системы сил можно получить в двух различных формах:

Основная форма уравнений равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0;\ \sum F_{iy} = 0;\ \sum M_O\left(\vec{F}_i\right) = 0.$$

Алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любого центра, лежащего в плоскости их действия, должны быть равны нулю.

Вторая форма уравнений равновесия:

$$\sum M_A\left(\vec{F}_i\right) = 0; \sum M_B\left(\vec{F}_i\right) = 0; \sum F_{ix} = 0.$$

Дополнительное условие: ось OX не должна быть перпендикулярна прямой AB.

Последовательность решения задач статики

а) выяснить, равновесие какого тела будет рассматриваться в задаче, и изобразить это тело на схеме, мысленно считая его свободным;

б) изобразить на чертеже все действующие на это тело силы (активные и реакции связей);

в) выбрать систему координат;

г) определить вид полученной системы сил (включая активные силы и реакции связей), действующих на твердое тело, и составить соответствующие уравнения равновесия;

д) из уравнений равновесия определить искомые величины и проанализировать полученные результаты.

е) сделать проверку полученных решений (алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки, лежащей в плоскости их действия должна быть равна нулю).

1.2 Пример решения контрольной работы 1

Условие задания

Считая известными величины силы $\vec{F}$, интенсивности распределенной нагрузки q и момента пары сил M, найти реакции связей в заданном положении равновесия твердого тела, расположенного в плоскости рисунка.

Дано: $F = 4\ кН;\ q = 1{,}5\ кН/м;\ M = 5\ кН \cdot м.$

Модель 1 (в соответствии с рисунком 14).

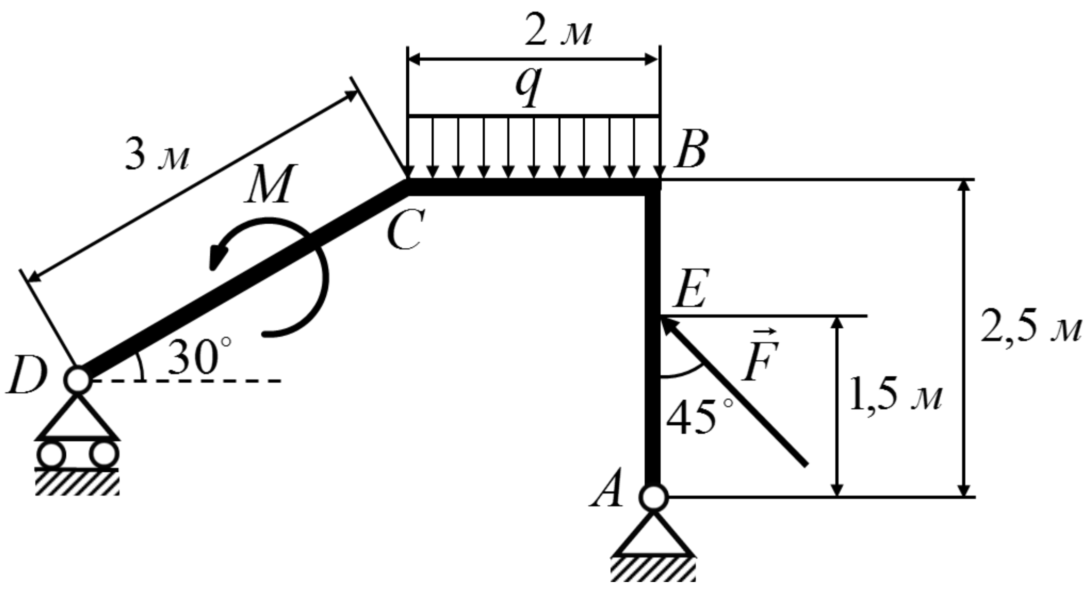


Рисунок 14 - Условие модели 1

Найти реакции шарниров в точках A и D.

Модель 2 (в соответствии с рисунком 15).

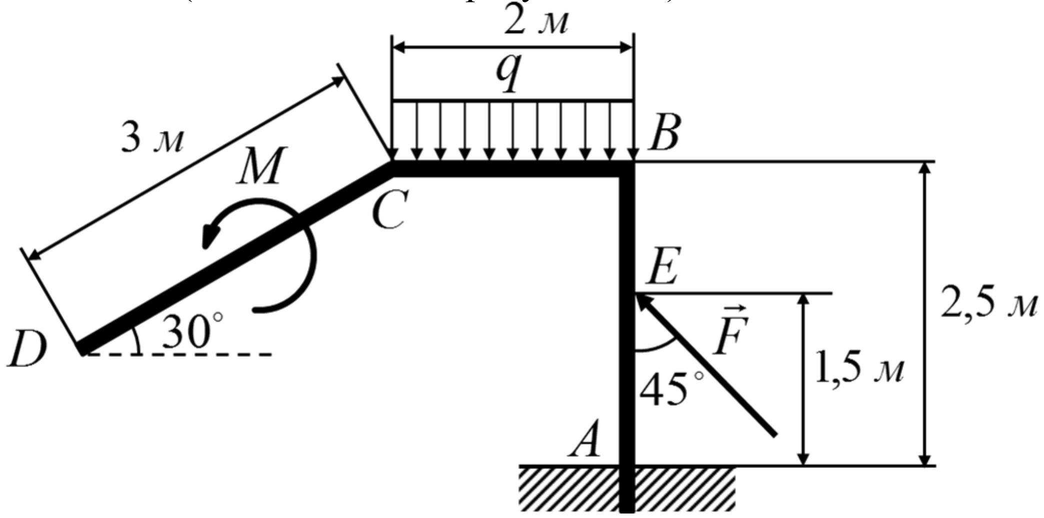


Рисунок 15 - Условие модели 2

Найти реакцию заделки в точке A.

Модель 3 (в соответствии с рисунком 16).

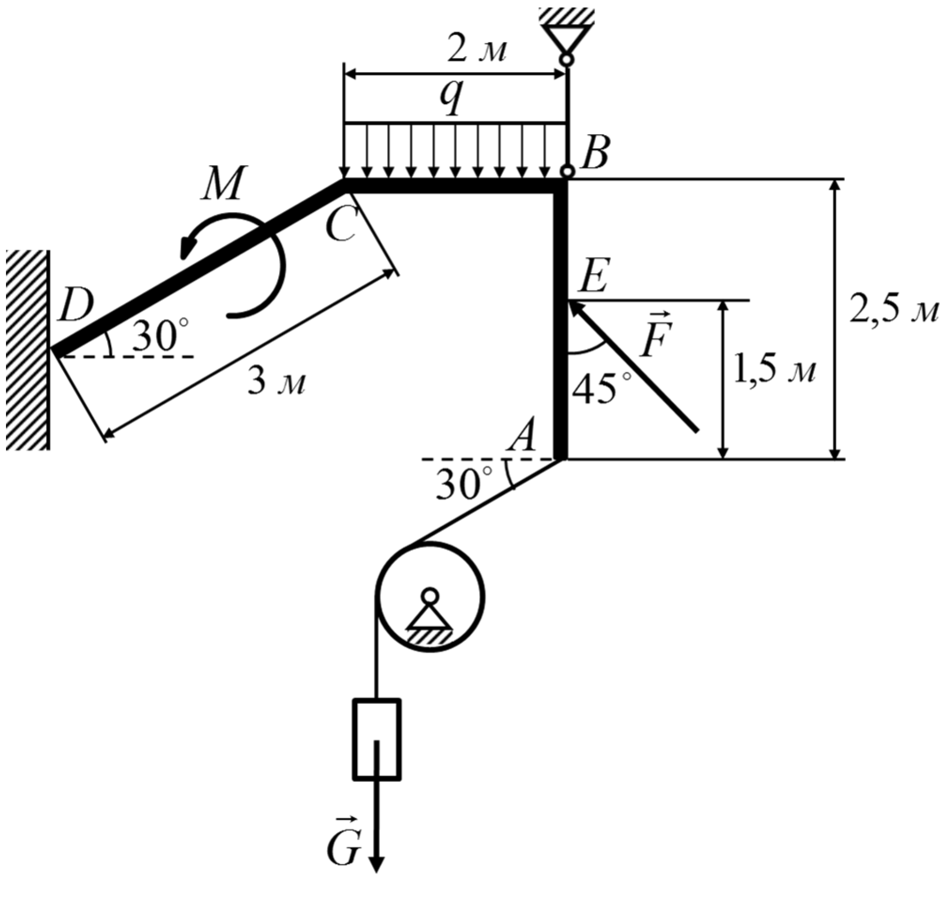


Рисунок 16 - Условие модели 3

Найти реакции поверхности в точке D, стержня в точке B и нити в точке A.

Решение

Модель 1

Составим расчетную схему (в соответствии с рисунком 17).

Равномерно распределенную нагрузку интенсивности q заменим эквивалентной сосредоточенной силой $\vec{Q}$.

Величина силы $Q = q \cdot BC = 1{,}5 \cdot 2 = 3\,кН$.

Вектор $\vec{Q}$ приложен к середине отрезка распределения нагрузки.

Выбираем систему координат xAy.

В соответствии с принципом освобождаемости от связей, действие мысленно отброшенных связей заменим их реакциями.

Реакция подвижного шарнира в точке D перпендикулярна опорной поверхности.

Так как направление реакции неподвижного шарнира в точке A заранее неизвестно, будем определять ее как геометрическую сумму двух составляющих по осям координат: $\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay}$.

Векторы $\vec{R}_{Ax}$ и $\vec{R}_{Ay}$ условно направим по положительным направлениям осей Ax и Ay.

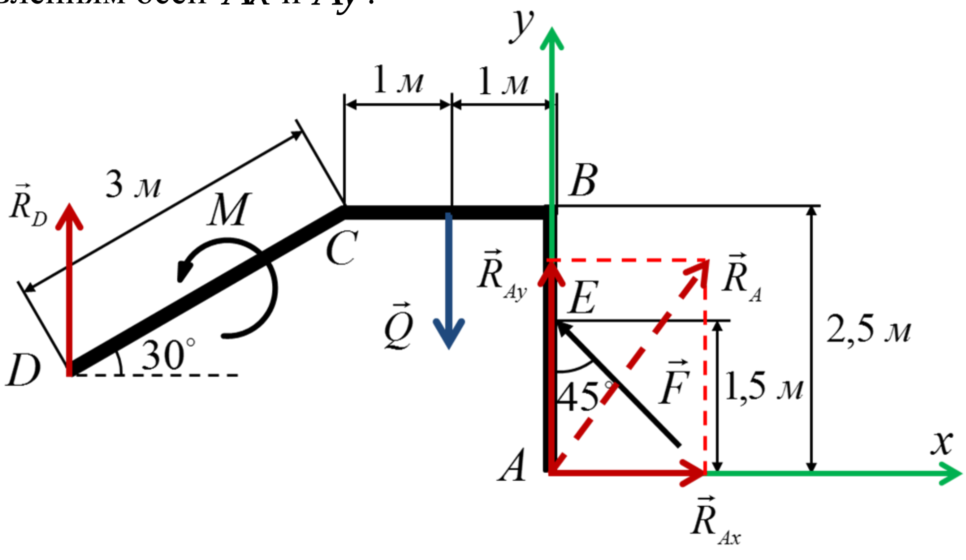


Рисунок 17 - Расчетная схема к модели 1

Тело находится в равновесии под действием плоской системы сил:

$\vec{F}; \vec{Q}; M; \vec{R}_D; \vec{R}_{Ax}; \vec{R}_{Ay}$.

Составим систему уравнений равновесия. Алгебраические суммы проекций сил на оси координат равны нулю:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad R_{Ax} - F \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad R_D - Q + R_{Ay} + F \cdot \cos 45^\circ = 0$$

Алгебраическая сумма моментов сил относительно произвольного центра на плоскости равна нулю. Так как центр может быть выбран произвольно, целесообразно выбрать точку пересечения линий действия двух неизвестных сил, например, точку A. В этом случае уравнение моментов будет содержать только одну неизвестную величину.

$$\sum M_{iA} = 0: -R_D(3\cos 30^\circ + 2) + M + Q \cdot 1 + F \sin 45^\circ \cdot 1{,}5 = 0 \quad (3)$$

Решение системы уравнений.

Из уравнения суммы проекций сил на ось x:

$$R_{Ax} = F \cdot \sin 45^\circ = 4 \cdot 0{,}707 = 2{,}83\ кН$$

Из уравнения суммы моментов сил относительно точки А:

$$R_D = \frac{M + Q \cdot 1 + F \sin 45^\circ \cdot 1{,}5}{3\cos 30^\circ + 2} = \frac{5 + 3 + 4 \cdot 1{,}5}{3 \cdot 0{,}866 + 2} = 2{,}66\ кН$$

Из уравнения суммы проекций сил на ось у:

$$R_{Ay} = -R_D + Q - F \cdot \cos 45^\circ = -2{,}66 + 3 - 4 \cdot 0{,}707 = -2{,}49\ кН$$

Так как $R_{Ay} < 0$, то истинное направление составляющей $\vec{R}_{Ay}$ противоположно указанному предположительно.

Для проверки правильности решения составим уравнение моментов относительно какого-либо нового центра (при верном решении задачи любое лишнее уравнение должно обращаться в тождество).

Центр выбирается таким образом, чтобы он не находился на линиях действия ни одной из искомых реакций связей. В этом случае все искомые силы войдут в уравнение проверки.

Выберем, например, точку C.

Ввиду геометрических особенностей данной модели линия действия силы $\vec{F}$ пройдет через середину отрезка BC, что дает возможность легко найти ее момент.

$$\sum M_{iC} = 0:$$
$$-R_D \cdot 3\cos 30^\circ + M - Q \cdot 1 + F\sin 45^\circ \cdot 1 + R_{Ax} \cdot 2{,}5 + R_{Ay} \cdot 2 = 0$$
$$-2{,}66 \cdot 0{,}866^\circ + 5 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0{,}707 \cdot 1 + 2{,}83 \cdot 2{,}5 + (-2{,}49) \cdot 2 = 0$$
$$-6{,}91 + 5 - 3 + 2{,}83 + 7{,}08 + -4{,}98 = 0$$
$$-17{,}72 + 17{,}74 = 0{,}02 \approx 0$$

Задача решена верно.

Модуль полной реакции неподвижного шарнира в точке A:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{2{,}83^2 + \left(-2{,}49^2\right)} = 3{,}77\ кН$$

Ответ: $R_A = 3{,}77\ кН$, $R_D = 2{,}66\ кН$

Модель 2

Для плоской системы сил реакцию жесткой заделки представляют в виде совокупности двух неизвестных составляющих по осям координат $\vec{R}_{Ax}$ и $\vec{R}_{Ay}$пары сил с неизвестным реактивным моментом M_A (в соответствии с рисунком 18).

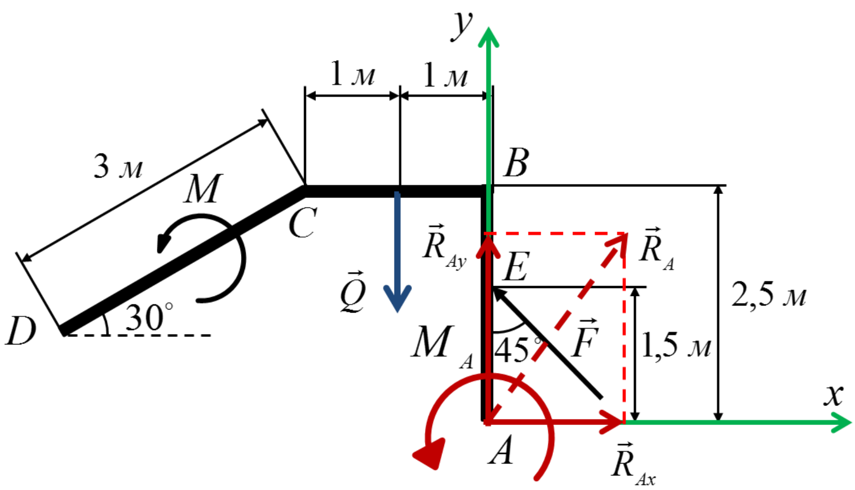


Рисунок 18 - Расчетная схема к модели 2

Уравнение равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad R_{Ax} - F \cdot \sin 45^\circ = 0$$
$$\sum F_{iy} = 0: \quad -Q + R_{Ay} + F \cdot \cos 45^\circ = 0$$
$$\sum M_{iA} = 0: \ M + M_A + Q \cdot 1 + F \cdot 1{,}5 \cdot \sin 45^\circ = 0$$

Решение системы уравнений:

Из уравнения суммы проекций сил на ось x:

$$R_{Ax} = F \cdot \sin 45^\circ = 4 \cdot 0{,}707 = 2{,}83\ кН$$

Из уравнения суммы проекций сил на ось y :

$$R_{Ay} = Q - F \cdot \cos 45^\circ = 3 - 4 \cdot 0{,}707 = 0{,}17\ кН$$

Из уравнения суммы моментов сил относительно точки А:

$$M_A = -M - Q \cdot 1 - F \cdot 1{,}5 \cdot \sin 45^\circ =$$

$$-5 - 3 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}707 = -12{,}24\ кН \cdot м$$

Направление действия реактивной пары сил противоположно указанному на схеме предположительно.

Проверка.

Выберем для проверки в качестве центра уравнения моментов, например, точку D.

Так как вычисление силы $\vec{F}$ относительно точки D может оказаться затруднительным, то воспользуемся теоремой Вариньона о моменте равнодействующей, предварительно разложив силу $\vec{F}$ на две составляющие (в соответствии с рисунком 19).

$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$, где $F_x = F \cdot \sin 45^\circ$ и $F_y = F \cdot \cos 45^\circ$.

Тогда, согласно теореме Вариньона, если $\vec{F} \sim \left(\vec{F}_x; \vec{F}_y\right)$, то

$$M_A\left(\vec{F}\right) = M_A\left(\vec{F}_x\right) + M_A\left(\vec{F}_y\right)$$

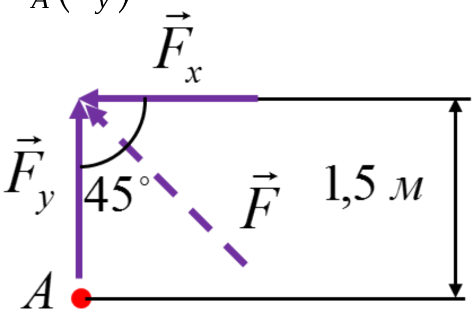


Рисунок 19 - Пояснительная схема к определению моментов, согласно теореме Вариньона

$$M_A\left(\vec{F}\right) = F \sin 45^\circ \cdot h\left(\vec{F}_x\right) + F \cos 45^\circ \cdot h\left(\vec{F}_y\right),$$

где $h\left(\vec{F}_x\right) = 1{,}5\ м$, $h\left(\vec{F}_y\right) = 0\ м.$

$$M_A\left(\vec{F}\right) = F \sin 45^\circ \cdot 1{,}5 + F \cos 45^\circ \cdot 0 = F \sin 45^\circ \cdot 1{,}5$$

Уравнение проверки:

$$\sum M_{iD} = 0:$$

$$M - Q \cdot \left(3\cos 30^\circ + 1\right) + F_x \cdot \left(3\sin 30^\circ - \left(2{,}5 - 1{,}5\right)\right) + F_y \cdot \left(3\cos 30^\circ + 2\right)$$
$$+ R_{Ax} \cdot \left(2{,}5 - 3\sin 30^\circ\right) + R_{Ay} \cdot \left(3\cos 30^\circ + 2\right) + M_A = 0$$

$$5 - 3\left(3 \cdot 0{,}866 + 1\right) + 4 \cdot 0{,}707 \cdot \left(3 \cdot 0{,}5 - 1\right) + 4 \cdot 0{,}707 \cdot \left(3 \cdot 0{,}866 + 2\right) +$$
$$+ 2{,}83\left(2{,}5 - 3 \cdot 0{,}5\right) + 0{,}17 \cdot \left(3 \cdot 0{,}866 + 2\right) + \left(-12{,}24\right) = 0;$$

$$5 - 10{,}79 + 1{,}41 + 13{,}00 + 2{,}83 + 0{,}78 - 12{,}24 = 0;$$

$$23{,}02 - 23{,}03 = 0{,}01 \approx 0.$$

Задача решена верно.

Модуль реактивной силы:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{2{,}83^2 + 0{,}17^2} = 2{,}84\ кН$$

Ответ: $R_A = 2{,}84\ кН,\ M_A = -12{,}24\ кН \cdot м$

Модель 3

Расчетная схема показана на рисунке 20. Реакция опорной поверхности в точке D перпендикулярна этой поверхности.

Реакция тонкого невесомого прямолинейного закрепленного стержня в точке B направлена вдоль оси стержня (направление реакции указано предположительно для растянутого стержня).

Реакция гибкой невесомой нерастяжимой нити в точке A направлена вдоль нити. В предположении, что трение в блоке отсутствует, натяжение нити во всех ее точках имеет одинаковую величину, равную весу подвешенного груза: $T = G$ (это утверждение справедливо только в статике).

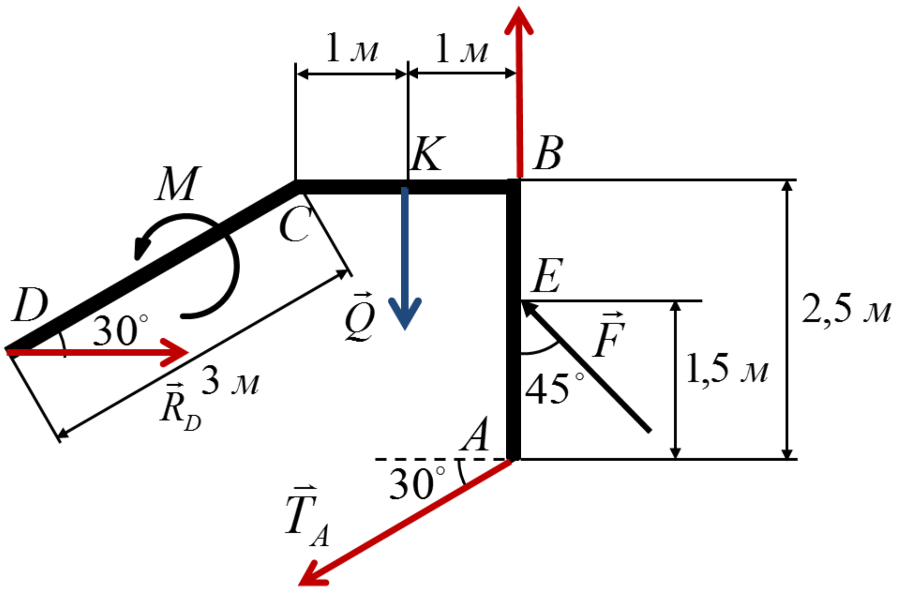


Рисунок 20 Расчетная схема к модели 3

Уравнение равновесия:

$$\sum F_{ix}=0: \quad R_D - F\cdot\sin 45^\circ - T_A\cdot\cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_{iy}=0: \quad -Q+S_B+F\cdot\cos 45^\circ - T_A\cdot\cos 60^\circ = 0$$

$$\sum M_{iA}=0: -R_D\cdot\left(2{,}5-3\sin 30^\circ\right)+M+Q\cdot 1+F\cdot 1{,}5\sin 45^\circ = 0$$

Решение системы уравнений:

Из уравнения суммы моментов сил относительно точки А:

$$R_D=\frac{M+Q\cdot 1+F\cdot 1{,}5\sin 45^\circ}{2{,}5-3\sin 30^\circ}=\frac{5+3+4\cdot 1{,}5\cdot 0{,}707}{2{,}5-3\cdot 0{,}5}=12{,}24\ кН$$

Из уравнения суммы проекций сил на ось x:

$$T_A=\frac{R_D-F\cdot\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{12{,}24-4\cdot 0{,}707}{0{,}866}=10{,}87\ кН$$

Из уравнения суммы проекций сил на ось y:

$$S_B=Q-F\cdot\cos 45^\circ+T_A\cdot\cos 60^\circ=4\cdot 0{,}707+10{,}87\cdot 0{,}5=5{,}60\ кН$$

Так как $S_B>0$, то стержень растянут.

Проверка.

Выберем для проверки точку K. Сила $\vec{Q}$ приложена к точке K, поэтому $M_K\left(\vec{Q}\right)=0$. Так как $KB=BE$, то $\angle BEK=45^\circ$ и линия действия силы $\vec{F}$ походит через точку K, что сделает уравнение для проверки менее громоздким, так как $M_K\left(\vec{F}\right)=0$.

Момент силы $\vec{T}_A$ вычислим по теореме Вариньона, предварительно разложив ее: $\vec{T}_A = \vec{T}_{Ax} + \vec{T}_{Ay}$, где $T_{Ax} = T_A \cdot \cos 30^\circ$; $T_{Ay} = T_A \cdot \cos 60^\circ$; и тогда $M_K\left(T_A\right) = M_K\left(T_{Ax}\right) + M_K \cdot \left(T_{Ay}\right)$

$$\sum M_{iK} = 0:$$

$$R_D \cdot 3\sin 30^\circ + M + S_B \cdot 1 - \left(T_A \cos 30^\circ\right) \cdot 2{,}5 - \left(T_A \cos 60^\circ\right) \cdot 1 = 0$$

$$12{,}24 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + 5 + 5{,}60 \cdot 1 - 10{,}87 \cdot 0{,}866 \cdot 2{,}5 - 10{,}87 \cdot 0{,}5 \cdot 1 = 0$$

$$18{,}36 + 5 + 5{,}60 - 23{,}53 - 5{,}44 = 0$$

$$28{,}96 - 28{,}97 = -0{,}01 \approx 0 \; кН \cdot м$$

Задача решена верно.

Ответ: $R_D = 12{,}24\ кН; T_A = G = 10{,}87\ кН;\ S = 5{,}60\ кН.$

1.3 Контрольные вопросы по статике

1) Какое тело называется абсолютно твердым?

2) Какая сила называется равнодействующей данной системы сил?

3) Какое тело называется несвободным и что называется реакцией связи?

4) Как формируются условия равновесия системы сходящихся сил?

5) Что называется парой сил?

6) Как направлен и чему равен по величине вектор-момент пары?

7) При каком условии две пары будут эквивалентны?

8) Что называется моментом силы относительно данной точки? Как выбирается знак этого момента?

9) В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?

10) Изменится ли момент силы относительно данной точки при переносе силы по линии ее действия?

11) Что называется главным вектором данной системы сил?

12) Что называется главным моментом системы сил относительно данной точки?

13) Изменяются ли главный вектор и главный момент данной системы сил при перемене центра приведения?

14) В чем состоит теореме Вариньона?

15) Как формулируются условия равновесия плоской системы сил?

16) Что называется моментом силы относительно данной оси? Как выбирается знак этого момента?

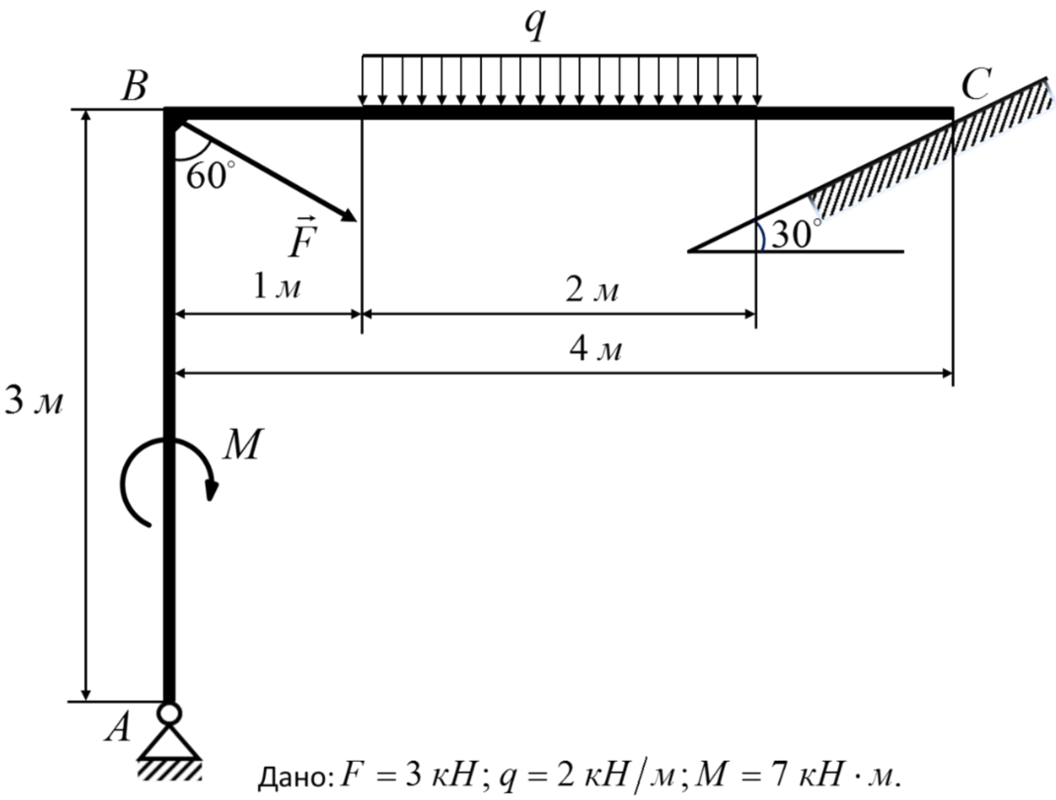
17) В каких случаях момент силы относительно данной оси равен нулю?

18) Как направлен вектор-момент силы относительно данной точки?

19) Как формулируются условия равновесия пространственной системы сил.

1.4 Варианты расчетных моделей и исходные данные

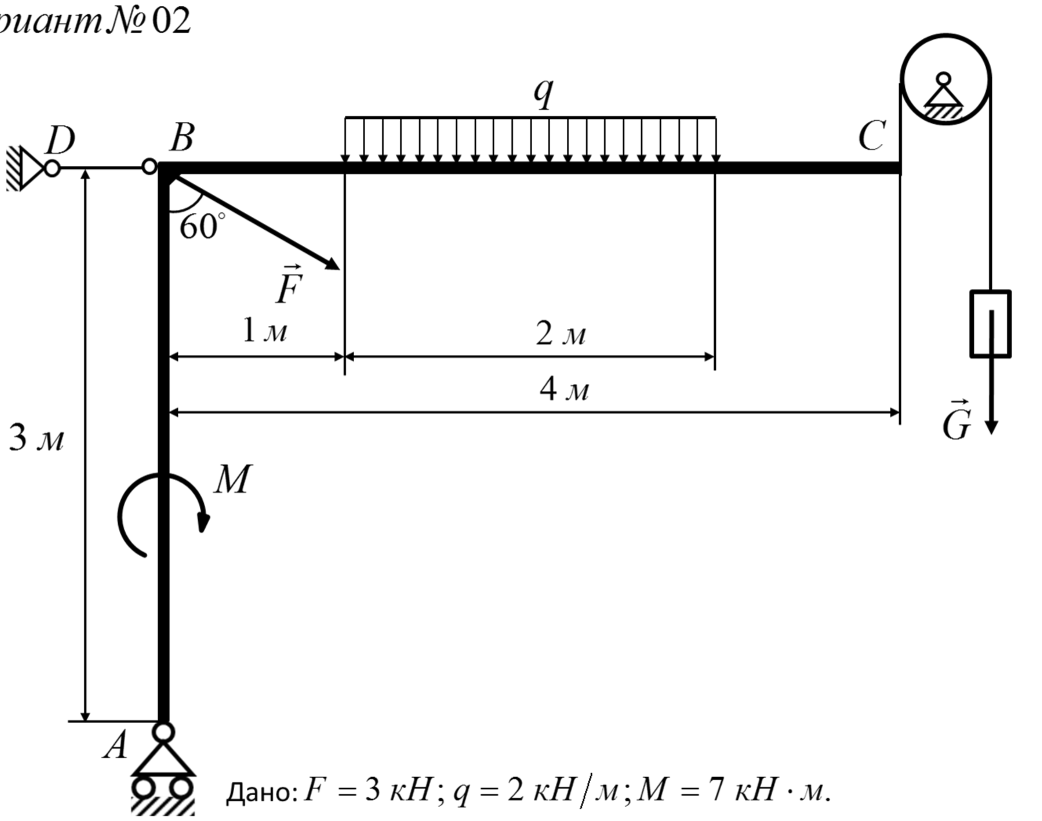
Вариант № 01



Дано: $F = 3\ кН;\ q = 2\ кН/м;\ M = 7\ кН \cdot м.$

Найти реакции шарнира в точке А и поверхности в точке С.

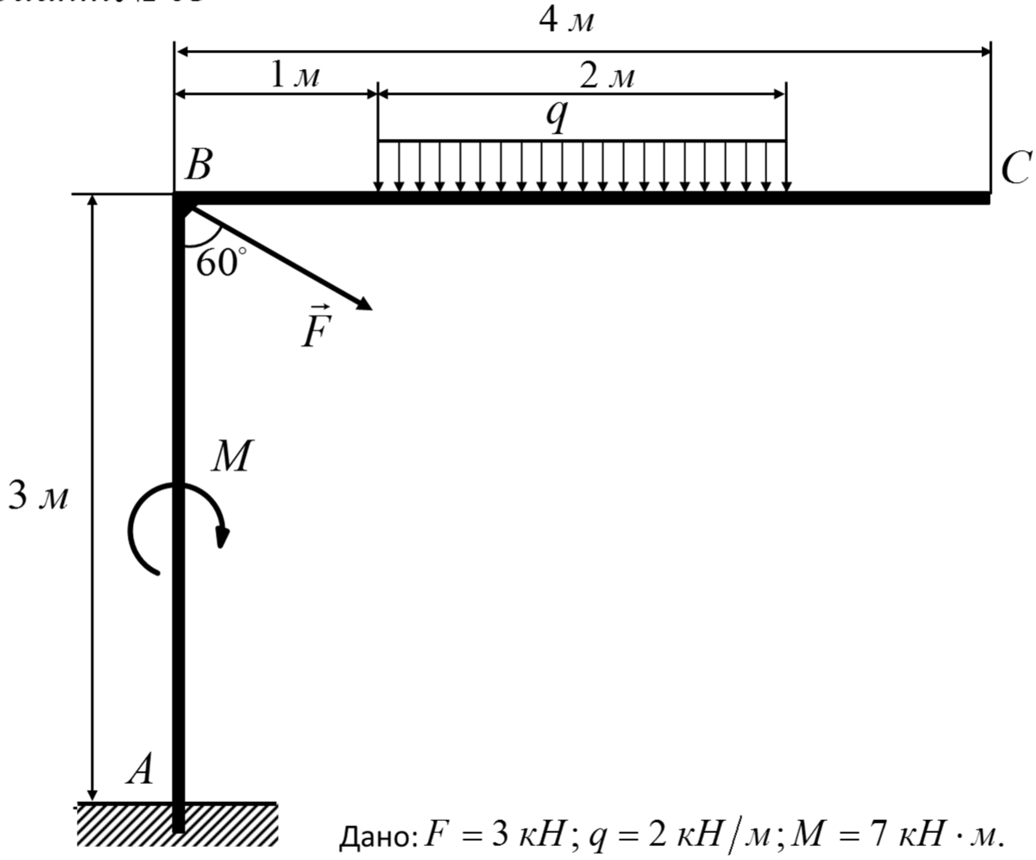
Вариант № 02



Дано: $F = 3\ кН;\ q = 2\ кН/м;\ M = 7\ кН \cdot м.$

Найти реакции шарнира в точке A, стержня в точке B и нити в точке C.

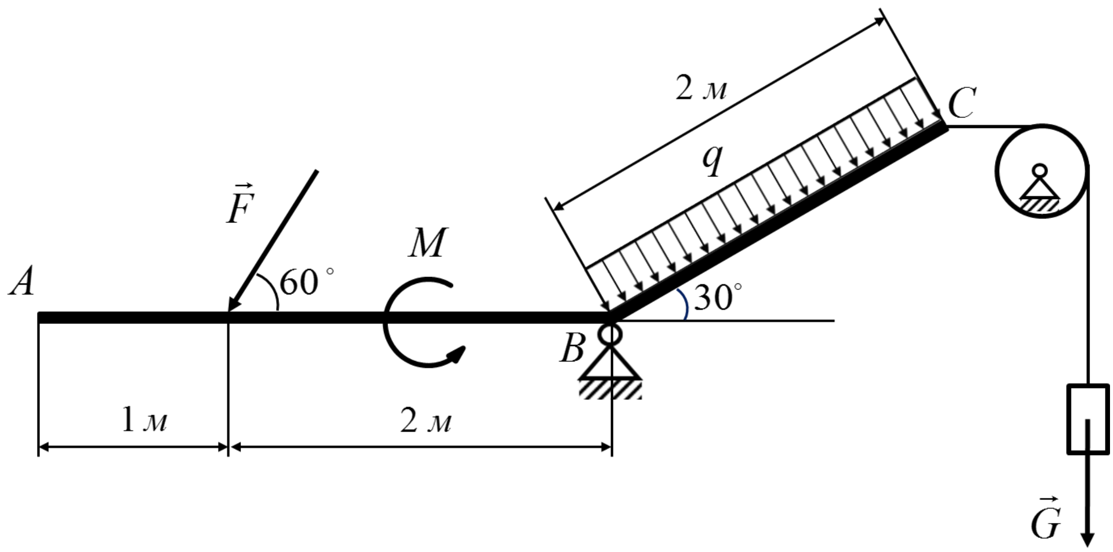
Вариант № 03



Дано: $F = 3\ кН;\ q = 2\ кН/м;\ M = 7\ кН \cdot м.$

Найти реакцию жесткой заделки в точке A.

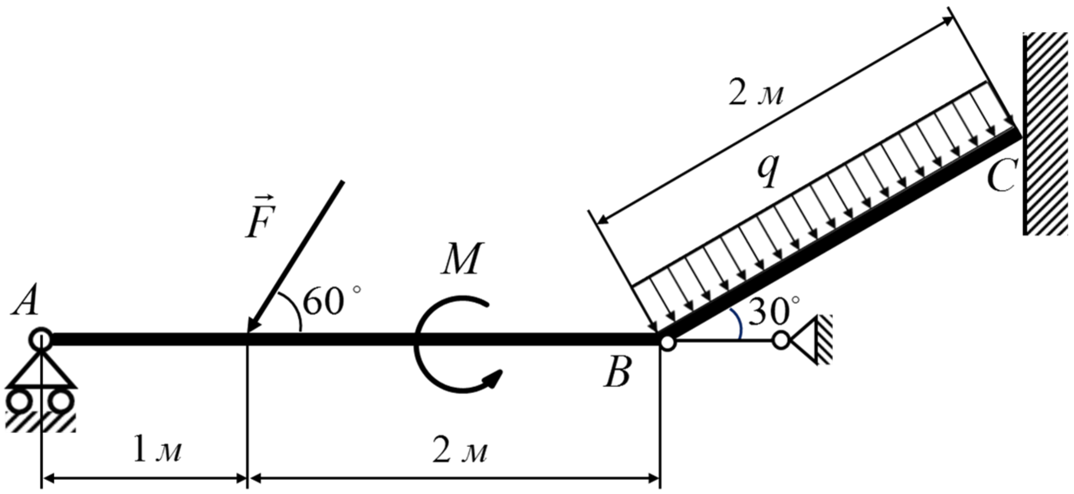
Вариант № 04



Дано: $F = 5\ кН;\ q = 1{,}5\ кН/м;\ M = 4\ кН \cdot м.$

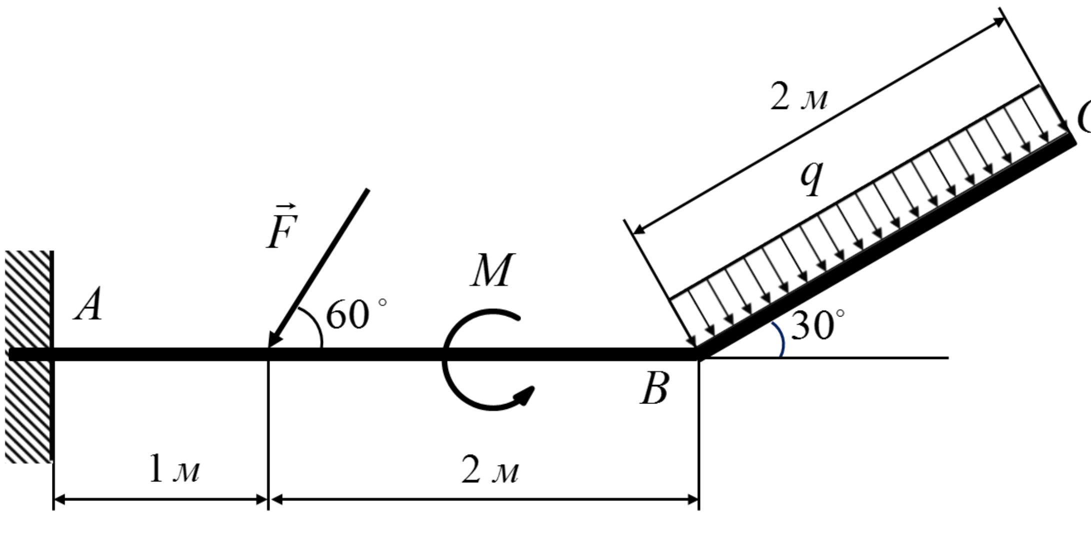
Найти реакции шарнира в точке B и нити в точке C.

Вариант№ 05



Дано: $F = 5\ кН;\ q = 1{,}5\ кН/м;\ M = 4\ кН \cdot м.$
Найти реакции шарнира в точке A, стержня в точке B и поверхности в точке C.

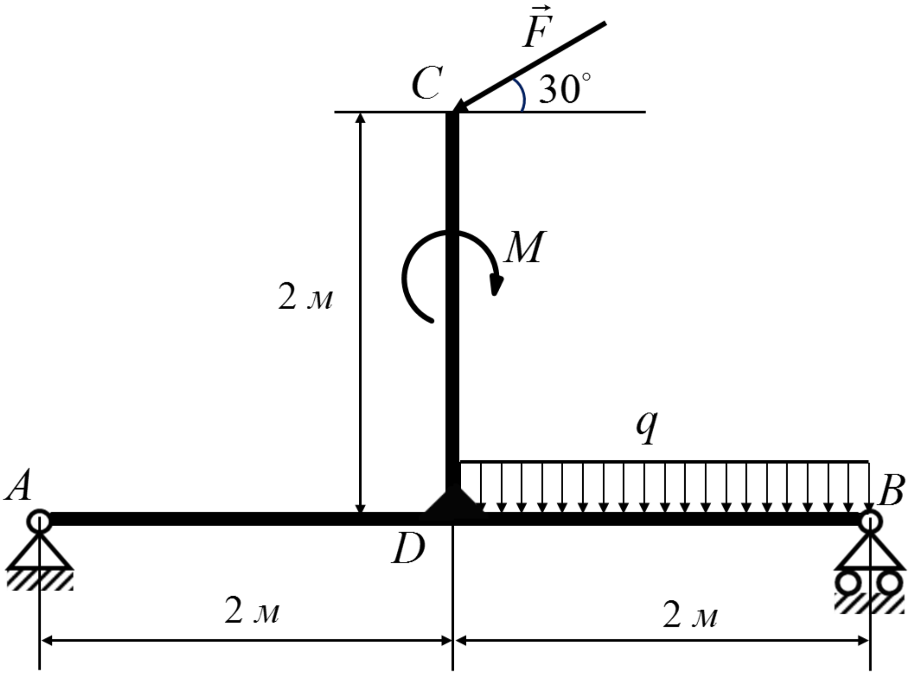
Вариант№ 06



Дано: $F = 5\ кН;\ q = 1{,}5\ кН/м;\ M = 4\ кН \cdot м.$

Найти реакцию жесткой заделки в точке A .

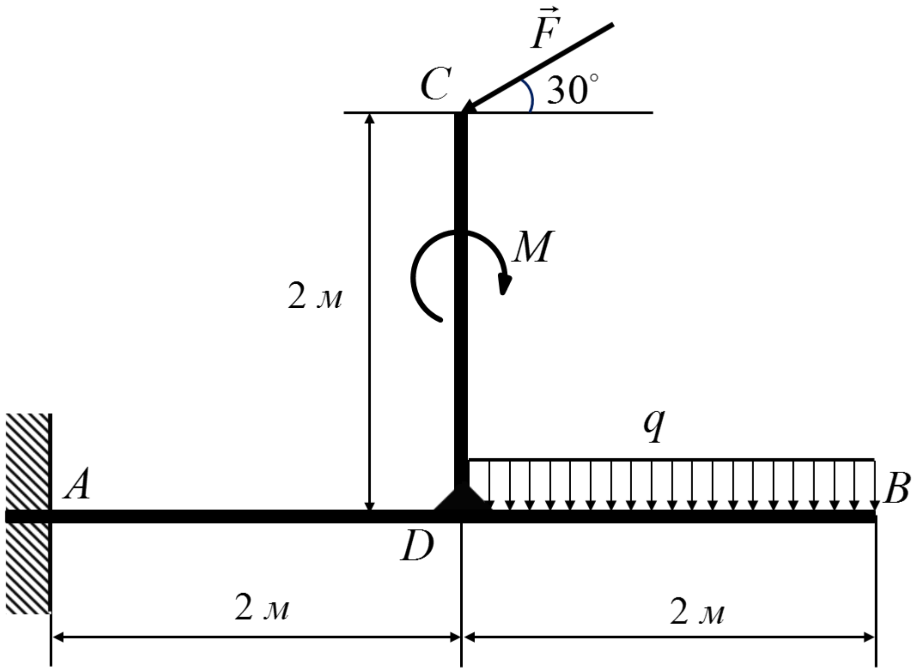
Вариант№ 07



Дано: $F = 5\ кН;\ q = 2\ кН/м;\ M = 9\ кН \cdot м.$

Найти реакции шарниров в точках A и B .

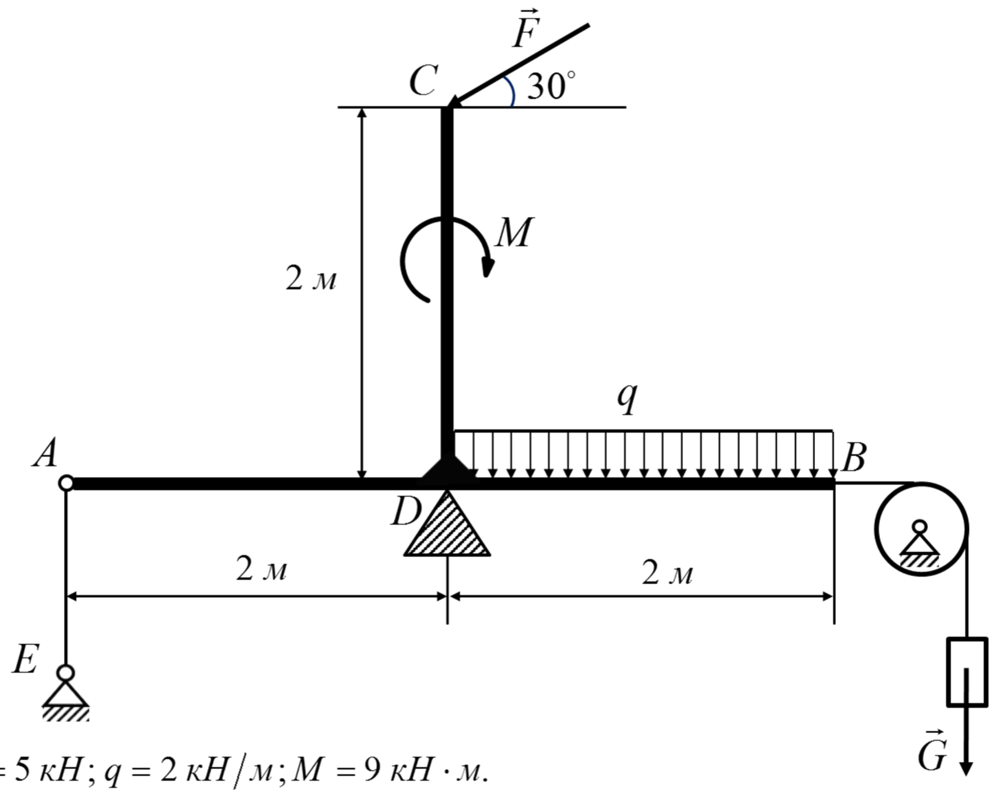
Вариант№ 08



Дано: $F = 5\ кН;\ q = 2\ кН/м;\ M = 9\ кН \cdot м.$

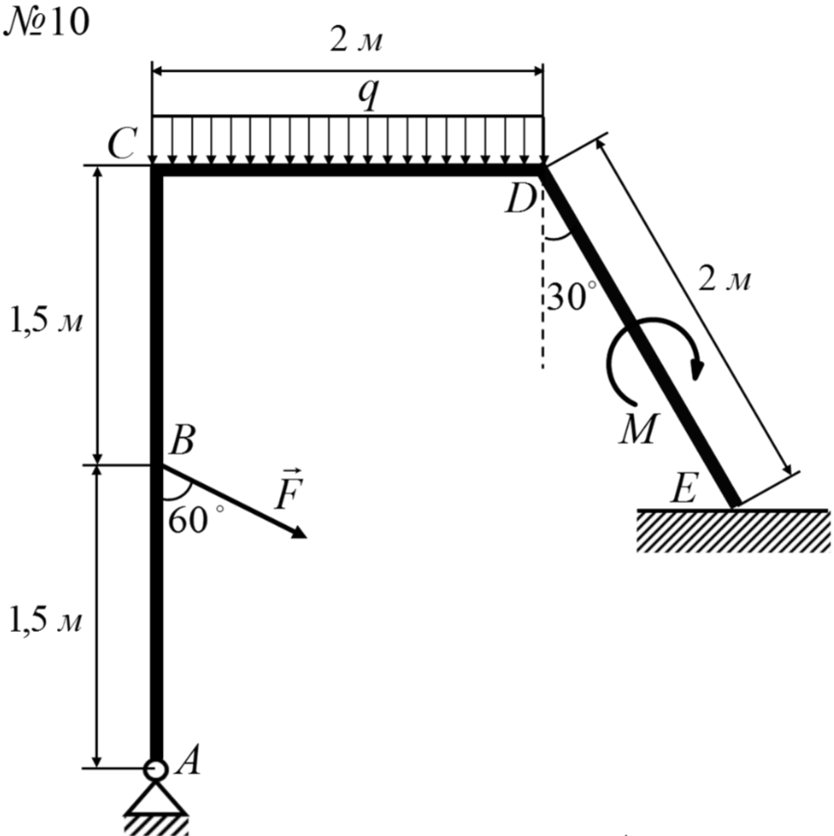
Найти реакцию жесткой заделки в точке A .

Вариант № 09



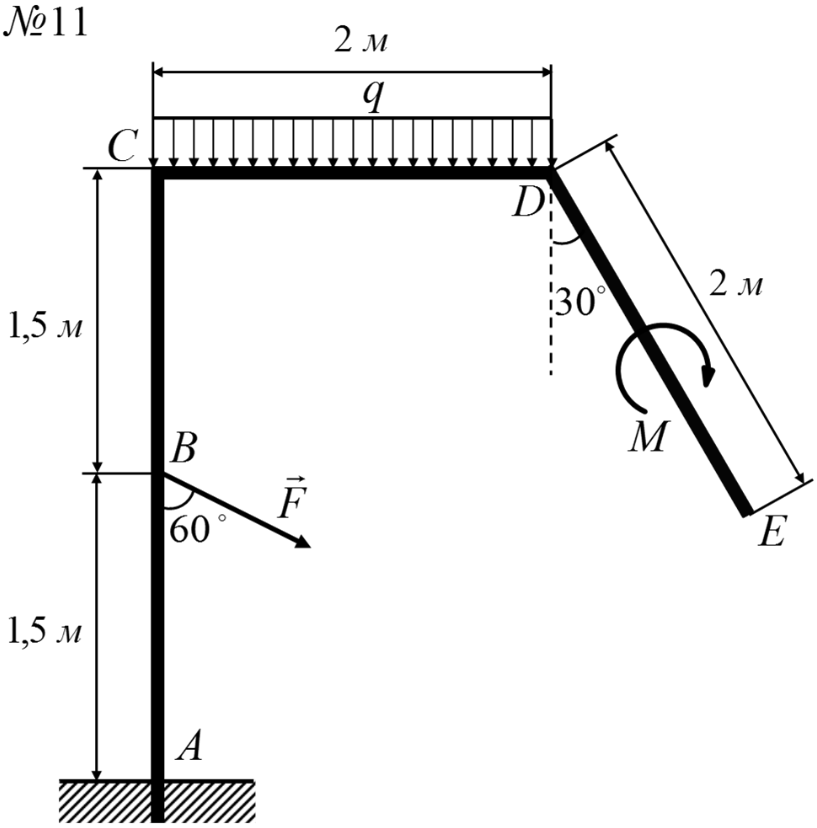
Дано: $F = 5\ кН;\ q = 2\ кН/м;\ M = 9\ кН \cdot м.$
Найти реакции стержня в точке A, нити в точке B и поверхности в точке D.

Вариант № 10



Дано: $F = 6\ кН;\ q = 1\ кН/м;\ M = 8\ кН \cdot м.$
Найти реакции шарнира в точке A и поверхности в точке E.

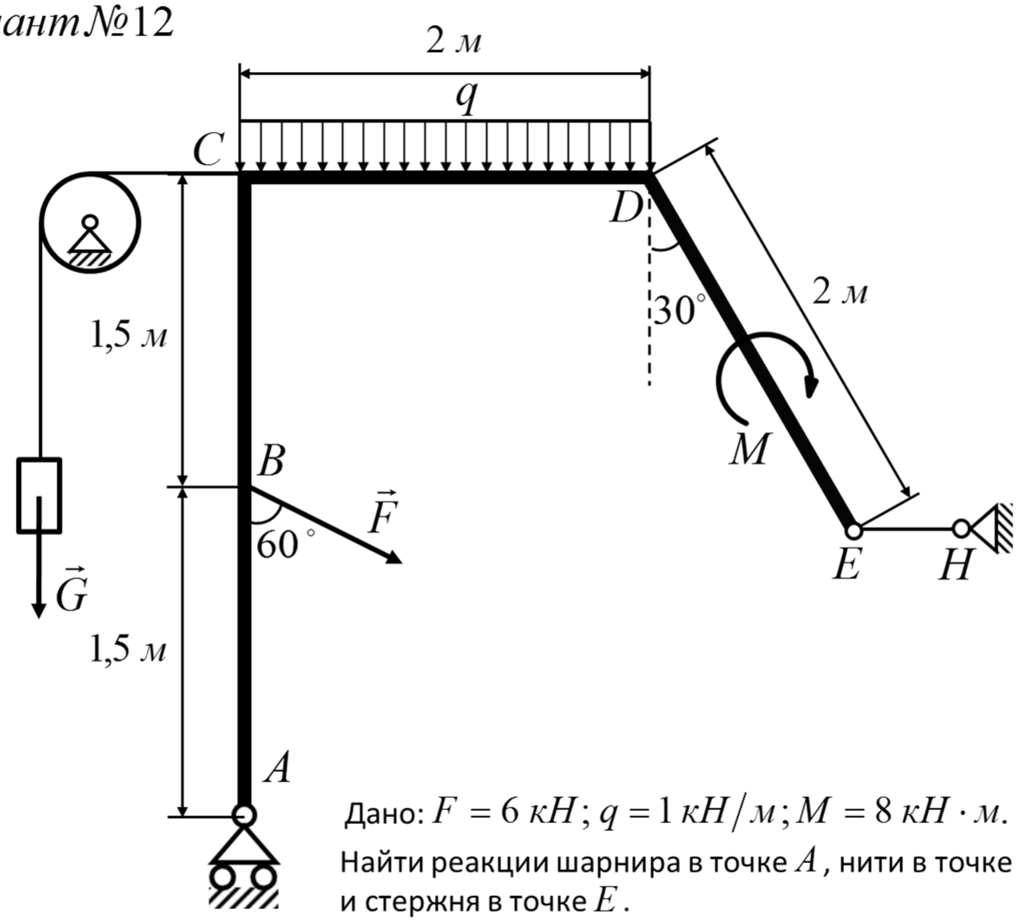
Вариант №11



Дано: $F = 6\ кН;\ q = 1\ кН/м;\ M = 8\ кН \cdot м.$

Найти реакцию жесткой заделки в точке A.

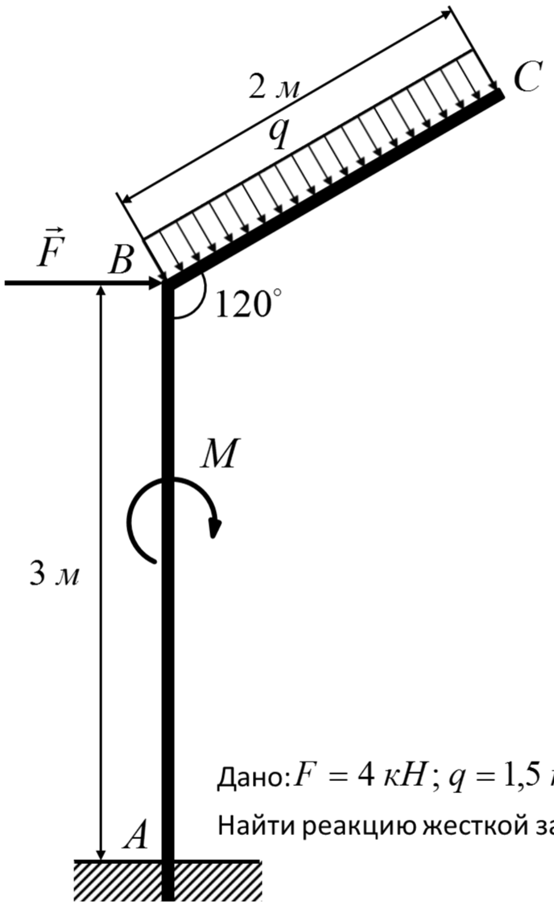
Вариант №12



Дано: $F = 6\ кН;\ q = 1\ кН/м;\ M = 8\ кН \cdot м.$

Найти реакции шарнира в точке A, нити в точке C и стержня в точке E.

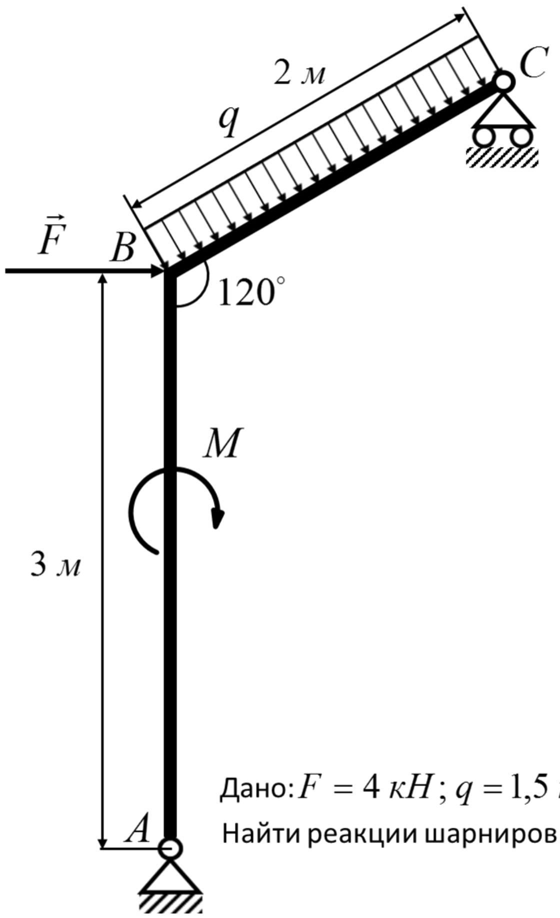
*Вариант №*13



Дано: $F = 4\ кН$; $q = 1{,}5\ кН/м$; $M = 7\ кН \cdot м$.

Найти реакцию жесткой заделки в точке A.

*Вариант №*14



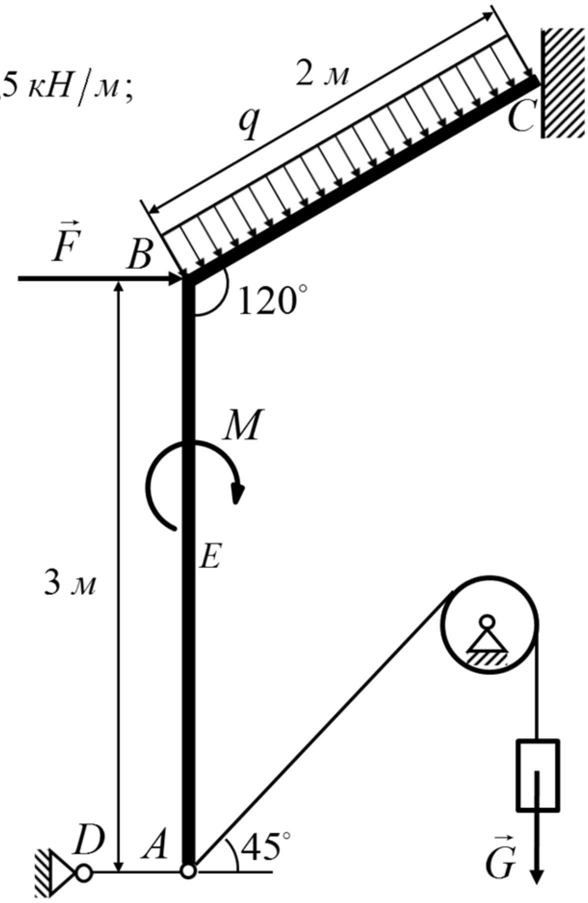
Дано: $F = 4\ кН$; $q = 1{,}5\ кН/м$; $M = 7\ кН \cdot м$.

Найти реакции шарниров в точках A и C.

Вариант №15

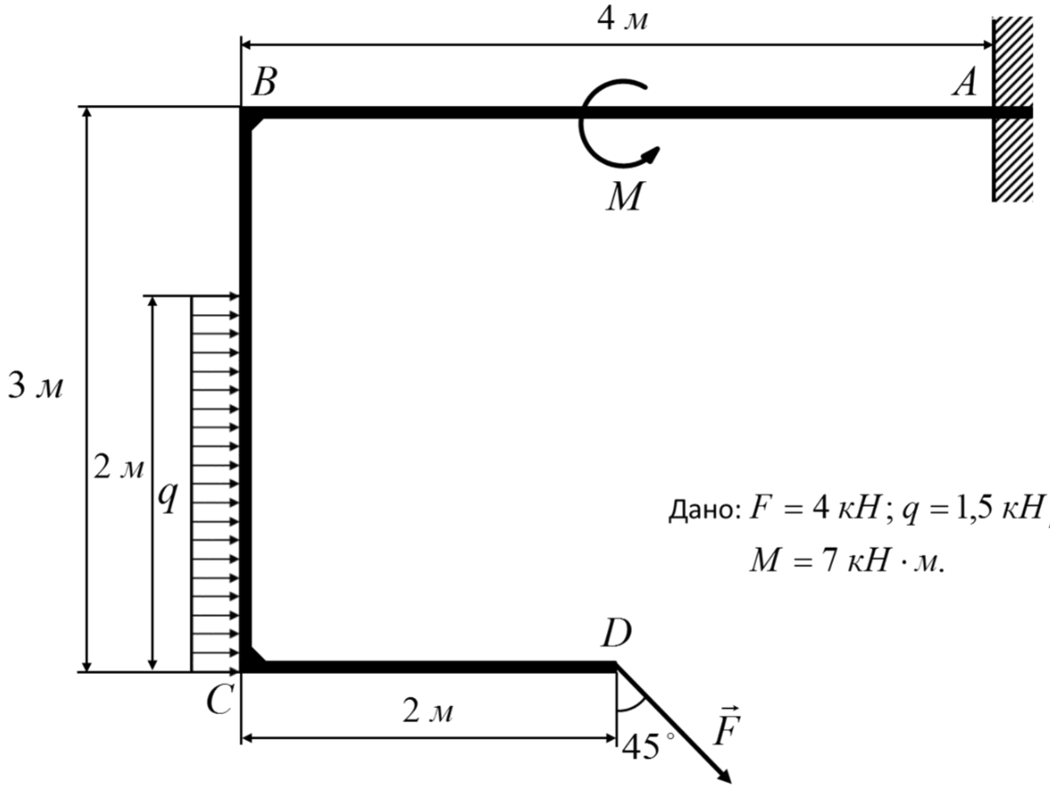
Дано: $F = 4\ кН$; $q = 1{,}5\ кН/м$;

$M = 7\ кН \cdot м.$



Найти реакции стержня и нити в точке A и поверхности в точке C.

Вариант №16

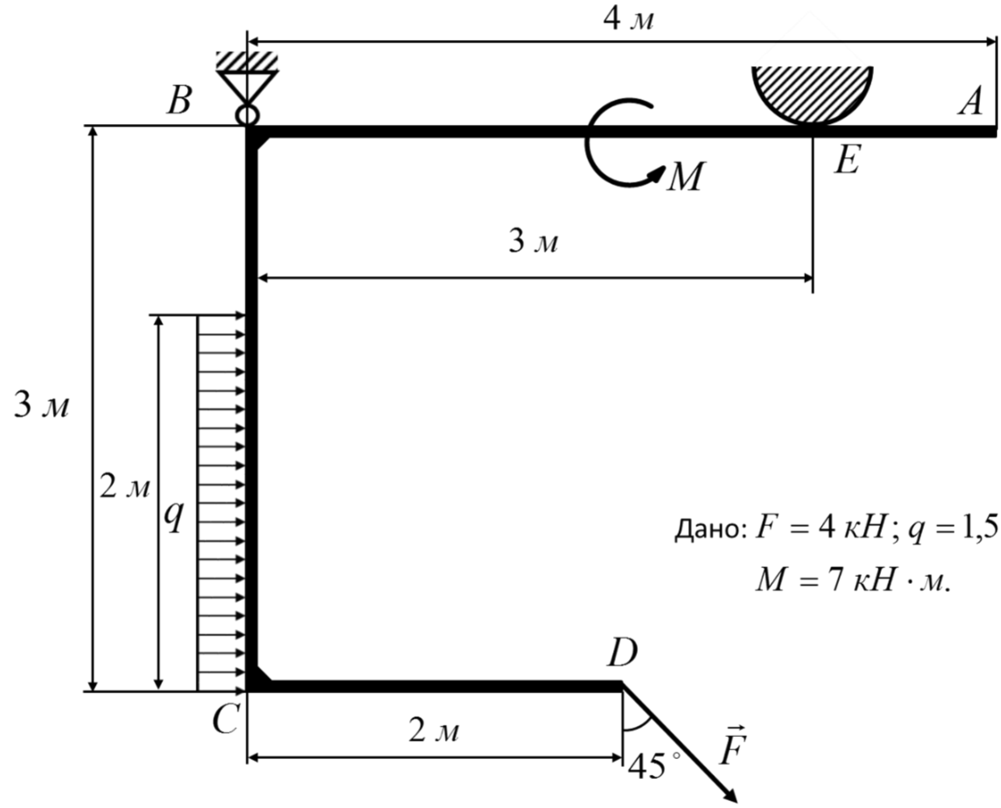


Дано: $F = 4\ кН$; $q = 1{,}5\ кН/м$;

$M = 7\ кН \cdot м.$

Найти реакцию жесткой заделки в точке A.

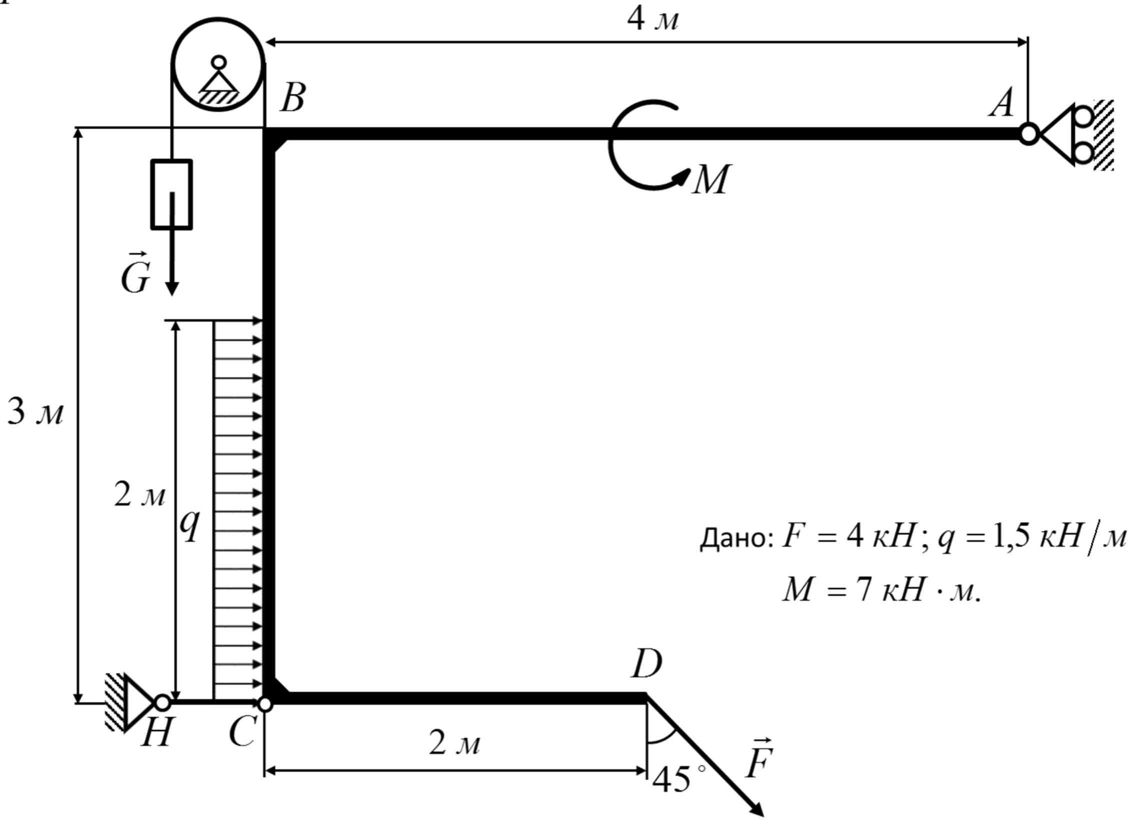
Вариант №17



Дано: $F = 4\ кН$; $q = 1{,}5\ кН/м$;
$M = 7\ кН \cdot м$.

Найти реакции шарнира в точке B и поверхности в точке E .

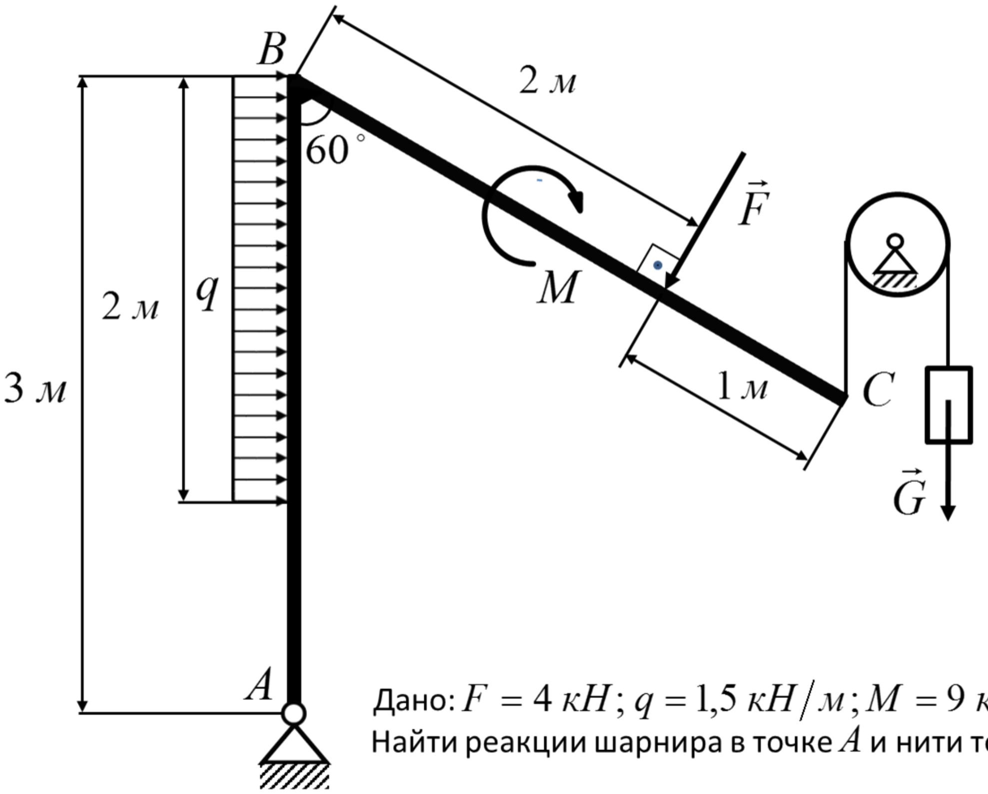
Вариант №18



Дано: $F = 4\ кН$; $q = 1{,}5\ кН/м$;
$M = 7\ кН \cdot м$.

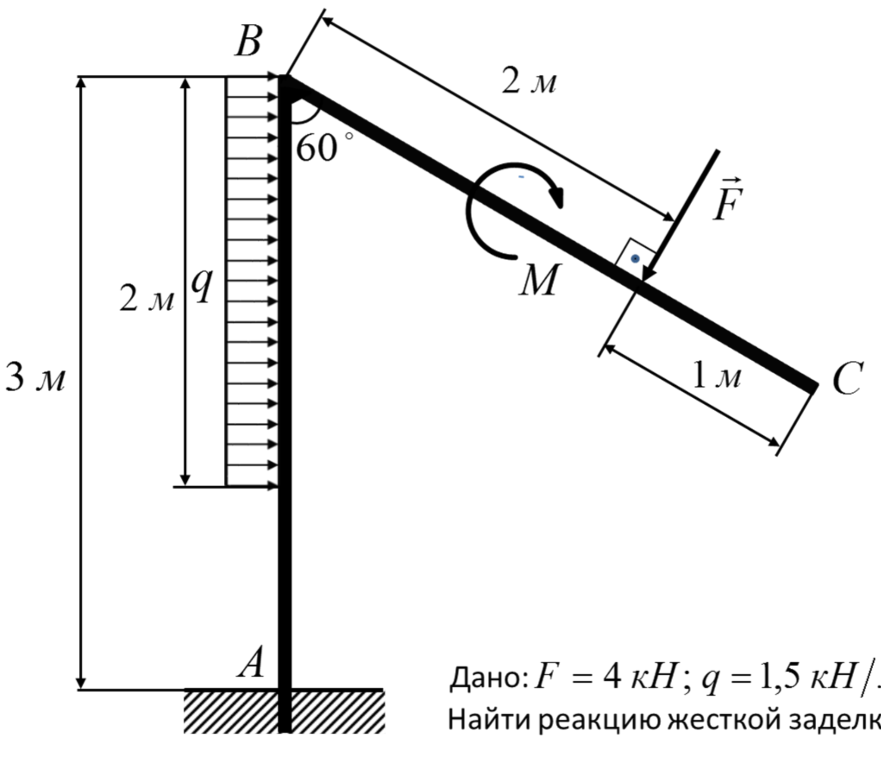
Найти реакции шарнира в точке A ,стержня CH в точке C и нити точке B .

Вариант №19



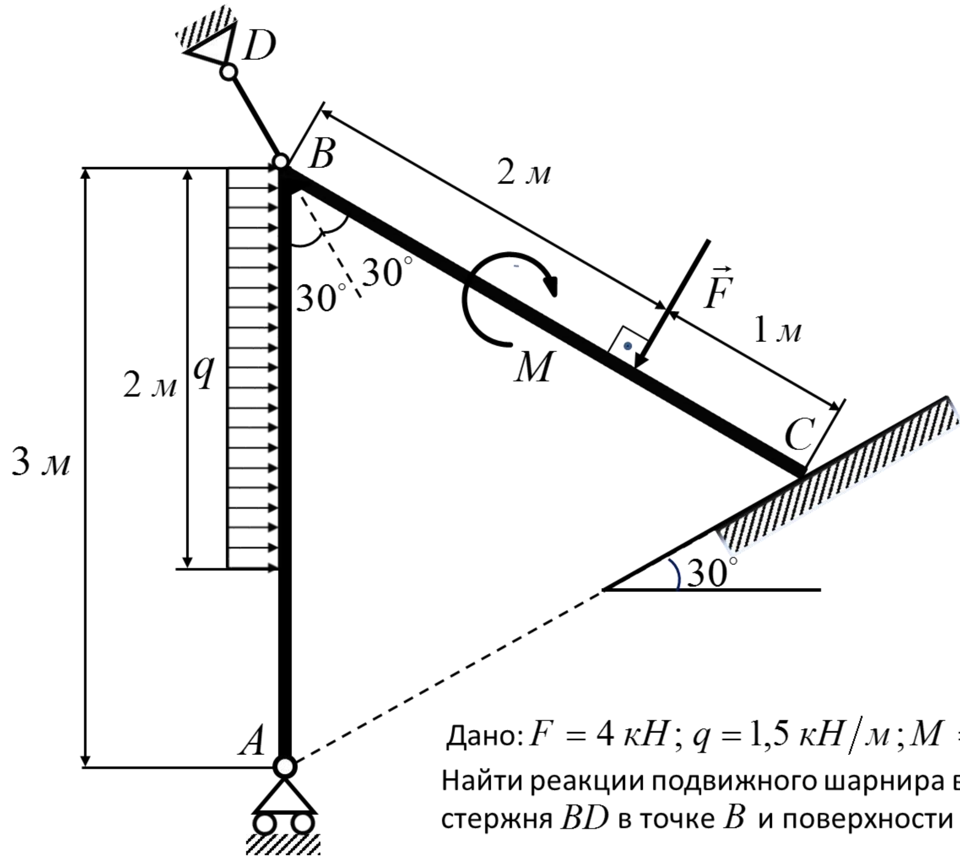
Дано: $F = 4\ кН$; $q = 1{,}5\ кН/м$; $M = 9\ кН \cdot м$.
Найти реакции шарнира в точке A и нити точке C.

Вариант №20



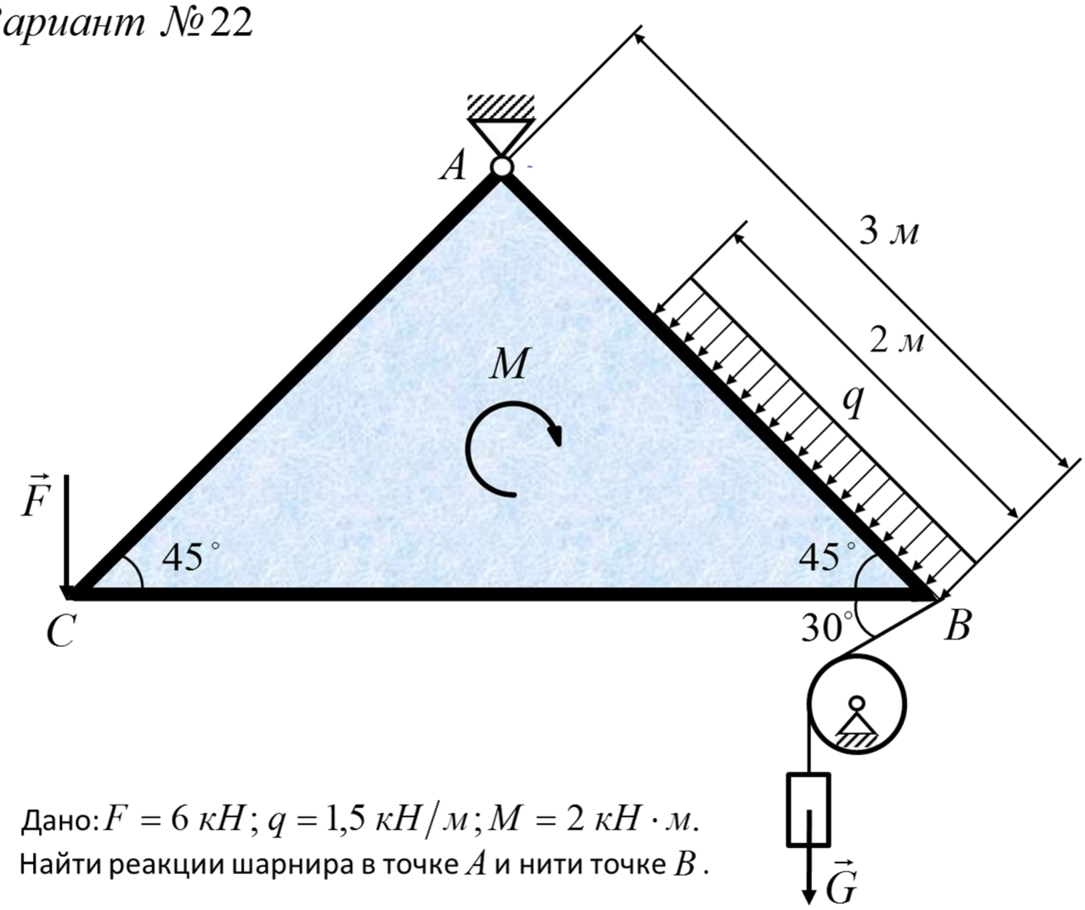
Дано: $F = 4\ кН$; $q = 1{,}5\ кН/м$; $M = 9\ кН \cdot м$.
Найти реакцию жесткой заделки в точке A.

Вариант№21



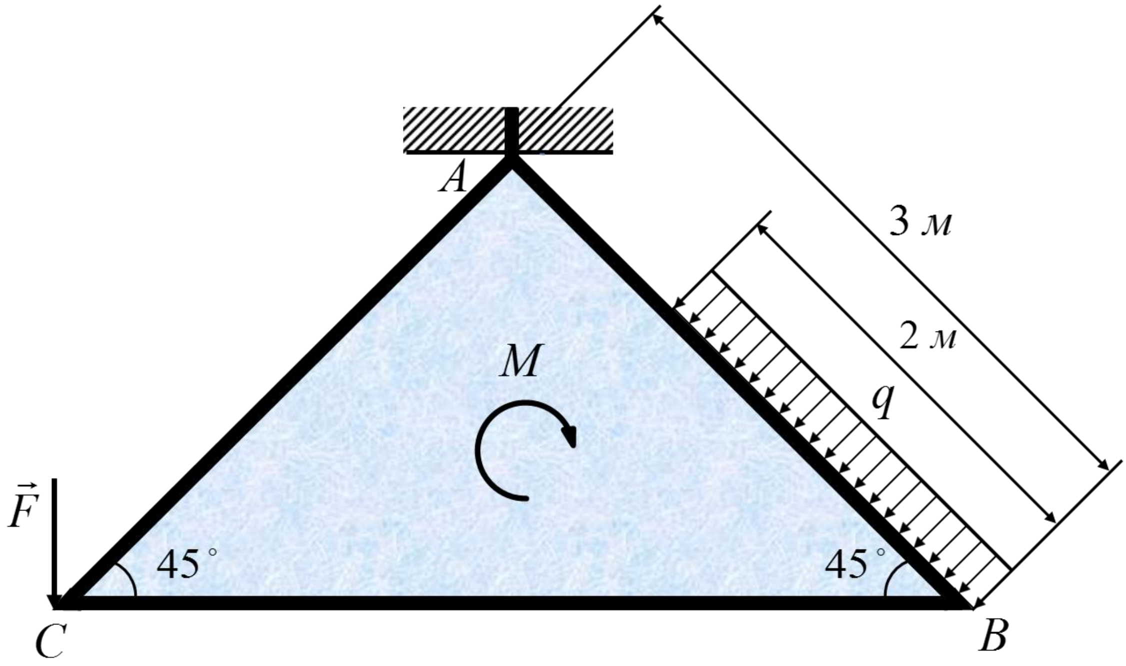
Дано: $F = 4\ кН;\ q = 1{,}5\ кН/м;\ M = 9\ кН \cdot м.$
Найти реакции подвижного шарнира в точке A, стержня BD в точке B и поверхности в точке C.

Вариант №22



Дано: $F = 6\ кН;\ q = 1{,}5\ кН/м;\ M = 2\ кН \cdot м.$
Найти реакции шарнира в точке A и нити точке B.

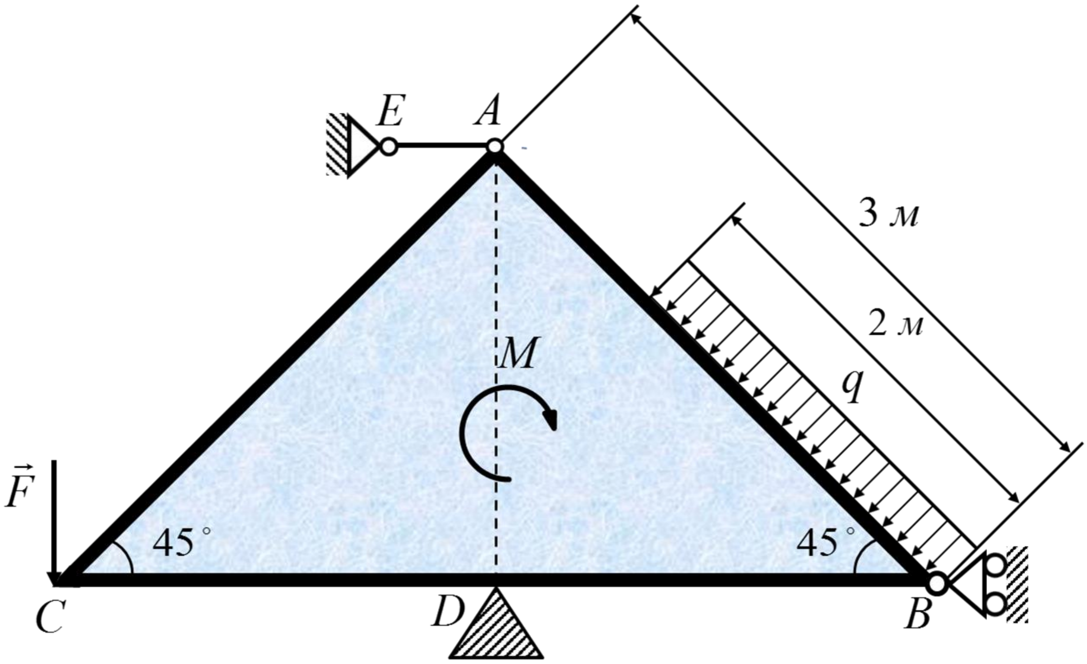
Вариант №23



Дано: $F = 6\ кН;\ q = 1{,}5\ кН/м;\ M = 2\ кН \cdot м.$

Найти реакции жесткой заделки в точке A.

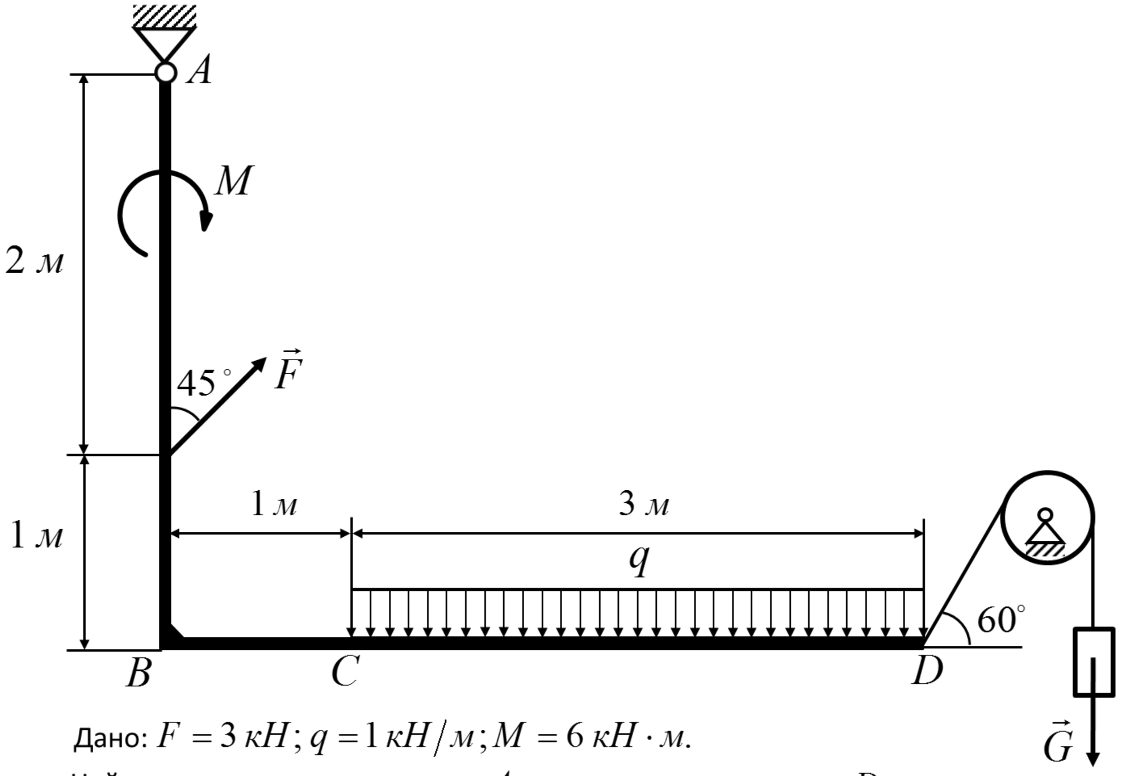
Вариант №24



Дано: $F = 6\ кН;\ q = 1{,}5\ кН/м;\ M = 2\ кН \cdot м.$

Найти реакции стержня в точке A, шарнира в точке B и поверхности в точке D.

Вариант №25

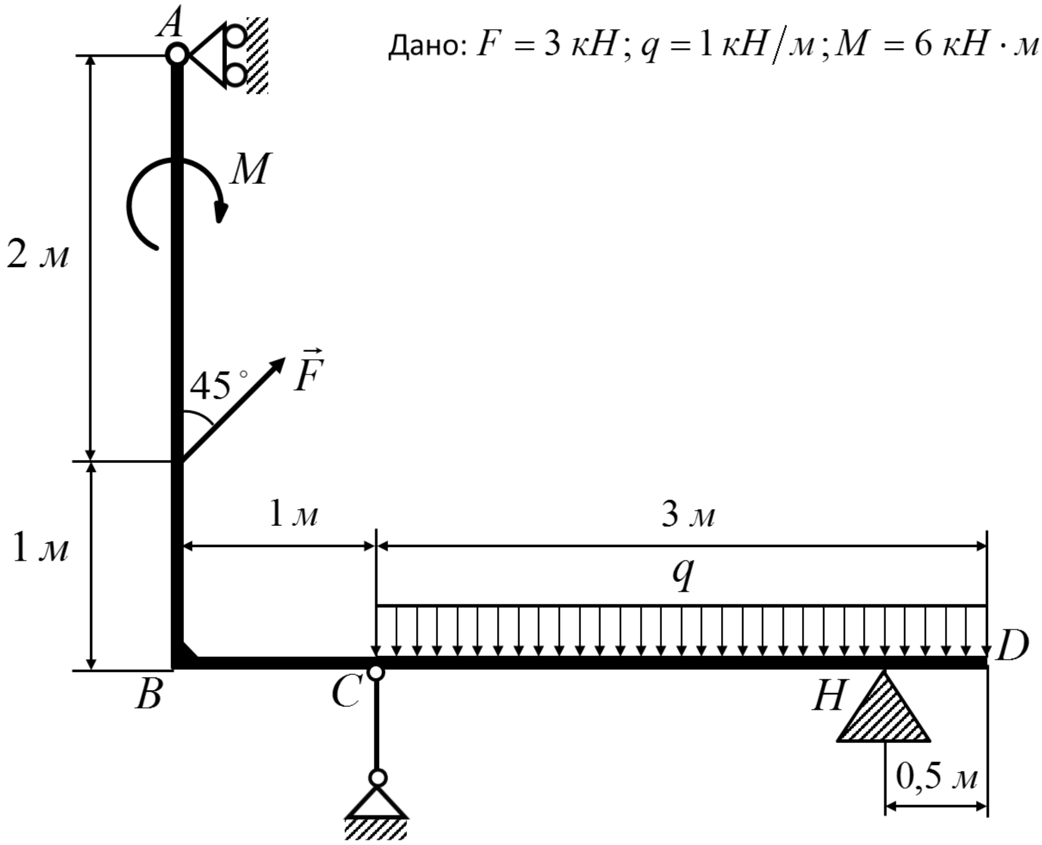


Дано: $F = 3\ кН;\ q = 1\ кН/м;\ M = 6\ кН \cdot м.$

Найти реакции шарнира в точке A и натяжение нити в точке D.

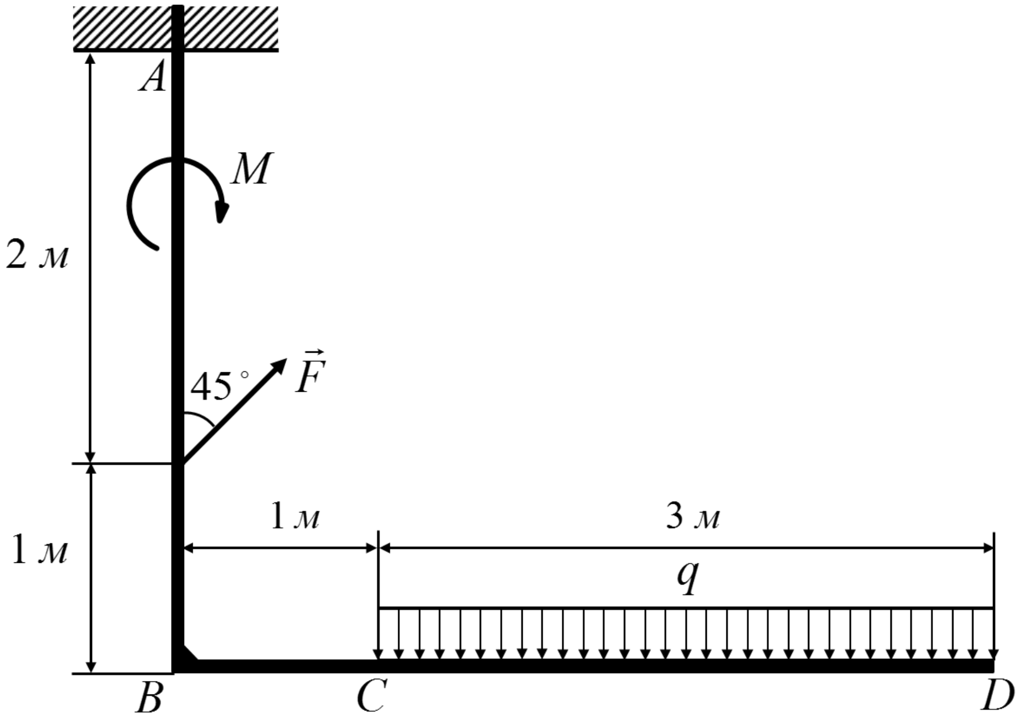
Вариант №26

Дано: $F = 3\ кН;\ q = 1\ кН/м;\ M = 6\ кН \cdot м.$



Найти реакции шарнира в точке A, стержня в точке C и поверхности в точке D.

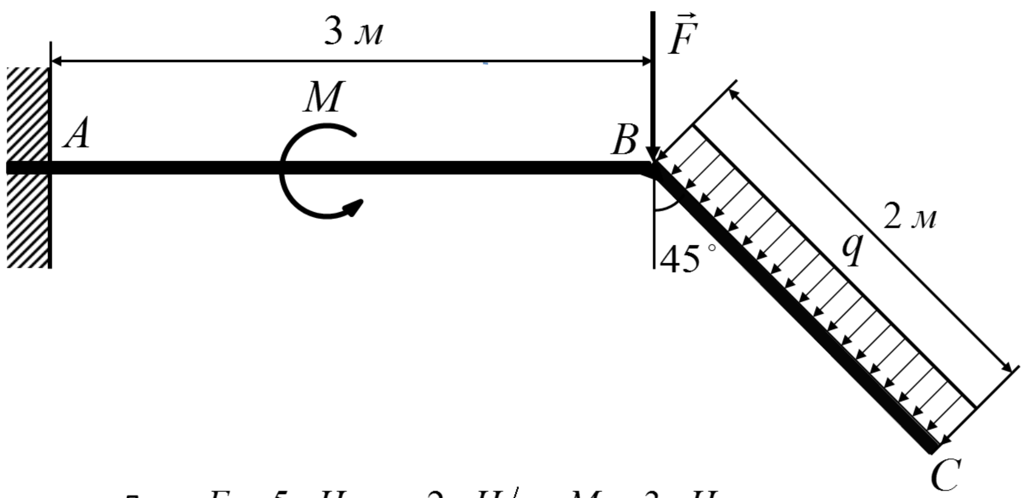
Вариант №27



Дано: $F = 3\ кН;\ q = 1\ кН/м;\ M = 6\ кН \cdot м.$

Найти реакцию жесткой заделки в точке A.

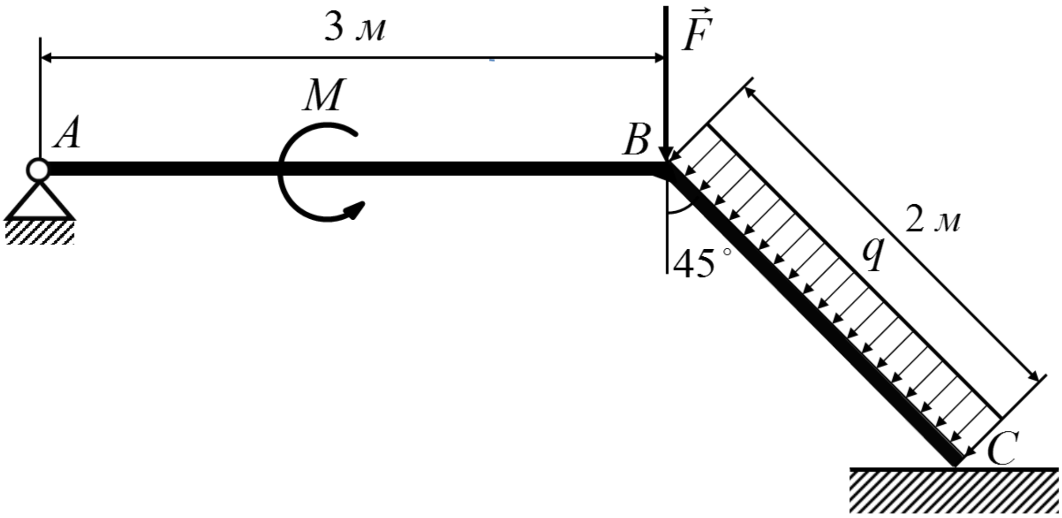
Вариант №28



Дано: $F = 5\ кН;\ q = 2\ кН/м;\ M = 3\ кН \cdot м.$

Найти реакцию жесткой заделки в точке A .

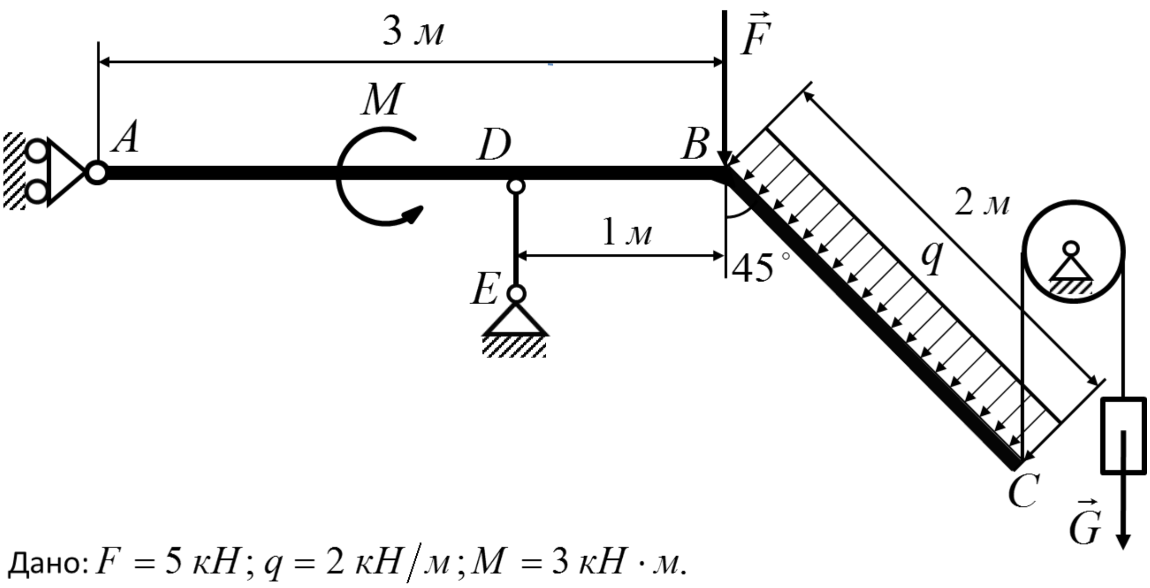
Вариант №29



Дано: $F = 5\ кН;\ q = 2\ кН/м;\ M = 3\ кН \cdot м.$

Найти реакции шарнира в точке A и опорной поверхности в точке C.

Вариант №30



Дано: $F = 5\ кН;\ q = 2\ кН/м;\ M = 3\ кН \cdot м.$

Найти реакции шарнира в точке A, стержня в точке D и нити в точке C.

2 КИНЕМАТИКА

2.1 Краткие теоретические сведения

Кинематика – это раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства механического движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

Простейшие виды движения твердого тела.

К простейшим движениям твердого тела относятся поступательное движение и вращательное движение вокруг неподвижной оси.
В кинематике твердого тела при различных видах его движений интересуются кинематическими характеристиками как движения твердого тела в целом, так и кинематическими характеристиками движения отдельных его точек .

Поступательное движение твердого тела.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной самой себе.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость $\vec{V}$ называют скоростью поступательного движения тела, а ускорение $\vec{a}$ - ускорением поступательного движения.

Вращательное движение твердого тела.

Вращательным движением тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки, лежащие на некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются во время движения неподвижными. Это прямая называется осью вращения.

Законом вращательного движения называется зависимость угла поворота от времени:

$$\varphi = f(t). \qquad (1)$$

Угловая скорость тела равна первой производной по времени от угла поворота тела:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (2)$$

Угловое ускорение тела равно первой производной по времени от его угловой скорости или второй производной по времени от его угла поворота:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \quad (3)$$

Если знаки алгебраических величин ω и ε одинаковые, то движение является ускоренным, а если противоположные – то замедленным.

Модуль скорости точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$\left|\vec{V}\right| = |\omega| \cdot h, \quad (4)$$

где h - кратчайшее расстояние от этой точки до оси вращения.

Вектор скорости $\vec{V}$ направлен по касательной к окружности радиуса h в сторону движения точки (в соответствии с рисунком 21).

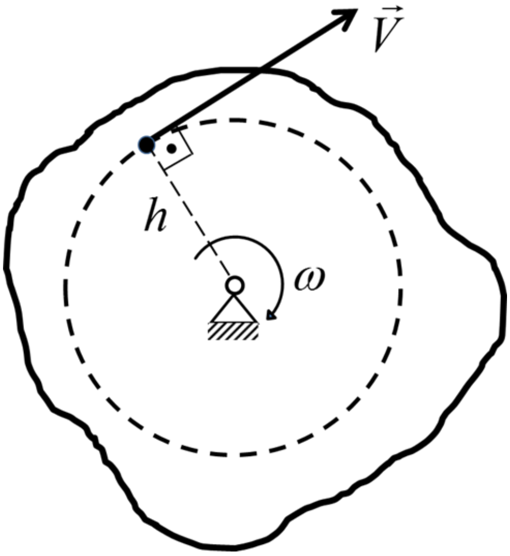


Рисунок 21 - Скорость точки вращающегося твердого тела

Ускорение точки вращающегося тела равно геометрической сумме её вращательного (касательного) и осестремительного (центростремительного, нормального) ускорений (в соответствии с рисунком 22).

$$\vec{a} = \vec{a}^{\varepsilon} + \vec{a}^{\omega}$$

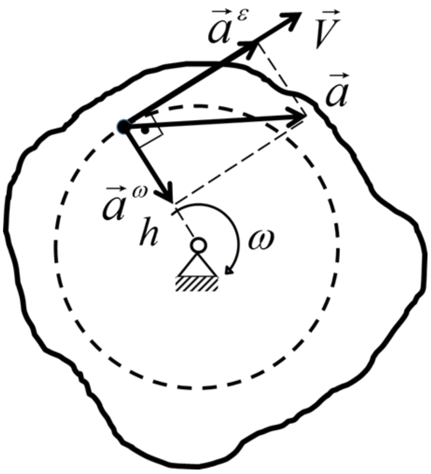


Рисунок 22 - Скорость и ускорение точки вращающегося твердого тела

Модуль вращательного ускорения: $a^{\varepsilon} = \varepsilon h.$

Модуль осестремительного ускорения: $a^{\omega} = \omega^2 h.$

Модуль полного ускорения точки:

$$a = \sqrt{a^{\varepsilon^2} + a^{\omega^2}} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Угол отклонения вектора ускорения точки от главной нормали определяется через его тангенс:

$$tg\mu = \frac{a^{\varepsilon}}{a^{\omega}} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

Передаточные механизмы

Передаточные механизмы позволяют передавать вращение от одного тела, называемого ведущим к другому телу – ведомому.
Вращение может передаваться с помощью зубчатых, фрикционных (в соответствии с рисунком 23) и ременных передач.

Зубчатая передача

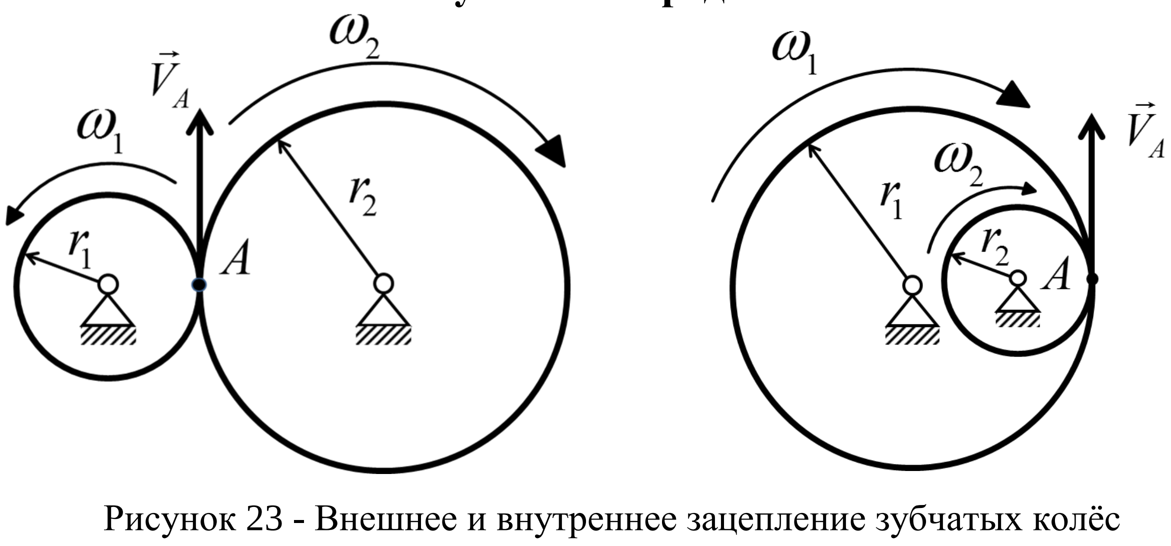


Рисунок 23 - Внешнее и внутреннее зацепление зубчатых колёс

Величины скоростей на ободе зубчатых колес, находящихся в зацеплении, равны.

$$V_A = \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$$

Угловые скорости колес обратно пропорциональны числам зубцов или радиусам, или диаметрам

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1} = i_{12} \ .$$

где ω_1, ω_2 - модули угловых скоростей, r_1, r_2 - радиусы начальных окружностей, d_1, d_2 - диаметры начальных окружностей, z_1, z_2 - числа зубцов первого и соответственно второго колеса, i_{12} - передаточное число.

Ременная передача

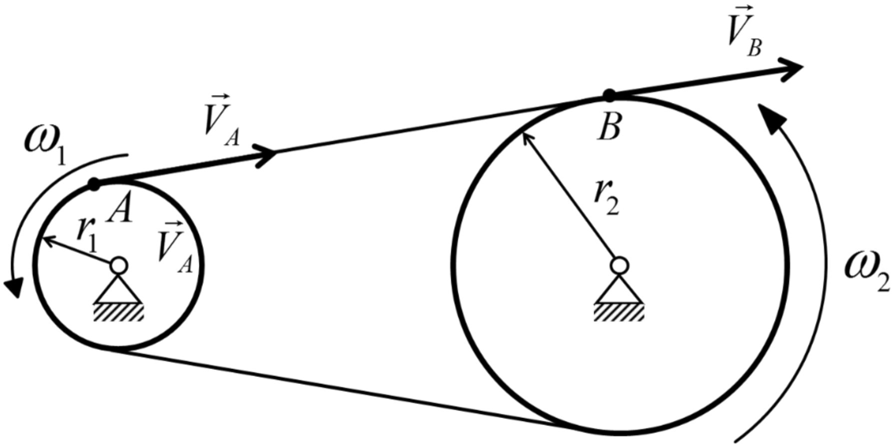


Рисунок 24 - Передача вращения при помощи ременной передачи

Кроме фрикционной и зубчатой передач, существует передача на расстоянии при помощи гибкой связи (в соответствии с рисунком 24).

Скорости на ободе шкивов ременной передачи равны по модулю.

Если $V_A = V_B$, то $\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$.

Передаточное число определяется по формуле

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = i_{12} \ .$$

Плоскопараллельное движение.

Плоскопараллельным движением твердого тела называется такое движение, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой плоскости, принятой за неподвижную.

Скорости точек при плоскопараллельном движении определяются двумя методами: методом сложения скоростей при котором движение раскладывается на поступательное и вращательное и методом мгновенного центра скоростей.

Определение скоростей точек с помощью мгновенного центра скоростей

В основе метода лежит теорема о том, что плоскопараллельное перемещение твердого тела может быть получено одним вращением вокруг оси, перпендикулярной плоскости, проходящей через мгновенный центр скоростей. Обозначим эту точку P. Скорость этой точки в данный момент времени равна нулю.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называют геометрическую точку, принадлежащую плоской фигуре или ее мысленному продолжению, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

МЦС расположен на перпендикуляре, проведенном из любой точки плоской фигуры к вектору ее скорости, и угловая скорость равна отношению скорости какой-либо ее точки к длине отрезка, соединяющего эту точку с МЦС (в соответствии с рисунком 25).

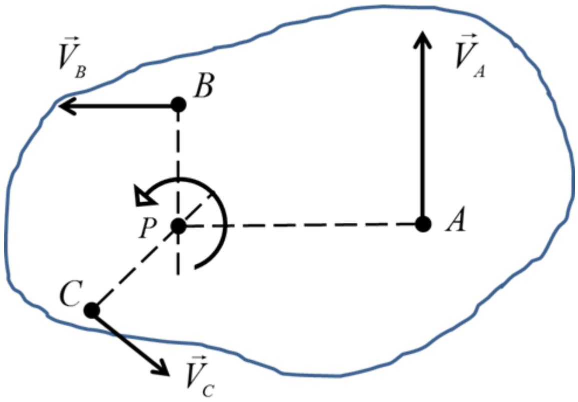


Рисунок 25 – Определение скорости точки методом МЦС.

Тогда скорости точек будут определятся произведением угловой скорости тела на расстояние от мгновенного центра скоростей до точки.

$$V_A = \omega \cdot PA, V_B = \omega \cdot PB, \; V_C = \omega \cdot PC. \tag{5}$$

Способы определения мгновенного центра скоростей

1) Качение тела по неподвижной плоскости без проскальзывния.

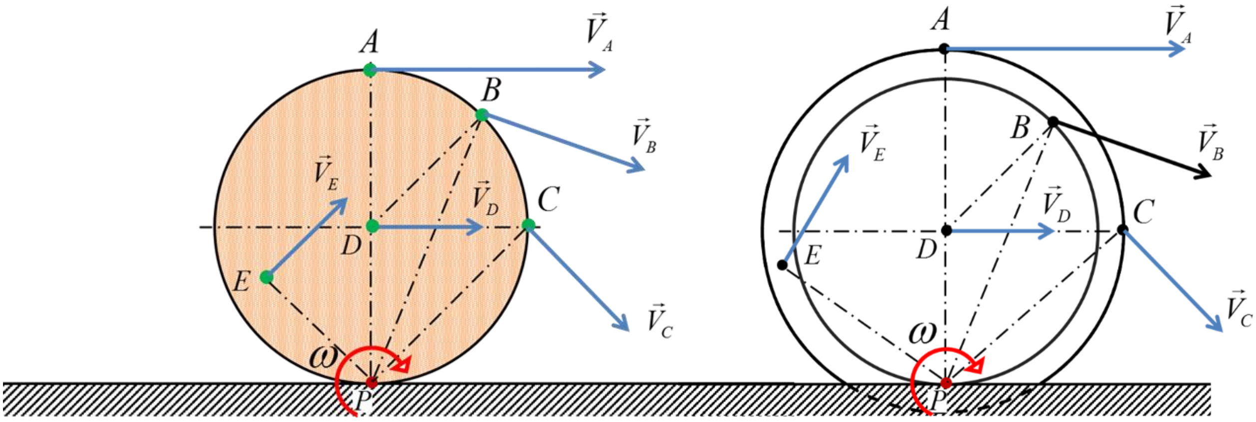


Рисунок 26 – Определение положения МЦС при качении тела

Мгновенный центр скоростей P находится в точке соприкосновения фигуры с неподвижной плоскостью, так как скорость этой точки равна нулю (в соответствии с рисунком 26).

2) Известны направления скоростей двух точек тела.

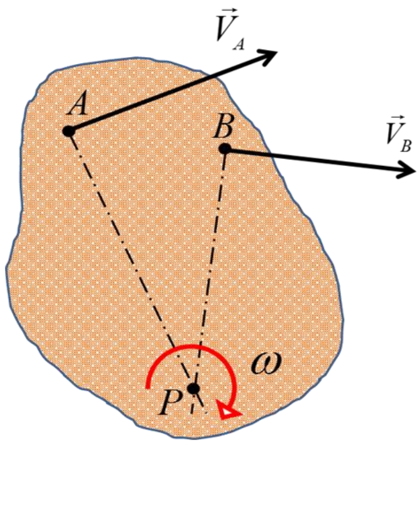


Рисунок 27 – Определение положения МЦС по скоростям двух точек

Мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к направлениям их скоростей (в соответствии с рисунком 27).

3) Скорости двух точек плоской фигуры направлены в одну сторону и перпендикулярны к отрезку, соединяющему эти точки.

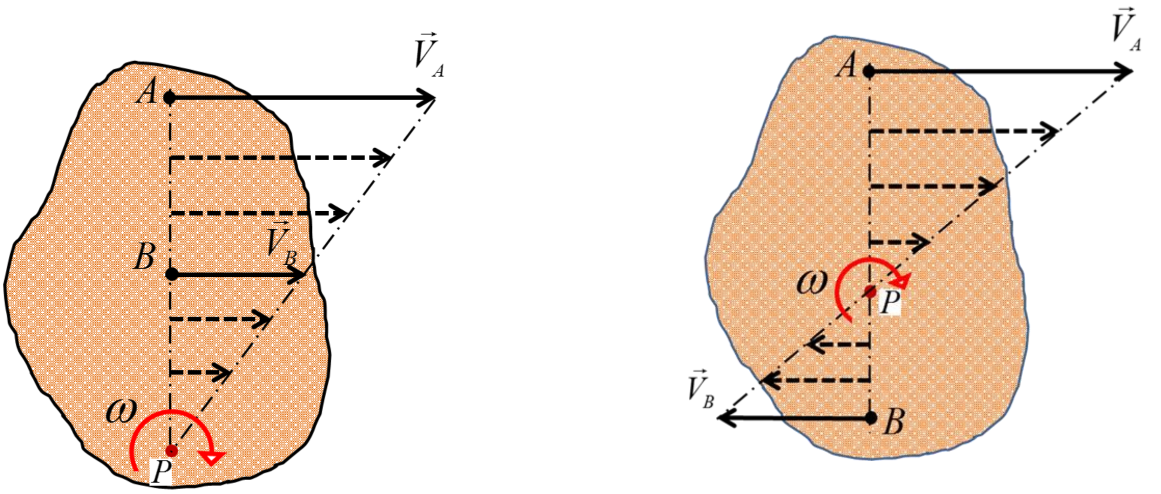
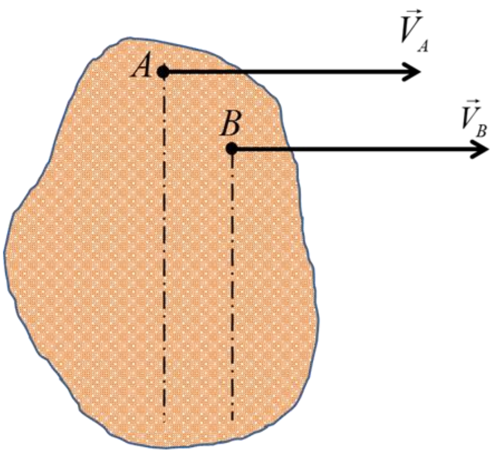


Рисунок 28 – Определение положения МЦС по параллельным скоростям двух точек

Скорости двух точек тела A и B плоской фигуры параллельны друг другу, равны по модулю и перпендикулярны отрезку AB. В этом случае МЦС находится в точке пересечения прямой, соединяющей концы скоростей и прямой AB (в соответствии с рисунком 28).

4) Скорости двух точек плоской фигуры равны, параллельны и направлены в одну сторону.



$$\omega = 0 \quad \vec{V}_A = \vec{V}_B$$

Рисунок 29 – Определение положения МЦС по параллельным, равным по модулю скоростям двух точек направленным в одну сторону.

Скорости точек тела параллельны и не перпендикулярны отрезку AB. В этом случае МЦС находится в бесконечности, мгновенная угловая скорость равна нулю, скорости всех точек плоской фигуры будут одинаковы и движение будет мгновенно поступательным (в соответствии с рисунком 29).

2.2 Пример решения контрольной работы 2

Для заданного положения механизма (в соответствии с рисунком 30) требуется:

- установить вид движения каждого звена механизма;

- определить величину и построить вектор скорости точки А;

- найти положения мгновенных центров скоростей всех звеньев, совершающих плоскопараллельное движение;

- построить векторы скоростей всех обозначенных на рисунке точек звеньев механизма.

Исходные данные:

$\omega_{OA} = 2\, рад/с,\ OA = 0{,}4\ м,\ AB = 0{,}8\ м,\ AC = 0{,}3\ м.$

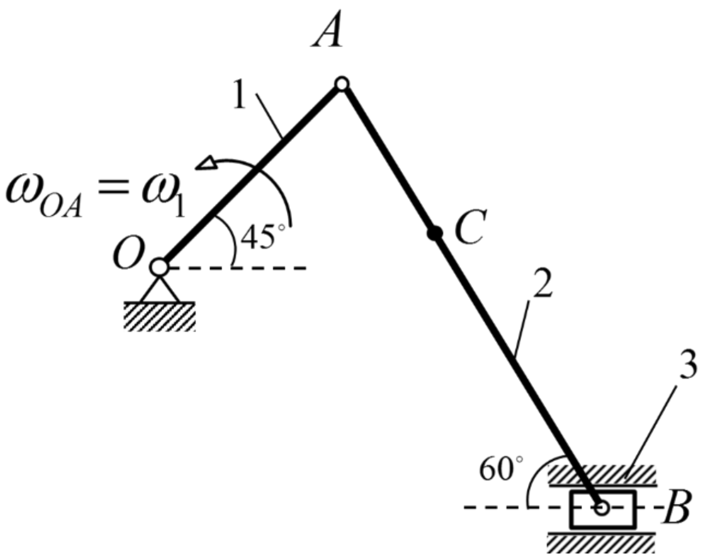


Рисунок 30 - Расчетная схема к примеру

Имеем кривошипно- шатунный механизм, где кривошип ОА обозначим номером 1, а шатун АВ – номером 2.Тогда угловая скорость кривошипа $\omega_{OA} = \omega_1$, а угловая скорость шатуна $\omega_{AB} = \omega_2$.

Звено OA совершает вращательное движение. Скорость точки A определяется по формуле (4)

$$V_A = \omega_1 \cdot OA = 2 \cdot 0,4 = 0,8\ м/с.$$

Вектор скорости перпендикулярен расстоянию OA и направлена в сторону угловой скорости.

Звено 2 совершает плоскопараллельное движение. Известны линии действия скоростей двух точек тела (точка B может двигаться только по горизонтали). Мгновенный центр скоростей (МЦС) находится в точке пересечения перпендикуляров к векторам скоростей (точка P). Угловую скорость ω_2 показываем вокруг МЦС в сторону известного направления скорости точки A. Кинематическая схема представлена на рисунке 31.

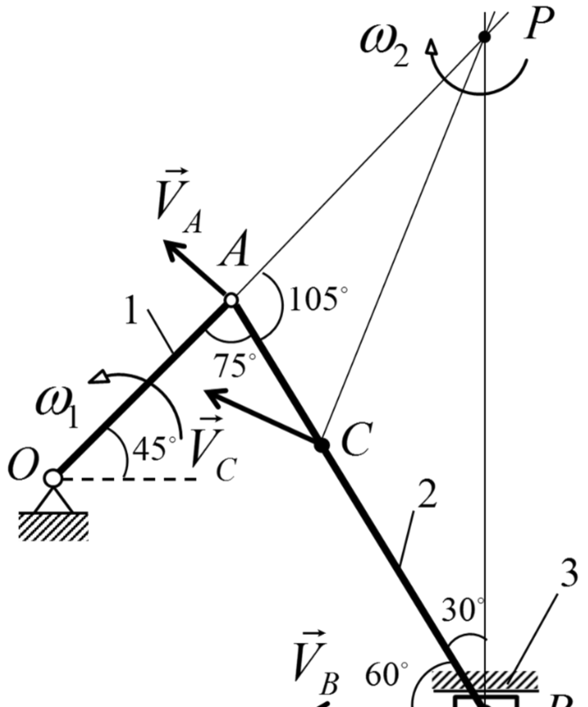


Рисунок 31 - Распределение скоростей в примере 2.2

Используя формулу (5) определяем угловую скорость звена 2

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP}.$$

Из треугольника APB определяем расстояние AP, используя теорему синусов:

$$\frac{AP}{\sin 30^\circ}=\frac{AB}{\sin 45^\circ}; \quad \Rightarrow \quad AP=\frac{AB\cdot\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{0{,}8\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=0{,}57\,м$$

$$\omega_2=\frac{V_A}{AP}=\frac{0{,}8}{0{,}57}=1{,}4\,рад/с$$

Скорость точки B: $V_B=\omega_2\cdot BP$

Расстояние BP определяем из треугольника APB, используя теорему синусов:

$$\frac{BP}{\sin 105^\circ}=\frac{AP}{\sin 30^\circ}; \quad \Rightarrow \quad BP=\frac{AP\cdot\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{0{,}57\cdot 0{,}96}{0{,}5}=1{,}09\,м$$

$$V_B=1{,}4\cdot 1{,}09=1{,}53\,м/с.$$

Вектор скорости $\vec{V}_B$ направлен по линии действия в сторону угловой скорости звена 2 ω_2.

Скорость точки C: $V_C=\omega_2\cdot CP$.

Расстояние CP определяем из треугольника APC, используя теорему косинусов:

$$CP^2=AP^2+AC^2-2AP\cdot AC\cdot\cos 105^\circ$$

$$CP=\sqrt{AP^2+AC^2-2AP\cdot AC\cdot\cos 105^\circ}=$$

$$=\sqrt{0{,}57^2+0{,}3^2-2\cdot 0{,}57\cdot 0{,}3\cdot(-0{,}96)}=0{,}862\ м$$

$$V_C=\omega_2\cdot CP=1{,}4\cdot 0{,}862=1{,}21\ м/с.$$

2.3 Контрольные вопросы по кинематике

1) Какое движение твердого тела называется поступательным?

2) Перечислить основные свойства поступательного движения твердого тела.

3) Каким уравнением задается вращение тела вокруг неподвижной оси?

4) Какие зависимости существуют между углом поворота, угловой скоростью и угловым ускорением тела?

5) Как определяется скорость точки тела, вращающего вокруг неподвижной оси?

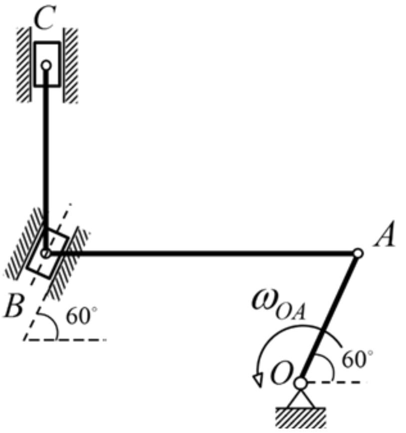
6) Во сколько раз скорость точки A вращающегося диска больше скорости его точки B, если расстояние точки A от оси вращения вдвое больше расстояния точки B?

7) Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным?

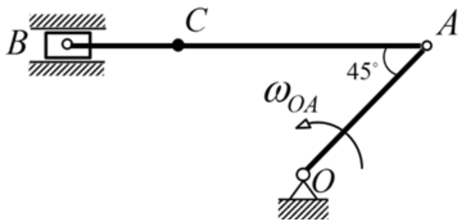
8) Что называется мгновенным центром скоростей плоской фигуры и как он определяется в различных случаях?

9) Каков закон распределения скоростей точек плоской фигуры относительно ее мгновенного центра скоростей?

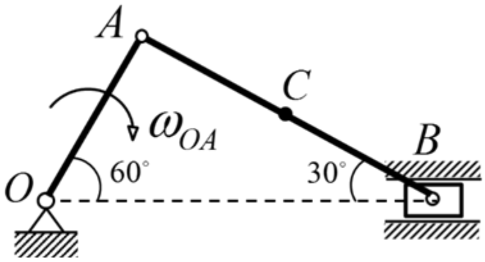
2.4 Варианты контрольной работы 2 по кинематике



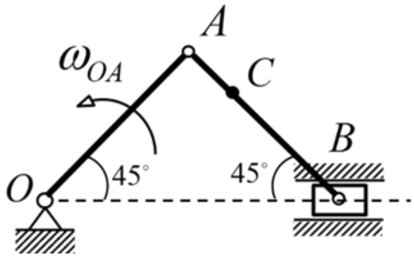
0



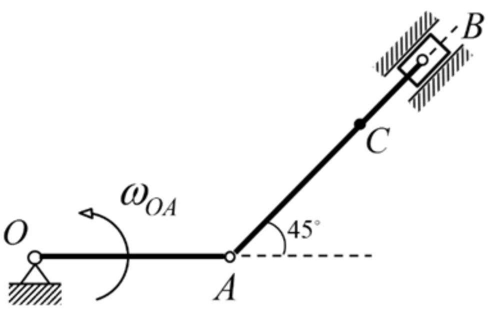
1



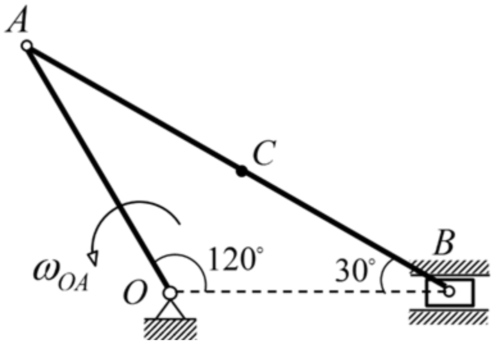
2



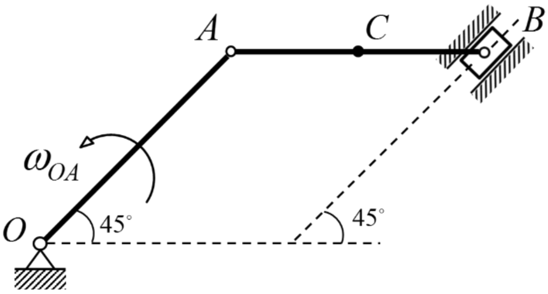
3



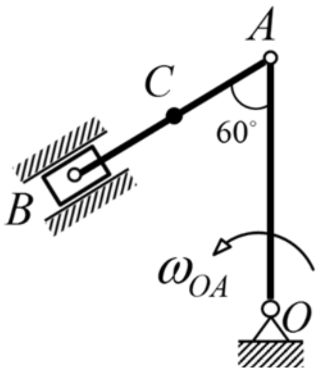
4



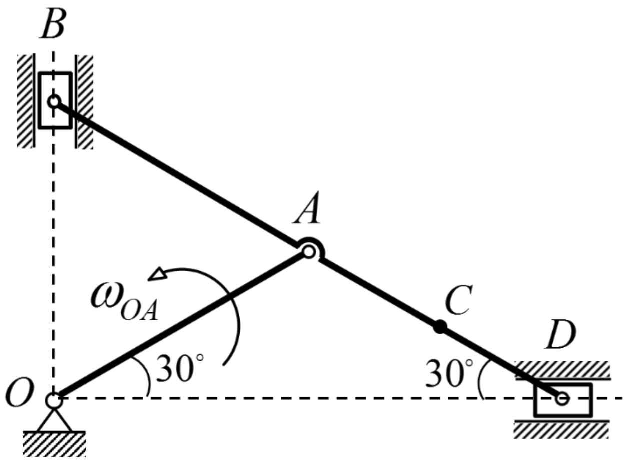
5



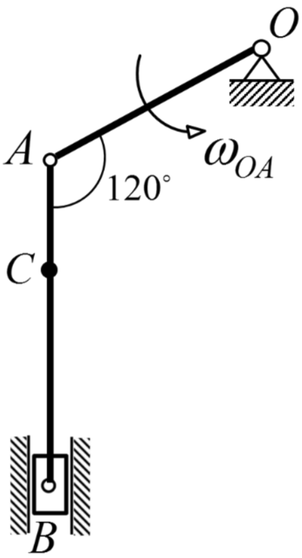
6



7



8



9

Номер варианта	*Исходные данные*
0	$AB = 4OA = 2BC = 40$ *см*, $\omega_{OA} = 4$ *рад/с*
1	$AB = 2OA = 20$ *см*, $AC = 15$ *см*, $\omega_{OA} = 4$ *рад/с*
2	$OA = 30$ *см*, $AC = CB$, $\omega_{OA} = 6$ *рад/с*
3	$AB = 20$ *см*, $AC = 6$ *см*, $\omega_{OA} = 4$ *рад/с*
4	$OA = AC = 25$ *см*, $AB = 40$ *см*, $\omega_{OA} = 4$ *рад/с*
5	$OA = 20$ *см*, $AC = CB$, $\omega_{OA} = 3$ *рад/с*
6	$OA = 25$ *см*, $AB = 2AC = 30$ *см*, $\omega_{OA} = 2$ *рад/с*
7	$AB = 2AC = 40$ *см*, $OA = 50$ *см*, $\omega_{OA} = 5$ *рад/с*
8	$OA = AB = 2AC = 10$ *см*, $\omega_{OA} = 3$ *рад/с*
9	$AB = 3AC = 30$ *см*, $OA = 20$ *см*, $\omega_{OA} = 8$ *рад/с*

2.5 Пример решения курсовой работы по кинематике (этап I)

Для заданного положения механизма требуется:

- установить вид движения каждого звена механизма;

- определить величину и построить вектор скорости точки А;

- найти положения мгновенных центров скоростей всех звеньев, совершающих плоскопараллельное движение;

- определить величины угловых скоростей звеньев 2, 3 и линейных скоростей точек B,C,D.

- построить векторы скоростей всех обозначенных на рисунке точек звеньев механизма.

Исходные данные:

$$\omega_{OA} = 2\ рад/с,\ OA = 0{,}4\ м,\ AB = 0{,}8\ м,\ AC = 0{,}3\ м,\ R = 0{,}1\ м$$

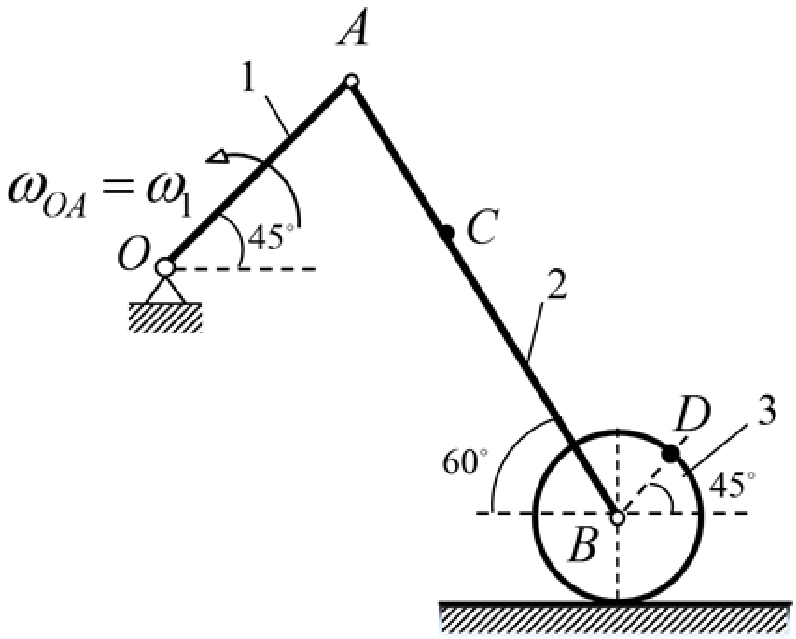


Рисунок 32 - Расчетная схема к примеру 2.5

Имеем трехзвенный механизм, где кривошип ОА обозначим номером 1, шатун АВ – номером 2, а каток – номером 3. Расчетная схема представлена на рисунке 32.

Тогда угловая скорость кривошипа $\omega_{OA} = \omega_1$, угловая скорость шатуна $\omega_{AB} = \omega_2$, а угловая скорость катка - ω_3.

Звено 1 совершает вращательное движение, звенья 2 и 3 – плоскопараллельное движение. Скорость точки А определяется по формуле (4):

$$V_A = \omega_1 \cdot OA = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8 \; м/с$$

Скорость $\bar{V}_A \perp OA$ и направлена в сторону угловой скорости.

Так как звено 2 совершает плоскопараллельное движение, то необходимо найти мгновенный центр скоростей для этого звена. Известны линии действия скоростей двух точек тела (точка В может двигаться только по горизонтали). Мгновенный центр скоростей (МЦС) P_2 находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек к линиям действия скоростей. Направление угловой скорости ω_2 показываем вокруг МЦС в сторону известного направления скорости точки А.

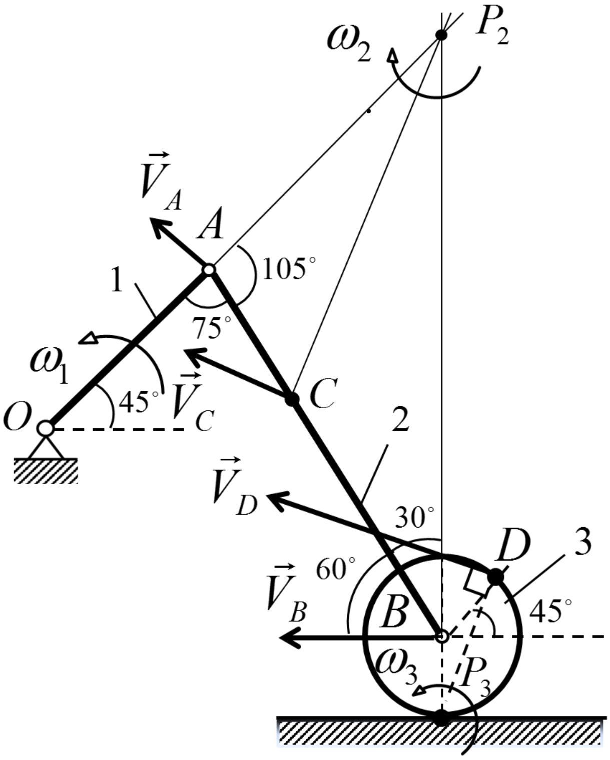


Рисунок 33 - Распределение скоростей в примере 2.5

Используя формулу (5) определяем угловую скорость звена 2

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_2}$$

Из треугольника AP_2B определяем расстояние AP_2, используя теорему синусов:

$$\frac{AP_2}{\sin 30^\circ}=\frac{AB}{\sin 45^\circ}; \quad \Rightarrow \quad AP_2=\frac{AB\cdot\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{0{,}8\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=0{,}57\,м$$

$$\omega_2=\frac{V_A}{AP_2}=\frac{0{,}8}{0{,}57}=1{,}4\,рад/с$$

Скорость точки В: $V_B=\omega_2\cdot BP_2$

Расстояние BP_2 определяем из треугольника AP_2B, используя теорему синусов: $\frac{BP_2}{\sin 105^\circ}=\frac{AP_2}{\sin 30^\circ}; \quad \Rightarrow \quad BP_2=\frac{0{,}57\cdot 0{,}96}{0{,}5}=1{,}09\,м$

$$V_B=1{,}4\cdot 1{,}09=1{,}53\,м/с.$$

Вектор скорости $\overline{V}_B \perp BP_2$ и направлен в сторону угловой скорости звена 2 .

Расстояние CP_2 определяем из треугольника AP_2C, используя теорему косинусов:

$$CP_2=\sqrt{AP_2{}^2+AC^2-2AP_2\cdot AC\cos 105^\circ}=$$
$$=\sqrt{0{,}57^2+0{,}3^2-2\cdot 0{,}57\cdot 0{,}3(-0{,}96)}=0{,}862\,м$$
$$V_C=\omega_2\cdot CP_2=1{,}4\cdot 0{,}862=1{,}21\,м/с.$$

Вектор скорости $\overline{V}_C \perp CP_2$ и направлен в сторону угловой скорости звена 2.

Определяем угловую скорость катка 3. Мгновенный центр скоростей P_3 находится в точке соприкосновения катка с неподвижной поверхностью.

Следовательно, $\omega_3=\frac{V_B}{BP_3}=\frac{V_B}{R}=\frac{1{,}53}{0{,}1}=15{,}3\,рад/с$.

Скорость точки D: $V_D = \omega_3 \cdot DP_3$.

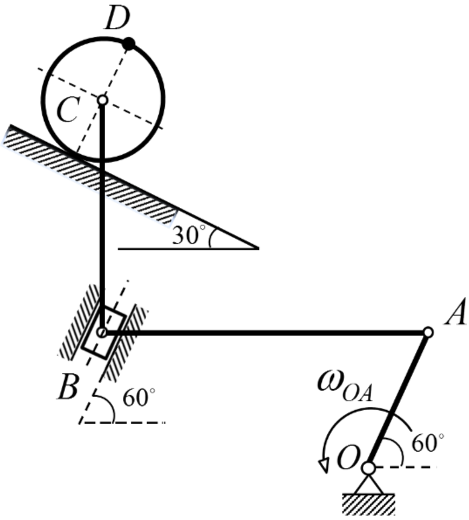
Расстояние DP_3 определяем по теореме косинусов из треугольника BP_3D:

$$DP_3 = \sqrt{BP_3{}^2 + BD^2 - 2BP_3 \cdot BD\cos 135^\circ} =$$
$$\sqrt{0{,}1^2 + 0{,}1^2 - 2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1(-0{,}7)} = 0{,}184\, м \qquad .$$

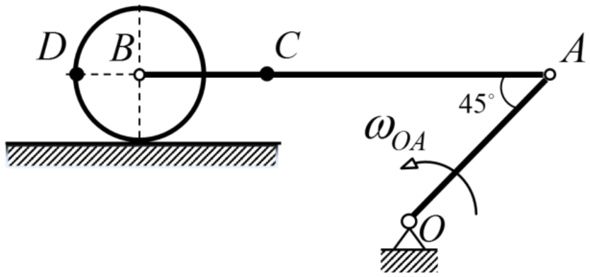
$$V_D = \omega_3 \cdot DP_3 = 15{,}3 \cdot 0{,}184 = 2{,}82\ м/с.$$

Вектор скорости $\overline{V}_D \perp DP_3$ и направлен в сторону угловой скорости катка.

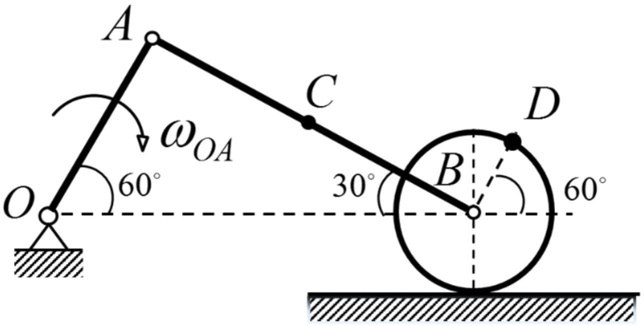
2.6 Варианты курсовой работы по кинематике (этап I)



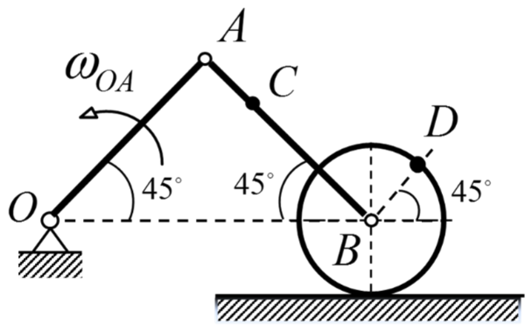
0



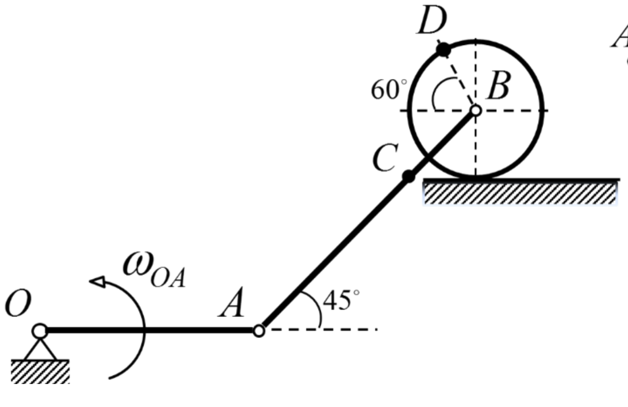
1



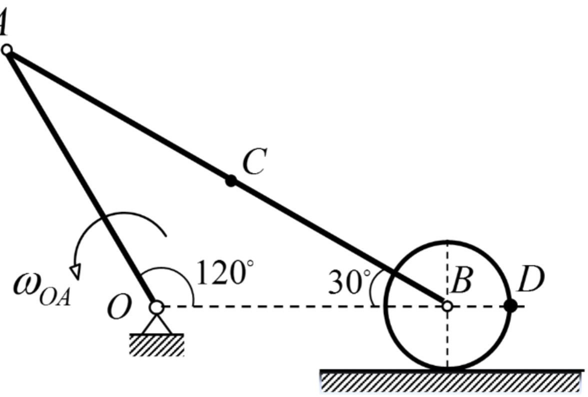
2



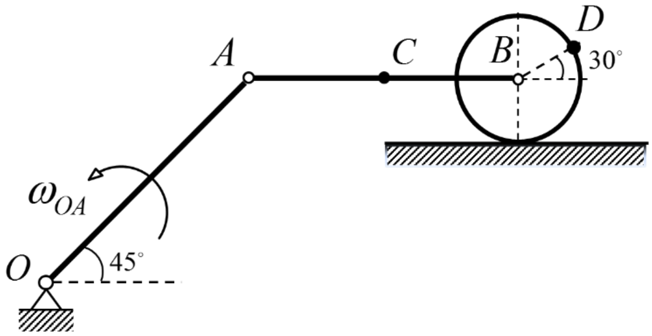
3



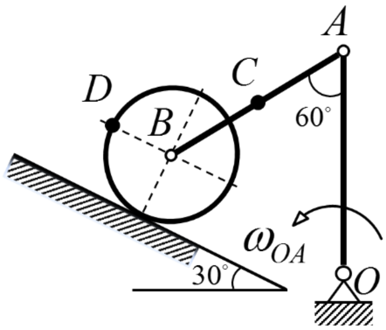
4



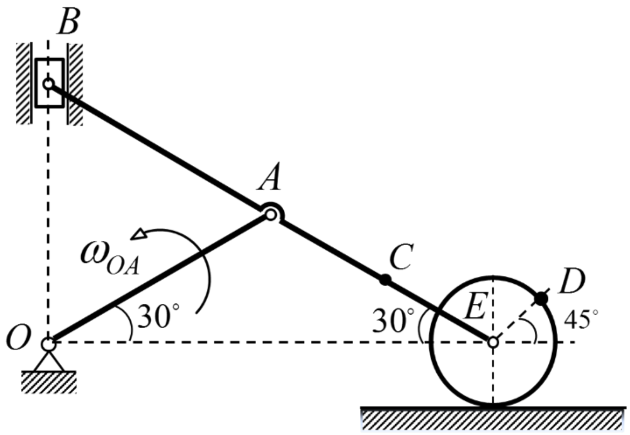
5



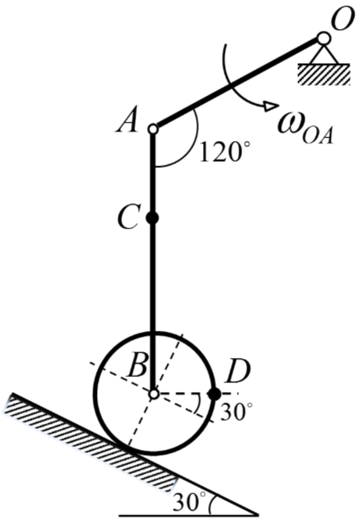
6



7



8



9

Номер варианта	Исходные данные
0	$AB = 4OA = 2BC = 40$ см, $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $R = 13$ см
1	$AB = 2OA = 20$ см, $AC = 15$ см, $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $R = 14$ см
2	$OA = 30$ см, $AC = CB$, $\omega_{OA} = 6$ рад/с, $R = 15$ см
3	$AB = 20$ см, $AC = 6$ см, $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $R = 10$ см
4	$OA = AC = 25$ см, $AB = 40$ см, $\omega_{OA} = 4$ рад/с, $R = 11$ см
5	$OA = 20$ см, $AC = CB$, $\omega_{OA} = 3$ рад/с, $R = 10$ см
6	$OA = 25$ см, $AB = 2AC = 30$ см, $\omega_{OA} = 2$ рад/с, $R = 8$ см
7	$AB = 2AC = 40$ см, $OA = 50$ см, $\omega_{OA} = 5$ рад/с, $R = 9$ см
8	$OA = AB = 2AC = 10$ см, $\omega_{OA} = 3$ рад/с, $R = 12$ см
9	$AB = 3AC = 30$ см, $OA = 20$ см, $\omega_{OA} = 8$ рад/с, $R = 16$ см

3 ДИНАМИКА

3.1 Краткие теоретические сведения

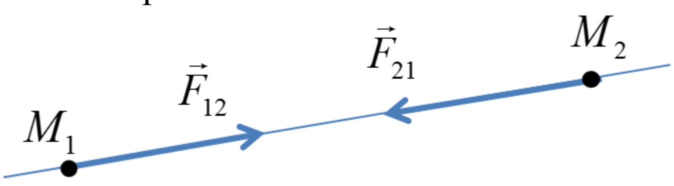
Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел и механических систем в зависимости от действующих на них сил. В основе динамики лежат законы, сформулированные И. Ньютоном в 1687 году.

Первый закон (закон инерции): изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить состояние.

Второй закон (основной закон динамики): произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы. Математическое выражение этого закона:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия): две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Если на точку действуют одновременно несколько сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ то, как известно, их совокупность можно заменить одной равнодействующей силой, равной их векторной сумме и приложенной к этой же материальной точке:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

В этом случае основное уравнение динамики точки принимает вид:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

Для решения задач динамики точки необходимо выбрать систему координат и записать уравнение в проекциях на оси этой системы координат.

Движение точки в неподвижной системе декартовых прямоугольных координат $Oxyz$

$$ma_x = \sum F_{ix}$$
$$ma_y = \sum F_{iy}$$
$$ma_z = \sum F_{iz}$$

Учитывая известные из кинематики точки выражения проекций ее ускорения

$$a_x = \ddot{x}\,, a_y = \ddot{y}\,, a_z = \ddot{z}\,,$$

получаем уравнения

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix}$$
$$m\ddot{y} = \sum F_{iy}$$
$$m\ddot{z} = \sum F_{iz}$$

Эти уравнения называются дифференциальными уравнениями движения точки, которые образуют систему уравнений.

В ряде практических задач динамики вместо интегрирования системы дифференциальных уравнений достаточно воспользоваться так называемыми основными теоремами динамики. Одной из таких теорем является теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

Кинетической энергией материальной точки называют величину:

$$T = \frac{mV^2}{2} \tag{1}$$

Теорема об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$\frac{mV_K{}^2}{2} - \frac{mV_0{}^2}{2} = \sum A_i\,,$$

где V_K и V_0 - конечная и начальная скорости точки,

A_i - работа силы F_i .

Теорема об изменении кинетической энергии позволяет рассматривать движение с энергетической точки зрения. Ее применение целесообразно в тех случаях, когда удается подсчитать работу, свершенную силами, приложенными к материальной точке.

Вычисление работы в некоторых частных случаях

Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении:

$$A(\vec{F}) = F \cdot S \cdot \cos(\widehat{\vec{F},\vec{V}}). \tag{2}$$

Работа силы трения:

$$A\left(\vec{F}_{тр}\right) = F_{тр} S \cos 180^0 = -F_{тр} S. \tag{3}$$

Работа силы тяготения:

$$A(\vec{G}) = \pm Gh = \pm mgh, \tag{4}$$

где h — разность высот начального и конечного положений точки.

Работа силы тяжести точки равна произведению веса точки на величину вертикального перемещения и не зависит от формы траектории, а зависит только от крайних ее положений.

Работа силы упругости: $$A = \pm \frac{c\lambda^2}{2}, \tag{5}$$

где c — коэффициент жесткости пружины;

λ — деформация пружины.

Работа линейной силы упругости не зависит от формы перемещения. Работа отрицательна, если пружина переходит из естественного состояния в деформированное, и работа положительна, если пружина переходит из деформированного состояния в естественное.

Механической системой материальных точек называется совокупность материальных точек, каким-то образом связанных между собой. Всякое твердое тело можно считать неизменяемой механической системой материальных точек.

Силы взаимодействия точек данной системы называются ***внутренними***, а силы, с которыми действуют на данную систему другие точки, не входящие в эту систему- ***внешними***.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T_K - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^I, \tag{6}$$

где T_0 и T_K - кинетическая энергия системы в начальном и конечном положении;

$\sum A_i^E$ и $\sum A_i^I$ — суммы работ всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе на перемещении системы.

В этой теореме внутренние силы не исключаются в общем случае, но для рассматриваемых неизменяемых систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями, сумма работ всех внутренних сил равна нулю $\sum A_i^I = 0$.

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех точек системы
$$T = \sum T_i \ . \tag{7}$$

Кинетическая энергия поступательного движения твердого тела выражается так же как и для материальной точки:
$$T = \frac{mV^2}{2} \ . \tag{8}$$

Во вращательном движении такую же роль, какую масса играет в поступательном движении, играет ***момент инерции тела***, который является мерой инертности вращающегося тела.

Момент инерции тонкого однородного сплошного диска, а также сплошного кругового цилиндра радиуса R и массой m относительно оси Z вычисляется по формуле
$$I_z = \frac{mR^2}{2} . \tag{9}$$

Для неоднородных тел момент инерции определяется по формуле
$$I_z = mi_z^2 \ , \tag{10}$$

где i_z — радиус инерции тела относительно оси Z.

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, вычисляется по формуле:
$$T = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2} \ . \tag{11}$$

Кинетическая энергия тела, совершающего плоскопараллельное движение, определяется по формуле:
$$T = \frac{MV_c^2}{2} + \frac{I_{z_c} \cdot \omega^2}{2} \ , \tag{12}$$

где I_{z_c} — скорость центра масс тела;

V_c — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела.

Работа момента пары сил определяется по формуле

$$A = \pm M \cdot \varphi \ , \tag{13}$$

где φ — угол поворота тела. Если направление угла поворота и приложенного момента совпадают, то работа положительная, если направления противоположные - отрицательная. Работа момента сопротивления M_c всегда отрицательна.

Соотношения между перемещениями находятся в такой же зависимости как и соотношения между скоростями.

Ниже в разделе 3.3 приведены варианты заданий и исходные данные к контрольной работе №3. Механическая система приходит в движение из состояния покоя. Определить скорость тела 1, когда оно опустится вниз на расстояние S=2м.

Ниже в разделе 3.6 приведены варианты заданий и исходные данные для этапа №2 курсовой работы.

Механическая система приходит в движение из состояния покоя. В вариантах 1, 3, 5, 8, 9 к телу 1 приложен вращательный момент $M_{вр}$ и момент сопротивления M_C. Для тела 3 учитываем трение скольжения. Определить скорость тела 3, когда оно поднимется по наклонной плоскости на расстояние S=2м.

В вариантах 0, 2, 4, 6, 7 к телу 2 приложен момент сопротивления M_C.

Для тела 1 учитывать трение скольжения. Определить скорость тела 1, когда оно опустится вниз на расстояние S=2м.

Во всех вариантах пренебрегаем трением качения.

В задании приняты следующие обозначения:

m_1, m_2, m_3 - массы тел 1,2,3;

$R_1, r_1, R_2, r_2, R_3, r_3$ - радиусы больших и малых окружностей;

i_1, i_2, i_3 - радиусы инерции тел относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести;

α, β - углы наклона плоскостей к горизонту;

f - коэффициент трения скольжения.

3.2 Пример решения контрольной работы 3 по динамике

Определить скорость груза 1, когда он опустится вниз из состояния покоя на расстояние S=1м. Схема механической системы представлена на рисунке 34. Нити считать невесомыми и нерастяжимыми.

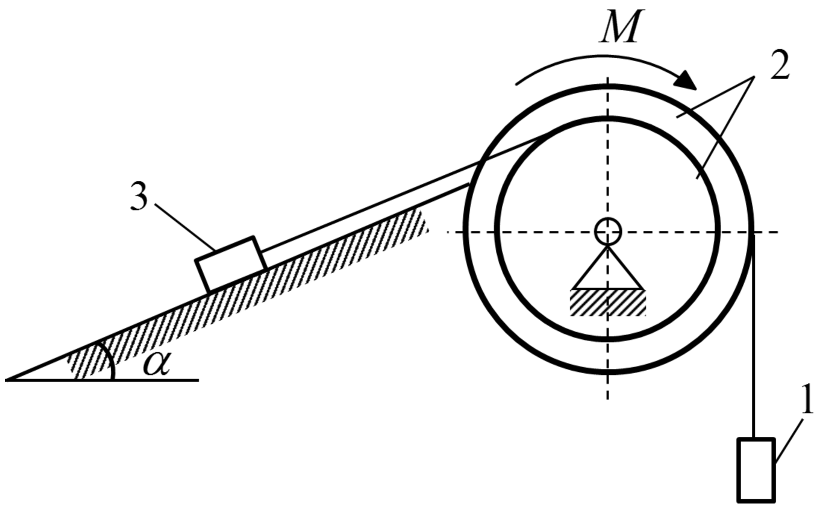


Рисунок 34 – схема к примеру 3.2

Исходные данные:

$$m_1 = 80\,кг;\ m_2 = 20\ кг;\ m_3 = 20\,кг;\ R_2 = 65\,см;\ r_2 = 20\,см;$$
$$i_2 = 20\,см;\ M = 50\,H\cdot м;\ f = 0{,}15;\ \alpha = 30^\circ;\ S = 1\,м.$$

РЕШЕНИЕ.

Данная механическая система состоит из трех тел: груза 1, блока 2 и груза 3.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической энергии (6)

$$T - T_0 = \sum_i A_i^E + \sum_i A_i^I$$

В начальном положении система находится в покое т.е. $T_0 = 0$.

Для рассматриваемой системы, состоящей из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями $\sum_i A_i^I = 0$.

Кинетическая энергия в конечном положении определяется как сумма кинетических энергий тел 1, 2 и 3, используя (7)

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно (8)

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела 2, совершающего вращательное движение, равна (11)

$$T_2 = \frac{I_2\omega_2^2}{2} \ ,$$

где момент инерции (10) $I_2 = m_2 i_2^2$.

Кинетическая энергия груза 3, движущегося поступательно, равна

$$T_3 = \frac{m_3 V_3^2}{2} \ .$$

Напишем кинематические соотношения между скоростями и перемещениями точек системы, т.е. уравнения связей, при этом скорости и перемещения выразим соответственно через скорость V_1 и перемещение S_1 груза 1. Подчеркнем, что линейные и угловые перемещения находятся в такой же зависимости, как соответствующие линейные и угловые скорости, показанные на рисунке 35.

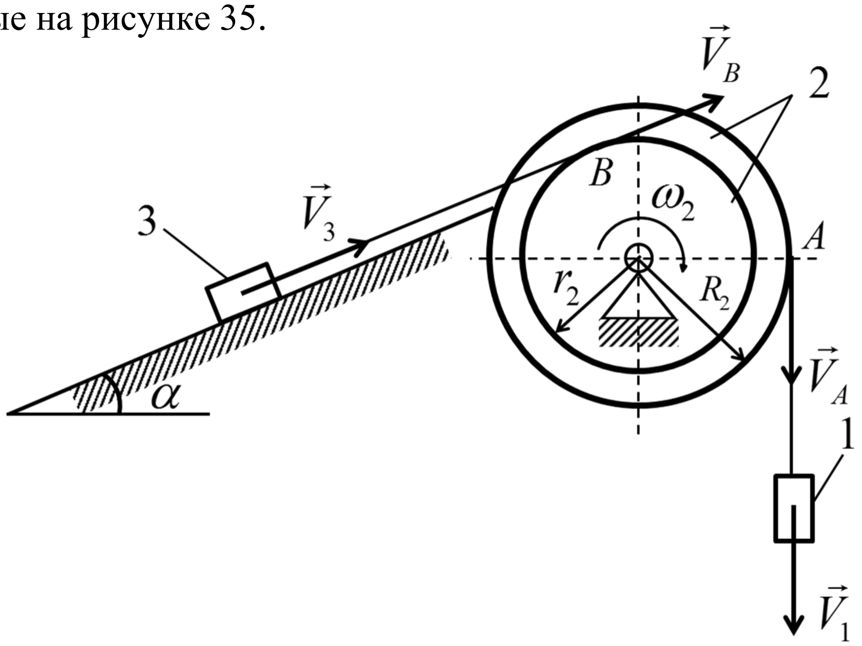


Рисунок 35 – Кинематическая схема

$$V_A = V_1 \ ; \quad \omega_2 = \frac{V_A}{R_2} = \frac{V_1}{R_2}; \quad \varphi_2 = \frac{S}{R_2}.$$

$$V_B = \omega_2 r_2 = \frac{V_1 r_2}{R_2} = V_3; \quad S_3 = \frac{S_1 r_2}{R_2}$$

Подставив эти скорости в выражения кинетических энергий, получим

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 i_2^2 V_1^2}{2R_2^2} + \frac{m_3 V_1^2 r_2^2}{2R_2^2} = \frac{V_1^2}{2}(m_1 + \frac{m_2 i_2^2}{R_2^2} + \frac{m_3 r_2^2}{R_2^2}).$$

Обозначим выражение в скобках через $M_{пр}$ (приведенная масса), т.е.

$$T = \frac{MпрV_1^2}{2}$$

Составим выражение работ всех внешних сил, действующих на механическую систему. Внешние силы представлены на рисунке 36.

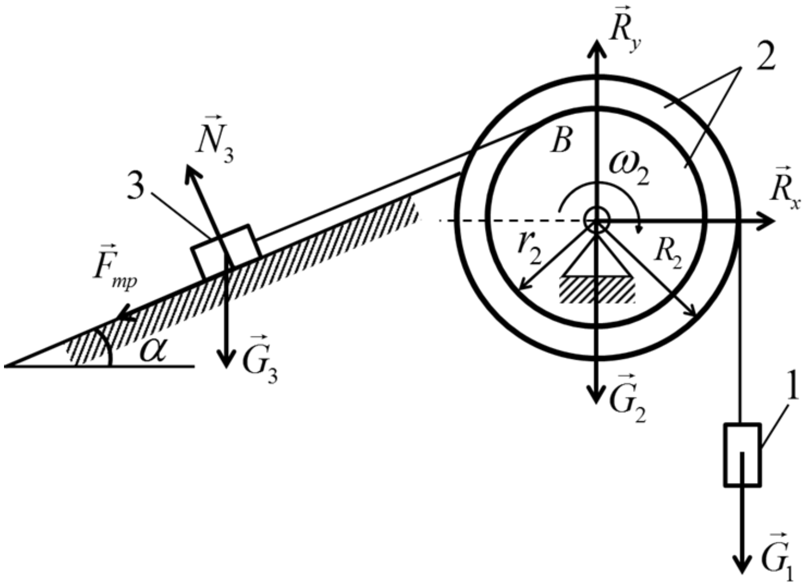


Рисунок 36 – Силовая схема

Работа реакций неподвижного шарнира $\bar{R}_x$ и $\bar{R}_y$ равны нулю, так как они приложены к неподвижной точке. Реакция $\bar{N}_3 \perp \bar{V}_3$ и , следовательно, работа $A(\bar{N}_3) = 0$.

$$A(\bar{G}_1) = m_1 g S_1$$

$$A(\bar{G}_3) = -m_3 g \sin\alpha S_3$$

$$A(\bar{F}_{тр}) = -F_{тр} S_3 = -fm_3 g \cos\alpha S_3$$

$$A(M) = M\varphi_3 = M\,\frac{S_1}{R_2}$$

$$\sum_i A_i^E = m_1 g S_1 - m_3 g \sin\alpha\,\frac{S_1 r_2}{R_2} - fm_3 g \cos\alpha\,\frac{S_1 r_2}{R_2} + M\,\frac{S_1}{R_2} =$$

$$S_1(m_1 g - m_3 g \sin\alpha\,\frac{r_2}{R_2} - \frac{fm_3 g \cos\alpha\, r_2}{R_2} + \frac{M}{R_2}).$$

Выражение в скобках обозначим $F_{пр}$ (приведенная сила), тогда

$$\sum_i A_i^E = S \cdot F_{пр}$$

Согласно теореме (6), имеем

$$\frac{M_{np}V_1^2}{2} = F_{np}S_1$$

Окончательно, получаем

$$V_1 = \sqrt{\frac{2F_{np}S_1}{M_{np}}}$$

Подставляем численные значения:

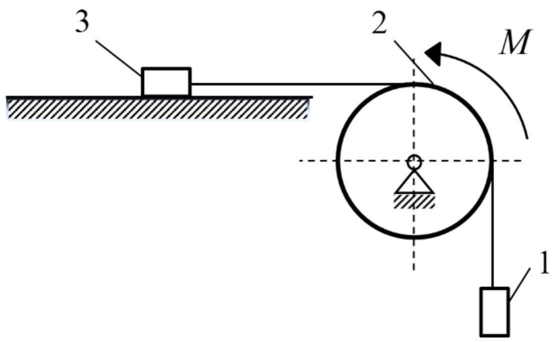
$$M_{np} = 80 + \frac{20\cdot 0,2^2}{0.65^2} + \frac{20\cdot 0.2^2}{0,65^2} = 80 + 18,93 + 18,93 = 117,87\ кг$$

$$F_{np} = 80\cdot 9,8 - 20\cdot 9,8\cdot 0,5\cdot \frac{0,2}{0,65}$$

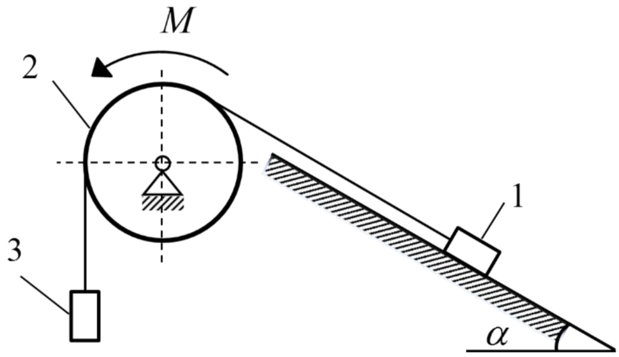
$$-0,15\cdot 20\cdot 9,8\cdot 0,86\cdot \frac{0,2}{0,65} + \frac{50}{0,65} = 822,99\ H$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\cdot 822,99\cdot 1}{117,87}} = 3,74\ м/с$$

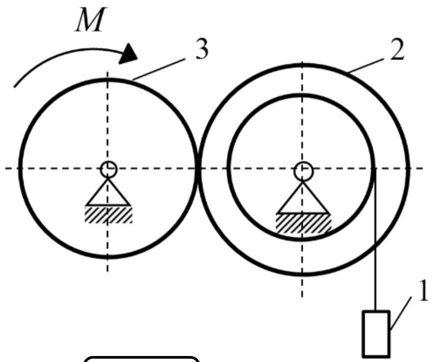
3.3 Варианты расчетных моделей и исходные данные для контрольной работы 3



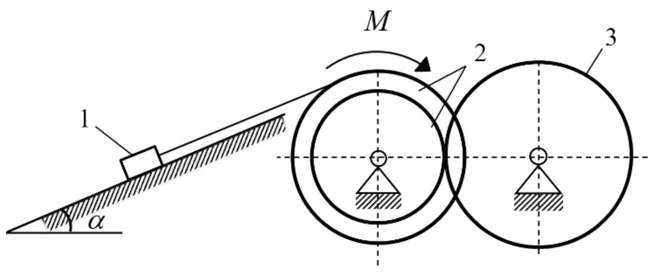
0



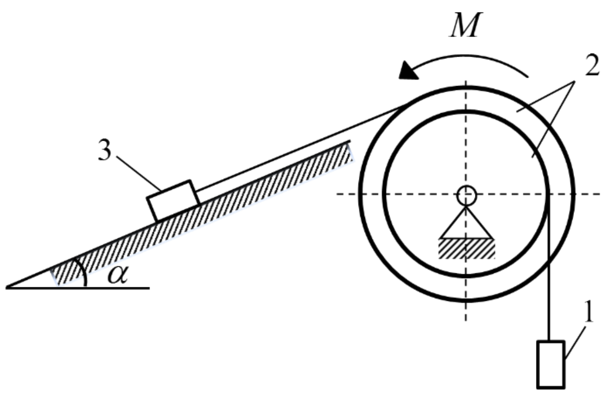
1



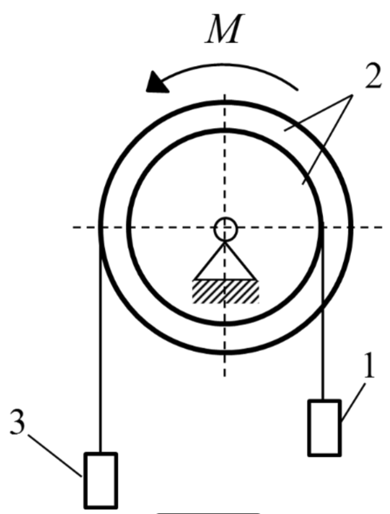
2



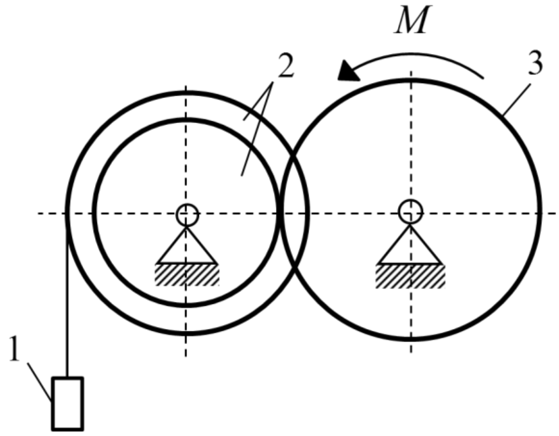
3

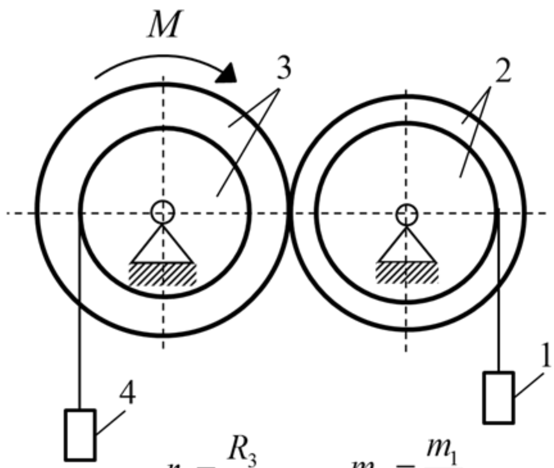


4



5

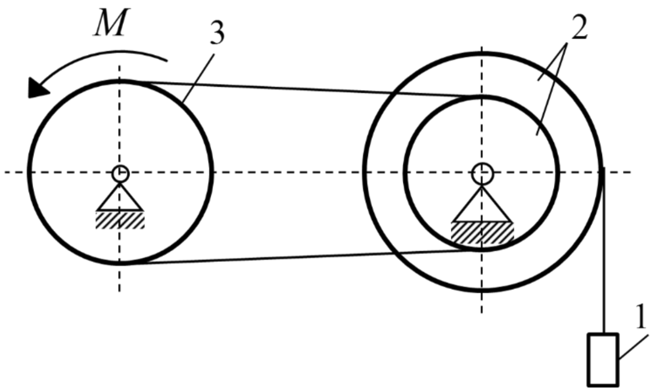


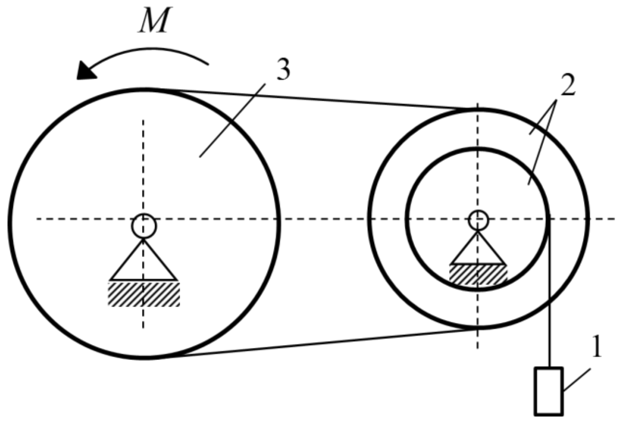


$r_3 = \dfrac{R_3}{2}$ $\qquad m_4 = \dfrac{m_1}{5}$

6

7





8

9

Исходные данные

№ вар.	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	R_2, см	R_3, см	r_2, см	f	α°	M, Н·м
0	40	10	40	45	-	-	0,12	-	70
1	80	40	20	50	-	-	0,15	30	40
2	45	35	40	55	75	35	-	-	120
3	20	8	15	60	70	40	0,10	-	60
4	100	20	20	55	65	20	0,25	20	50
5	145	20	15	40	-	15	-	-	90
6	20	30	50	50	85	25	-	-	80
7	85	30	70	45	50	30	-	-	100
8	40	20	100	60	40	40	-	-	70
9	55	32	30	40	55	20	-	-	100

3.4 Пример выполнения этапа 2 курсовой работы

Механическая система, состоящая из трех тел 1,2 и 3 под действием сил тяжести и вращающего момента в соответствии с рисунком 37 приходит в движение из состояния покоя.

Определить скорость тела 1 V_1, когда оно опустится вниз по наклонной плоскости на расстояние $S = 2м$.

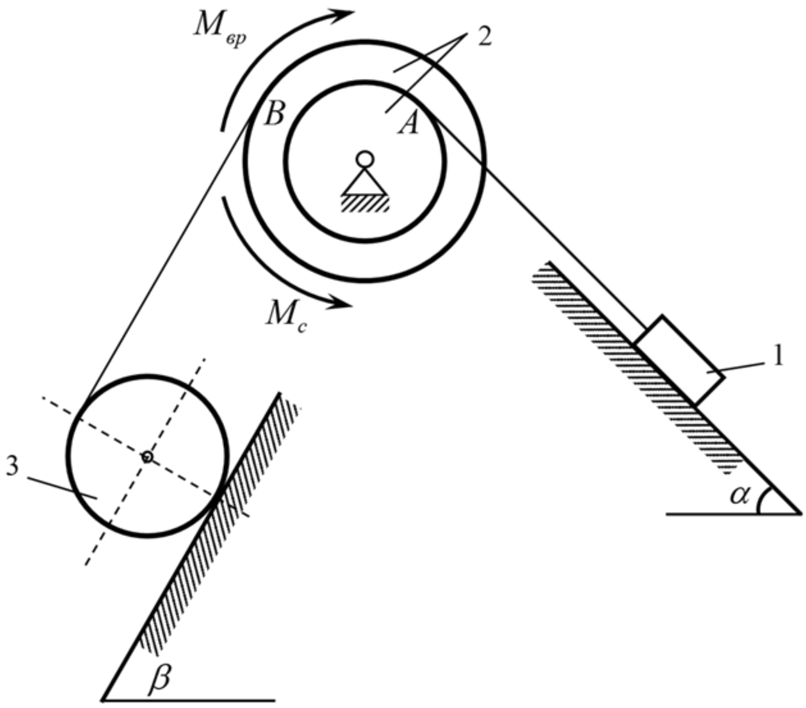


Рисунок 37- Схема примера 3.4

Исходные данные:

$$m_1 = 800\,кг;\ m_2 = 30\,кг;\ m_3 = 20\,кг;\ r_2 = 20\,см;\ R_2 = 30\,см;\ R_3 = 20\,см;$$
$$i_2 = 25\,см;\ \ \alpha = 45^\circ;\ \beta = 60^\circ;\ f = 0{,}2;\ M_c = 50\,Н\cdot м; M_{вр} = 100\,Н\cdot м.$$

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической энергии (6).

При перемещении системы из одного положения в другое изменение ее кинетической энергии равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на эту систему.

Для рассматриваемых неизменяемых систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями $\sum A_i^I = 0$.

Так как в начальном положении система находится в покое, то $T_0 = 0$.

Кинетическая энергия системы в конечном положении определяется как сумма кинетических энергий тел 1, 2, 3.

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно по (8)

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела 2, совершающего вращательное движение,

согласно (11) $$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2},$$

а кинетическая энергия катка 3, совершающего плоское движение, согласно

формуле (12) $$T_3 = \frac{m_3 V_{C3}^2}{2} + \frac{I_3 \omega_3^2}{2},$$

где I_2 и I_3 - моменты инерции относительно своих осей вращения

согласно (9 и 10):

$$I_2 = m_2 i_2^2, \quad I_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}.$$

На рисунке 38 показаны скорости (линейные и угловые) и все внешние силы, приложенные к механической системе.

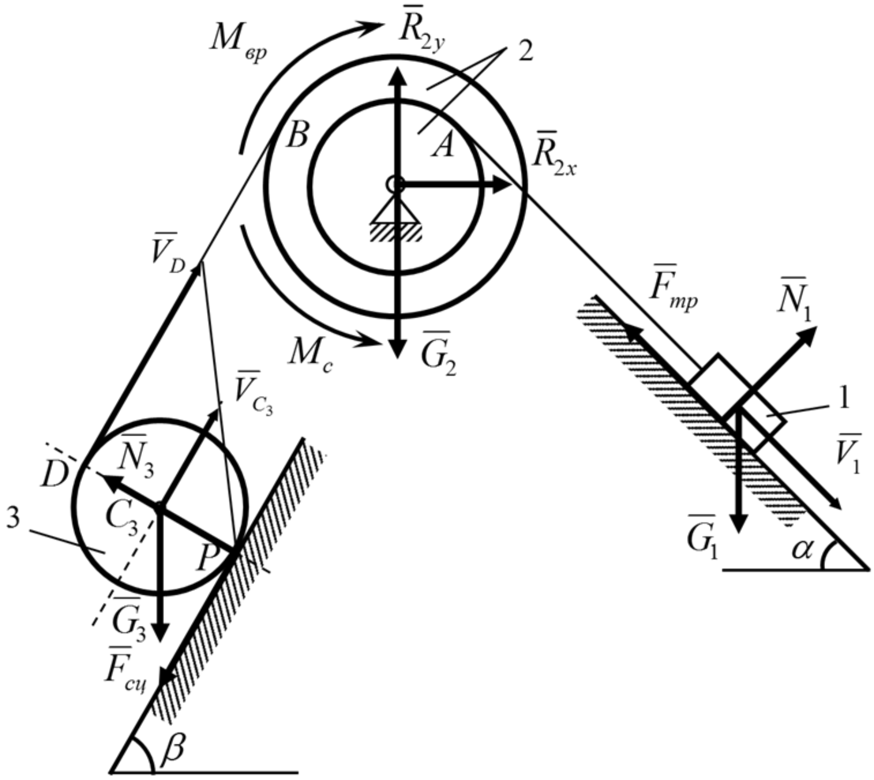


Рисунок 38 - Расчетная схема примера 3.4

Выразим $\omega_2, \omega_3, V_{C3}$ через скорость V_1. Для точки ***A*** имеем

$$V_A = \omega_2 r_2 = V_1 \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{V_1}{r_2}.$$

Для точки В имеем $V_B = \omega_2 R_2 = \dfrac{V_1 R_2}{r_2}$.

Мгновенный центр скоростей находится в точке касания катка с наклонной плоскостью Р. Следовательно, $V_D = \omega_3 DP = \omega_3 2R_3$

Так как $V_B = V_D \quad \Rightarrow \omega_3 = \dfrac{V_1 R_2}{2r_2 R_3}$.

Скорость центра масс тела 3 равна $V_{C3} = \omega_3 C_3 P = \omega_3 R_3 = \dfrac{V_1 R_2}{2r_2}$.

Подставив значения скоростей в выражения кинетических энергий, получим кинетическую энергию системы в конечный момент времени.

$$T=\frac{V_1^2}{2}(m_1+\frac{m_2 i_2^2}{r_2^2}+\frac{m_3 R_2^2}{4r_2^2}+\frac{m_3 R_2^2}{8r_2^2})=\frac{V_1^2}{2}(m_1+\frac{m_2 i_2^2}{r_2^2}+3\frac{m_3 R_2^2}{8r_2^2}).$$

Обозначив выражение, стоящее в скобках, через $M_{пр}$ (приведенная масса), выражение кинетической энергии имеет вид

$$T=\frac{M_{пр}V_1^2}{2}.$$

Подставляя численные данные, получим $M_{пр}=863{,}8\ кг$.

Для вычисления работ покажем на рисунке 38 все внешние силы, действующие на тела механической системы: $\overline{G}_1,\overline{G}_2,\overline{G}_3$ - силы тяжести; $\overline{N}_1,\overline{N}_3$ - нормальные реакции наклонных поверхностей; $\overline{R}_{2x},\overline{R}_{2y}$ - составляющие реакции шарнира; $F_{тр}$ - сила трения скольжения; $F_{сц}$ - сила сцепления катка 3; M_C - момент сопротивления; $M_{вр}$ - вращающий момент.

Работы внешних сил, приложенных к телу 1, на заданном перемещении S

$$A(\overline{G}_1)=m_1 gS\sin\alpha;\quad A(\overline{F}_{тр})=-m_1 gf\cos\alpha S;\quad A(\overline{N}_1)=0.$$

Работа силы сцепления равна нулю, так как сила сцепления приложена в точке МЦС.

Силы $\overline{R}_{2x},\overline{R}_{2y}$ и $\overline{G}_2$ приложены в неподвижных точках, следовательно, работы этих сил равны нулю. Работа силы сцепления при качении катка равна нулю, так как приложена в мгновенном центре скоростей.

$$A(M_C)=-M_C\varphi_2; A(M_{вр})=M_{вр}\varphi_2;\ A(\overline{G}_1)=-m_3 gS_{C3}\sin\beta.$$

Приняв S за независимое перемещение, выразим через него остальные перемещения. Так как в равенствах, выражающих связи между скоростями, все коэффициенты являются постоянными величинами, то перемещения будут находиться в такой же зависимости, как и соответствующие скорости:

$$\varphi_2=\frac{S}{r_2}; S_{C3}=\frac{SR_2}{2r_2}.$$

Подставляя выражения перемещений и суммируя работы, получим:

$$\sum_i A_i^E = S_1(m_1 g \sin\alpha - f m_1 g \cos\alpha - \frac{M_C}{r_2} + \frac{M_{вр}}{r_2} - \frac{m_3 g R_2 \sin\alpha}{2r_2})$$

Обозначив множитель при S_1 через $F_{пр}$ (приведенная сила), получим:

$$\sum_i A_i^E = F_{пр} \cdot S$$

Подставляя численные данные, получим $F_{пр} = 4511{,}2\ Н$.

Приравнивая кинетическую энергию системы и сумму работ внешних сил, получаем выражение для скорости тела 1

$$V_1 = \sqrt{\frac{2F_{пр}S}{M_{пр}}}$$

Подставляя числовые значения, получим скорость тела 1:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 4511{,}2 \cdot 2}{863{,}8}} = 4{,}57\ м/с.$$

3.5 Контрольные вопросы по динамике

1. Чему равна кинетическая энергия материальной точки?

2. Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении?

3. Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела при вращательном движении?

4. Как вычисляется кинетическая энергия твердого тела в плоскопараллельном движении?

5. Как подсчитать кинетическую энергию механической системы?

6. Чему равна работа постоянной силы на прямолинейном перемещении?

7. Как определяется работа силы тяжести?

8. Когда работа силы тяжести равна нулю?

9. Чему равна работа силы трения?

7. Как определяется работа силы упругости?

8. Как определяется работа пары сил, приложенной к вращающемуся телу?

9. В каких механических системах сумма работ внутренних сил равна нулю?

10. При каком движении твердого тела по шероховатой поверхности силы трения скольжения не совершают работу.

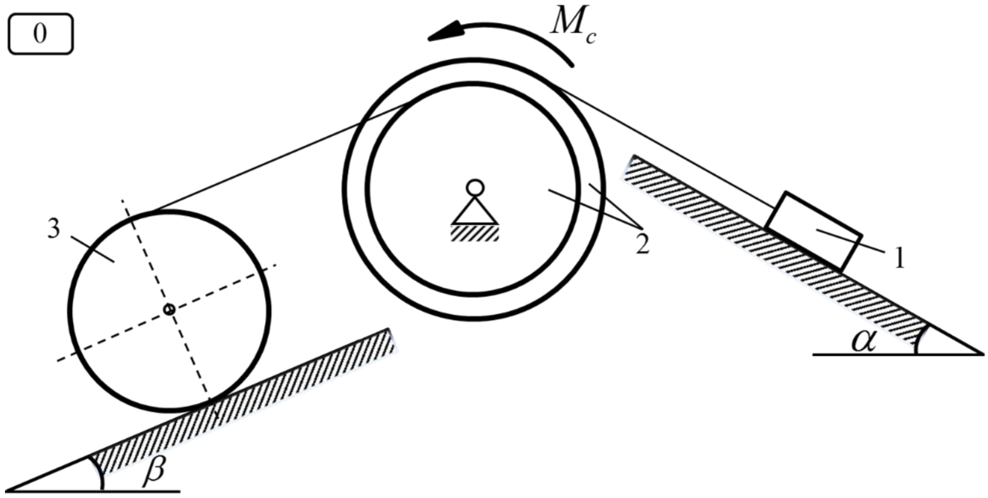
11. Какова размерность силы в системе СИ?

12. Какова размерность кинетической энергии в системе СИ?

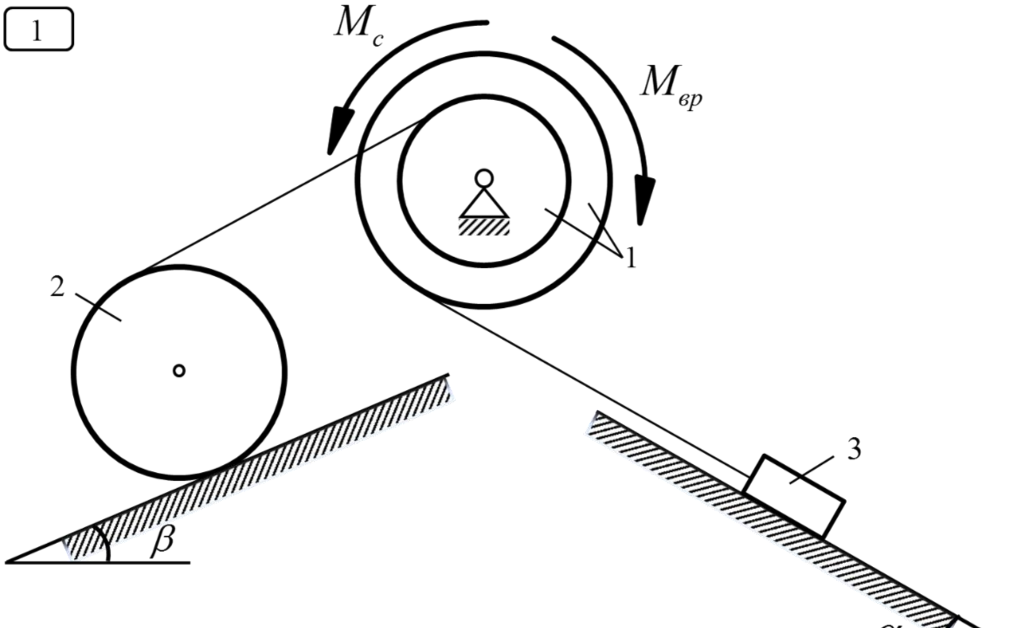
13. В каких единицах выражается работа в системе СИ?

3.6 Варианты расчетных моделей и исходные данные для курсовой работы (этап II)

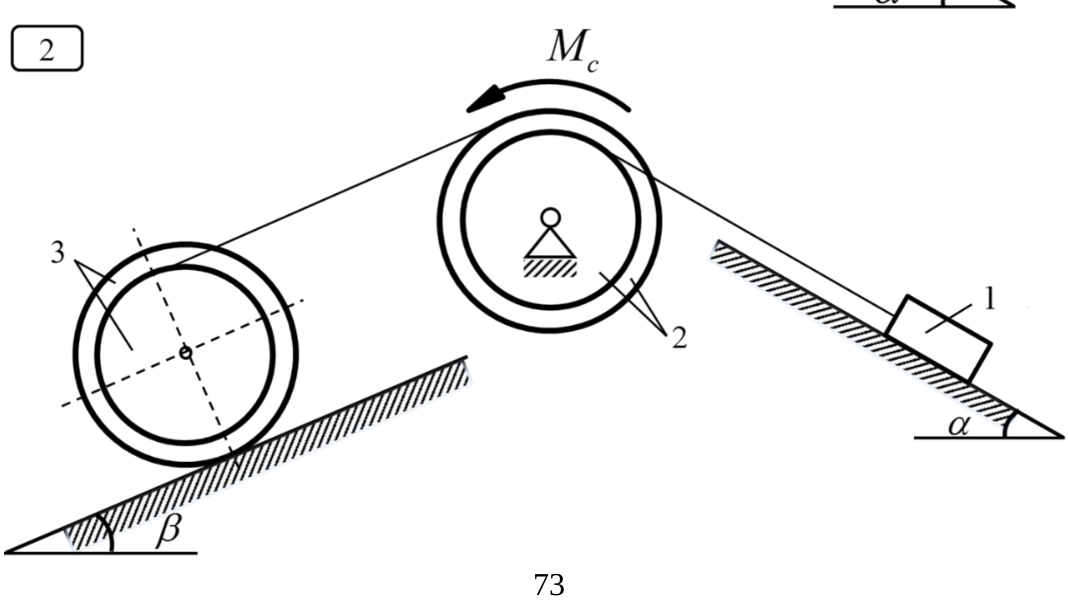
0



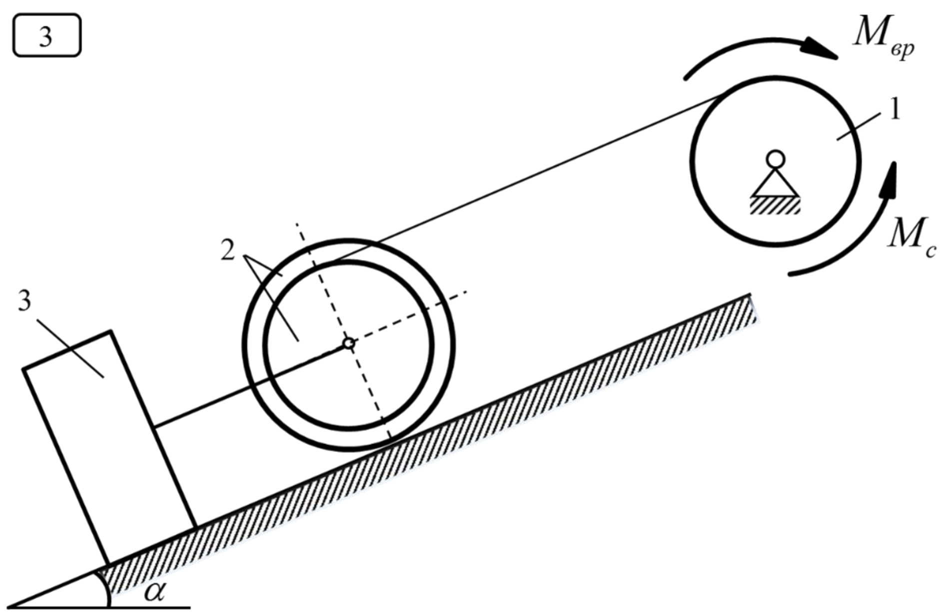
1



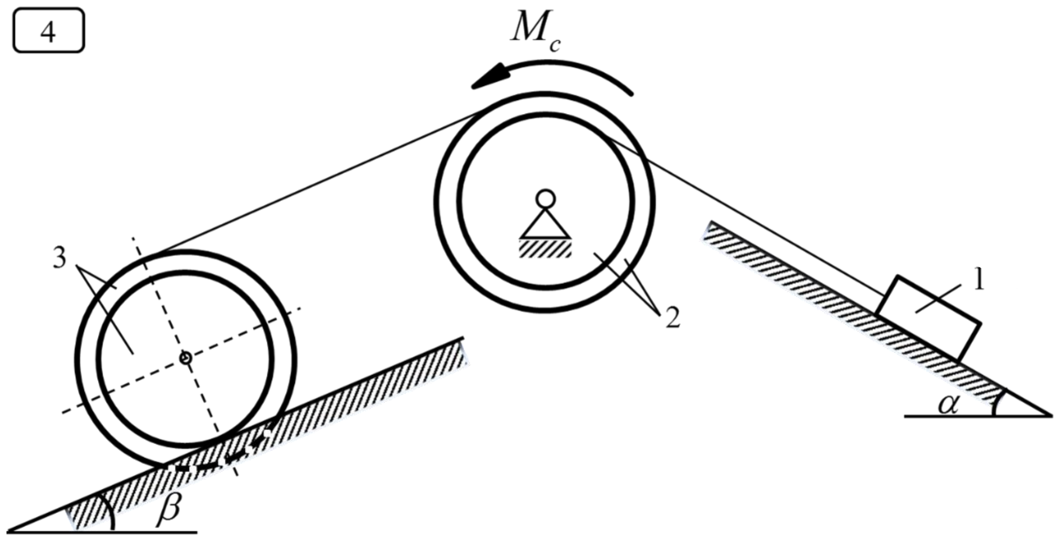
2



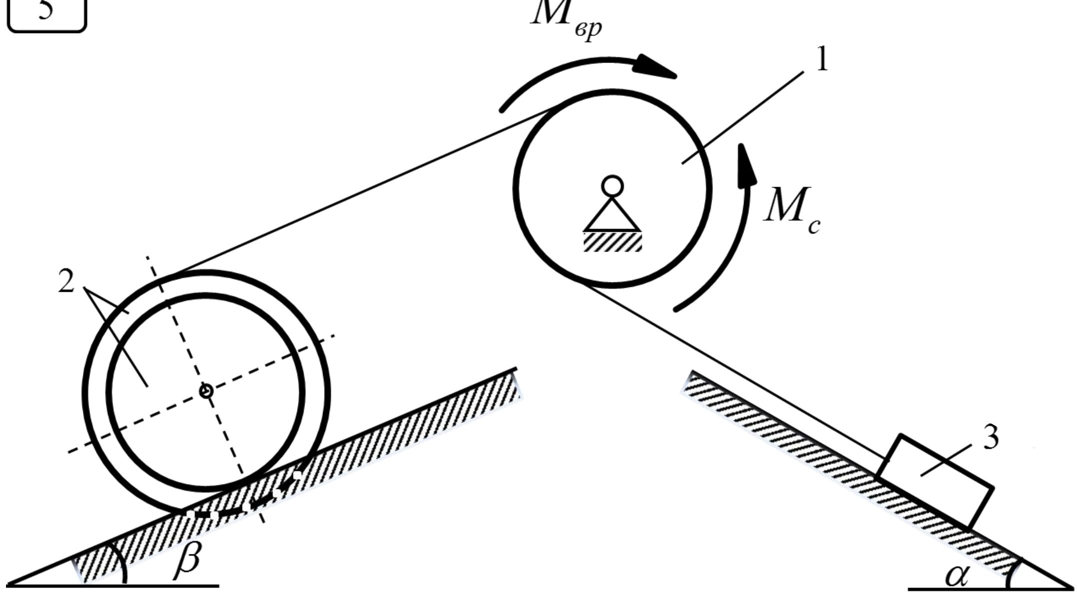
3



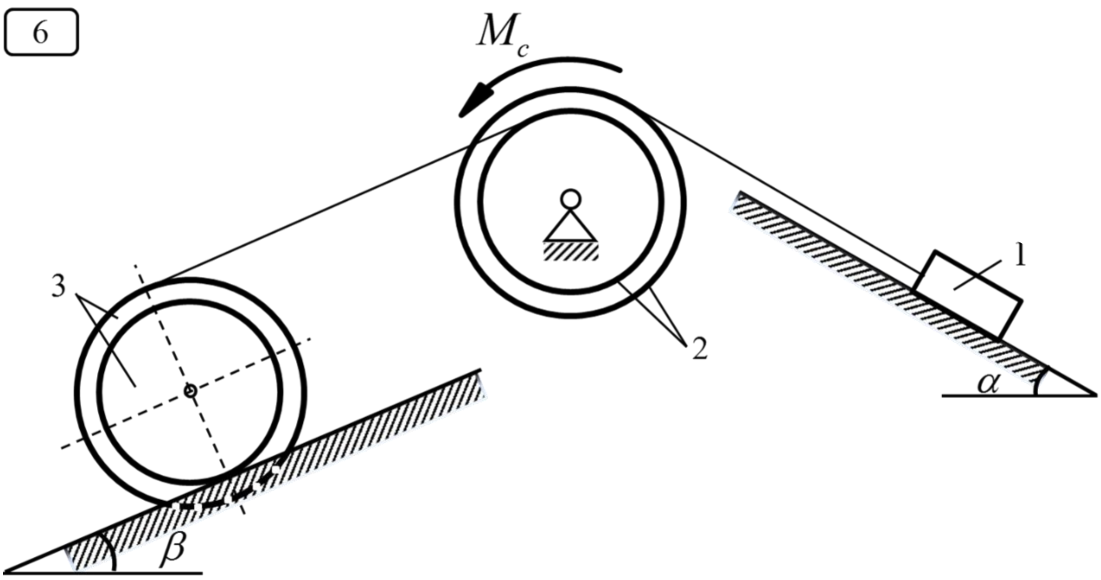
4



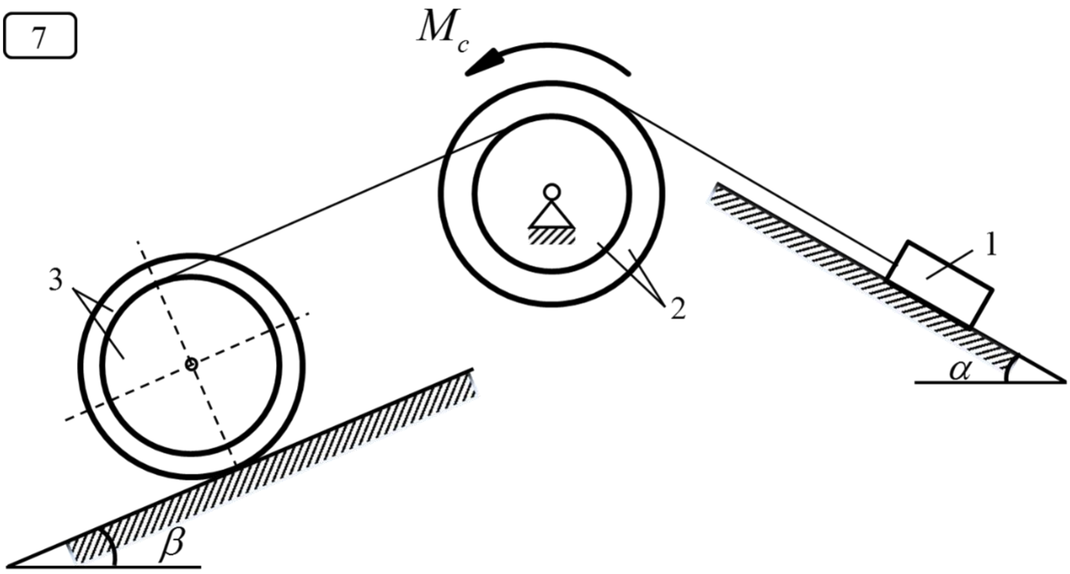
5



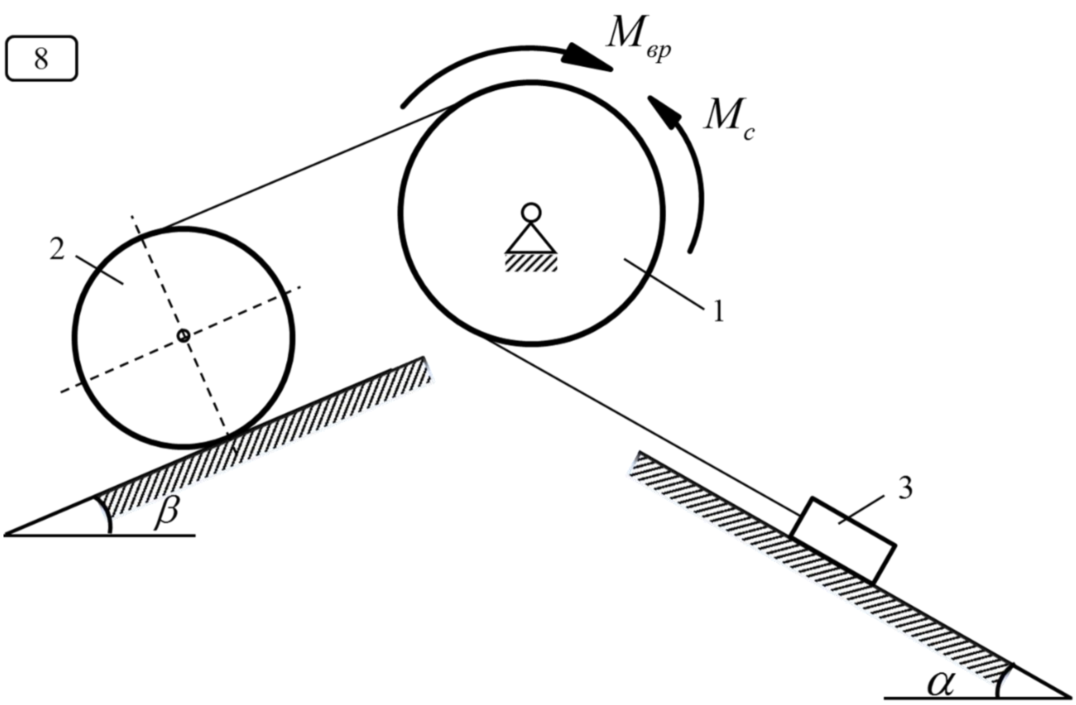
6



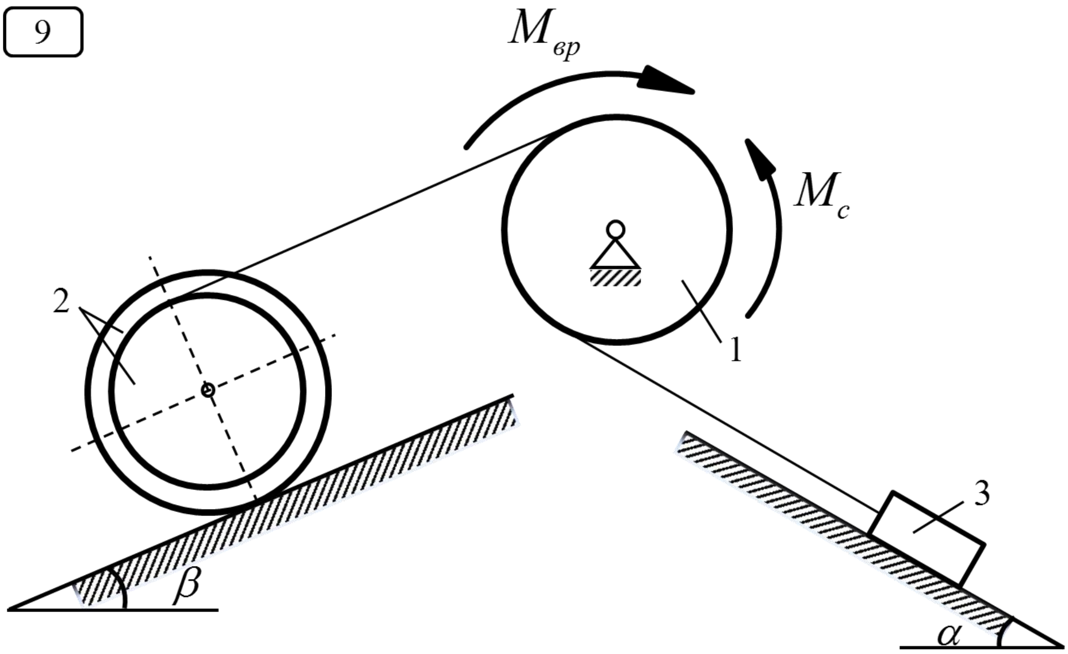
7



8



9



Исходные данные для расчетных схем

№ варианта		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_1	кг	150	120	430	80	280	60	320	140	80	70
m_2	кг	40	60	70	40	75	50	80	70	60	80
m_3	кг	80	40	90	100	50	40	160	100	70	100
R_1	см	-	40	-	50	-	25	-	-	50	50
r_1	см	-	25	-	-	-	-	-	-	-	-
i_1	см	-	35	-	-	-	-	-	-	-	-
R_2	см	25	30	40	60	50	30	50	40	40	60
r_2	см	15	-	20	40	30	20	30	25	-	40
i_2	см	20	-	30	45	45	25	45	30	-	45
R_3	см	22	-	50	-	40	-	60	30	-	-
r_3	см	-	-	30	-	30	-	40	35	-	-
i_3	см	-	-	40	-	35	-	55	-	-	-
$M_{вр}$	Н·м	-	330	-	520	-	170	-	-	500	800
M_c	Н·м	15	20	25	25	20	30	30	30	30	25
f	-	0,2	0,17	0,12	0,19	0,17	0,12	0,15	0,23	0,15	0,2
α°	град	30	45	30	30	30	30	30	45	30	45
β°	град	45	30	45	-	45	45	45	60	45	30

Литература

1 Яблонский , А.А. Курс теоретической механики : учеб. пособие для вузов / А.А.Яблонский. – М.: Высш. шк., 2000. – 341с.

2 Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики: учеб. пособие для вузов / Н.Н.Никитин. – М.:Лань, 2010. – 720с.

3 Павленко, Ю.Г. Лекции по теоретической механике: учеб. пособие для вузов / Ю.Г.Павленко. – М.: Высш. шк., 2002. – 392с.

4 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие для вузов / С.М.Тарг. – М.: Высш. шк., 2010. – 416с.

5 Бать, М.И., Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов / М.И.Бать, Г.Ю.Джанелидзе, А.С.Кельзон. – М.: Лань, 2010. – 672с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Кафедра механика

Учебное пособие

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ И КУРСОВЫХ РАБОТ

Людмила Ивановна Погребная

Леонид Николаевич Галуза

Отпечатано с оригинал-макета. Формат 60x90 $^{1}/_{16}$

Печ.л. 5,0. Тираж   экз

Санкт-Петербургский государственный технологический институт

(Технический университет)

190013, Санкт – Петербург, Московский пр., 26

Типография издательства СПбГТИ(ТУ)