

Контрольная работа по высшей математике для студентов 1
курса ФОДО (2-ой семестр)

Задание №1. Даны два комплексных числа: z_1 и z_2 . Найдите модуль и аргумент числа $z = \frac{\overline{z_1 - 2}}{z_2}$, изобразите это число на комплексной плоскости.

	z_1	z_2		z_1	z_2
1.	$3-i$	$1+i$	6.	$2-i$	$-1+i$
2.	$3+i$	$1-i$	7.	$3-i$	$-1+i$
3.	$1-i$	$3+i$	8.	$2+i$	$1+i$
4.	$1+i$	$3+i$	9.	$2+i$	$1-i$
5.	$3-i$	$1-i$	10.	$2-i$	$1-i$

Задание №2. Даны два комплексных числа: z_1 и z_2 . Найдите z .

	z_1	z_2	z		z_1	z_2	z
1.	$1+2i$	$-3i$	$\left(\frac{\bar{z}_1 - iz_2}{2z_2}\right)^6$	6.	$-3i$	$4-i$	$\left(\frac{\bar{z}_1 - z_2}{4\bar{z}_1}\right)^6$
2.	$3i$	$4-i$	$\left(\frac{z_1 - z_2}{4\bar{z}_1}\right)^6$	7.	$4+3i$	$-i$	$\left(\frac{z_1 + \bar{z}_2}{\bar{z}_2}\right)^{12}$
3.	$4+3i$	$-i$	$\left(\frac{z_1 + \bar{z}_2}{4z_2}\right)^{12}$	8.	$1+2i$	$-3i$	$\left(\frac{\bar{z}_1 - iz_2}{2z_2}\right)^4$
4.	$3+4i$	i	$\left(\frac{\bar{z}_1 + z_2}{3z_2}\right)^{14}$	9.	$3i$	$4-i$	$\left(\frac{z_1 - z_2}{4\bar{z}_1}\right)^4$
5.	$-1+2i$	$z_2 = -3i$	$\left(\frac{\bar{z}_1 + iz_2}{2z_2}\right)^8$	10.	$4+3i$	$-i$	$\left(\frac{z_1 + \bar{z}_2}{4z_2}\right)^6$

Задание №3. Найдите все значения корня из комплексного числа z .

	z		z		z		z		z
1.	$\sqrt{1+i\sqrt{3}}$	3.	$\sqrt[3]{-i}$	7.	$\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$	8.	$\sqrt[3]{i}$	11.	$\sqrt[4]{-i}$
2.	$\sqrt[3]{1-i}$	4.	$\sqrt[3]{1+i}$	6.	$\sqrt[3]{8-8i}$	9.	$\sqrt[6]{1+i}$	10.	$\sqrt[6]{-64}$

Задание №4. Вычислите неопределенные интегралы:

1.	а) $\int \left(x^3 + \sqrt[4]{x} - \frac{2}{x} + \frac{1+x}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$	б) $\int \frac{dx}{4-x^2}$	в) $\int \frac{\ln x + \sqrt{x}}{x} dx$
	з) $\int 2^{3x+4} dx$	д) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$	е) $\int (x-2)^2 \sin 2x dx$
	ж) $\int \frac{4x+5}{x^2+6x+13} dx$	з) $\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx$	и) $\int \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx$
	к) $\int \cos^4 2x dx$	л) $\int \frac{\sqrt{x-2}+x}{\sqrt[3]{x-2}} dx$	м) $\int \sqrt{4-x^2} dx$
2.	а) $\int \left(x^5 - \sqrt[3]{x} - \frac{4}{x} - \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}} \right) dx$	б) $\int \frac{dx}{4+x^2}$	в) $\int \frac{\arcsin x + x - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
	з) $\int \cos(2x-3) dx$	д) $\int \operatorname{arccotg} 3x dx$	е) $\int (x+3)^2 \cos 2x dx$
	ж) $\int \frac{8x+15}{x^2-6x+13} dx$	з) $\int \frac{3x^3+1}{x^2-x} dx$	и) $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx$
	к) $\int \sin^4 3x dx$	л) $\int \frac{\sqrt{x+2}+x}{\sqrt[4]{x+2}} dx$	м) $\int \sqrt{4+x^2} dx$
3.	а) $\int \left(x^4 + \sqrt[7]{x} - \frac{7}{x} - \frac{\sqrt[3]{x}+3}{\sqrt{x^3}} \right) dx$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$	в) $\int \frac{x^2+x^5}{\sqrt{x^6-4}} dx$
	з) $\int \sin(3x-4) dx$	д) $\int \log_2(x+1) dx$	е) $\int (x^2-2)e^{2x} dx$
	ж) $\int \frac{2x+5}{x^2+4x+13} dx$	з) $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx$	и) $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$
	к) $\int \cos^2 2x \sin^2 2x dx$	л) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+x-2}{\sqrt[4]{x-1}} dx$	м) $\int \sqrt{x^2-4} dx$
4.	а) $\int \left(x^7 + \sqrt[5]{x} - \frac{8}{x} + \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x^4} \right) dx$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$	в) $\int \frac{2^{\arcsin x} + x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
	з) $\int 3^{2x+4} dx$	д) $\int \operatorname{arctg} 4x dx$	е) $\int (x-5)^3 \ln x dx$
	ж) $\int \frac{4x-5}{x^2-6x+34} dx$	з) $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2} dx$	и) $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$
	к) $\int \cos^4 3x dx$	л) $\int \frac{\sqrt[3]{x+4}+x}{\sqrt[4]{x+4}} dx$	м) $\int \sqrt{36-x^2} dx$

5.	a) $\int \left(x^{15} - \sqrt[8]{x} - \frac{7}{x} + \frac{x^3 - 3}{\sqrt[7]{x}} \right) dx$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{25 + x^2}}$	в) $\int \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x} dx$
	з) $\int \cos(2x + 3) dx$	д) $\int \arccos 2x dx$	е) $\int (x^2 - 2x) \cos 2x dx$
	ж) $\int \frac{8x + 15}{x^2 - 6x + 34} dx$	з) $\int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x - 6} dx$	у) $\int \sin^3 x \cos^8 x dx$
	к) $\int \sin^4 x dx$	н) $\int \frac{\sqrt{x + 4} + x}{\sqrt[5]{x + 4}} dx$	м) $\int \sqrt{36 + x^2} dx$
6.	a) $\int \left(x^5 + \sqrt[6]{x} - \frac{3}{x} + \frac{x^2 - 4}{\sqrt[5]{x}} \right) dx$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{49 - x^2}}$	в) $\int \frac{e^x}{4e^{2x} - 1} dx$
	з) $\int \sin(7x - 4) dx$	д) $\int \ln^2(x - 3) dx$	е) $\int (x^2 + 3)e^{5x} dx$
	ж) $\int \frac{10x + 5}{x^2 + 4x + 21} dx$	з) $\int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx$	у) $\int \cos^3 x \sin^{10} x dx$
	к) $\int \cos^2 3x \sin^2 3x dx$	н) $\int \frac{\sqrt[3]{x + 1} + x}{\sqrt[5]{x + 1}} dx$	м) $\int \sqrt{x^2 - 25} dx$
7.	a) $\int \left(x^7 + \sqrt[9]{x} - \frac{12}{x} - \frac{x^3 + 3}{\sqrt[6]{x}} \right) dx$	б) $\int \frac{dx}{9 - x^2}$	в) $\int \frac{2^{\arccos x} - x + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
	з) $\int 3^{3x - 4} dx$	д) $\int \arcsin 3x dx$	е) $\int (x^2 + 3x) \sin 4x dx$
	ж) $\int \frac{6x + 5}{x^2 + 8x + 20} dx$	з) $\int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x} dx$	у) $\int \cos^3 x \sqrt{\sin^5 x} dx$
	к) $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$	н) $\int \frac{\sqrt[5]{x + 1} + x}{\sqrt[10]{x + 1}} dx$	м) $\int \sqrt{9 - x^2} dx$
8.	a) $\int \left(x^{15} - \sqrt[13]{x} - \frac{14}{x} + \frac{x^5 - 2}{\sqrt[7]{x}} \right) dx$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{25 + x^2}}$	в) $\int \frac{\ln x dx}{x(\ln^4 x + 4)}$
	з) $\int \cos(2x - 13) dx$	д) $\int \operatorname{arctg} 5x dx$	е) $\int (2x^2 + 3) \cos 2x dx$
	ж) $\int \frac{8x + 17}{x^2 - 8x + 20} dx$	з) $\int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx$	у) $\int \sin^3 x \sqrt{\cos^5 x} dx$
	к) $\int \sin^4 5x dx$	н) $\int \frac{\sqrt[3]{x - 1} + x}{\sqrt[4]{x - 1}} dx$	м) $\int \sqrt{9 + x^2} dx$

9.	a) $\int \left(x^7 + \sqrt[6]{x} - \frac{3}{x} - \frac{7-x^3}{\sqrt[8]{x}} \right) dx$	б) $\int \frac{dx}{49-x^2}$	в) $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{x^4-25}} dx$
	г) $\int \sin(7x-14) dx$	д) $\int \operatorname{arccotg} 7x dx$	е) $\int (2x^2 - x + 10)e^{3x} dx$
	ж) $\int \frac{2x+5}{x^2-8x+25} dx$	з) $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x} dx$	и) $\int \cos^8 x \sin^3 x dx$
	к) $\int \cos^2 3x \sin^2 3x dx$	л) $\int \frac{\sqrt[3]{x+3}+x}{\sqrt[7]{x+3}} dx$	м) $\int \sqrt{x^2-9} dx$
10.	a) $\int \left(x^{10} + \sqrt[11]{x} - \frac{12}{x} - \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$	б) $\int \frac{dx}{8-x^2}$	в) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}} dx$
	г) $\int 4^{2x+4} dx$	д) $\int \log_3(x+5) dx$	е) $\int (x-3)\ln^2 x dx$
	ж) $\int \frac{6x+15}{x^2-8x+20} dx$	з) $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x} dx$	и) $\int \cos^3 x \sin^{12} x dx$
	к) $\int \cos^4 8x dx$	л) $\int \frac{\sqrt[3]{x-3}+x}{\sqrt[5]{x-3}} dx$	м) $\int \sqrt{100-x^2} dx$

Задание №5. Вычислите площади фигур, ограниченных линиями, заданными

а) уравнениями в декартовой системе координат;

б) параметрически;

в) уравнениями в полярной системе координат.

Сделайте чертеж фигур.

	а)	б)	в)
1.	$y = \arccos x,$ $y = 0, x = 0.$	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} y = 3 (y \geq 3),$ $0 < x < 6\pi.$	$r = 2 \cos \varphi,$ $r = 3 \cos \varphi.$
2.	$y = x/(1 + \sqrt{x}),$ $y = 0, x = 1.$	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 5 (y \leq 5).$	$r = \frac{1}{2} + \cos \varphi.$
3.	$y = (x-2)^3,$ $y = 4x-8.$	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} x = 2 (x \geq 2).$	$r = 4 \cos \varphi,$ $r = 2 (r \geq 2).$
4.	$y = \sqrt{e^x - 1},$ $y = 0, x = \ln 2.$	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t. \end{cases}$	$r = \sqrt{3} \cos \varphi, r = \sin \varphi$ $(0 \leq \varphi \leq \pi/2).$
5.	$y = x\sqrt{9-x^2},$ $y = 0.$	$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 2 (y \geq 2).$	$r = \sin \varphi, r = 2 \sin \varphi.$

6.	$x = \arccos y,$ $x = 0, y = 0.$	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \quad y = 3 (y \geq 3).$	$r = \cos \varphi + \sin \varphi.$
7.	$y = 2x - x^2,$ $y = x^2 - 4x + 3.$	$\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \quad y = 2 (y \geq 2).$	$r = \frac{1}{2} + \sin \varphi.$
8.	$y = x\sqrt{16 - x^2},$ $y = 0.$	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 3 (y \geq 3).$	$r = 2 \sin \varphi,$ $r = 3 \sin \varphi.$
9.	$y = (x - 1)^2,$ $y^2 = x - 1.$	$\begin{cases} x = 32 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases} \quad x = 12\sqrt{3} (x \geq 12\sqrt{3}).$	$r = 4 \sin \varphi, r = 2 \sin \varphi.$
10.	$x = (y - 2)^3,$ $x = 4y - 8.$	$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \quad y = 4 (y \leq 4).$	$r = 4 \sin 3\varphi,$ $r = 2 (r \geq 2).$

Задание №6. Вычислите длины дуг кривых, заданных

а) уравнениями в декартовой системе координат;

б) параметрически;

в) уравнениями в полярной системе координат.

	а)	б)	в)
1.	$y = \ln x,$ $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$	$\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi.$	$r = 3e^{3\varphi/4},$ $-\leq t \leq \pi/3.$
2.	$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2},$ $1 \leq x \leq 2.$	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi.$	
3.	$y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x,$ $0 \leq x \leq 7/9.$	$\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi/2.$	
4.	$y = \ln \frac{5}{2x},$ $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$	$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi.$	
5.	$y = -\ln \cos x,$ $0 \leq x \leq \pi/6.$	$\begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi/2.$	
6.	$y = e^x + 6,$ $\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}.$	$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi.$	

7.	$y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2},$ $1/4 \leq x \leq 1.$	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $\pi \leq t \leq 2\pi.$	
8.	$y = \ln(x^2 - 1),$ $2 \leq x \leq 3.$	$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \end{cases}$ $\pi/2 \leq t \leq 2\pi/3.$	
9.	$y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x,$ $0 \leq x \leq 8/9.$	$\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi/3.$	
10.	$y = \ln(1 - x^2),$ $0 \leq x \leq 1/4.$	$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq \pi/3.$	

Задание №7 : Найти дифференциал функции $u(x, y)$ указанного порядка:

1.	$u = e^{x+2y}, \quad d^3 u = ?$
2.	$u = e^{x-y}, \quad d^3 u = ?$
3.	$u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad d^2 u = ?$
4.	$u = \frac{x}{y}, \quad d^3 u = ?$
5.	$u = \operatorname{tg}(e^x + e^y), \quad d^3 u = ?$
6.	$u = \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}, \quad d^2 u = ?$
7.	$u = \cos(2x - 3y), \quad d^3 y = ?$
8.	$u = e^{x/y}, \quad d^2 u = ?$
9.	$u = e^{x-3y}, \quad d^3 u = ?$
10.	$u = \arccos \frac{x}{y}, \quad d^2 u = ?$

Задание №8 : Для функции $z = f(x, y)$, заданной неявно, найти частные производные первого и второго порядков.

1.	$z^3 - 3xyz = a^3.$
2.	$x - 2y + z = e^{-(x+y+2z)}.$
3.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

4.	$z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}.$
5.	$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xy - z = 8.$
6.	$x^2 + y^2 - z^2 - xyz = 128.$
7.	$\ln xyz + e^{xy} = z.$
8.	$x + y + z = e^{z-x}.$
9.	$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$
10.	$\frac{x}{z} = 1 + \ln \frac{z}{y}$

Задание №10: Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D .

1.	$z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$	$D: -1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x+1$
2.	$z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$	$D: -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x+2$
3.	$z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$	$D: -3 \leq x \leq -1, 0 \leq y \leq -x-1$
4.	$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$	$D: -1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x+1$
5.	$z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$	$D: 0 \leq x \leq y \leq 4$
6.	$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$	$D: -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq -x+1$
7.	$2z = 4x^2 + 4xy - y^2 - 8y$	$D: 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 2$
8.	$z = x^2 - xy + y^2$	$D: x + y \leq 1$
9.	$z = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 3$	$D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x+1$
10.	$z = x^2 + xy - 2$	$D: -1 \leq x \leq 1, 4x^2 - 4 \leq y \leq 0$