

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»**

Кафедра Инженерного материаловедения и метрологии

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВЫХ
ЗАДАНИЙ по СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ**

для студентов направления подготовки
15.02.03 –«Технологические машины и оборудование»
Заочная форма обучения

Составитель
Васильева В. В.

Санкт-Петербург
2017

В рамках курсовой работы студент должен выполнить расчеты по задачам двух тем: «Геометрические характеристики плоских сечений» и «Внецентренное растяжение или сжатие».

Прежде чем приступать к выполнению задания необходимо проработать соответствующую тему, изучить ее теоретические основы, усвоить формулы, которыми в дальнейшем предстоит пользоваться при решении задач.

Методическое указание составлено таким образом, чтобы облегчить труд студентов над курсовой работой: перед решением каждой задачи дается краткий теоретический обзор темы со ссылками на учебную литературу, а также пример подробного решения задачи с пояснениями каждого действия.

Выбор варианта задачи

Задание на курсовую работу выдается преподавателем на установочной лекции.

Студент обязан выполнять задания курсовой работы в соответствии с номером своей зачетной книжки. Предпоследняя цифра номера соответствует номеру строки в таблице данных, а последняя цифра номера – номеру схемы для каждой задачи. Например: номер зачетной книжки 256963, тогда номер строки с данными будет 6, а номер схемы к задаче – 3.

Курсовая работа, выполненная не по шифру, оценивается **НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО**.

Порядок оформления курсовой работы

1. Все задачи, входящие в курсовую работу, должны быть выполнены на листах формата А4.

2. Форма титульного листа, листов для заданий представлена в приложении 1.

3. Условия каждой задачи должны быть выписаны полностью.

4. Заданные по условию задач схемы вычерчиваются карандашом в масштабе, также допускается выполнение курсовой работы и в электронном виде.

5. Решения задач давать с пояснениями и промежуточными расчетами.

6. Необходимо указывать размерность всех величин в системе СИ.

7. Необходимые чертежи вычерчиваются на миллиметровой бумаге или в электронном виде обязательно в масштабе.

8. После получения с проверки курсовой работы, студент должен исправить в ней отмеченные ошибки и выполнить все данные ему указания. Отдельно от работы исправления не рассматриваются.

Литература

1. Агапов В. П. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебник / Агапов В. П.– Электрон. текстовые данные.– М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2014.– 336 с. гриф УМО – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/26864>.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.

2. Атапин В. Г. Сопротивление материалов. Базовый курс. Дополнительные главы [Электронный ресурс]: учебник/ Атапин В. Г., Пель А. Н., Темников А. И.– Электрон. текстовые данные.– Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2011.– 507 с.– Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/45435>.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.

3. Техническая механика. Сопротивление материалов. (Теория и практика) [Электронный ресурс]: учебное пособие/ А. М. Бахолдин [и др.].– Электрон. текстовые данные.– Воронеж: Воронежский государственный университет инженерных технологий, 2013.– 173 с.– Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/47458>.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.

4. Кирсанова Э.Г. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Кирсанова Э. Г.– Электрон. текстовые данные.– Саратов:

Ай Пи Эр Медиа, 2012.– 110 с.– Режим доступа:
<http://www.iprbookshop.ru/733>.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.

5. Кидакоев А. М. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для тестового контроля/ Кидакоев А. М., Шайлиев Р. Ш.– Электрон. текстовые данные.– Черкесск: Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, 2014.– 60 с.– Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/27232>.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.

Геометрические характеристики плоских сечений

Деформации и напряжения в бруске существенно зависят от размеров и формы поперечного сечения. Во всех расчетных формулах присутствуют геометрические характеристики этих сечений. При осевом растяжении (сжатии) такой характеристикой является площадь сечения F . В теории кручения такими геометрическими характеристиками являются полярный момент инерции J_p и полярный момент сопротивления W_p . Для расчетов используются и другие геометрические характеристики сечений, которые будут рассмотрены ниже для сечения произвольной формы в системе координат (yoz) (рис.1.1).

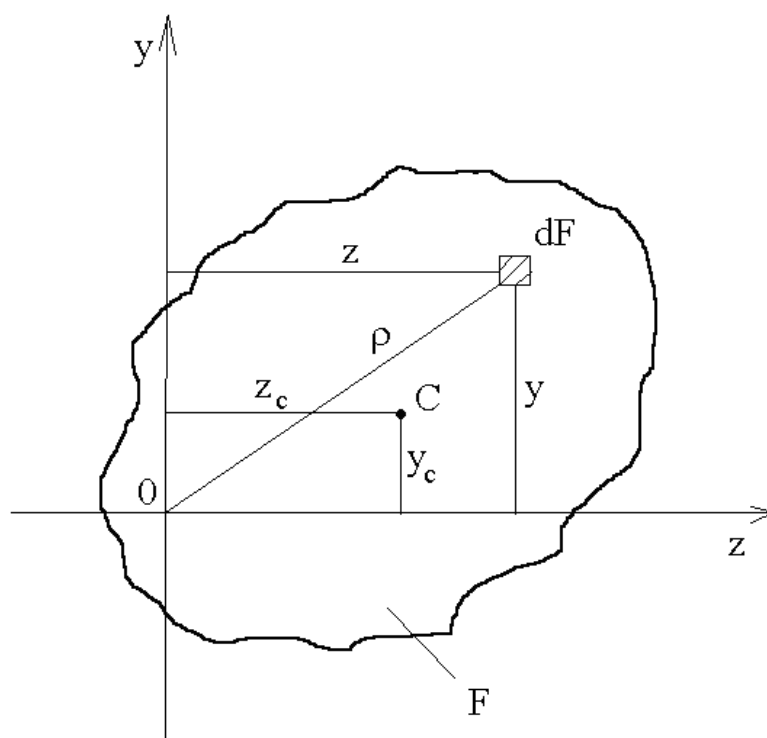


Рис.1.1.

Для сечения произвольной формы в системе координат (yoz) (рис. 1.1):

1. **Площадь** плоского сечения – F . Размерность – единицы длины во второй степени - $[м^2, см^2 \text{ и пр.}]$

$$F = \int_F dF \quad (1.1)$$

dF – элементарная площадка, имеющая координаты (y, z) ; C – центр тяжести сечения; ρ – расстояние от центра тяжести сечения до начала координат.

2. **Статические моменты площади** фигуры относительно осей y и z определяются следующим образом:

$$S_y = \int_F z dF ; \quad S_z = \int_F y dF \quad (1.2)$$

Размерность – единицы длины в третьей степени - [м³, см³ и пр.]

Величина статического момента может быть положительной, отрицательной и равной нулю.

Через статические моменты площади фигуры могут быть определены координаты центра тяжести составной фигуры:

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{yi}}{\sum_{i=1}^n F_i} ; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{zi}}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (1.3)$$

Если сечение можно разбить на простые фигуры, то статический момент сложной фигуры относительно какой-то оси может быть рассчитан как сумма статических моментов относительно этой оси каждой из простых фигур (*рис.1.2*).

Фигуру (*рис.1.2*) разобьем на прямоугольник и треугольник. Статический момент площади этой фигуры относительно оси z может быть вычислен как:

$$S_z = S_z^I + S_z^{II} \quad (1.4)$$

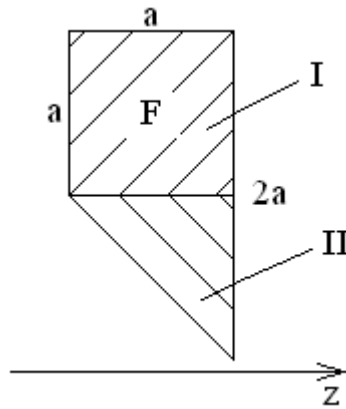


Рис.1.2

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *центральными осями*. Относительно любых центральных осей статические моменты сечения равны нулю.

3. **Осевые моменты инерции** фигуры относительно осей y и z определяются следующим образом:

$$J_y = \int_F z^2 dF ; \quad J_z = \int_F y^2 dF \quad (1.5)$$

Размерность – единицы длины в четвёрной степени - $[м^4, см^4 \text{ и пр.}]$

Величина осевого момента может быть только положительной.

4. **Центробежный момент инерции** фигуры относительно осей y и z определяется следующим образом:

$$J_{yz} = \int_F yz dF \quad (1.6)$$

Размерность – единицы длины в четвёрной степени - $[м^4, см^4 \text{ и пр.}]$

Величина центробежного момента может быть положительной, отрицательной и равной нулю. Равенство нулю центробежного момента инерции указывает на то, что оси y и z – *главные оси*.

Оси, проходящие через центр тяжести и относительно которых центробежный момент равен нулю, называются *главными центральными осями*.

5. **Полярный момент инерции** относительно начала координат (полюса) определяется следующим образом:

$$J_{\rho} = \int_F \rho^2 dF \quad (1.7)$$

Из рис.1.1:

$$\rho^2 = y^2 + z^2, \text{ тогда}$$

$$J_{\rho} = J_y + J_z \quad (1.8)$$

Размерность – единицы длины в четвёртой степени - [м⁴, см⁴ и пр.]

Величина полярного момента может быть только положительной.

6. **Радиусы инерции** сечения определяются следующим образом:

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}; \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}} \quad (1.9)$$

Размерность – единицы длины в первой степени - [м, см и пр.]

Указанные геометрические характеристики (1.1-1.6) зависят не только от формы и размеров сечения, но также и от расположения осей, относительно которых они рассчитываются.

Относительно произвольно расположенной оси величина моментов инерции может быть определена, следуя двум правилам:

- 1) переход к параллельным осям;
- 2) переход к повернутым осям.

За вспомогательные (отправные) оси удобно выбирать собственные центральные оси фигуры или оси, относительно которых значения моментов инерции известны.

Для плоских сечений, имеющих форму треугольника, круга, прямоугольника значения моментов инерции относительно центральных осей вычисляются через ширину (b), высоту (h) или радиус (R) сечения (см. [2-4]). Там же приведены выводы формул при переходе к параллельно расположенным и повернутым осям.

В этом разделе необходимо обратить внимание на понятие главных центральных осей инерции плоских сечений.

Из всех пар взаимноперпендикулярных осей, проведенных через центр тяжести плоской фигуры, только одна пара осей будет являться главными центральными осями. Эти оси обладают свойством экстремальности осевых моментов инерции, т. е. относительно одной из этих осей осевой момент инерции имеет минимальное значение (J_{min}) – это ось наименьшей жесткости; относительно другой оси – максимальное значение (J_{max}) – эта ось наибольшей жесткости.

Эти значения осевых моментов инерции J_{min} и J_{max} в дальнейшем встретятся в формулах расчета балок на изгиб и при расчетах на устойчивость.

При решении задачи, в которой необходимо определить положение главных центральных осей инерции и вычислить значения главных моментов инерции составного сечения, будут использованы все, перечисленные выше, геометрические характеристики и формулы.

Пример решения задачи на тему «Геометрические характеристики плоских сечений».

Дано: швеллер №18а и уголок 90×90×8. Найти положение главных центральных осей инерции составного сечения и вычислить значение главных моментов инерции сечения, составленного из указанных профилей (см. рис.1.3).

РЕШЕНИЕ

1. Разобьем составную фигуру на две: швеллер (I) и уголок (II). Выпишем необходимые данные из сортамента (ГОСТ 8240 – 56 и 8509 – 57):
для швеллера № 18а: $F_1 = 22,2\text{см}^2$; $J_{z_1} = 105\text{см}^4$; $J_{y_1} = 1190\text{см}^4$; $y_0 = 2,13\text{см}$;
для уголка 90×90×8: $F_2 = 13,9\text{см}^2$; $J_{y_2} = J_{z_2} = 106\text{см}^4$; $J_{\max} = 168\text{см}^4$; $J_{\min} = 43,8\text{см}^4$;
 $z_0 = 2,51\text{см}$;

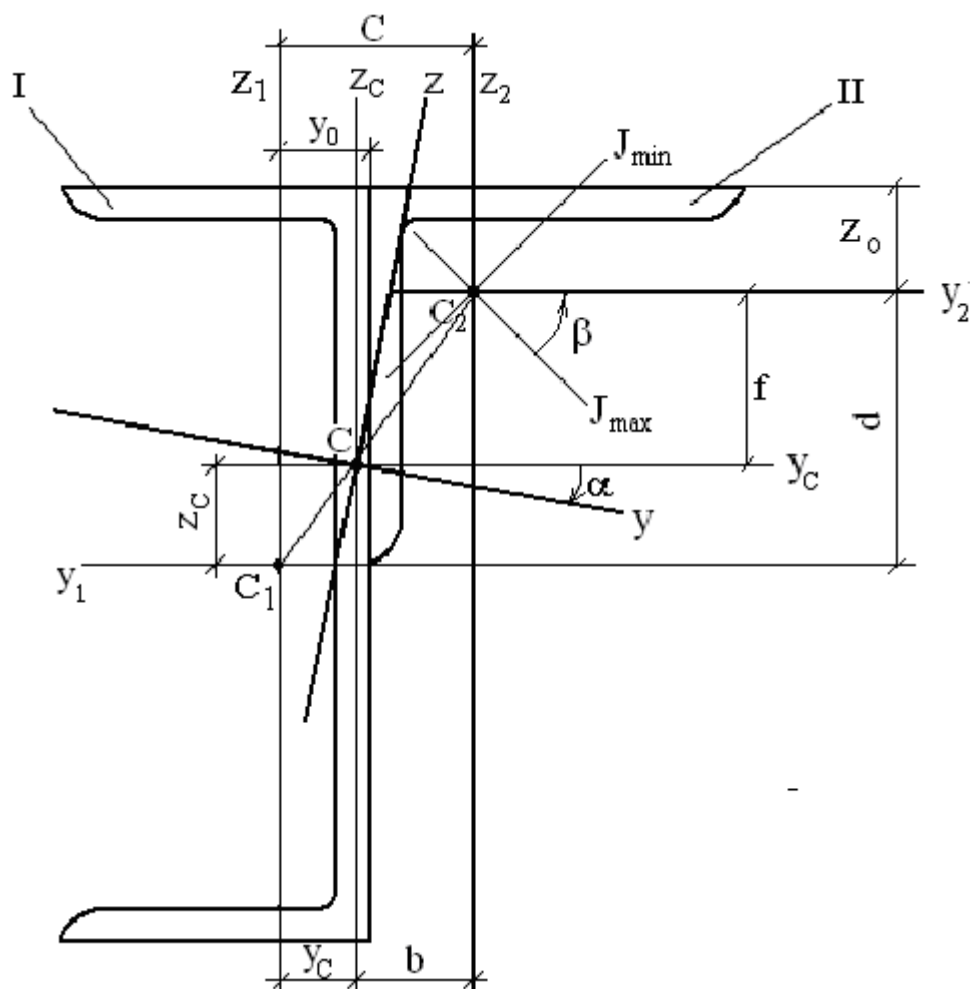


Рис.1.3 Составное сечение

$$\text{Площадь составного сечения } F = F_1 + F_2 = 22,2 + 13,9 = 36,1 \text{ см}^2. \quad (1)$$

2. Вычисление центра тяжести составного сечения.

Для вычисления координат центра тяжести составной фигуры необходимо выбрать вспомогательные оси. В качестве вспомогательных осей выбираем главные центральные оси швеллера y_I и z_I . Расстояния от этих осей до центра тяжести уголка:

$$c = y_0 + z_0 = 2,13 + 2,51 = 4,64 \text{ см} \quad (2)$$

$$d = \frac{h}{2} - z_0 = 9 - 2,51 = 6,49 \text{ см}.$$

Координаты центра тяжести y_c, z_c составного сечения вычислим через статические моменты составного сечения относительно выбранных вспомогательных осей:

$$y_c = \frac{\sum S_{z_i}}{\sum F}; \quad z_c = \frac{\sum S_{y_i}}{\sum F}, \quad (3)$$

$$\text{где } \sum S_{z_i} = S_{z_i}^I + S_{z_i}^{II}; \quad \sum S_{y_i} = S_{y_i}^I + S_{y_i}^{II}; \quad \sum F = F_1 + F_2 \quad (4)$$

Статические моменты швеллера (I) относительно осей y_I и z_I :

$$S_{y_1}^I = 0 \quad S_{z_1}^I = 0, \quad (5)$$

т.к. оси y_I и z_I – центральные оси швеллера.

Статические моменты уголка (II) относительно осей y_I и z_I :

$$S_{y_1}^{II} = F_2 d = 13,9 \cdot 6,49 = 90 \text{ см}^3 \quad (6)$$

$$S_{z_1}^{II} = F_2 c = 13,9 \cdot 4,64 = 64,5 \text{ см}^3.$$

Расстояния от осей y_I и z_I до центра тяжести сечения C , т.е. координаты центра тяжести составного сечения, вычислим по формуле (3) с учетом полученных значений (5) и (6).

$$y_c = \frac{S_{z_1}^{II}}{\sum F} = \frac{64,5}{36,1} \cong 1,80 \text{ см}; \quad (7)$$

$$z_c = \frac{S_{y_1}^{II}}{\sum F} = \frac{90}{36,1} \cong 2,50 \text{ см}.$$

Точкой C обозначим центр тяжести составной фигуры

3. Проведем через центр тяжести взаимно перпендикулярные центральные оси составного сечения z_C и y_C , параллельные осям y_1 и z_1 и осям y_2 и z_2 .

4. Для определения положения главных центральных осей составного сечения необходимо повернуть оси z_C y_C на угол α , величина которого находится по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{y_C z_C}}{J_{z_C} - J_{y_C}} \quad (8)$$

где $J_{y_C z_C}$ – центробежный момент инерции составного сечения относительно центральных осей y_C, z_C ;

J_{z_C}, J_{y_C} – осевые моменты инерции составного сечения относительно центральных осей z_C, y_C .

5. Определение осевых моментов инерции составного сечения J_{z_C} и J_{y_C} относительно центральных осей z_C, y_C .

Пользуясь формулами перехода к параллельным осям, определим осевые моменты инерции составного сечения относительно центральных осей y_C и z_C как сумму осевых моментов инерции относительно этих осей каждой из фигур (швеллера и уголка).

$$J_{y_C} = J_{y_C}^I + J_{y_C}^{II}, \quad (9)$$

где J_{y_C} – осевой момент инерции составного сечения относительно центральной оси y_C ; $J_{y_C}^I$ – осевой момент инерции швеллера относительно центральной оси y_C ; $J_{y_C}^{II}$ – осевой момент инерции уголка относительно центральной оси y_C .

Для определения осевого момента инерции $J_{y_C}^I$ используем формулу перехода от оси y_1 к оси y_C , z_C – расстояние между этими осями; для

определения момента инерции $J_{y_c}^{\text{II}}$ используем формулу перехода от оси y_2 к оси y_c , f – расстояние между этими осями.

$$J_{y_c}^{\text{I}} = J_{y_1}^{\text{I}} + F_1 \cdot z_c^2 = 1190 + 22,2 \cdot 2,5^2 = 1328,75 \text{ см}^4$$

$$J_{y_c}^{\text{II}} = J_{y_2}^{\text{II}} + F_2 \cdot f^2 = 106 + 13,9(6,49 - 2,5)^2 = 326,25 \text{ см}^4$$

$$J_{y_c} = 1328,75 + 326,25 = 1655 \text{ см}^4$$

$$J_{z_c} = J_{z_c}^{\text{I}} + J_{z_c}^{\text{II}}, \quad (10)$$

где J_{z_c} – осевой момент инерции составного сечения относительно центральной оси z_c ; $J_{z_c}^{\text{I}}$ – осевой момент инерции швеллера относительно центральной оси z_c ; $J_{z_c}^{\text{II}}$ – осевой момент инерции уголка относительно центральной оси z_c .

Для определения осевого момента инерции $J_{z_c}^{\text{I}}$ используем формулу перехода от оси z_1 к оси z_c , y_c – расстояние между этими осями; для определения осевого момента инерции $J_{z_c}^{\text{II}}$ используем формулу перехода от оси z_2 к оси z_c , b – расстояние между этими осями.

$$J_{z_c}^{\text{I}} = J_{z_1}^{\text{I}} + F_1 \cdot y_c^2 = 105 + 22,2 \cdot 1,8^2 = 176,93 \text{ см}^4$$

$$J_{z_c}^{\text{II}} = J_{z_2}^{\text{II}} + F_2 \cdot b^2 = 106 + 13,9 \cdot 2,84^2 = 218,11 \text{ см}^4$$

$$J_{z_c} = 176,9 + 218,1 = 395 \text{ см}^4$$

6. Определение центробежного момента инерции составного сечения $J_{y_c z_c}$ относительно центральных осей y_c , z_c .

Центробежный момент инерции составного сечения $J_{y_c z_c}$ относительно центральных осей z_c , y_c определим как сумму центробежных моментов инерции относительно этих осей каждой из фигур (швеллера и уголка).

$$J_{y_c z_c} = J_{y_c z_c}^{\text{I}} + J_{y_c z_c}^{\text{II}}, \quad (11)$$

где $J_{y_c z_c}$ — центробежный момент инерции составного сечения относительно центральных осей y_c, z_c ; $J_{y_c z_c}^I$ — центробежный момент инерции швеллера относительно центральных осей y_c, z_c ; $J_{y_c z_c}^{II}$ — центробежный момент инерции уголка относительно центральных осей y_c, z_c .

Для определения центробежного момента инерции $J_{y_c z_c}^I$ используем формулу перехода от осей y_1, z_1 к осям y_c, z_c ; y_c, z_c — расстояния между этими осями. Так как оси y_1, z_1 — главные центральные оси швеллера, то $J_{y_1 z_1} = 0$.

$$J_{y_c z_c}^I = J_{y_1 z_1} + F_1 \cdot z_c \cdot y_c = 22,2 \cdot 2,5 \cdot 1,8 = 101,25 \text{ см}^4$$

Для определения центробежного момента инерции $J_{y_c z_c}^{II}$ используем формулу перехода от осей y_2, z_2 к осям y_c, z_c ; b, f — расстояния между этими осями.

$$J_{y_c z_c}^{II} = J_{y_2 z_2} + F_2 \cdot b \cdot f$$

Оси y_2 и z_2 уголка — не главные, т.е. центробежный момент инерции $J_{y_2 z_2}$ относительно этих осей не равен нулю. Для вычисления $J_{y_2 z_2}$ используем значения осевых моментов инерции уголка J_{\min} и J_{\max} относительно его главных центральных осей и формулу перехода к повернутым осям y_2 и z_2 . Оси уголка J_{\max}, J_{\min} поворачиваем в положение осей y_2 и z_2 на угол β (см. рис.1.3).

$$J_{y_2 z_2} = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2} \sin 2\beta, \quad \text{где } \angle \beta = 45^\circ$$

$$J_{y_2 z_2} = \frac{168 - 43,8}{2} \sin 90^\circ = 62,1 \text{ см}^4$$

$$J_{y_c z_c}^{II} = 62,1 + 13,9 \cdot 2,84 \cdot 3,99 = 219,6 \text{ см}^4$$

Таким образом, центробежный момент инерции составного сечения относительно центральных осей y_C и z_C будет равен:

$$J_{y_C z_C} = 101,25 + 219,6 = 320,8 \text{ см}^4$$

7. Определение угла наклона главных центральных осей инерции y, z составного сечения к центральным осям y_C и z_C :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{y_C z_C}}{J_{z_C} - J_{y_C}} = \frac{2 \cdot 320,8}{395 - 1655} = -0,509,$$

$$2\alpha = -27^\circ; \quad \alpha = -13^\circ 30'; \quad \sin \alpha = -0,233; \quad \cos \alpha = 0,972;$$

$$\sin 2\alpha = -0,454; \quad \cos 2\alpha = 0,891.$$

8. Изображение положения главных центральных осей составного сечения y, z .

От оси y_C откладываем по часовой стрелке угол α , т. к. угол имеет отрицательное значение ($\alpha = -13^\circ 30'$) и из центра тяжести сечения C проводим главные центральные оси составного сечения y, z .

9. Определение главных моментов инерции сечения J_y, J_z .

Для вычисления значений главных моментов инерции сечения используются формулы перехода к повернутым осям:

$$J_y = J_{y_C} \cos^2 \alpha + J_{z_C} \sin^2 \alpha - J_{y_C z_C} \sin 2\alpha = 1655 \cdot 0,972^2 + 395 \cdot 0,233^2 + 320,8 \cdot 0,454 = 1732 \text{ см}^4;$$

$$J_z = J_{y_C} \sin^2 \alpha + J_{z_C} \cos^2 \alpha + J_{y_C z_C} \sin 2\alpha = 1655 \cdot 0,233^2 + 395 \cdot 0,972^2 - 320,8 \cdot 0,454 = 317 \text{ см}^4.$$

10. Проведение проверки полученных результатов.

$$1) J_y + J_z = J_{y_C} + J_{z_C};$$

$$J_y + J_z = 1732 + 317 = 2049 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_C} + J_{z_C} = 1655 + 395 = 2050 \text{ см}^4$$

$$2) J_{yz} = 0;$$

$$J_{yz} = \frac{J_{y_C} - J_{z_C}}{2} \sin 2\alpha + J_{y_C z_C} \cos 2\alpha = \frac{1655 - 395}{2} \cdot (-0,454) + 320,8 \cdot 0,891 \approx 0.$$

ОТВЕТ: $J_{max} = 1732 \text{ см}^4, J_{min} = 317 \text{ см}^4$.

ЗАДАЧА

Для заданного в табл. 1 поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнобокого уголка, или из швеллера и двутавра (рис. 1.4), требуется:

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) найти осевые (экваториальные) и центробежные моменты инерции относительно случайных осей, проходящих через центр тяжести (z_c и y_c);
- 3) определить направление главных центральных осей (u и v);
- 4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей;
- 5) вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

Т а б л и ц а 1

Номер строки	Швеллер	Равнобокий уголок	Двутавр
1	14	80×80×8	12
2	16	80×80×6	14
3	18	90×90×8	16
4	20	90×90×7	18
5	22	90×90×6	20a
6	24	100×100×8	20
7	27	100×100×10	22a
8	30	100×100×12	22
9	33	125×125×10	24a
0	36	125×125×12	24

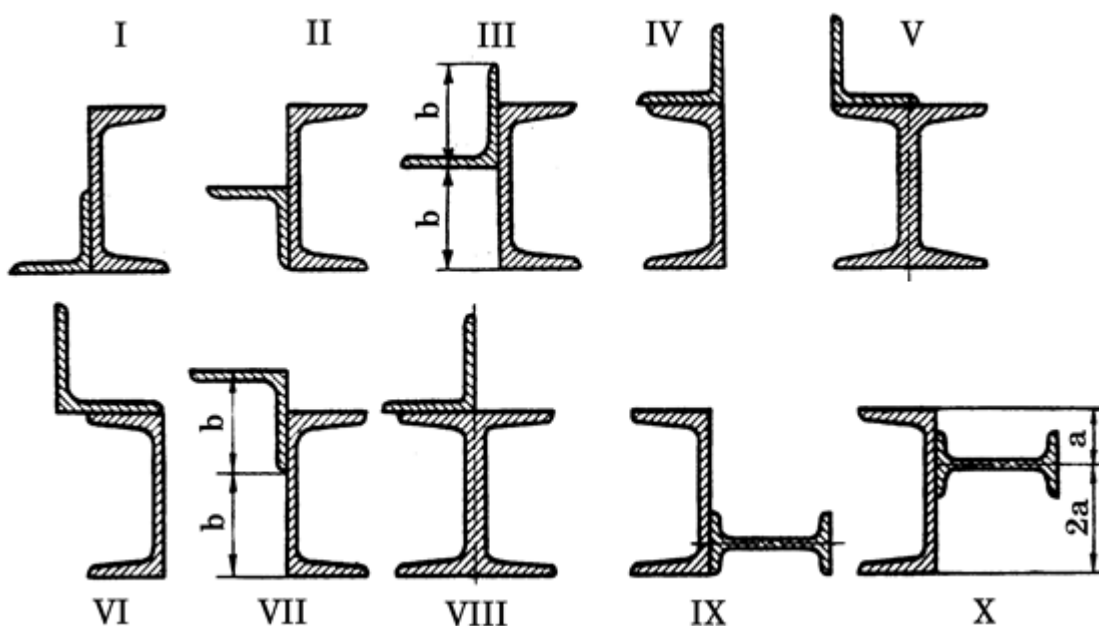


Рис. 1.4

Внецентренное сжатие или растяжение

Практически важным случаем сложения деформаций от изгиба и от продольных сил является внецентренное сжатие или растяжение, вызываемое одними продольными силами. Этот вид деформации получается при действии на стержень двух равных внешних сил P , противоположно направленных по прямой AA' , параллельной оси стержня (оси x) (рис. 2.1 а). Центр тяжести сечения обозначим точкой O ; точку приложения внецентренной силы – A , координаты точки A – y_p и z_p . Расстояние от центра тяжести сечения до точки A , т.е. $OA=e$ называется эксцентриситетом.

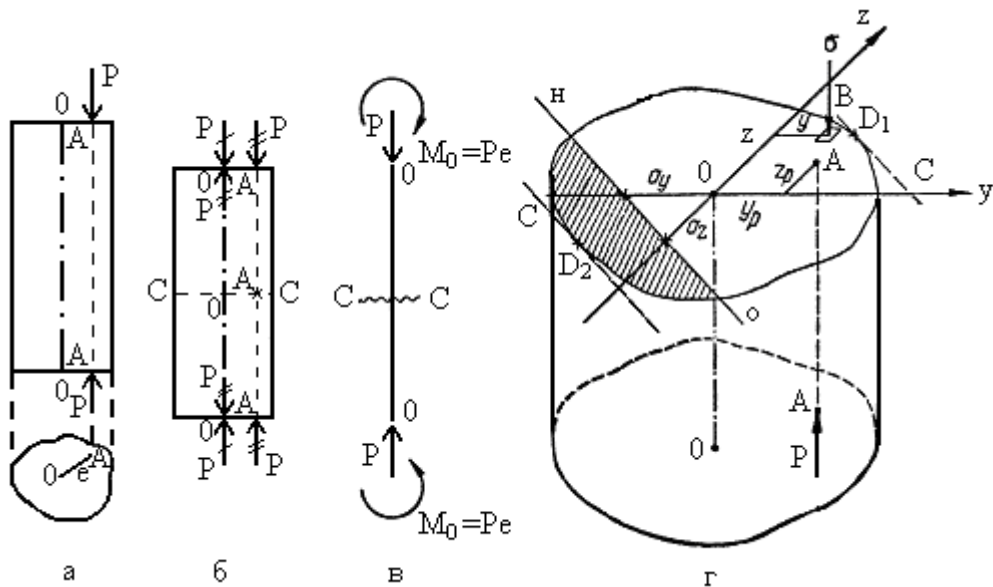


Рис. 2.1. а - расчетная схема; б - преобразование нагрузок; в - приведенная расчетная схема; г - механизм исследования напряжений

Рассмотрим сначала случай внецентренного сжатия, как имеющий большее практическое значение. Нашей задачей является нахождение напряжений в стержне и проверка его прочности. Для решения этой задачи приложим в точках O по две равные по величине и противоположно направленные силы P , совпадающие с величиной внецентренной силы (рис. 2.1, б). Это не нарушит равновесия стержня в целом и не изменит напряжений в его сечениях. Силы P , зачеркнутые один раз, вызовут осевое сжатие, а пары

сил P , зачеркнутые дважды, вызовут чистый изгиб моментами $M_0 = P \cdot e$. Расчетная схема стержня показана на *рис. 2.1, в*. Так как плоскость действия изгибающих пар сил OA может не совпадать ни с одной из главных плоскостей инерции стержня, то в общем случае имеет место комбинация продольного сжатия и чистого косоугольного изгиба. Так как при осевом сжатии и чистом изгибе напряжения во всех сечениях одинаковы, то проверку прочности можно произвести для любого сечения, например в сечении $C - C$ (*рис. 2.1, б, в*). Применяя метод сечений, отбросим верхнюю часть стержня и оставим нижнюю (*рис. 2.1, г*). Обозначим главными осями инерции сечения оси Oy и Oz . Координаты точки A , точки пересечения линии действия сил P с плоскостью сечения, – пусть будут y_p и z_p . Условимся выбирать положительные направления осей Oy и Oz таким образом, чтобы точка A оказалась в первом квадранте. Тогда y_p и z_p в расчётах всегда будут иметь положительные значения.

Запишем уравнение для определения нормального напряжения σ в любой точке сечения (пусть точке B) с координатами z и y . Напряжения в сечении $C - C$ будут складываться из напряжений осевого сжатия силой P и напряжений от чистого косоугольного изгиба парами сил, создающими момент $P \cdot e$, где $e = OA$.

Сжимающие напряжения от осевых сил P в любой точке равны $\frac{P}{F}$, где F – площадь поперечного сечения стержня; что касается косоугольного изгиба, то заменим его действием изгибающих моментов в главных плоскостях. Изгиб в плоскости zOy вокруг оси Oz будет вызываться моментом $P \cdot y_p$ и даст в точке B нормальное сжимающее напряжение $\frac{P \cdot y_p \cdot y}{J_z}$.

Точно так же нормальное напряжение в точке B от изгиба в главной плоскости xOz , вызванное моментом $P \cdot z_p$, будет сжимающим и выразится формулой $\frac{P \cdot z_p \cdot z}{J_y}$.

Суммируя напряжения от осевого сжатия и двух плоских изгибов и считая сжимающие напряжения отрицательными, получаем следующую формулу для расчета напряжения в точке B :

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{P \cdot y_p \cdot y}{J_z} - \frac{P \cdot z_p \cdot z}{J_y} = -P \left(\frac{1}{F} + \frac{y_p \cdot y}{J_z} + \frac{z_p \cdot z}{J_y} \right) \quad (2.1)$$

По формуле (2.1) может быть вычислено значение нормального напряжения в любой точке любого сечения стержня. Для этого следует вместо y и z подставить координаты той точки, в которой определяется напряжения. Следует уточнить, что эти координаты должны быть определены с учётом их знаков относительно главных осей инерции сечения.

В случае внецентренного растяжения знаки всех составляющих нормального напряжения в точке B изменятся на обратные. Поэтому для того, чтобы получать правильный знак напряжений как при внецентренном сжатии, так и при внецентренном растяжении, нужно, кроме знаков координат y и z , учитывать также и знак силы P . При внецентренном растяжении в формуле (2.1) перед выражением $P \left(\frac{1}{F} + \frac{y_p \cdot y}{J_z} + \frac{z_p \cdot z}{J_y} \right)$ должен стоять знак плюс, при сжатии – минус. Полученной формуле можно придать несколько иной вид; вынесем за скобку множитель $\frac{P}{F}$; получим

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p \cdot y}{J_z} + \frac{z_p \cdot z}{J_y} \right) \quad (2.2)$$

i_z и i_y – радиусы инерции сечения относительно главных осей (вспомним, что $J_z = i_z^2 \cdot F$ и $J_y = i_y^2 \cdot F$).

Для определения точек в сечении с наибольшими значениями напряжений (опасных точек в сечении) следует так выбирать y и z , чтобы σ достигло наибольшей величины. Переменными в формулах (2.1) и (2.2)

являются два последних слагаемых, отражающих вклад изгиба. А так как при изгибе наибольшие напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, то и в этом случае необходимо определить положение нейтральной оси.

2.1 Определение положения нейтральной оси

Обозначим координаты точки, принадлежащей нейтральной оси через y_0 и z_0 . Так как в точках нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю, то после подстановки координат y_0 и z_0 в формулу (2.1) левая часть уравнения обращается в ноль, т.е. получаем:

$$0 = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z_0}{i_y^2} \right) \quad \text{или}$$

$$1 + \frac{y_p \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z_p \cdot z_0}{i_y^2} = 0 \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) и есть уравнение нейтральной оси. Очевидно, мы получили уравнение прямой (точнее, уравнение прямой в отрезках), не проходящей через центр тяжести сечения. Чтобы построить эту прямую, необходимо вычислить отрезки, отсекаемые ею на главных осях сечения y и z , соответственно. Обозначим эти отрезки a_y и a_z . Чтобы найти отрезок a_y , отсекаемый на оси y , надо в уравнении (2.3) положить

$$z_0 = 0; y_0 = a_y,$$

тогда мы получаем

$$1 + \frac{y_p \cdot a_y}{i_z^2} = 0 \quad \text{и} \quad a_y = -\frac{i_z^2}{y_p} \quad (2.4)$$

Подобным же образом, полагая что

$$y_0 = 0; z_0 = a_z,$$

находим отрезок a_z , отсекаемый на оси z ,

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_p} \quad (2.5)$$

Если величины y_p и z_p положительны, то отрезки a_y и a_z будут всегда отрицательны, т. е. нейтральная ось будет расположена по другую сторону центра тяжести сечения, чем точка A (рис. 2.1,з).

Нейтральная ось делит сечение на две части – сжатую и растянутую; на рис. 2.1г растянутая часть сечения заштрихована.

2.2 Определение опасных точек в сечении

Проводя к контуру сечения касательные, параллельные нейтральной оси, получаем две точки D_1 и D_2 , в которых будут возникать наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения (рис. 2.1,з).

Определяя координаты y и z этих точек и подставляя их значения в формулу (2.1), вычисляем величины наибольших напряжений в точках D_1 и D_2 :

$$\sigma_{(1,2)} = -P \left(\frac{1}{F} + \frac{y_p \cdot y_{(1,2)}}{J_z} + \frac{z_p \cdot z_{(1,2)}}{J_y} \right) \quad (2.6)$$

2.3 Условие прочности при внецентренном сжатии или растяжении

Если материал стержня одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности имеет следующий вид:

$$|\sigma_{max}| = P \left(\frac{1}{F} + \frac{y_p \cdot y_1}{J_z} + \frac{z_p \cdot z_1}{J_y} \right) \leq [\sigma] \quad (2.7)$$

Для поперечных сечений с выступающими углами, у которых обе главные оси инерции являются осями симметрии (прямоугольник, двутавр и др.) $y_1 = y_{max}$ и $z_1 = z_{max}$. Поэтому формула упрощается, и мы имеем

$$|\sigma_{max}| = P \left(\frac{1}{F} + \frac{y_p}{W_z} + \frac{z_p}{W_y} \right) \leq [\sigma] \quad (2.8)$$

Если же материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и

сжатию, то необходимо проверить прочность стержня как в растянутой, так и в сжатой зонах.

Однако может случиться, что и для таких материалов будет достаточно одной проверки прочности. Из формул (2.4) и (2.5) видно, что положение точки A приложения силы и положение нейтральной оси связаны: чем ближе подходит точка A к центру сечения, тем меньше величины y_p и z_p , и тем больше отрезки a_y и a_z . Таким образом, с *приближением* точки A к центру тяжести сечения нейтральная ось *удаляется* от него, и наоборот. Поэтому при некоторых положениях точки A нейтральная ось будет проходить *вне* сечения и все сечение будет работать на напряжения одного знака. Очевидно, в этом случае всегда достаточно проверить прочность материала в точке D_1 .

Пример решения задачи на тему «Внецентренное растяжение или сжатие»

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на *рис. 2.2*, имеет размеры $a = 3$ см, $b = 2$ см и сжимается продольной силой P , приложенной в точке A . Допускаемые нормальные напряжения: на сжатие $[\sigma_c] = 120$ МПа; на растяжение $[\sigma_p] = 30$ МПа.

Требуется:

1) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив величины этих напряжений через P и размеры сечения;

2) найти допускаемую нагрузку (P) при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях чугуна на сжатие $[\sigma_c]$ и на растяжение $[\sigma_p]$.

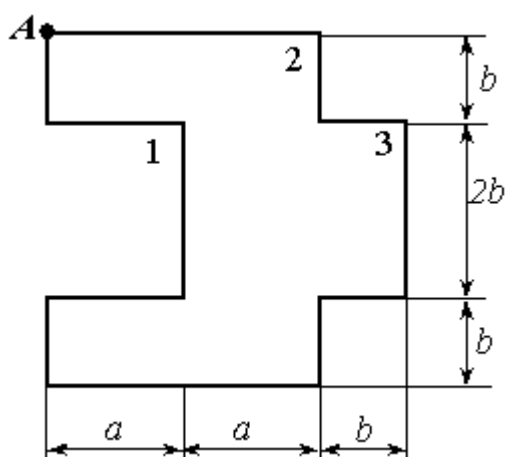


Рис. 2.2 Схема поперечного сечения стержня. A - точка приложения сжимающей внешней силы

РЕШЕНИЕ

Уравнение для определения нормального напряжения в точке сечения стержня, имеющей координаты y и z , запишется в виде

$$\sigma_y(y, z) = \frac{P}{F} + \frac{P y_p y}{J_{y_c}} + \frac{P z_p z}{J_{z_c}}$$

где Y_p, Z_p – координаты точки приложения силы P (точки A); F – площадь поперечного сечения стержня; J_{y_c}, J_{z_c} – главные моменты инерции сечения.

1. Определение координат центра тяжести сечения

Обозначим координаты центра тяжести сечения Y_c и Z_c . (§7 «Геометрические характеристики плоских сечений», учебное пособие, ч.1).

Разбиваем составное сечение на три прямоугольника (рис. 2.3): 1 – прямоугольник со сторонами $(a, 2b)$, означающий вырез в прямоугольнике 2, что площадь и статический момент которого следует брать со знаком минус; 2 – прямоугольник со сторонами $(2a, 4b)$, дополненный прямоугольником 1; 3 – прямоугольник со сторонами $(b, 2b)$. Индексы 1, 2, 3 относятся соответственно к элементарным фигурам, на которые разбито заданное составное сечение.

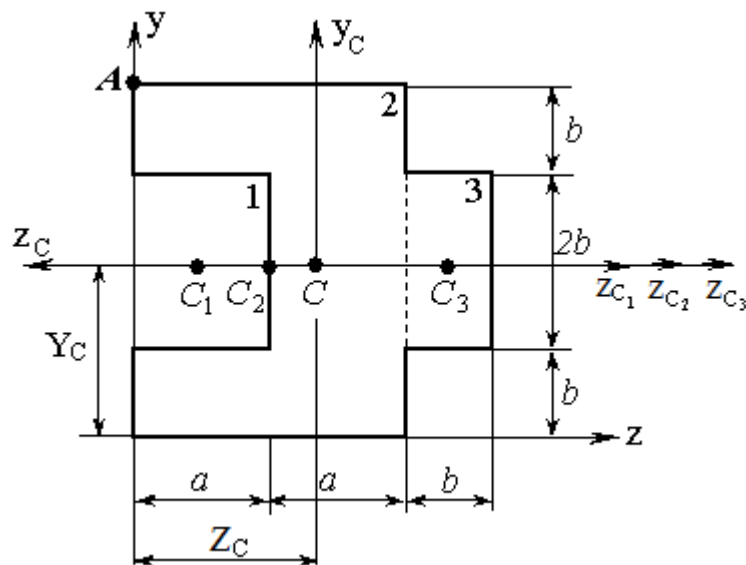


Рис. 2.3 Схема поперечного сечения стержня

Вводим вспомогательную систему координат uz (рис. 2.3). Тогда координата центра тяжести составного сечения определяется следующим образом:

$$Y_C = \frac{\sum S_z}{\sum F}$$

где S_z – статический момент составного сечения относительно вспомогательной оси z ; F – площадь всего составного сечения, полученная суммированием площадей трёх отдельных прямоугольников.

$$F_1 = -12 \text{ см}^2; \quad F_2 = 48 \text{ см}^2; \quad F_3 = 8 \text{ см}^2.$$

$$S_z = S_z^1 + S_z^2 + S_z^3 = -F_1 y_{c1} + F_2 y_{c2} + F_3 y_{c3}$$

S_z^1, S_z^2, S_z^3 – статические моменты площадей трёх прямоугольников, соответственно.

Y_{C1}, Y_{C2}, Y_{C3} – координаты центров тяжести трёх прямоугольников, соответственно. $Y_{C1} = 1,5 \text{ см}, Y_{C2} = 3 \text{ см}, Y_{C3} = 7 \text{ см}.$

Подставляя исходные данные, получим:

$$S_z = -a \cdot 2b \cdot \frac{a}{2} + 2a \cdot 4b \cdot a + b \cdot 2b \left(2a + \frac{b}{2} \right) = 182 \text{ см}^3$$

$$Y_C = \frac{S_z}{-F_1 + F_2 + F_3} = \frac{182 \text{ см}^3}{44 \text{ см}^2} = 4,136 \text{ см}$$

Ввиду симметрии исходного сечения относительно горизонтальной оси y_c сечения $z_c = 2b = 4 \text{ см}.$

Итак, центр тяжести составного сечения (точка С) имеет координаты $Y_C = 4,14 \text{ см}, Z_C = 4 \text{ см}.$ Через найденный центр тяжести проводим главные центральные оси y_c и $z_c.$

2. Определение главных моментов инерции составного сечения.

Для определения напряжений по формуле (2.6) необходимо определить значения главных моментов инерции составного сечения $J_{y_c}, J_{z_c}.$

Ввиду совпадения осей y_c и y_{c1}, y_{c2}, y_{c3} главный момент инерции составного сечения J_{y_c} относительно оси y_c находится сложением (вычитанием) моментов инерции трёх прямоугольников, т.е.

$$\begin{aligned} J_{y_c} &= -J_{y_{c1}}^1 + J_{y_{c2}}^2 + J_{y_{c3}}^3 = -\frac{a(2b)^3}{12} + \frac{2a(4b)^3}{12} + \frac{b(2b)^3}{12} = \\ &= -\frac{3 \cdot 4^3}{12} + \frac{6 \cdot 8^3}{12} + \frac{2 \cdot 4^3}{12} = 250,7 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

Для вычисления момента инерции J_{z_c} относительно оси z_c используем формулу для определения момента инерции при переходе к параллельным осям:

$$\begin{aligned}
 J_{z_c} &= -J_{z_{c1}}^1 + J_{z_{c2}}^2 + J_{z_{c3}}^3 = -(J_{z_{c1}}^1 + l_1^2 \cdot F_1) + J_{z_{c2}}^2 + l_2^2 \cdot F_2 + J_{z_{c3}}^3 + l_3^2 \cdot F_3 = \\
 &= -\left(\frac{4 \cdot 3^3}{12} + (1,5 - 4,136)^2 \cdot 12\right) + \frac{8 \cdot 6^3}{12} + (3 - 4,136)^2 \cdot 48 + \frac{4 \cdot 2^3}{12} + \\
 &+ (7 - 4,136)^2 \cdot 8 = 181,8 \text{ см}^4
 \end{aligned}$$

где через l_1, l_2, l_3 обозначены соответственно расстояния между осью z_c и осями z_{c1}, z_{c2}, z_{c3} .

3. Определение положения нейтральной оси

Определяем координаты точки приложения силы P (точки A) в осях y_c и z_c (рис. 2.4):

$$Y_p = 4 \text{ см};$$

$$Z_p = 4,136 \text{ см.}$$

Вычисляем значения квадратов радиусов инерции i_y^2 и i_z^2 :

$$i_y^2 = \frac{J_{y_c}}{F} = 5,7 \text{ см}^2$$

$$i_z^2 = \frac{J_{z_c}}{F} = 4,14 \text{ см}^2$$

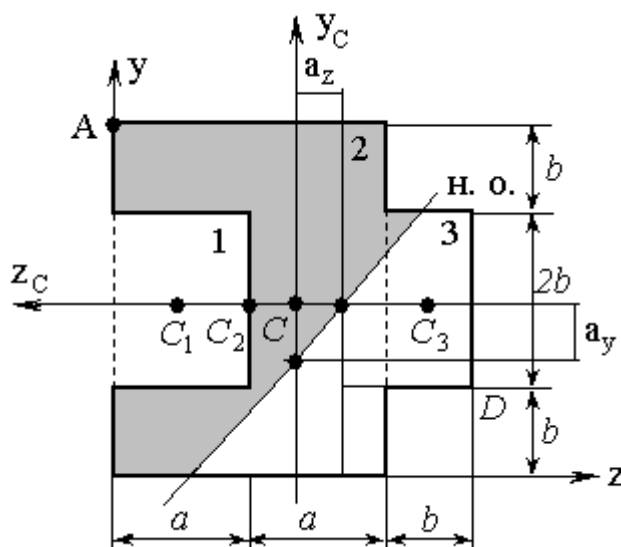


Рис. 2.4. Положение нейтральной оси и деление областей сжимающих и растягивающих нагрузок.

Положение нейтральной оси определяем по формулам (2.4, 2.5), т.е. по отрезкам, которые отсекает эта линия на осях z_c и y_c .

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_p} = \frac{4,14}{4,14} = 1 \text{ см};$$

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_p} = \frac{5,7}{4,136} = 1,4 \text{ см}$$

a_y – отрезок, который отсекает нейтральная линия на оси y_c ;

a_z – отрезок, который отсекает нейтральная линия на оси z_c .

Откладываем найденные отрезки на соответствующих осях с учётом отрицательного их знака (рис. 2.4). Проводим нейтральную линию и показываем области сжатия (заштрихована) и растяжения.

4. Нахождение наибольших напряжений и допускаемых нагрузок.

Для определения положения опасных точек в сечении следует параллельно нейтральной оси провести линии, касающиеся контура сечения. Таким образом, будут найдены точки сечения, расположенные по обе стороны от нейтральной оси и наиболее удаленные от нее, которые и являются опасными. В данной задаче опасными точками являются: A – в зоне сжатия (заштрихованная область), D – в зоне растяжения.

Подставляем в формулу (2.6) вычисленные значения моментов инерции, также координаты точки приложения нагрузки и координаты точек, где возникают наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения.

В точке A ($-4,136$; 4) возникает наибольшее напряжение сжатия, которое определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{min} &= -P \left(\frac{1}{F} + \frac{z_p z_A}{J_{y_c}} + \frac{y_p y_A}{J_{z_c}} \right) = -P \left(\frac{1}{44} + \frac{4 \cdot 4}{250,7} + \frac{4,136 \cdot 4,136}{181,8} \right) = \\ &= -0,181P \end{aligned}$$

Из условия прочности при сжатии

$$\sigma_{cmax} = |\sigma_{min}| = 0,181P \cdot 10^4 \leq [\sigma_c]$$

множитель 10^4 здесь переводит квадратные, сантиметры в метры.

Допускаемая нагрузка

$$[P_c] \leq \frac{120 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2}{0,181 \cdot 10^4 \text{ м}^{-2}} = 66300 \text{ Н} = 66,3 \text{ кН}$$

В точке $D (3,864; -2)$ возникает максимальное напряжение растяжения, которое определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= -P \left(\frac{1}{F} + \frac{z_p z_D}{J_{y_c}} + \frac{y_p y_D}{J_{z_c}} \right) = -P \left(\frac{1}{44} + \frac{4 \cdot 2}{250,7} + \frac{4,136 \cdot 3,864}{181,8} \right) = \\ &= 0,0971 P \end{aligned}$$

Из условия прочности при растяжении

$$\sigma_{P_{max}} = 0,0971 \cdot 10^4 \leq [\sigma_p]$$

Допускаемая нагрузка

$$[P_p] \leq \frac{30 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2}{0,0971 \cdot 10^4 \text{ м}^{-2}} = 30900 \text{ Н} = 30,9 \text{ кН}$$

Выбирая меньшую из двух нагрузок, окончательно принимаем

$$[P_p] = 30,9 \text{ кН}$$

ОТВЕТ: предельная сжимающая нагрузка на стержень равна 30,9 кН.

ЗАДАЧА

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на *рис. 2.5*, сжимается продольной силой P , приложенной в точке A . Требуется:

1) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через P , и размеры сечения; 2) найти допускаемую нагрузку P при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие $[\sigma_c]$ и растяжение $[\sigma_p]$. Данные взять из табл. 2.

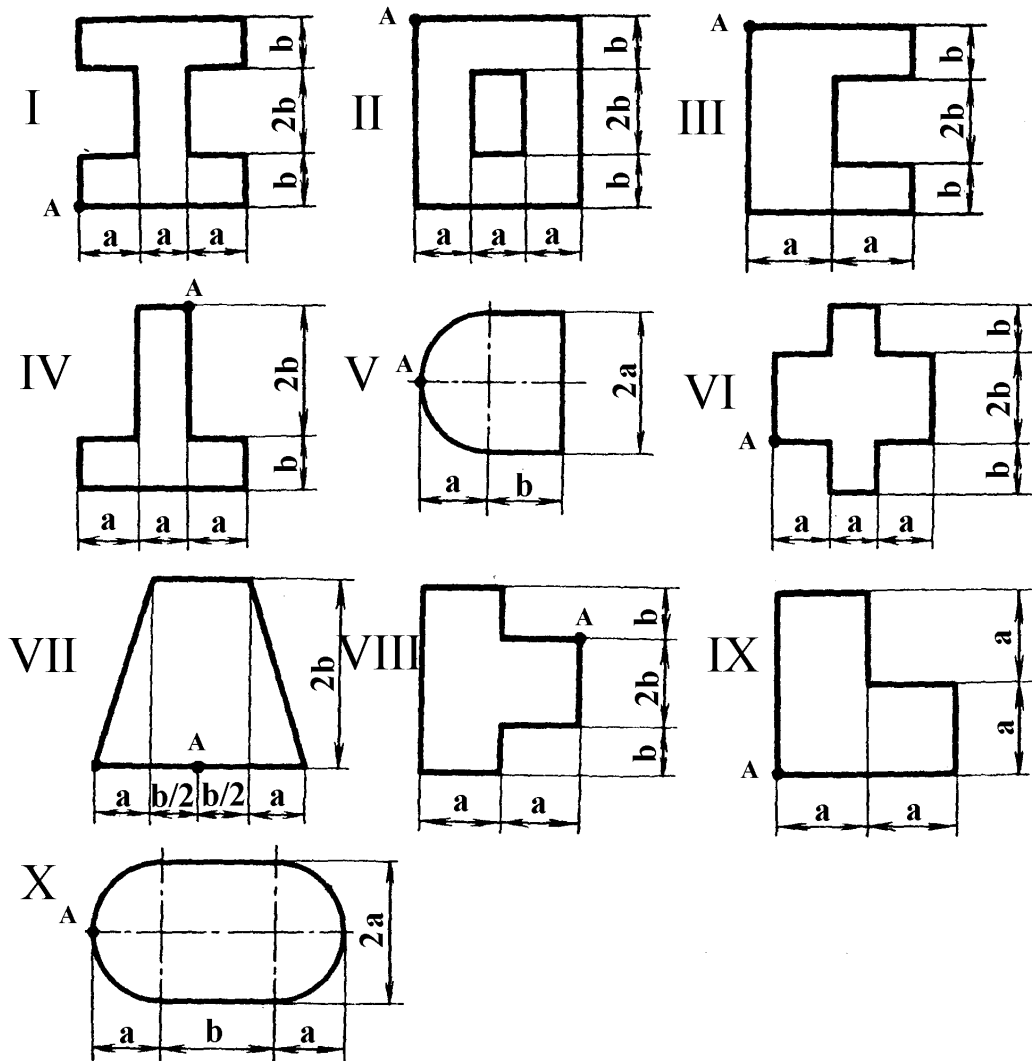


Рис. 2.5

Таблица 2

Номер строки	a	b	$[\sigma_c]$	$[\sigma_p]$
	см		МПа	
1	6	6	110	21
2	2	2	120	22
3	3	3	130	23
4	4	4	140	24
5	5	5	150	25
6	6	6	60	26
7	2	2	70	27
8	3	3	80	28
9	4	4	90	29
0	5	5	100	30

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
 высшего профессионального образования
 «Санкт-Петербургский государственный университет промышленных
 технологий и дизайна»

Институт	<i>Информационных технологий и автоматизации</i>
Направление	<i>15.03.02</i>
Кафедра	<i>Инженерного материаловедения и метрологии</i>

КУРСОВАЯ РАБОТА (пояснительная записка)

по дисциплине Сопротивление материалов

на темы: 1. Геометрические характеристики плоских сечений;
 2. Внецентренное растяжение или сжатие.

Студент, группа _____

(Фамилия И. О., подпись)

№ зачетной книжки _____

Подпись студента _____

Руководитель _____

(Ученая степень, звание. Фамилия И. О.)

Оценка _____

Подпись руководителя _____

Санкт-Петербург
 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных
технологий и дизайна»

Институт информационных технологий и автоматизации
Кафедра инженерного материаловедения и метрологии

ЗАДАНИЕ

на курсовую работу по дисциплине «Сопротивление материалов»

Студенту _____

группа _____

№ зачетной книжки _____

Тема 1 курсовой работы: Геометрические характеристики плоских сечений.

Содержание задания:

1) определить положение центра тяжести; 2) найти осевые (экваториальные) и центробежные моменты инерции относительно случайных осей, проходящих через центр тяжести (z_c и y_c); 3) определить направление главных центральных осей (u и v); 4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей; 5) вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси в соответствии с данными:

Номер строки	Тип сечения	Швеллер	Равнобокий уголок	Двутавр

Тема 2 курсовой работы: Внецентренное растяжение или сжатие.

Содержание задания:

1) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через P , и размеры сечения; 2) найти допускаемую нагрузку P при заданных размерах сечения и допускаемых напряжениях для чугуна на сжатие $[\sigma_c]$ и растяжение $[\sigma_p]$ в соответствии с данными:

Номер строки	Схема	a	b	$[\sigma_c]$	$[\sigma_p]$
		см		МПа	