

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет

Кафедра математики

Контрольная работа № 3
«Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения»

по дисциплине **МАТЕМАТИКА**

для студентов I курса ФБФО

направления подготовки СЗПГСуст, СЗПГСа, СЗТГВуст, ЗКЗуст,

(специальности) АДМЗуст, ЭТМКЗуст, НТТСЗуст

семестр 1 2017/18 учебного года

Вариант 1

1. Вычислить неопределённые интегралы:

$$\text{а) } \int x \sin 8x dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x(x^2 + 4x + 4)}.$$

2. Вычислить определённые интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\pi} \sin^4 x dx; \quad \text{б) } \int_0^2 \frac{x dx}{3x + 2}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2x + 1$ и прямой $x + y = 1$.

4. Определить тип дифференциального уравнения и найти его решение:

$$\text{а) } \ln x \cdot \operatorname{ctg}^2 3y dx + x dy = 0, \quad y(0) = 0;$$

$$\text{б) } xy' - y = x + 1, \quad y(1) = 0;$$

$$\text{в) } y'' - 2y' + y = 25 \sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Вариант 2

1. Вычислить неопределённые интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x(x^2 + 4)}.$$

2. Вычислить определённые интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{(4x+1)dx}{x+2}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 4x$ и прямой $y = x + 4$.

4. Определить тип дифференциального уравнения и найти его решение:

$$\text{а) } (1 + x^2) y' + x y = 0, \quad y(0) = 2;$$

$$\text{б) } y' + 2y = x e^{3x-2};$$

$$\text{в) } y'' + 3y' - 4y = x + 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Вариант 3

1. Вычислить неопределённые интегралы:

$$\text{а) } \int (x+5)e^{3x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x^2(x-3)}.$$

2. Вычислить определённые интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x+4}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $x^2 = 2y + 1$ и прямой $x - y + 1 = 0$.

4. Определить тип дифференциального уравнения и найти его решение:

$$\text{а) } x\sqrt{4-y^2} dx - \sqrt{1-x^2} dy = 0;$$

$$\text{б) } y' + 2xy = e^{-x^2} \sin x, \quad y|_{x=0} = 0;$$

$$\text{в) } y'' - y = 2 \cos x + 3 \sin x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Вариант 4

1. Вычислить неопределённые интегралы:

а) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$; б) $\int \frac{dx}{x(x-2)^2}$.

2. Вычислить определённые интегралы:

а) $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$; б) $\int_{-1}^1 \frac{(2x+3)dx}{2x-3}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и прямой $y = -x$

4. Определить тип дифференциального уравнения и найти его решение:

а) $\sin x \cdot \sin y dx + \cos^2 x dy = 0$;

б) $x^4 y' + 2x^3 y = 1$, $y(1) = 2$;

в) $y'' - 5y' + 6y = x e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Вариант 5

1. Вычислить неопределённые интегралы:

а) $\int \arcsin 2x dx$; б) $\int \frac{dx}{x(x^2 - 4)}$.

2. Вычислить определённые интегралы:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$; б) $\int_0^1 \frac{(6x-1)dx}{3x+1}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $x^2 = 2 - y$ и прямой $y = -x$.

4. Определить тип дифференциального уравнения и найти его решение:

а) $(y^2 + 4)dx - xydy = 0$;

б) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y(0) = 1$;

в) $y'' + 3y' - 4y = 5e^x \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Вариант 6

1. Вычислить неопределённые интегралы:

$$\text{а) } \int \ln(1-3x) dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{(x-3)(x^2-2x-8)}.$$

2. Вычислить определённые интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\pi} \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx; \quad \text{б) } \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{x-2}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $x^2 = y + 2$ и прямой $y = -x$.

4. Определить тип дифференциального уравнения и найти его решение:

$$\text{а) } x \sqrt{3y+4} dx + (x+5) dy = 0 ;$$

$$\text{б) } y' + \frac{1}{x} y = \ln x ;$$

$$\text{в) } y'' + y' - 6y = e^{2x} \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Вариант 7

1. Вычислить неопределённые интегралы:

$$\text{а) } \int x \cos 6x dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{x(x+3)^2}.$$

2. Вычислить определённые интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\pi} \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{(5x-2)dx}{5x+1}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4 - 2x$ и прямой $x + y + 2 = 0$.

4. Определить тип дифференциального уравнения и найти его решение:

$$\text{а) } 3e^x(y-4)dx + (e^{2x} - 4)dy = 0; \quad y|_{x=0} = 0;$$

$$\text{б) } xy' - y = x^2 e^{-3x};$$

$$\text{в) } y'' - 2y' + 5y = 9 \cos 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Вариант 8

1. Вычислить неопределённые интегралы:

$$\text{а) } \int x \operatorname{arctg} x dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{(x+2)(x^2-1)}.$$

2. Вычислить определённые интегралы:

$$\text{а) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx; \quad \text{б) } \int_{-1}^1 \frac{(4x+1)dx}{2x+1}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4$ и прямой $x - y + 8 = 0$.

4. Определить тип дифференциального уравнения и найти его решение:

$$\text{а) } (x^2 + 4)\operatorname{tg} y dx + (x^2 + 9)\cos y dy = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{б) } 2xy' - y = 2x\sqrt{x} \sin 2x;$$

$$\text{в) } y'' + 8y' + 16y = 3x - 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Вариант 9

1. Вычислить неопределённые интегралы:

а) $\int x \ln(x^2 + 1) dx;$

б) $\int \frac{dx}{x(x^2 - 9)}.$

2. Вычислить определённые интегралы:

а) $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx ;$

б) $\int_0^4 \frac{x^2 dx}{x - 5}.$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4x + 12$ и прямой $2x - 3y = 10 = 0$.

4. Определить тип дифференциального уравнения и найти его решение:

а) $\ln x \cos y dx + x \operatorname{tg} y dy = 0, \quad y|_{x=1} = 0;$

б) $y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \sin 6x, \quad y(0) = 1;$

в) $y'' + 9y = xe^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Вариант 10

1. Вычислить неопределённые интегралы:

а) $\int x(x+3)^5 dx$; б) $\int \frac{dx}{x^3-8}$.

2. Вычислить определённые интегралы:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cdot \cos^3 x dx$; б) $\int_{-1}^1 \frac{(3x+5)dx}{4-3x}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2x + 1$ и прямой $x + y = 1$.

4. Определить тип дифференциального уравнения и найти его решение:

а) $x \cos y dx + (3x^2 + 1)dy = 0$, $y(0) = 0$;

б) $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^4 x$;

в) $y'' + 2y' + 2y = 5 \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.