

## Контрольная работа № 1

Контрольная работа № 1 состоит из 21 задачи. Контрольная работа допускается к защите, если она содержит десять (и более) полностью и правильно решенных задач. Контрольная работа не проверяется и не рецензируется, если в ней содержится менее десяти решенных задач.

**Задача 1.** Вычислить определители.

$$1.03 \quad \text{а) } \begin{vmatrix} 2/5 & 3/4 \\ 4/15 & 1/7 \end{vmatrix} \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

**Задача 2.** Решить систему линейных уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера. Сделать проверку.

$$2.03 \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \quad 2.04 \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

**Задача 3.** Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- а) по формулам Крамера;
- б) методом Гаусса;
- в) с помощью обратной матрицы.

$$3.03 \quad \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 13 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ -5x_1 - 8x_3 = 33 \end{cases}$$

**Решение:**

$$\Delta = -524 - 1 - 11 - 50 - 8 = -86$$

[Показать детали хода вычисления определителя матрицы](#)

$$\Delta_1 = 13248 - 11330 - 8 = 430$$

[Показать детали хода вычисления определителя матрицы](#)

$$\Delta_2 = -5134 - 181 - 533 - 8 = 344$$

[Показать детали хода вычисления определителя матрицы](#)

$$\Delta_3 = -5213 - 1 - 18 - 5033 = 86$$

[Показать детали хода вычисления определителя матрицы](#)

$$x_1 = \Delta_1 \Delta = 430 - 86 = -5$$

$$x_2 = \Delta_2 \Delta = 344 - 86 = -4$$

$$x_3 = \Delta_3 \Delta = 86 - 86 = -1$$

**Задача 4.** Исследовать (по теореме Кронекера - Капелли) совместность и решить систему линейных уравнений.

4.03

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

**Задача 5.** При каких  $A$  и  $B$  система имеет бесчисленное множество решений? Найти эти решения.

$$5.03 \quad \begin{cases} 7x + 8y + Az = -5 \\ 8x + 7y + 8z = -5 \\ 2x + y + 2z = B \end{cases}$$

**Задача 6.**

6.03 Даны векторы  $\bar{a}(1,2,3)$ ;  $\bar{b}(-1,4,1)$ . Найти  $\bar{a} \times \bar{b}$  и косинус угла между этими векторами.

**Задача 7.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $M, K$  и  $L$  в виде  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

$$7.03 \quad M(1,5,7); \quad K(-1,3,1); \quad L(1,1,0)$$

**Задача 8** Даны 4 вектора  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ . Вычислить:

- 1) координаты вектора  $\bar{d}$  в базисе  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ ;
- 2)  $\bar{a} \cdot \bar{b}$ ;
- 3)  $\bar{c} \cdot \bar{d}$ ;
- 4)  $(2\bar{a} + 3\bar{b}) \cdot (5\bar{c} - 4\bar{d})$ ;
- 5)  $\bar{a} \times \bar{b}$ ;
- 6)  $\bar{c} \times \bar{d}$ ;
- 7)  $(\bar{a} \times \bar{c}) \cdot \bar{d}$ .

$$8.03 \quad \bar{a}(-2,5,-1) \quad \bar{b}(-5,18,-7) \quad \bar{c}(5,-18,8) \quad \bar{d}(0,1,0)$$

**Задача 9.** Написать уравнение прямой, проходящей через точки  $A$  и  $B$  в виде  $y = kx + b$ , построить эту прямую.

$$9.03 \quad A(-1,2) \quad B(1,1)$$

**Задача 10.** Даны вершины треугольника  $A, B, C$ . Найти:

- 1) длину стороны  $AB$ ;
- 2) уравнение стороны  $AB$ ;
- 3) длину медианы  $AM$ ;
- 4) уравнение медианы  $AM$ ;
- 5) уравнение высоты  $BH$ ;
- 6) длину высоты  $BH$ ;
- 7) площадь треугольника;
- 8) угол  $BAC$  (в градусах);
- 9) уравнение прямой, параллельной стороне  $BC$  и проходящей через точку  $A$ .

В ответах надо приводить уравнения прямых в виде  $y = kx + b$ . Все вычисления проводить с двумя знаками после запятой.

10.03                       $A(2,2)$                        $B(7,2)$                        $C(1,-3)$

**Задача 11.** Написать уравнение плоскости в виде  $Ax + By + Cz + D = 0$ , проходящей через точку  $M$  параллельно векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

11.03     $M(1,5,7)$ ;             $\vec{a}(-1,3,1)$ ;             $\vec{b}(1,1,0)$ .

**Задача 12.** Даны вершины пирамиды  $SPMN$ . Найти:

- 1) длину ребра  $SN$ ;
- 2) уравнение ребра  $SN$ ;
- 3) уравнение грани  $SPN$ ;
- 4) площадь грани  $SPN$ ;
- 5) уравнение высоты, опущенной из вершины  $S$  на грань  $PMN$ ;
- 6) длину высоты, опущенной из вершины  $S$  на грань  $PMN$ ;
- 7) угол между ребрами  $SP$  и  $SN$  (в градусах);
- 8) угол между ребром  $SP$  и гранью  $PMN$  (в градусах);
- 9) объем пирамиды.

В ответах надо приводить уравнения плоскостей и прямых в виде  $Ax + By + Cz + D = 0$  и  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ . Все вычисления проводить с двумя знаками после запятой.

12.03     $S(3,0,0)$ ;             $P(0,1,0)$ ;             $M(0,0,2)$ ;             $N(6,9,2)$ .

**Задача 13.** Вычислить комплексное число  $z$  и найти его модуль.

13.03                      
$$z = \frac{7}{\sqrt{3} + 2i} + 3i$$

**Задача 14.** Дано комплексное число  $a$ . Требуется:

- а) записать число  $a$  в алгебраической, тригонометрической и показательной формах;

- б) изобразить  $a$  на комплексной плоскости;
- в) вычислить  $a^{12}$ ;
- г) найти все корни уравнения  $z^3 - a = 0$ ;
- д) вычислить произведение полученных корней;
- е) составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, корнем которого, является  $a$ .

$$14.03 \quad a = \frac{1+i}{1-i}$$

**Задача 1.5** Для заданной функции найти точки разрыва, если они существуют, и построить график.

$$15.03 \quad f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0; \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1; \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

**Задача 16.** Найти пределы функций.

16.03

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{2 - 3x^2 + 4x^3}$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ ;
- 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}\right)$ ;
- 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$ ;

**Задачи 17.** Найти производные функций.

17.03

- 1)  $y = \frac{1}{x}$
- 2)  $y = \sqrt[3]{x^2}$
- 3)  $y = 3^x - 2 \arctg \sqrt{x} + 6$
- 4)  $y = x^2 \ln x$
- 5)  $y = \frac{5x + 3}{5 - x}$

**Задачи 18.** Найти производные функций.

- 1)  $y = 3x^3 + \frac{4}{1-x^2} + \sqrt[3]{x^2} - \pi^2$ ;
- 2)  $y = \frac{3 \cos 2x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$ ;
- 3)  $y = 5 \arcsin \sqrt{3x}$ ;
- 4)  $y = \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}}{e^{-4x}}$ ;

$$5) y = \operatorname{tg} x \cdot (1 - \ln(1 - 2x)); \quad 6) y = \ln(x + \sqrt{1 - x^2}).$$

**Задачи 19.** Найти производные функций.

19.03

$$1) y = \left( \frac{x - \sqrt{\operatorname{tg} x}}{x + \sqrt{\operatorname{tg} x}} \right)^2; \quad 2) y = (\cos x)^{x^2};$$

$$3) y = \begin{cases} x = 1 - e^{3t} \\ y = \frac{e^{3t} + e^{-3t}}{3} \end{cases}; \quad 4) xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

**Задача 20.** Найти экстремумы и промежутки монотонности функций; построить графики функций.

20.03 
$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$$

**Задача 21.** Исследовать функции методами дифференциального исчисления и построить их графики.

21.03 
$$1) y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 2x + 4}, \quad 2) y = \frac{x^2 - 9x + 19}{x - 3}.$$