

3. РАСЧЕТ ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ ФУНКЦИЙ ЦЕПИ

Цель работы. Определение функций цепи для нахождения входных и выходных реакций, применение метода эквивалентных преобразований, метода пропорциональных величин, построение векторных диаграмм, проверка энергетического баланса.

3.1. Задание и исходные данные для расчета

1. По данным таблицы вариантов определить параметры реактивных элементов цепи

2. Найти входное сопротивление/входную проводимость, коэффициент мощности и коэффициент передачи тока/напряжения от источника в нагрузку.

3. Определить параметры последовательной и параллельной схемы замещения цепи.

4. Рассчитать режим цепи при заданном токе одной из ветвей. Построить векторные диаграммы токов и напряжений. Составить баланс мощностей.

5. Определить тип возможного резонанса в цепи – резонанса напряжений или резонанса токов. Добиться резонансного режима путем изменения параметров R, L, C элементов.

Структура цепи и параметры элементов приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

№	1	2	3	4	5	6	7
1	3-1 ИТ	1-2 $ Z_L =40$	1-3 $R_3=30$	2-3 $ Z_C =10$	-	$f=100$	$H_{R_3}^{(I)}$
2	1-3 ИН	1-2 $ Z_L =40$	2-3 $R_3=40$	2-3 $ Z_C =40$	-	$f=50$	$H_C^{(U)}$
3	1-4 ИН	1-2 $ Z_C =20$	2-3 $ Z_L =20$	2-4 $R_4=40$	3-4 $R_5=20$	$f=50$	$H_{R_5}^{(U)}$
4	2-1 ИТ	1-2 $R_2=10$	1-2 $ Z_C =10$	1-2 $ Z_L =20$		$f=200$	$H_L^{(I)}$
5	3-1 ИТ	1-2 $ Z_L =10$	1-3 $ Z_C =10$	2-3 $R_4=10$		$f=200$	$H_C^{(I)}$
6	1-3 ИН	1-2 $ Z_C =20$	2-3 $R_3=20$	2-3 $ Z_L =20$		$f=100$	$H_{R_3}^{(U)}$

Продолжение таблицы 3.1

№	1	2	3	4	5	6	7
7	1-3 ИН	1-2 $ Z_L =10$	2-3 $ Z_C =10$	2-3 $R_4=10$		$f=200$	$H_{R_4}^{(U)}$
8	3-1 ИТ	1-2 $ Z_L =20$	1-3 $ Z_C =20$	2-3 $R_4=20$		$f=100$	$H_{R_4}^{(I)}$
9	1-4 ИН	1-2 $R_2=10$	2-3 $ Z_C =25$	3-4 $R_4=20$	3-4 $ Z_L =40$	$f=50$	$H_{R_4}^{(U)}$
10	3-1 ИТ	1-2 $ Z_C =10$	1-3 $R_3=30$	2-3 $ Z_L =40$		$f=100$	$H_{R_4}^{(I)}$
11	3-1 ИТ	1-2 $ Z_L =10$	1-3 $ Z_C =10$	2-3 $R_4=10$		$f=200$	$H_{R_4}^{(I)}$
12	3-1 ИТ	1-2 $R_2=10$	1-3 $ Z_L =20$	2-3 $ Z_L =5$	2-3 $ Z_C =10$	$f=100$	$H_C^{(I)}$
13	2-1 ИТ	1-2 $G=0.5$	1-2 $ Y_L =0.1$	1-2 $ Y_C =0.2$		$f=200$	$H_L^{(I)}$
14	1-4 ИН	1-2 $R_2=5$	2-3 $ Z_L =20$	3-4 $ Z_C =15$		$f=100$	$H_L^{(U)}$
15	1-3 E_1	1-2 $R_2=20$	2-3 $ Z_L =20$	2-3 $ Z_C =10$		$f=100$	$H_{R_2}^{(U)}$
16	2-1 J_1	1-2 $R_2=20$	1-2 $ Z_L =20$	1-2 $ Z_C =10$		$f=200$	$H_L^{(I)}$
17	3-1 J_1	1-2 $ Z_C =20$	1-3 $R_3=20$	2-3 $R_4=20$	2-3 $ Z_L =10$	$f=50$	$H_L^{(I)}$
18	1-3 E_1	1-2 $ Z_L =40$	2-3 $R_3=40$	2-3 $ Z_C =40$		$f=50$	$H_{R_3}^{(U)}$
19	1-3 E_1	1-2 $ Z_L =20$	2-3 $R_3=40$	2-3 $ Z_L =40$	2-3 $ Z_C =20$	$f=100$	$H_{R_3}^{(U)}$
20	3-1 J_1	1-2 $ Z_L =20$	1-3 $ Z_C =20$	2-3 $R_4=20$		$f=100$	$H_{R_4}^{(I)}$
21	3-1 J_1	1-2 $R_2=10$	1-3 $ Z_C =10$	2-3 $R_4=10$	2-3 $ Z_L =10$	$f=200$	$H_L^{(I)}$
22	1-4 E_1	1-2 $ Z_L =20$	2-3 $R_3=20$	3-4 $ Z_C =20$	3-4 $R_5=20$	$f=200$	$H_{R_5}^{(U)}$
23	1-4 E_1	1-2 $R_2=10$	2-3 $ Z_C =60$	3-4 $ Z_L =40$	3-4 $R_5=40$	$f=25$	$H_{R_5}^{(U)}$
24	1-3 E_1	1-2 $ Z_L =10$	2-3 $R_3=20$	2-3 $ Z_L =20$	2-3 $ Z_C =10$	$f=100$	$H_{R_3}^{(U)}$
25	3-1 J_1	1-2 $R_2=20$	1-3 $ Z_L =40$	2-3 $ Z_L =10$	2-3 $ Z_C =20$	$f=50$	$H_{R_2}^{(I)}$

3.2. Пример выполнения работы

3.2.1. Метод эквивалентных преобразований

Структура цепи и параметры элементов приведены в таблице 3.2.

№	Таблица 3.2					H	f, Гц
	1	2	3	4	5		
29	1-3 J_1	1-2 $R_2 = 20$	1-3 $ Z_{L3} = 40$	2-3 $ Z_{L4} = 10$	2-3 $ Z_{C5} = 20$	$H_{C5}^{(1)}$	25

Схема цепи, восстановленная по данным таблицы 3.2, показана на рис.3.1.

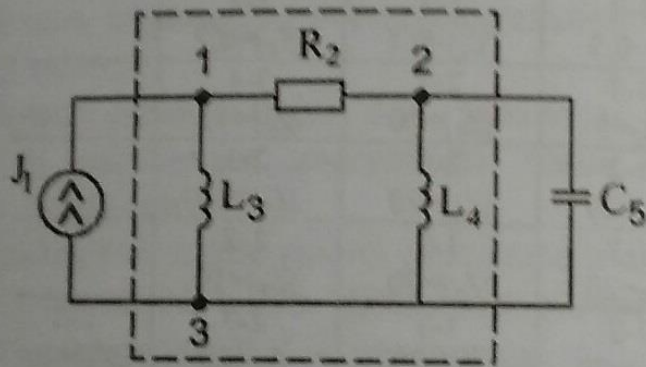


Рис.3.1. Схема цепи.

Индуктивности L_3, L_4 и емкость C_5 вычисляются по значениям индуктивных сопротивлений X_{L3}, X_{L4} , емкостному сопротивлению X_{C5} и частоте тока источника $\omega = 2\pi f$:

$$L_3 = X_{L3} / \omega = 40 / 50 \cdot \pi = 0.254,$$

$$L_4 = X_{L4} / \omega = 10 / 50 \cdot \pi = 63,6 \cdot 10^{-3}$$

$$C_5 = 1 / X_{C5} \cdot \omega = 1 / 20 \cdot 50\pi = 318 \cdot 10^{-6}$$

Для нахождения входной реакции $\dot{U}_J = Z_{\text{вх}} \cdot \dot{J}$ определим входное сопротивление цепи $Z_{\text{вх}}$ методом эквивалентных

преобразований. Эквивалентное сопротивление двухполюсника L_4, C_5 находится по формуле

$$Z_{e1} = \frac{Z_{C5} \cdot Z_{L4}}{Z_{C5} + Z_{L4}} = \frac{-j20 \cdot j10}{-j20 + j10} = j20$$

Эквивалентное сопротивление двухполюсника с элементами R_2, L_4, C_5 равно

$$Z_{e2} = Z_{e1} + R_3 = 20 + j20$$

Вычисляем входное сопротивление:

$$Z_{dr} = \frac{Z_{e2} \cdot Z_{L3}}{Z_{e2} + Z_{L3}} = \frac{j40 \cdot (20 + j20)}{j40 + 20 + j20} = 8 + j16 = 8 \cdot \sqrt{5} \cdot \exp(j1.11)$$

Входное сопротивление носит индуктивный характер. Фазовый сдвиг между напряжением и током составляет $\varphi = 1.11$ или $\varphi_d = 63.4^\circ$. Модуль входного сопротивления $|Z_{dr}| = 8 \cdot \sqrt{5} = 17.9$, коэффициент мощности $\chi = \cos \varphi = 0.45$.

Выходная реакция цепи ток \dot{I}_5 вычисляется с помощью коэффициента передачи тока

$$\dot{I}_5 = H_{C5}^{(i)} \cdot \dot{J}_1$$

Коэффициент передачи тока источника J_1 в ветвь с элементом C_5 определим, как произведение двух промежуточных коэффициентов передачи

$$\begin{aligned} H_{C5}^{(i)} &= \frac{I_{C5}}{J_1} = \frac{I_{R2}}{J_1} \cdot \frac{I_{C5}}{I_{R2}} = \frac{Z_{L3}}{Z_{L3} + Z_{e2}} \cdot \frac{Z_{L4}}{Z_{L4} + Z_{C5}}; \\ H_{C5}^{(i)} &= \frac{j40}{j40 + 20 + j20} \cdot \frac{j10}{j10 - j20} = \\ &= -0.2 \cdot (3 + j) = 0.2 \cdot \sqrt{10} \cdot \exp(-j2.82) \end{aligned}$$

Модуль коэффициента передачи составляет $|H_C^{(1)}| = 0.633$, фазовый сдвиг между выходным и входным током $\varphi_H = \psi_{i5} - \psi_{j1} = -2.82$ или $\varphi_H = -161^\circ$.

3.2.2. Параметры схемы замещения цепи

Входному сопротивлению $Z_{dr} = 8 + j16$ соответствует последовательная схема замещения, показанная на рисунке 3.2а. По значению реактивного сопротивления $X_{dr} = 16$ и частоте $\omega = 50\pi$ определяем эквивалентную индуктивность

$$L_{dr} = X_{dr} / \omega = 0.102$$

Найдем входную проводимость цепи как величину, обратную сопротивлению

$$Y_e = \frac{J_1}{U_1} = \frac{1}{Z} = G + jB,$$

$$Y_e = \frac{1}{8(1 + j2)} = 0.025 \cdot (1 - j2)$$

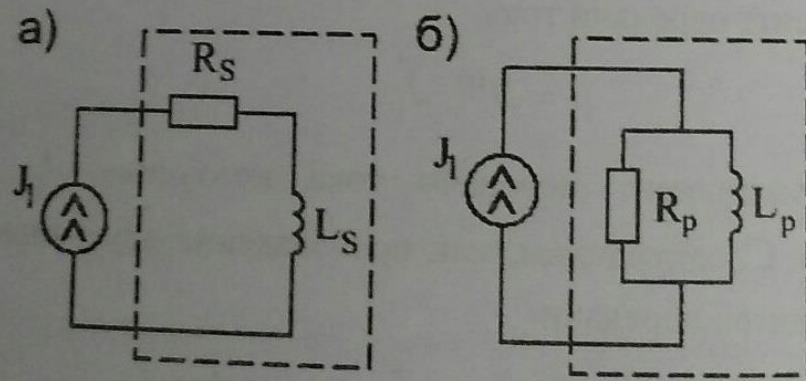


Рис.3.2. Последовательная –а) и параллельная схема замещения двухполюсника –б)

Входной проводимости соответствует параллельная схема замещения (рисунок 3.2б)

Параметры параллельной схемы замещения R_p , L_p определяются по формулам:

$$R_p = \frac{1}{G_p} = \frac{1}{0.025} = 40,$$

$$L_p = \frac{1}{B_p \cdot \omega} = \frac{1}{0.05 \cdot 50 \cdot \pi} = 0.127$$

Эквивалентность/неэквивалентность последовательной и параллельной схем замещения цепи проверяется по показаниям приборов (рис.3.3). Если показания приборов на входе исходной цепи и цепи замещения одинаковы, то цепи считаются эквивалентными. Поскольку цепь состоит из элементов, свойства которых зависят от частоты, то эквивалентность схем будет справедлива только на заданной частоте $\omega = 50\pi$. При изменении частоты источника входное сопротивление и параметры эквивалентных схем также изменятся.

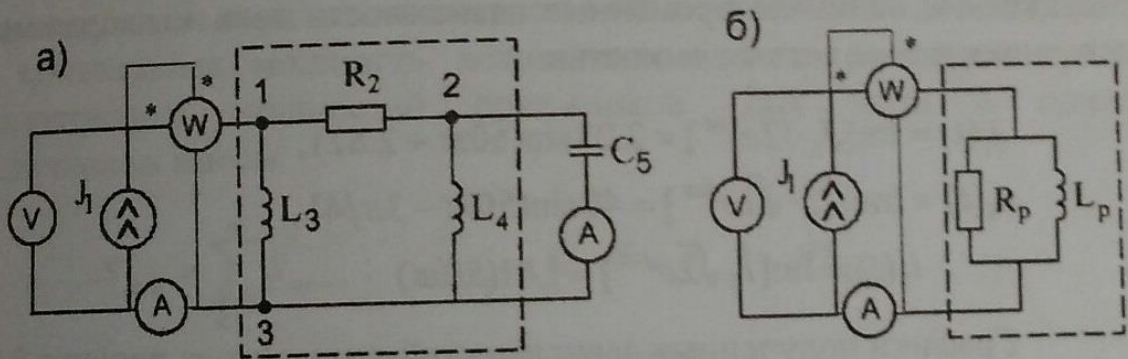


Рис.3.3. Измерение напряжения, тока и мощности исходной цепи – а) и эквивалентной цепи – б)

3.2.3. Метод пропорциональных величин. Построение векторной диаграммы

Примем комплекс действующего значения тока наиболее удаленной ветви равным единице: $\dot{I}_5 = 1$, $\psi_{i5} = 0$. Используя законы Кирхгофа и закон Ома определим напряжения и токи ветвей:

$$\dot{U}_5 = \dot{I}_5 \cdot Z_5 = -j20, \quad \dot{U}_4 = \dot{U}_5,$$

$$\dot{I}_4 = \dot{U}_4 / Z_4 = -j20 / j20 = -2,$$

$$I_2 = I_4 + I_5 = 1 - 2 = -1, \quad \dot{U}_2 = R_2 \cdot \dot{I}_2 = -20,$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{U}_5 = -20 - j20 = 20\sqrt{2}e^{j5\pi/4}, \quad \dot{U}_1 = \dot{U}_3,$$

$$\dot{I}_3 = \dot{U}_3/Z_3 = -0.5 + j0.5 = 0.5\sqrt{2}e^{j3\pi/4}$$

Для того чтобы ток ветви с емкостью C_5 был равен принятому значению ток $\dot{I}_5 = 1$, ток источника должен быть равен

$$\dot{J}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = -1.5 + j0.5 = 1.58 \cdot \exp(j2.82), \quad \psi_{J_1} = 162^\circ$$

Значение входного сопротивления $Z_{dr} = U_1/J_1$ совпадает с результатом расчета этой величины методом эквивалентных преобразований

$$Z_{dr} = U_1/J_1 = (-20 - j20)/(-1.5 + j0.5) = 8 + j16$$

Векторная диаграмма токов и напряжений показана на рисунке 3.4. Запишем временные зависимости тока и напряжения источника и тока ветви с емкостью

$$j_1(t) = \text{Im}[\dot{J}_1 \sqrt{2}e^{j\omega t}] = 2.23 \sin(50\pi t + 2.82),$$

$$u_1(t) = \text{Im}[\dot{U}_1 \cdot \sqrt{2}e^{j\omega t}] = 40 \sin(50\pi t - 3\pi/4),$$

$$i_5(t) = \text{Im}[\dot{I}_5 \sqrt{2}e^{j\omega t}] = 1.41 \sin(50\pi t)$$

Графики полученных зависимостей показаны на рисунке 3.5.

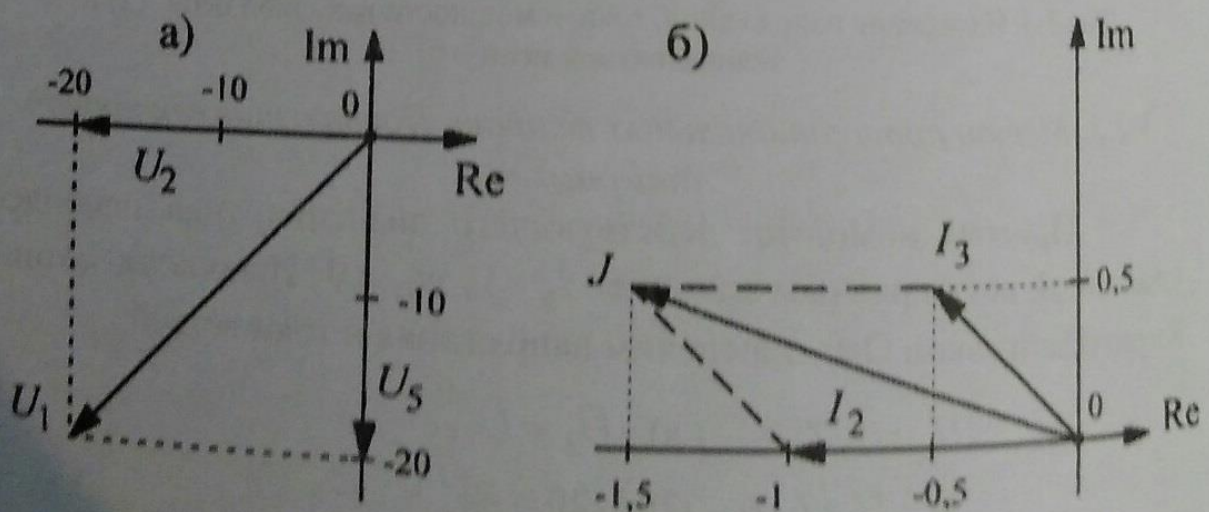


Рис.3.4. Векторная диаграмма напряжений – а) и токов – б).

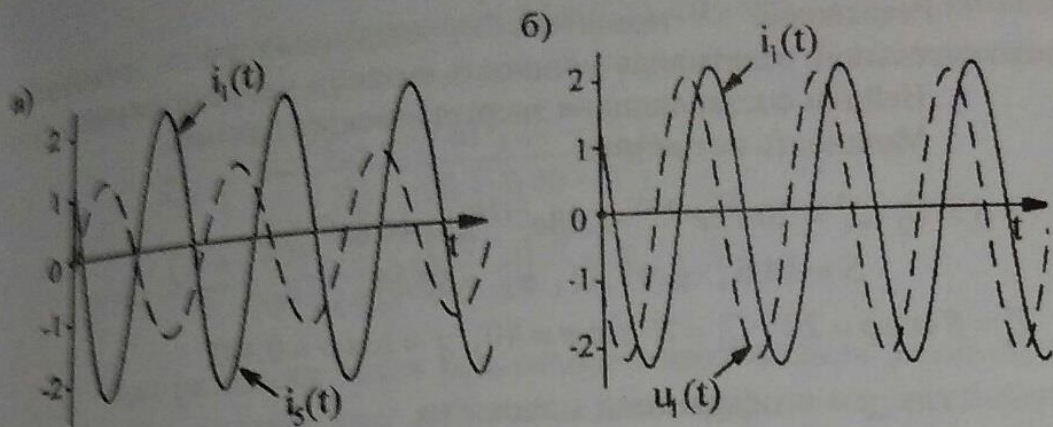


Рис.3.5. Осциллограммы выходной реакции – а) и входной реакции – б)

3.2.4. Баланс энергии

В электрических цепях должен выполняться закон сохранения энергии. При использовании символического метода расчета баланс записывается относительно комплексных мощностей – комплексная мощность источников должна равняться сумме комплексных мощностей приемников. Для цепи с одним источником имеем

$$\underline{S}_{ист} = \sum_{k=1}^n \underline{S}_{пр-к}; \quad \underline{S}_{ист} = \dot{U} \cdot \dot{J}^* = P_{ист} + jQ_{ист},$$

$$P_{ист} = S \cos \varphi, \quad Q_{ист} = S \sin \varphi$$

Здесь P – активная мощность, Вт, Q – реактивная мощность, вар, S – полная или кажущаяся мощность, ВА.

Из приведенных формул следует, что баланс должен выполняться как для активной, так и реактивной мощности.

$$P_{ист} = \sum_{k=1}^n P_{пр-к}, \quad Q_{ист} = \sum_{k=1}^n \pm Q_{пр-к}, \quad P_{прк} = I_k^2 \cdot R_k,$$

$$Q_{прк} = I_k^2 \cdot X_{pk}$$

где I_k – действующее значение тока, R_k, X_{pk} – активное и реактивное сопротивление k -ой ветви.

Реактивная мощность индуктивности положительной, реактивная мощность емкости – отрицательной. считается
 Найдем составляющие энергетического баланса.
 Мощность источника

$$\underline{S} = \dot{U}_1 \cdot \dot{J}_1^* = 20\sqrt{2}e^{j3.93} \cdot 1.58e^{-j2.82} = 44.6e^{j1.11} \rightarrow$$

$$S = 44.6, \quad \varphi = 1.11, \quad \varphi_d = 63.6^\circ,$$

$$P_1 = S \cos \varphi = 20, \quad Q_1 = S \cdot \sin \varphi = 40, \quad \chi = \cos \varphi = 0.445$$

где χ – коэффициент мощности.

Мощность приемников

$$P_{np} = P_{R2} = I_2^2 R_2 = 1 \cdot 20 = 20$$

$$\begin{aligned} Q_{np} &= Q_{L3} + Q_{L4} - Q_{C5} = I_3^2 X_{L3} + I_4^2 X_{L4} - I_5^2 X_{C5} = \\ &= 0.5 \cdot 40 + 4 \cdot 10 - 1 \cdot 20 = 40 \end{aligned}$$

Сравнение мощности источника и мощности потребителей показывает, что баланс энергии в цепи выполняется.

3.2.5. Резонансные свойства цепи

Если RL - и RC - двухполюсники включены последовательно, то в цепи возможен сложный резонанс напряжений. В случае параллельного включения таких двухполюсников в цепи может иметь место сложный резонанс токов. В резонансном режиме ток и напряжение на входе цепи совпадают по фазе $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$, реактивная составляющая входного сопротивления равна нулю $X_{dr} = \text{Im}(Z_{dr}) = 0$.

В рассматриваемой цепи двухполюсники L_3 и R_2, L_4, C_5 включены параллельно, следовательно, в цепи возможен сложный резонанс токов. Для получения резонансного режима эквивалентное сопротивление двухполюсника L_4, C_5 должно иметь емкостный характер $Z_{e1} = -jX$. Эквивалентное сопротивление X

находится из условия резонанса $\text{Im}(Z_{dr}) = 0$, где Z_{dr} – входное сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} Z_{dr} &= \frac{Z_{L3} \cdot Z_{e2}}{Z_{L3} + Z_{e2}} = \frac{j40 \cdot (20 - jX)}{20 + j(40 - X)} = \\ &= 40 \cdot \frac{(X + j20) \cdot (20 - j(40 - X))}{20^2 + (40 - X)^2} = R_{dr} + jX_{dr} \end{aligned} \quad (3.1)$$

При резонансе токов реактивное сопротивление равно нулю $X_{dr} = 0$. Это условие дает уравнение для определения реактивного сопротивления X

$$X^2 - 40X + 400 = 0 \quad (3.2)$$

Решение уравнения дает $X = 20$.

Для получения емкостного характера сопротивления двухполюсника $Z_{e1} = -j20$ необходимо, чтобы сопротивление емкостной ветви параллельного двухполюсника L_4, C_5 было меньше сопротивления индуктивной ветви $|Z_{C5}| < |Z_{L4}|$

$$\begin{aligned} -j20 &= \frac{j10 \cdot (-jX_{C5})}{j(10 - X_{C5})} \rightarrow 200 - 20 \cdot X_{C5} = \\ &= 10 \cdot X_{C5} \rightarrow X_{C5} = 20/3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для получения резонанса токов емкость C_5 необходимо увеличить в три раза.

Другим способом получения резонанса является изменение частоты независимого источника при исходных параметрах элементов $L_3 = 254$ мГн, $L_4 = 63.6$ мГн, $R_2 = 20$ Ом, $C_5 = 318$ мкФ. На рисунке 3.6 показаны зависимости модуля $|Z_{dr}(f)|$ и реактивной составляющей входного сопротивления $X_{dr}(f)$ от частоты. Из графика $X_{dr}(f)$ следует,

резонанса токов можно добиться при частоте источника $f_0 = 40$ Гц, на которой $X_{dr}(f_0) = 0$. Пунктирной линией показано значение реактивного сопротивления на исходной частоте $f = 25$ Гц.

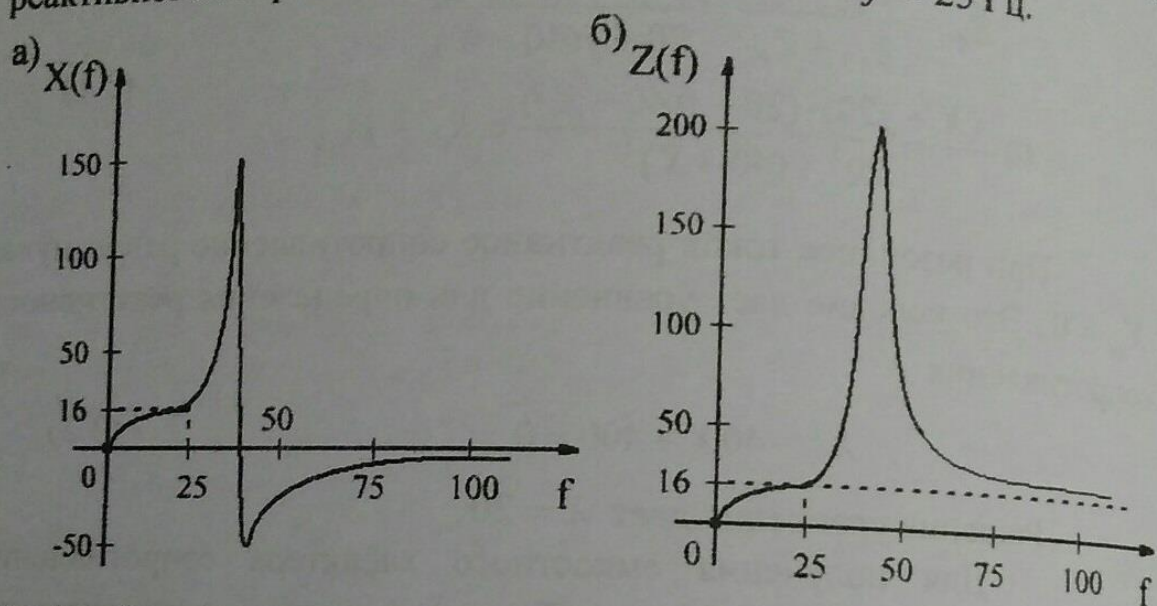


Рис.3.6. Частотная зависимость реактивной составляющей – а) и модуля входного сопротивления - б)

3.3. Контрольные вопросы

1. Из каких элементов состоит параллельная схема замещения двухполюсника при входной проводимости цепи $Y = 0.2 - j0.5$.

2. Определите активную составляющую входного сопротивления двухполюсника, если известно напряжение и известен ток на его входных зажимах:

$$u = 200\sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ) \text{ В}; \quad i = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - 50^\circ) \text{ А.}$$

3. Запишите комплексное сопротивление последовательного RC - контура на частоте $\omega = 1$ при известных параметрах элементов: $R = 6 \text{ Ом}$ и $C = 0.125 \text{ Ф}$.