МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»
(СПбГТИ(ТУ))

---

**Кафедра математики**

**Т. В. Слободинская, А. А. Груздков,**

**А. В. Ржонсницкий**

# Математика

**(третий семестр)**

**Учебное пособие для студентов заочной формы обучения**

**Санкт-Петербург**
**2015**

УДК 512.64, 514.123.1, 517.1, 517.2, 517.3

Слободинская, Т. В. Математика (третий семестр): учебное пособие для студентов заочной формы обучения [Текст]: / Т. В. Слободинская, А. А. Груздков, А. В. Ржонсницкий.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2015.— 97 с.

Учебное пособие содержит краткое изложение теоретического материала необходимого для выполнения контрольных работ, задания контрольных работ и примеры решения типовых вариантов. Предназначено для студентов второго курса заочной формы обучения. Пособие составлено в соответствии с учебной программой по дисциплинам «Математика», «Высшая математика», «Математический анализ».

Рис. 13, библиогр. 11 назв.

Рецензенты:

1. Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, профессор кафедры матемтаики, доктор физико-математических наук, профессор В. Б. Смирнова

2. Государственная полярная академия, доцент кафедры высшей математики, кандидат физико-математических наук, доцент В. Г. Никитенко

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии факультета информационных технологий и управления 08.06.2015.

Рекомендовано к изданию РИСо СПбГТИ(ТУ)

# Введение

Дисциплина «Математика» относится к циклу общенаучных дисциплин. Цель курса — формирование научного мировоззрения у студентов, приобретение ими математических знаний, умений и навыков, необходимых для изучения других общенаучных и специальных дисциплин, а также самостоятельного изучения специальной литературы. Изучение курса необходимо для формирования способности математического исследования прикладных задач, правильного истолкования и оценки получаемых результатов, а также формирования навыков самостоятельной исследовательской работы.

В данном учебном пособии представлены три контрольных работы третьего семестра по следующим разделам:

- Обыкновенные дифференциальные уравнения;
- Числовые ряды;
- Фунциональные ряды.

Для каждой работы указывается содержание данной работы, варианты заданий и примеры решения.

### Указания по выполнению контрольных работ

Контрольная работа может быть написана от руки на листах формата А4 или представлена в распечатанном виде. Листы должны быть скреплены степлером, причем каждая контрольная работа сдается отдельно. Работа может быть написана от руки в тетради. В этом случае каждая работа сдается в отдельной тетради.

На титульном листе указывается полное название университета, факультет, кафедра, фамилия, имя, отчество студента, номер учебной группы, номер контрольной работы, номер варианта, фамилия и инициалы преподавателя, проверяющего работу, год и ставится личная подпись студента.

Работа считается выполненной, если все задачи решены верно. Если в решении какой-либо задачи допущена ошибка, то студент должен сделать работу над ошибками (заново решить задачу). Работа над ошибками должна располагаться после записи решения последней задачи контрольной работы.

Студент самостоятельно выбирает вариант контрольной работы в соответствии с начальной буквой своей фамилии.

| Буква | Номер варианта |
|---|---|
| А | 1 |
| Б | 2 |
| В | 3 |
| Г | 4 |
| Д | 5 |
| Е, Ё | 6 |
| Ж | 7 |
| З | 8 |
| И, Й | 9 |
| К | 10 |
| Л | 11 |
| М | 12 |
| Н | 13 |
| О | 14 |
| П | 15 |
| Р | 16 |
| С | 17 |
| Т | 18 |
| У | 19 |
| Ф | 20 |
| Х | 21 |
| Ц, Ю | 22 |
| Ч | 23 |
| Ш,Щ | 24 |
| Э, Я | 25 |

# 1 Основные сведения о дифференциальных уравнениях

## 1.1 Общие сведения

**Определение.** *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее независимые переменные, неизвестную функцию и её производные или дифференциалы. Если независимая переменная одна, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением, если независимых переменных несколько, то дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Дифференциальные уравнения широко используются в физике, химии, технике и экономике. Многие законы природы можно выразить дифференциальными уравнениями, например: второй закон Ньютона, закон радиоактивного распада, уравнения химической кинетики и т. д.

**Определение.** Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* дифференциального уравнения

**Определение.** *Обыкновенным дифференциальным уравнением* $n$-ого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0\,,$$

в этом уравнении $x$ — независимая переменная, $y(x)$ — неизвестная функция, а $y'$, $y''$, …, $y^{(n)}$ — её производные, $F$ — заданная функция $(n+2)$ -х аргументов.

**Определение.** Обыкновенным дифференциальным уравнением $n$-ого порядка, *разрешённым относительно старшей производной* называется уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\,,$$

где $f$ — заданная функция $(n+1)$-го аргумента.

**Определение.** *Решением дифференциального уравнения* называется всякая функция $y = \varphi(x)$, имеющая производные до порядка $n$ включительно, и обращающая это уравнение в тождество.

**Определение.** График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

**Определение.** Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения.*

## 1.2 Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Задача Коши. Классификация решений

Самый общий вид дифференциального уравнения первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0,$$

но, как правило, рассматриваются дифференциальные уравнения разрешенные относительно производной:

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

которые могут быть представлены также «в дифференциалах»:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $x$ — независимая переменная, $y(x)$ — неизвестная функция, $F$, $f$, $P$, $Q$ — заданные функции.

**Определение.** *Решением дифференциального уравнения 1-го порядка* называется любая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество.

**Определение.** *Начальными условиями* для дифференциального уравнения 1-го порядка называется равенство:

$$y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

то есть при значении независимой переменной $x_0$ интересующая вас функция должна принимать значение $y_0$.

**Определение.** *Задачей Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка* называется задача нахождения такого решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1), которое удовлетворяет начальному условию (2), то есть $\varphi(x_0) = y_0$.

С геометрической точки зрения — это нахождение интегральной кривой, проходящей через точку с заданными координатами $(x_0, y_0)$.

**Теорема** существования и единственности решения задачи Коши.

Если в дифференциальном уравнении (1) функция $f(x, y)$ и ее производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в области $D \subset R^2$, то для $\forall (\cdot)(x_0, y_0) \in D$

существует единственное решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$.

**Определение.** *Общим решением дифференциального уравнения 1-го порядка* вида (1), где функция $f$ определена в области $D$, в каждой точке которой выполнены условия существования и единственнойти решения задачи Коши, называется функция $y = \varphi(x, C)$, удовлетворяющая двум условиям:

1) $y = \varphi(x, C)$ — решение дифференциального уравнения при любом допустимом значении постоянной $C$;

2) для любой точки $(x_0, y_0)$ области $D$ существует единственное значение $C = C_0$, при котором $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет начальному условию, т.е. $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

**Определение.** *Частным решением дифференциального уравнения 1-го порядка* называется решение, в каждой точке которого выполены условия существования и единственности решения задачи Коши. Частное решение получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$ подстановкой конкретного значения произвольной постоянной $C = C_0$.

Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка иногда находится в неявной форме:

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

которую называют *общим интегралом* дифференциального уравнения 1-го порядка.

Неявное задание частного решения

$$\Phi(x, y, C_0) = 0$$

называют *частным интегралом.*

**Определение.** Решение дифференциального уравнения, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым.*

## 1.3 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

**Определение.** Дифференциальным уравнением *с разделенными переменными* называется дифференциальное уравнение вида

$$P(x)dx = Q(y)dy. \tag{3}$$

Его общий интеграл имеет вид

$$\int P(x)\,dx + C = \int Q(y)\,dy.$$

**Определение.** Дифференциальным уравнением *с разделяющимися переменными* называется дифференциальное уравнение вида

$$P_1(x)Q_1(y)dx = P_2(x)Q_2(y)dy \tag{4}$$

или вида

$$P_1(x)Q_1(y) = P_2(x)Q_2(y)y'. \tag{5}$$

Дифференциальное уравнение (5) сводится к дифференциальному уравнению (3) заменой $y' = \frac{dy}{dx}$ и домножением обеих частей уравнения на $dx$. Дифференциальное уравнение (4) сводится к дифференциальному уравнению с разделенными переменными (3) путем деления обеих частей уравнения (4) на произведение $P_2(x) \cdot Q_1(y)$, таким образом для общего интеграла дифференциального уравнения (4) получим формулу

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx + C = \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy.$$

Отметим, что в результате деления могут быть потеряны решения $y = y_i$ или $x = x_j$, где $y_i$ — корни $Q_1(y)$, а $x_j$ — корни $P_2(x)$.

### 1.4 Однородные дифференциальное уравнение первого порядка

**Определение.** Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией порядка* $k$, если выполняется равенство

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k \cdot f(x, y).$$

**Определение.** *Однородным дифференциальным уравнением* называется дифференциальное уравнение одного из двух видов:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{6}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одинакового порядка, или

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right). \tag{7}$$

**Метод решения однородного дифференциального уравнения**

Заменой переменной

$$y = z \cdot x, \qquad y' = z' \cdot x + z \qquad \text{или} \qquad dy = xdz + zdx$$

однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

## 1.5 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

**Определение.** *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) первого порядка* называется дифференциальное уравнение вида:

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{8}$$

**Определение.** *Линейным однородным дифференциальным уравнением* (ЛОДУ) *первого порядка* называется дифференциальное уравнение вида:

$$y' + p(x)y = 0. \tag{9}$$

**Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа) решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ)**

Этот метод позволяет свести решение ЛНДУ к последовательному решению двух уравнений с разделяющимися переменными.

1) На первом этапе решаем соответствующее ЛОДУ:

$$\frac{dy}{dx} + p\,(x)y = 0 \Rightarrow dy = -p\,(x)y\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p\,(x)\,dx.$$

Проинтегрируем обе части равенства и постоянную возьмем в виде $\ln|C|$:

$$\ln|y| = -P(x) + \ln|C|$$

здесь $P(x)$ — первообразная функции $p(x)$.

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -P(x) \Rightarrow y = Ce^{-P(x)} \text{ — общее решение ЛОДУ.}$$

2) На втором этапе будем искать общее решение ЛНДУ в виде:

$$y = C(x) \cdot e^{-P(x)}, \tag{10}$$

где $C(x)$ — неизвестная функция, которую найдем подставляя выражение (10) в уравнение (8). Дифференцируя (10), найдем:

$$y' = C\,'(x) \cdot e^{-P(x)} + C(x) \cdot e^{-P(x)} \cdot (-p\,(x)),$$

с учётом равенства $P'(x) = p(x)$. В результате уравнение (8) превращается в уравнение для $C(x)$:

$$\begin{aligned}
&C\,'(x) \cdot e^{-P(x)} - p(x)C(x) \cdot e^{-P(x)} + p\,(x)C(x) \cdot e^{-P(x)} = q(x)\\
&\Rightarrow C\,'(x) \cdot e^{-P(x)} = q(x) \Rightarrow C\,'(x) = q(x) \cdot e^{-P(x)}\\
&C(x) = \int q(x) \cdot e^{P(x)}\,dx + C_1.
\end{aligned}$$

Подставив найденное выражение для $C(x)$ в формулу (10) получим общее решение уравнения (8):

$$y = e^{-P(x)} \int q(x) \cdot e^{P(x)}\,dx + C_1 e^{-P(x)},$$

здесь первое слагаемое — частное решение ЛНДУ (8), а второе — общее решение ЛОДУ (9).

## 1.6 Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

**Определение.** *Дифференциальным уравнением в полных дифференциалах* называется дифференциальное уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{11}$$

если существует функция $u(x, y)$ такая, что

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \tag{12}$$

**Теорема.** Для того чтобы дифференциальное уравнение (12), где функции $P(x, y), Q(x, y)$ и их частные производные первого порядка определены и непрерывны в односвязной области $D$, являлось дифференциальным уравнением в полных дифференциалах в этой области необходимо и достаточно, чтобы в этой области выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{13}$$

Записав дифференциальное уравнение (11) как равенство нулю полного дифференциала в области $D$ :

$$du(x,y) = 0,$$

мы получаем его общий интеграл в виде

$$u(x,y) = C.$$

Функция $u$ может быть найдена из решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q. \end{cases}$$

или по формулам

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)\,dt \;= \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt,$$

где точка $(x_0, y_0)$ принадлежит области $D$.

*Задача Коши.* Из теоремы о существовании неявной функции определяемой уравнением $u(x,y) = C$, следует, что если в точке $(x_0, y_0)$ выполняется условие $P^2(x_0,y_0) + Q^2(x_0,y_0) > 0$, то в некоторой окрестности этой точки существует единственное решение задачи Коши для дифференциального уравнения (11) $y = f(x)$ или $x = g(y)$, такое что либо $y_0 = f(x_0)$ либо $x_0 = g(y_0)$.

## 1.7 Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши

**Определение.** *Дифференциальным уравнением порядка* $n$ называется уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где $x$ — независимая переменная, $y(x)$ — неизвестная функция, $F$ — заданная функция.

**Определение.** Дифференциальным уравнением порядка $n$, *разрешенным относительно старшей производной,* называется уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{14}$$

где $x$ — независимая переменная, $y(x)$ — неизвестная функция, $f$ — заданная функция.

**Определение.** *Решением дифференциального уравнения порядка* $n$ называется функция, имеющая непрерывные производные до порядка $n$ включительно и обращающая это уравнение в тождество.

**Определение.** *Начальными условиями для дифференциального уравнения порядка* $n$ называются условия вида

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{15}$$

**Определение.** *Задачей Коши для дифференциального уравнения порядка* $n$ называется задача нахождения такого его решения $y = \varphi(x)$, которое удовлетворяет начальным условиям (15).

**Теорема** существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения (14).

Если в дифференциальном уравнении (14) функция $f$ и ее частные производные: $f'_y$, $f'_{y'}$, ..., $f'_{y^{(n-1)}}$ определены и непрерывны в области $D \subset R^{n+1}$, то для любой точки

$$(x_0\,, y_0\,, y_0'\,, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$$

существует единственное решение задачи Коши (14), (15), то есть существует единственное решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальным условиям (15):

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad \varphi^{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

**Определение.** *Общим решением дифференциального уравнения порядка* $n$ в области $D$ называется функция

$$y = \varphi(x, C_1\,, C_2\,, \ldots, C_n)$$

удовлетворяющая двум условиям:

1. Эта функция является решением дифференциального уравнения при любых $C_1\,, C_2\,, \ldots, C_n$.

2. Для любых начальных условий (15), таких что

$$(x_0\,, y_0\,, y_0'\,, \dots\,, y_0^{(n-1)}) \in D,$$

существует единственный набор постоянных $C_1^0\,, C_2^0\,, \dots\,, C_n^0$, для которого решение

$$y = \varphi(x, C_1^0\,, C_2^0\,, \dots\,, C_n^0)$$

удовлетворяет начальным условиям (15).

**Определение.** *Частным решением дифференциального уравнения порядка* $n$ называется любая функция $y = \varphi(x, C_1^0\,, C_2^0\,, \dots\,, C_n^0)$ , которая получается из общего решения

$$y = \varphi(x, C_1\,, C_2\,, \dots\,, C_n)$$

при конкретном наборе значений постоянных

$$C_1 = C_1^0\,, C_2 = C_2^0\,, \dots\,, C_n = C_n^0.$$

## 1.8 Линейные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка

Обозначим $C^n(a,b)$ — множество всех функций $n$ раз непрерывно дифференцируемых на промежутке $(a,b)$, а $C(a,b)$ — множество всех функций непрерывных на $(a,b)$.

**Определение.** Если функции $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ определены и непрерывны на промежутке $(a,b)$, то отображение $y \to Ly$ множества $C^n(a,b)$ в $C(a,b)$, осуществляемое по формуле

$$Ly = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \tag{16}$$

называется *линейным дифференциальным оператором* (ЛДО).

**Определение.** *Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) порядка* $n$ называется уравнение вида

$$Ly = f(x)\,, \tag{17}$$

где $Ly$ определено формулой (16). Функция $f(x)$ называется правой частью ЛНДУ, а функции $a_i(x)$ коэффициентами ЛНДУ.

**Определение.** *Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) порядка* $n$ называется уравнение вида

$$Ly = 0,$$

оно получается из уравнения (17) при $f(x) \equiv 0$ на промежутке $(a, b)$.

**Теорема** существования и единственности решения задачи Коши для ЛНДУ.

Если все коэффициенты $a_i(x)$ и правая часть $f(x)$ ЛНДУ (17) непрерывны на $(a, b)$, то для любых начальных условий

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

таких что $x_0 \in (a, b)$, существует единственное решение задачи Коши для ЛНДУ (17).

**Определение.** Система функций: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называется *линейно зависимой на промежутке* $(a, b)$, если существует нетривиальная линейная комбинация этих функций тождественно равная нулю на этом промежутке, иначе говоря, если существуют числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ такие что

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 > 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y_i(x) \equiv 0 \quad \forall x \in (a, b). \tag{18}$$

**Определение.** Система функций: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *называется линейно независимой на промежутке* $(a, b)$, если равенство (18) верно только при условии

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

**Определение.** *Определителем Вронского* системы функций

$$y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

дифференцируемых на промежутке $(a, b)$ по крайней мере $n - 1$ раз называется определитель вида

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

**Теорема** (необходимое и достаточное условие линейной независимости решений ЛОДУ).

Для того чтобы решения ЛОДУ $n$-ого порядка $y_i(x), i = 1, \dots, n$ были линейно независимы на $(a, b)$, необходимо и достаточно, чтобы $W(x) \neq 0$ для $\forall x \in (a, b)$.

**Определение.** *Фундаментальной системой решений (ФСР)* ЛОДУ $n$-ого порядка на промежутке $(a, b)$ называется любой набор из $n$ линейно независимых на этом промежутке решений ЛОДУ.

**Теорема** (о структуре общего решения ЛОДУ $n$- ого порядка).

Общее решение ЛОДУ $Ly = 0$ порядка $n$ имеет вид

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)\,,$$

где $y_i(x)$ $(i = 1, \dots, n)$ — ФСР, а $C_1, C_2, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

**Теорема** (о структуре общего решения ЛНДУ).

Общее решение ЛНДУ $Ly = f(x)$ имеет вид

$$y(x) = y_*(x) + Y(x)\,,$$

где $y_*(x)$ — произвольное частное решение ЛНДУ, а $Y(x)$ — общее решение соответствующего ЛОДУ $Ly = 0$.

## 1.9 Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

**Определение.** ЛОДУ $n$-ого порядка с постоянными коэффициентами это уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y \;=\; 0, \tag{19}$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — действительные числа.

Эти уравнения могут быть решены методом Эйлера. Решения ищутся в виде

$$y = e^{\lambda x}\,, \tag{20}$$

где $\lambda$ — постоянная, которую найдем подстановкой выражения (20) в уравнение (19), учитывая что:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

и $e^{\lambda x} \neq 0$. В результате подстановки получим алгебраическое уравнение порядка $n$ для переменной $\lambda$:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\,. \tag{21}$$

**Определение.** Уравнение (21) называют *характеристическим уравнением* для ЛОДУ (19).

Поскольку все коэффициенты характеристического уравнения действительные, то комплексно сопряженные корни $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ имеют одинаковую кратность.

#### 1.9.1 Построение фундаментальной системы решений (ФСР)

1. Все корни характеристического уравнения (21) действительные и различные. В этом случае мы имеем $n$ различных решений $y_i = \exp(\lambda_i x)$.

2. Все корни характеристического уравнения (21) действительные, но среди них есть кратные корни. Можно показать, что в этом случае в составе ФСР каждому корню $\lambda_0$ кратности $m$ будет соответствовать ровно $m$ решений вида

$$y_1 = e^{\lambda_0 x}, y_2 = xe^{\lambda_0 x}, \ldots, y_m = x^{m-1}e^{\lambda_0 x}.$$

3. Каждой паре комплексно сопряженных корней $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ кратности $m$ в составе ФСР соответствует ровно $2m$ решений вида

$$y_1 = e^{ax}\cos bx,\ y_2 = e^{ax}\sin bx, \ldots$$
$$\ldots,\ y_{2m-1} = x^{m-1}e^{ax}\cos bx,\ y_{2m} = x^{m-1}e^{ax}\sin bx.$$

#### 1.9.2 Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений методом Лагранжа

Метод Лагранжа предполагает, что для исходного ЛНДУ $Ly = f$ соответствующее однородное уравнение $Ly = 0$ решено, то есть известна ФСР: $y_i(x), i = 1, \ldots, n$. Решение неоднородного уравнения ищется в виде:

$$y_*(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i(x), \tag{22}$$

где $C_i(x)$ — неизвестные функции. Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к нахождению функций $C_i(x)$. Метод Лагранжа сводит дело к решению системы $n$ линейных алгебраических уравнений для первых производных функций $C_i$:

$$\begin{cases} C\,'_1(x)y_1 & +C\,'_2y_2 & +\dots & +C\,'_ny_n & =0 \\ C\,'_1(x)y_1' & +C\,'_2y_2' & +\dots & +C\,'_ny_n' & =0 \\ & & \dots & & \dots \\ C\,'_1(x)y_1^{(n-2)} & +C\,'_2y_2^{(n-2)} & +\dots & +C\,'_ny_n^{(n-2)} & =0 \\ C\,'_1(x)y_1^{(n-1)} & +C\,'_2y_2^{(n-1)} & +\dots & +C\,'_ny_n^{(n-1)} & =f(x). \end{cases}$$

Определителем системы служит определитель Вронского для ФСР, который отличен от нуля, а следовательно система имеет единственное решение.

Для уравнения второго порядка

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$$

решение ищется в виде

$$y_* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\,.$$

Система Лагранжа имеет вид

$$\begin{cases} C\,'_1(x)y_1 + C\,'_2y_2 = 0 \\ C\,'_1(x)y_1' + C\,'_2y_2' = f(x). \end{cases}$$

### 1.9.3 Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод применим только для ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Его достоинством является простота — это чисто алгебраический метод. Под правой частью специального вида понимается выражение

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)\,, \tag{23}$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени $n$ и $m$ соответственно.

**Теорема** (о структуре частного решения линейного неоднородного уравнения).

ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида, задаваемого формулой (23), имеет частное решение вида

$$y_* = x^k e^{\alpha x}(A_s(x)\cos\beta x + B_s(x)\sin\beta x) \tag{24}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — числа из правой части (23), $k$ — кратность числа $\alpha + i\beta$, как корня характеристического уравнения (если это число не корень то $k = 0$), $A_s(x)$ и $B_s(x)$ — многочлены степени $s = \max\{m, n\}$ с неопределенными коэффициентами.

# 2 Основные сведения о числовых рядах

## 2.1 Основные определения

**Определение.** *Числовой последовательностью* называется функция натурального аргумента $a_n = f(n)$, где $n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{R}$. Используют обозначения: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

**Определение.** *Числовым рядом* называется формальная сумма бесконечного числа членов числовой последовательности:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

$a_n$ называют общим членом ряда.

Для того чтобы придать смысл этой формальной сумме рассмотрим *последовательность частичных сумм*:

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 + a_2 \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\
&\ldots\ldots \\
&S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

**Определение.** *Суммой числового ряда* называется предел последовательности частичных сумм:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \quad ,$$

если предел существует и конечен, то ряд называют *сходящимся*, в противном случае (предел не существует или бесконечен) ряд называют *расходящимся*.

**Геометрическая прогрессия.** Геометрической прогрессией называется числовая последовательность общий член которой определяется формулой

$$a_n = bq^{n-1}, b \neq 0, q \neq 0.$$

Сумма $n$ первых членов геометрической последовательности:

$$S_n = b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} = \frac{b - bq^n}{1 - q} \; .$$

Найдем предел этого выражения при $n \to \infty$. Ясно, что при $|q| > 1$ предел бесконечен ($q^n \to \infty$) и ряд расходится, а при $|q| < 1$ предел конечен ($q^n \to 0$), а значит ряд сходится и его сумма равна

$$S = \frac{b}{1-q}.$$

При $q = -1$ выражение для $S_n$ принимает вид:

$$S_n = \frac{b}{2}(1 - (-1)^n) \quad ,$$

для четных $n$ это выражение равно нулю, а для нечетных $n$ равно $b$, следовательно предел при $n \to \infty$ не существует.

В случае $q = 1$ имеем $S_n = nb$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

и ряд расходится. Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} \tag{25}$$

сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

**Определение.** *Остатком числового ряда* после $k$-ого члена называется ряд, который получается из исходного отбрасыванием первых $k$ членов:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n.$$

## 2.2 Необходимое условие сходимости. Свойства сходящихся рядов. Критерий сходимости Коши

**Теорема** (необходимое условие сходимости числового ряда).

Если числовой ряд сходится, то предел общего члена ряда при $n \to \infty$ равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{26}$$

**Следствие.** Если предел общего члена ряда при $n \to \infty$ не равен нулю, то числовой ряд расходится.

**Замечание.** Важно понимать, что условие (26) является необходимым, но не достаточным для сходимости числового ряда.

**Теорема** (о связи сходимости ряда и его остатка)

Для того чтобы числовой ряд сходился необходимо и достаточно, чтобы сходился любой его остаток.

**Теорема** (о действиях со сходящимися рядами)

Если ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

сходятся,а их суммы равны соответственно $A$ и $B$, то при любых $\lambda \in \mathbb{R}$ сходятся также ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \quad ,$$

а их суммы равны соответственно $\lambda A$ и $A + B$.

**Теорема** (критерий сходимости Коши)

Для того чтобы числовой ряд сходился необходимо и достаточно, чтобы для его частичных сумм выполнялось условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon.$$

т.е. для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется такой номер $N_\varepsilon$, что для всех натуральных $n$ больших $N_\varepsilon$ и любых натуральных $k$ будет выполняться неравенство:

$$|S_{n+k} - S_n| < \varepsilon.$$

## 2.3 Знакоположительные ряды

**Определение.** Числовой ряд называется *знакоположительным* если все его члены положительны.

**Теорема** (необходимое и достаточное условие сходимости знакоположительного ряда).

Для того чтобы знакоположительный числовой ряд сходился необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.

**Теорема** (интегральный признак сходимости Коши).

Если функция $f(x)$ на промежутке $[1, +\infty]$ непрерывна, неотрицательна и не убывает, то числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , a_n = f(n)$$

и несобственный интеграл:

$$\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Геометрический смысл теоремы можно понять из рисунка 1. Интегралу на этом рисунке соответствует площадь под графиком функции, а сумме ряда — сумма площадей прямоугольников.

**Определение.** *Обобщенным гармоническим* рядом (ОГР) называется числовой ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} + \cdots . \tag{27}$$

Применяя интегральный признак сходимости нетрудно установить, что ОГР сходится, если показатель степени $k > 1$ и расходится, если $0 < k \leqslant 1$.

**Примечание.** Ряд, соответствующий $k = 1$, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots .$$

носит название *гармонического*, он является расходящимся.

**Теорема** (признак сравнения по величине).

Если при всех натуральных $n$ выполняется неравенство:

$$0 < a_n \leqslant b_n, \tag{28}$$

то справедливы утверждения:

1. если сходится ряд с большими членами $b_n$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится ряд с меньшими членами $a_n$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

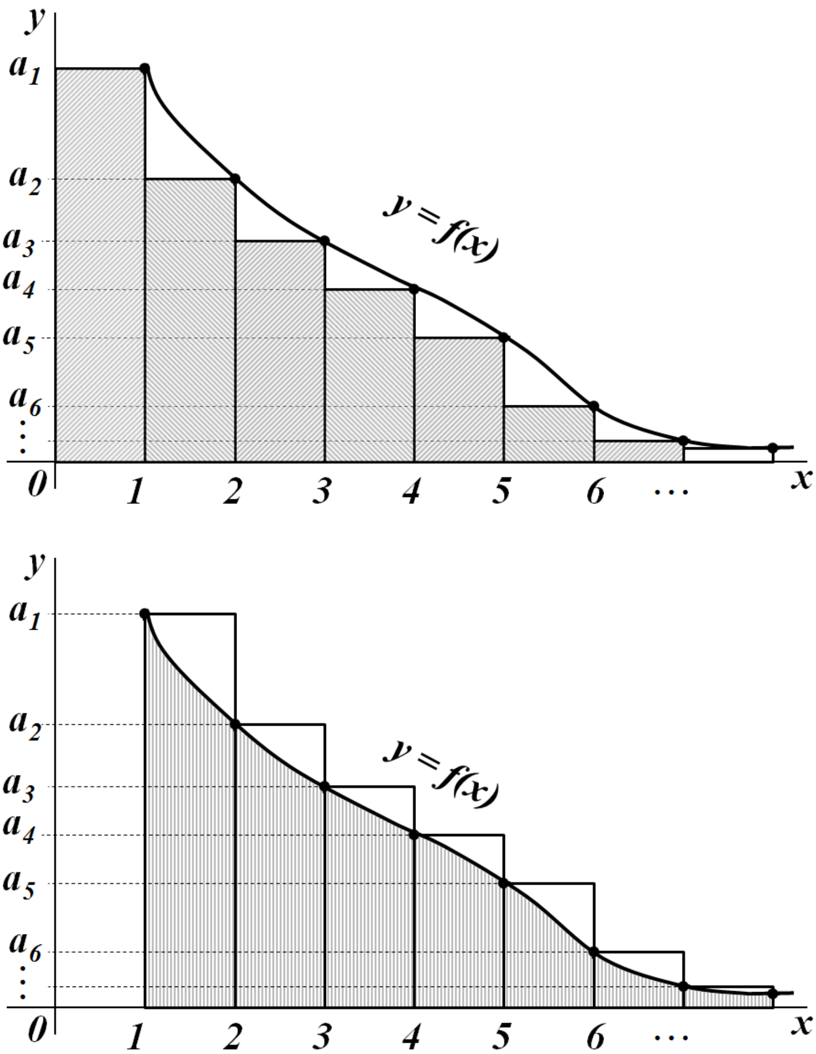


Рисунок 1 — Геометрическая интерпретация интегрального признака сходимости

2. если расходится ряд с меньшими членами $a_n$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то расходится ряд с большими членами $b_n$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

**Примечание.** Часто ряд с большими членами называют *мажорантным* по отношению к ряду с меньшими членами или просто *мажорантой*, ряд с меньшими членами называют *минорантым* рядом или *минорантой*.

**Теорема** (предельный признак сравнения).

Если предел отношения общих членов двух знакоположительных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (a_n > 0) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (b_n > 0)$$

существует, конечен и отличен от нуля:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0,$$

то эти ряды сходятся или расходятся одновременно.

**Замечание.** При практическом применении признаков сравнения в качестве «эталонных» рядов используют обобщенные гармонические ряды (27) или сумму геометрической прогрессии (25). Предельный признак сравнения оказывается полезным, если удается найти бесконечно малую, эквивалентную общему члену ряда, убывающую по степенному или показательному закону.

**Теорема** (признак Даламбера).

Если для знакоположительного числового ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (a_n > 0)$$

существует конечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то:

1. при $q < 1$ ряд сходится;
2. при $q > 1$ ряд расходится.

**Замечание 1.** В случае $q = 1$ признак Даламбера не позволяет сделать заключение о сходимости или расходимости ряда.

**Замечание 2.** Признак Даламбера полезно применять для исследования сходимости ряда, если в выражении для общего члена присутствует факториал $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ или показательная функция $c^n$.

**Теорема** (радикальный признак Коши).

Если для знакоположительного числового ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0)$$

существует конечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то при $q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ ряд расходится.

**Замечание.** Радикальный признак Коши следует применять, если общий член ряда имеет вид:

$$a_n = (f(n))^n \qquad \text{и существует} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \neq 1.$$

## 2.4 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

**Определение.** *Знакопеременным рядом* называется числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \tag{29}$$

с членами $d_n$, знаки которых произвольно меняются с изменением номера $n$.

**Определение.** Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|. \tag{30}$$

**Определение.** Знакопеременный ряд (29) называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, а ряд из модулей (30) расходится.

**Теорема.** Если ряд (29) сходится абсолютно, то он сходится в обычном смысле.

#### Свойства абсолютно сходящихся рядов

Если знакопеременные ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

сходятся абсолютно, то:

1) абсолютно сходятся также ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda d_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + d_n);$$

2) сходится любой ряд, полученный из абсолютно сходящегося ряда перестановкой его членов или объединением их в группы.

## 2.5 Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

**Определение.** Знакопеременный ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \quad ; \quad a_n > 0 \quad , \forall n \in N \quad . \qquad (31)$$

называется *знакочередующимся.*

**Теорема** (признак Лейбница).

Если для знакочередующегося ряда (31) выполняются условия:

$$1) \quad a_n \geqslant a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2) \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то этот ряд сходится.

**Замечание.** Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, т.е. знакочередующийся ряд с монотонно убывающим по модулю и стремящимся к нулю общим членом, называют *рядом лейбницевского типа* или *лейбницевским рядом.* Для лейбницевских рядов при всех $n$ справедливы неравенства:

$$S_{2n} < S < S_{2n+1},$$

$$|S - S_n| < a_{n+1},$$

которые можно сформулировать так: остаток лейбницевского ряда по модулю не превосходит своего первого члена и совпадает с ним по знаку.

При решении задач на исследование сходимости знакочередующихся рядов рекомендуется придерживаться следующего алгоритма:

1) исследовать сходимость ряда из модулей: если этот ряд сходится, то исходный ряд сходится абсолютно, дальнейшего рассмотрения не требуется. Если ряд из модулей расходится, и расходимость ряда была установлена признаком Даламбера или радикальным признаком Коши, то необходимое условие сходимости ряда не выполнено, и можно сделать вывод, что исходный ряд является расходящимся. В этом случае исследование также завершается, в противном случае переходим к пункту 2)

2) проверить выполнение необходимого условия сходимости: если оно не выполнено, то ряд расходится; если выполнено,то переходим к пункту 3)

3) применить признак Лейбница для исследования сходимости знакочередующегося ряда: если члены ряда убывают по модулю, то ряд сходится условно; если монотонность доказать не удалось, то требуется более сложный анализ.

# 3 Некоторые сведения о функциональных рядах

## 3.1 Поточечная и равномерная сходимость

Рассмотрим бесконечную последовательность функций $f_n(x)$ имеющих общую область определения.

**Определение.** *Функциональным рядом* называется формальная сумма такой последовательности:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \quad . \tag{32}$$

**Определение.** Функциональный ряд (32) называют *сходящимся в точке* $x_0$, если сходится числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0),$$

в этом случае точку $x_0$ называют *точкой сходимости* функционального ряда (32).

**Определение.** *Областью сходимости* функционального ряда (32) называют множество всех точек сходимости этого ряда.

Во всех точках области сходимости существует предел последовательности частичных сумм $S_n(x)$ равный сумме функционального ряда $S(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x),\ S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Для нахождения области сходимости функционального ряда можно использовать алгоритм сформулированный ранее для знакопеременных рядов.

Определенная выше поточечная сходимость функционального ряда не позволяет обобщить на бесконечные суммы теоремы о пределе, о производной и интеграле суммы конечного числа слагаемых. Для этой цели требуется понятие равномерной сходимости функционального ряда.

**Определение.** Функциональный ряд (32) называют *равномерно сходящимся на множестве $D$*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon, \forall x \in D \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

В отличие от определения поточечной сходимости здесь номер $N_\varepsilon$ не зависит от точки $x$. Поэтому из равномерной сходимости функционального ряда на множестве $D$ следует поточечная сходимость во всех точках этого множества, но обратное неверно.

**Теорема** (критерий равномерной сходимости Коши).

Для того чтобы функциональный ряд равномерно сходился на множестве $D$ необходимо и достаточно, чтобы:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in D \Rightarrow |S_{n+k}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

Достаточное условие равномерной сходимости функционального ряда дает признак Вейерштрасса.

**Теорема** (признак равномерной сходимости Вейерштрасса).

Если для функционального ряда (32) выполняются два условия:

1) $|f_n(x)| \leq a_n$ при $\forall x \in D,\ \forall n \in \mathbb{N}$;

2) знакоположительный числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то функциональный ряд (32) сходится равномерно на множестве $D$.

**Теорема** (о непрерывности суммы функционального ряда).

Если функциональный ряд (32) сходится равномерно на множестве $D$, а все члены ряда $f_n(x)$ непрерывны на этом множестве, то сумма этого ряда $S(x)$ тоже непрерывна на множестве $D$.

**Замечание.** Данная теорема по сути обобщает теорему о непрерывности суммы непрерывных функций на бесконечное число слагаемых.

**Теорема** (о почленном интегрировании функционального ряда).

Если функциональный ряд (32) сходится равномерно на промежутке $[a, b]$, а все члены ряда $f_n(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то для любого промежутка $[c, d] \subset [a, b]$ интеграл от суммы ряда равен сумме интегралов, то есть, справедливо равенство:

$$\int\limits_c^d \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_c^d f_n(x) dx.$$

**Теорема** (о почленном дифференцировании функциональных рядов).

Если ряд из непрерывно дифференцируемых функций $f_n(x)$ сходится на промежутке $[a, b]$, а ряд из производных $f'_n(x)$ сходится равномерно на этом промежутке, то для всех $x \in [a, b]$ справедливо равенство:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

## 3.2 Степенные ряды

**Определение.** *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{33}$$

где $a_n, x_0 \in \mathbb{R}$. Частный случай степенного ряда с центром $x_0 = 0$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{34}$$

**Замечание.** Область сходимости степенного ряда всегда содержит хотя бы одну точку: для ряда (33) это точка $x = x_0$, а для ряда (34) это точка $x = 0$.

**Теорема Абеля.**

1) Если ряд (34) сходится в точке $x = x_1$, то он сходится абсолютно при всех $x$, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_1|$.

2) Если ряд (34) расходится в точке $x = x_2$, то он расходится при всех $x$, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_2|$.

Содержание теоремы Абеля допускает простую геометрическую интерпретацию: если степенной ряд (34) сходится в точке $x_1$ и расходится в точке $x_2$, то он соответственно сходится и расходится на промежутках указанных на рисунке 2.

**Следствие.** Степенной ряд (34) либо сходится на всей числовой прямой, либо существует такое неотрицательное число $R$, называемое *радиусом сходимости*, что степенной ряд (34) сходится на промежутке $(-R, R)$ и расходится на промежутках $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$. В точках $x = \pm R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Для ряда (33) аналогичное утверждение будет таким: ряд (34) сходится на промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$ и расходится на промежутках $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$, в точках $x = x_0 \pm R$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

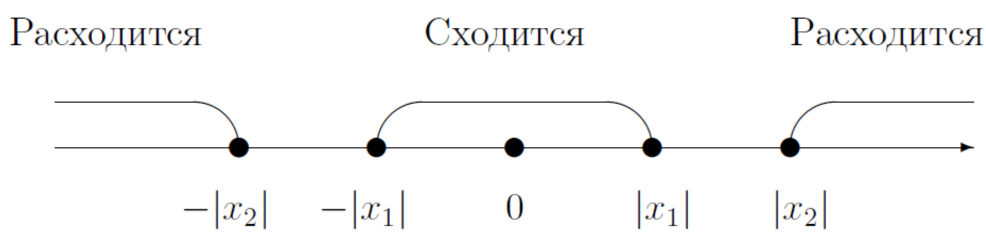


Рисунок 2 — Геометрический смысл теоремы Абеля

**Вычисление радиуса сходимости**

Для вычисления радиуса сходимости степенного ряда (34) можно применить признак Даламбера для исследования абсолютной сходимости:

$$D(x) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Тогда при любом значении $x$ условие абсолютной сходимости ряда (34) будет иметь вид:

$$D(x) < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \Leftrightarrow |x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Если предел в правой части последнего неравенства существует, то радиус сходимости ряда (34) равен этому пределу:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{35}$$

Эта формула справедлива и для ряда (33).

Если применить для исследования абсолютной сходимости степенного ряда радикальный признак Коши:

$$K(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

то условие абсолютной сходимости ряда (34) будет таким:

$$K(x) < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \Leftrightarrow |x| < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Если этот предел существует, то мы получаем еще одну формулу для нахождения радиуса сходимости ряда (34):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{36}$$

которая справедлива также и для ряда (33).

При решении задач на нахождение области сходимости степенного ряда следует:

1) Найти радиус сходимости по формуле (35) или (36), если $R = 0$, то область сходимости состоит из одной точки $x = x_0$, если $R = +\infty$, то ряд сходится абсолютно на всей числовой оси: $(-\infty, +\infty)$.

2) Если радиус сходимости конечен и отличен от нуля, то на открытом промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$ ряд сходится абсолютно.

3) Исследовать сходимость ряда в концевых точках: $x = x_0 \pm R$. Здесь дело сводится к исследованию сходимости числовых рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n R^n.$$

**Замечание.** При нахождении области сходимости степенного ряда можно не вычислять радиус сходимости степенного ряда по формулам (35) или (36), а непосредственно применять к ряду признак Даламбера или радикальный признак Коши, как это делается выше при выводе формул (35) и (36). Более того, формулы (35) и (36) становятся заведомо неприменимыми, если существует бесконечная последовательность нулевых коэффициентов ряда, например, если ряд содержит только чётные или только нечётные степени переменной.

**Теорема** (о равномерной сходимости степенных рядов).

Степенной ряд (34) сходится равномерно на любом отрезке $[-r, r] \subset (-R, R)$, где $R$ — радиус сходимости степенного ряда.

**Теорема** (о непрерывности суммы степенного ряда).

Сумма степенного ряда (34) непрерывна внутри интервала сходимости $(-R, R)$.

**Теорема** (о почленном интегрировании степенного ряда).

Степенной ряд (34) можно почленно интегрировать по любому промежутку $[0, r]$ такому что $[0, r] \in (-R, R)$ :

$$\int\limits_0^r \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_0^r x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{r^{n+1}}{n+1}.$$

**Теорема** (о почленном дифференцировании степенного ряда).

Степенной ряд (34) можно почленно дифференцировать при всех $x \in (-R, R)$, где $R-$ радиус сходимости:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

**Примечание.** Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенных рядов применяются для нахождения сумм степенных рядов и разложения функций в степенные ряды.

### 3.3 Разложение функции в степенной ряд

**Определение.** Функция $f(x)$ *разлагается в степенной ряд* (33) на промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$, если ряд (33) сходится на этом промежутке и его сумма во всех точках этого промежутка равна $f(x)$.

**Теорема.** (о единственности разложения функции в степенной ряд).

Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots . \qquad (37)$$

на промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$, то это разложение единственно, а коэффициенты разложения определяются формулой:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

**Следствие.** Если функция разлагается в степенной ряд на промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$, то она бесконечно дифференцируема на этом промежутке.

**Определение.** *Рядом Тейлора* для функции $f(x)$ на промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$ называется степенной ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots .$$

**Определение.** *Рядом Маклорена* для функции $f(x)$ на промежутке $(-R, R)$ называется степенной ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \ldots .$$

**Замечание.** Теперь мы можем дать другую формулировку теоремы о единственности разложения функции в степенной ряд: если функция $f(x)$ на промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$ разлагается в степенной ряд, то это ряд Тейлора.

Принципиально иметь в виду, что, хотя для любой бесконечно дифференцируемой функции можно составить соответствующий ей ряд Тейлора (Маклорена), сумма ряда может не совпадать со значением функции. В этом случае функция не разлагается в степенной ряд.

**Теорема** (необходимое и достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора).

Для того, чтобы функция $f(x)$ на промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$ разлагалась в ряд Тейлора необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была бесконечно дифференцируема на этом промежутке и остаточный член формулы Тейлора $r_n(x)$ стремился к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Для практического применения, во многих случаях, более удобна следующая теорема.

**Теорема** (достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора).

Если производные всех порядков функции $f(x)$ существуют и равномерно ограничены на промежутке $(x_0 - R, x_0 + R)$, то есть существует такое число $M > 0$, что:

$$|f^{(n)}(x)| \le M \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

то $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора на этом промежутке.

### Разложение в ряд Маклорена элементарных функций

$$1) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$2) \quad \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$3) \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$4)\quad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots$$

$$5)\quad (1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n=$$

$$=1+\frac{\alpha}{1}\,x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}\,x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3+\dots$$

Данный ряд называют *биномиальным разложением.*

**Замечание.** Для рядов 1)-3) радиус сходимости $R=\infty$, для рядов 4) и 5) $R=1$.

### 3.4 Тригонометрические ряды Фурье

**Определение.** *Рядом Фурье (тригонометрическим рядом Фурье)* называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{L}+b_n\sin\frac{\pi nx}{L},\qquad a_n,b_n\in\mathbb{R}. \tag{38}$$

Все члены ряда (38) обладают свойством периодичности, причём наибольший период ($2L$) имеет, очевидно, первое слагаемое ряда, поэтому ряд (38) называют рядом Фурье на отрезке $[-L;L]$, поскольку в силу периодичности достаточно рассмотреть $x\in[-L;L]$.

#### Комплексное представление тригонометрических рядов Фурье

В математической литературе часто используется комплексное представление ряда (38):

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\,e^{\frac{\pi kxi}{L}},\qquad c_k\in\mathbb{C}. \tag{39}$$

Нетрудно убедиться в эквивалентности представлений (38) и (39). Учитывая формулы Эйлера

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,\quad \cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\quad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}, \tag{40}$$

ряд (38) можно преобразовать к виду

$$\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{\frac{\pi nxi}{L}}\,(a_n-ib_n)+e^{-\frac{\pi nxi}{L}}\,(a_n+ib_n)\,,$$

откуда ($n \in \mathbb{N}$)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

или

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i\left(c_{-n} - c_n\right).$$

**Разложение функции в ряд Фурье**

Основным является вопрос о возможности представления заданной функции в виде тригонометрического ряда Фурье и об алгоритме определения коэффициентов ряда ($a_n$ и $b_n$), если такое представление возможно.

Если ряд (38) сходится равномерно на отрезке $[-L, L]$ к некоторой функции $f$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{L} + b_n \sin\frac{\pi n x}{L}, \tag{41}$$

то коэффициенты ряда равны

$$a_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{\pi n x}{L}\,dx \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{42}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{43}$$

Ряд (41), коэффициенты которого вычислены по формулам (42) и (43), называется рядом Фурье для функции $f$. Для отражения этого факта обычно используется следующая запись:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{L} + b_n \sin\frac{\pi n x}{L}.$$

**Сходимость тригонометрических рядов Фурье**

Коэффициенты ряда вычисляются через интегралы и поэтому не зависят от значений функции в отдельных точках (т.е. на множестве нулевой меры). Таким образом, разным функциям может соответствовать один и тот же ряд Фурье, который может, разумеется, сходится только к одной из них. Следовательно сумма ряда Фурье для функции может отличаться от самой функции. Ответ на этот вопрос о сходимости тригонометрических рядов даёт следующая теорема.

**Теорема** (Дирихле).

Пусть функция $f$ периодична с периодом $2L$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $f$ кусочно-непрерывна на $[-L; L]$.

2) функция $f$ имеет конечное число интервалов монотонности.

Тогда ряд Фурье сходится для всех $x$, причём, если $S(x)$ — сумма ряда Фурье, то

1) если $f$ непрерывна в точке $x_0$, то сумма ряда Фурье совпадает со значением функции в этой точке

$$S(x_0) = f(x_0).$$

2) если $x_0$ — точка разрыва первого рода, то имеет место равенство

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

где $f(x_0 \pm 0)$ — односторонние пределы функции $f$ в точке $x = x_0$. В частности

$$S(L) = \frac{f(L - 0) + f(-L + 0)}{2}\ .$$

#### Ряды Фурье для чётных и нечётных функций

**Определение.** Функция называется *чётной*, если для всех значений $x$ из области определения имеет место равенство:

$$f(-x) = f(x),$$

т. е. изменение знака аргумента не отражается на значении функции.

**Определение.** Функция называется *нечётной*, если для всех значений $x$ из области определения имеет место равенство:

$$f(-x) = -f(x),$$

т. е. изменение знака аргумента приводит к перемене знака значения функции.

**Теорема.** Каждая функция, имеющая симметричную относительно нуля область определения, представима в виде суммы чётной и нечётной функции.

Для чётных и нечётных функций имеет место равенство

$$\int\limits_{-L}^{L} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int\limits_{0}^{L} f(x)\,dx, & \text{если } f \ \text{ чётная,} \\ 0, & \text{если } f \text{ нечётная.} \end{cases} \tag{44}$$

**Коэффициенты ряда Фурье для чётной и нечётной функции**

Если $f$ — чётная функция, то

$$a_n = \frac{2}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\cos\frac{\pi n x}{L}\,dx, \qquad b_n = 0. \tag{45}$$

В разложении чётной функции в ряд Фурье присутствуют только косинусы.

Если же $f$ — нечётная функция, то

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int\limits_{0}^{L} f(x)\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx. \tag{46}$$

В разложении нечётной функции в ряд Фурье присутствуют только синусы.

**Разложение по косинусам и синусам**

Для применения формул (45, 46) достаточно, чтобы функция была определена только на положительной части отрезка. Пусть функция $f$ определена на отрезке $[0; L]$, тогда ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{L} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{L},$$

где коэффициенты $a_n$ определены по формулам (45), а $b_n$ определены по формулам (46), называются, соответственно, разложением по косинусам и разложением по синусам.

# Контрольная работа № 9

## Содержание контрольной работы № 9

### Задание № 1

Найдите общее решение уравнения. Выделите частное решение уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, и постройте интегральную кривую для этого решения.

### Задания №№ 2,3,4,5

Найдите общее решение дифференциального уравнения.

**Указание.** Перед решением задач контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими пособиями:


1. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / О. В. Шаляпина, В. С. Капитонов.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2013.— 38 с.

2. Винник, Т. В. Типовые варианты контрольной работы по теме обыкновенные дифференциальные уравнения: методические указания / Т. В. Винник, Н. Н. Гизлер.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2005.— 22 с.

3. Фаттахова, М. В. Линейные дифференциальные уравнения $n$-го порядка. Решение задач: методические указания / М. В. Фаттахова, М. Б. Купчиненко, Н. М. Климовицкая.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2009.— 63 с.

4. Демьянова, Е.М. Дифференциальные уравнения первого порядка: методические указания / Е. М Демьянова, М. Б. Купчиненко, П. Е. Баскакова. СПб., СПбГТИ(ТУ), 2002. — 54 с.


## Условия задач контрольной работы № 9

## Вариант № 1.

1. $(x-3)y' - 2y = 1,\ y(1) = 2.$
2. $(x^2+1)y' - 2xy = x(x^2+1)^2.$
3. $y'''' - 16y = 0.$

4. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}\ln x}{x}$.

5. $y'' + y' = x^2 + 6$.

**Вариант № 2.**

1. $y' = \dfrac{2y}{x} + 3,\ y(1) = 0$.

2. $xy' + y = \ln x$.

3. $y'''' - 5y'' + 6y'' = 0$.

4. $y'' - 2y' + 10y = \dfrac{e^x}{\sin 3x}$.

5. $y'' + 2y' + y = 10e^x$.

**Вариант № 3.**

1. $(x+1)y' - y = 1,\ y(1) = 3$.

2. $y' - \dfrac{y}{x-1} = (x-1)^2$.

3. $y'''' - 4y = 0$.

4. $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$.

5. $y'' - 2y' = 3x + 2$.

**Вариант № 4.**

1. $(x-1)y' - 2y = 2,\ y(2) = 1$.

2. $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1)$.

3. $y'''' + 2y''' + 10y'' = 0$.

4. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. $y'' - 3y' + 2y = 2x$.

**Вариант № 5.**

1. $y' = \dfrac{y}{x} \ln \dfrac{y}{x},\ y(1) = 2.$

2. $y' - \dfrac{y}{x+1} = (x+1)\sin x.$

3. $y'''' + 2y''' + 37y'' = 0.$

4. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x} \ln x}{x^2}.$

5. $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x.$

**Вариант № 6.**

1. $(x+1)y' - 2y = 4,\ y(1) = 2.$

2. $y' - \dfrac{2y}{x-1} = (x-1)^2 \cos x.$

3. $y'''' + 3y''' + 3y'' + y' = 0.$

4. $y'' - 5y' + 6y = e^{4x} \cos e^x.$

5. $y'' + y = -8\cos 3x.$

**Вариант № 7.**

1. $y' = \dfrac{2y}{x} + 1,\ y(1) = 0.$

2. $y' - \dfrac{y}{x} = \ln x.$

3. $y'''' - 2y''' + 26y'' = 0.$

4. $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{x^2}.$

5. $y'' - y = 2x.$

**Вариант № 8.**

1. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2,\ y(0) = -1.$

2. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x(x+2)$.

3. $y'''' - 8y''' + 16y'' = 0$.

4. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^{2x}+1}$.

5. $y'' + y = 4xe^x$.

**Вариант № 9.**

1. $y' = 3\sqrt[3]{y^2},\ y(2) = 0$.

2. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^2 \sin x$.

3. $y'''' - 81y = 0$.

4. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$.

**Вариант № 10.**

1. $y' = -2xy,\ y(0) = 1$.

2. $y' - \dfrac{y}{x+3} = x^2 - 9$.

3. $y'''' + 4y''' + 5y'' = 0$.

4. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x+1}$.

5. $2y'' + 5y' = e^x$.

**Вариант № 11.**

1. $xdy + ydx = 0,\ y(1) = 1$.

2. $y' - \dfrac{2y}{x+2} = (x+3)(x+2)^2$.

3. $y'''' - 4y''' + 13y'' = 0$.

4. $y'' - 8y' + 16y = \dfrac{e^{4x}}{x+1}$.

5. $2y'' + 5y' = 29\cos x$.

**Вариант № 12.**

1.$\dfrac{dx}{y+1} + \dfrac{dy}{x} = 0,\ y(0) = 1$.

2. $y' + \dfrac{y}{x+4} = \dfrac{(x+1)^2}{x+4}$.

3. $y'''' + 10y''' + 25y'' = 0$.

4. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

5. $y'' - 2y' = 2 - 2x$.

**Вариант № 13.**

1. $(x+2)y' - 2y = 6,\ y(-1) = -2$.

2. $y' - \dfrac{2y}{x} = 2x^4$.

3. $y'''' - 12y''' + 36y'' = 0$.

4. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

5. $y'' - y = 4e^x$.

**Вариант № 14.**

1. $(y+4)dx + (x-1)dy = 0,\ y(2) = -3$.

2. $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x$.

3. $y'''' - 4y''' + 29y'' = 0$.

4. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

5. $y'' - 2y' - 3y = 4e^x$.

**Вариант № 15.**

1. $(x-3)y' - 2y = 8,\ y(4) = -3.$

2. $y' - \dfrac{y}{x+3} = x^2 + 3x.$

3. $y'''' - 10y''' + 25y'' = 0.$

4. $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}.$

5. $y'' + y = 6\sin 2x.$

**Вариант № 16.**

1. $(y-4)dx + (x-9)dy = 0,\ y(10) = 5.$

2. $y' - \dfrac{2y}{x+4} = (x+4)^2 \operatorname{tg} x.$

3. $y'''' - 6y''' + 10y'' = 0.$

4. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \operatorname{arctg} x.$

5. $y'' - y = x^2 - x + 1.$

**Вариант № 17.**

1. $(y-2)dx - (x-3)dy = 0,\ y(4) = 4.$

2. $y' - \dfrac{y}{x+6} = x^2 - 36.$

3. $y'''' - 7y''' + 12y'' = 0.$

4. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{\cos^2 x}.$

5. $y'' + y = \cos 2x.$

**Вариант № 18.**

1. $(y-3)dx - (x-2)dy = 0,\ y(3) = 5.$

2. $y' - \dfrac{2y}{x-5} = x(x-5)^2.$

3. $y'''' - 2y''' + 26y'' = 0$.

4. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{\sin^2 x}$.

5. $y'' - 3y' = -18x$.

**Вариант № 19.**

1. $(y+2)dx - (x-4)dy = 0,\ y(5) = 0$.

2. $y' + \dfrac{y}{x+3} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x+3}$.

3. $y'''' - 6y''' + 25y'' = 0$.

4. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x^2+1}$.

5. $y'' - 3y' = e^{3x}$.

**Вариант № 20.**

1. $y'x^3 = 2y,\ y(1) = \dfrac{1}{e}$.

2. $y' - \dfrac{y}{x+7} = x^2 - 49$.

3. $y'''' - 2y''' + 17y'' = 0$.

4. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{x+3}}$.

5. $y'' + y' - 2y = 6x^2$.

**Вариант № 21.**

1. $y' = -\dfrac{y}{x},\ y(1) = 2$.

2.$y' + \dfrac{y}{x+6} = \dfrac{x^2}{x+6}$.

3. $y'''' + 4y''' + 20y'' = 0$.

4. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

5. $y'' + 2y' + y = e^x$.

**Вариант № 22.**

1. $y' = \dfrac{3y}{x} + 2,\ y(1) = -1$.

2. $y' - \dfrac{y}{x-7} = x^2 - 8x + 7$.

3. $y'''' + 4y''' + 13y'' = 0$.

4. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$.

**Вариант № 23.**

1. $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right),\ y(1) = e$.

2. $y' - \dfrac{y}{x+8} = x^2 - 9x + 8$.

3. $y'''' + 9y''' + 27y'' + 27y' = 0$.

4. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^3 2x}$.

5. $y'' - y = e^{-x}$.

**Вариант № 24.**

1. $y' \operatorname{tg} x - y = 1,\ y(\dfrac{\pi}{2}) = 0$.

2. $y' - \dfrac{2y}{x-4} = x(x-4)^3$.

3. $y'''' + 14y''' + 48y'' = 0$.

4. $y'' + 9y = \dfrac{1}{\cos^3 3x}$.

5. $y'' - y' = e^x$.

**Вариант № 25.**

1. $y' = \dfrac{2xy}{1+x^2}$, $y(1) = 2$.

2. $y' - \dfrac{y}{x+5} = (x+5)\operatorname{ctg} x$.

3. $y'''' - 16y''' + 64y'' = 0$.

4. $y'' + 4y = \dfrac{\sin 2x}{\cos^2 2x}$.

5. $y'' - y' = x$.

## Решение типовых вариантов контрольной работы № 9

### Вариант 1.

**Задание 1.** Найдите общее решение уравнения

$$(x-2)y' - 3y = 6. \tag{47}$$

Выделите частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = -1$, и постройте интегральную кривую для этого решения.

**Решение.** Уравнение (47) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Перепишем это уравнение в виде

$$(x-2)\frac{dy}{dx} = 3(y+2).$$

Умножим обе части уравнения на $dx$:

$$(x-2)dy = 3(y+2)dx.$$

Отметим, что полученное уравнение имеет решение в виде постоянной $y \equiv -2$. Найдём другие решения уравнения. Разделив обе части уравнения на $(x-2)(y+2) \neq 0$, получим

$$\frac{dy}{y+2} = \frac{3dx}{x-2}.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением с разделёнными переменными. Интегрируя обе части равенства, получим

$$\int \frac{dy}{y+2} = \int \frac{3dx}{x-2} \Longrightarrow \ln|y+2| = 3\ln|x-2| + \ln|C|.$$

Учитывая свойства логарифмов, получаем

$$\ln|y+2| = \ln|C(x-2)^3| \Longrightarrow y+2 = C(x-2)^3.$$

Общее решение имеет, таким образом, следующий вид

$$y = C(x-2)^3 - 2. \tag{48}$$

Отметим, что формула (48) содержит в том числе и решение в виде постоянной функции $y \equiv -2$ (при $C = 0$).

Подставляя в найденное общее решение, задаваемое формулой (48), $x = 1$ и $y = -1$, найдём значение произвольной постоянной, которое соответствует этому начальному условию:

$$-1 = C(1-2)^3 - 2,$$

откуда $C = -1$. Подставляя найденное значение $C$ в общее решение (48), получим искомое частное решение уравнения:

$$y = -(x-2)^3 - 2.$$

Соответствующая ему интегральная кривая (график частного решения) представляет собой кубическую параболу (см. рисунок 3).

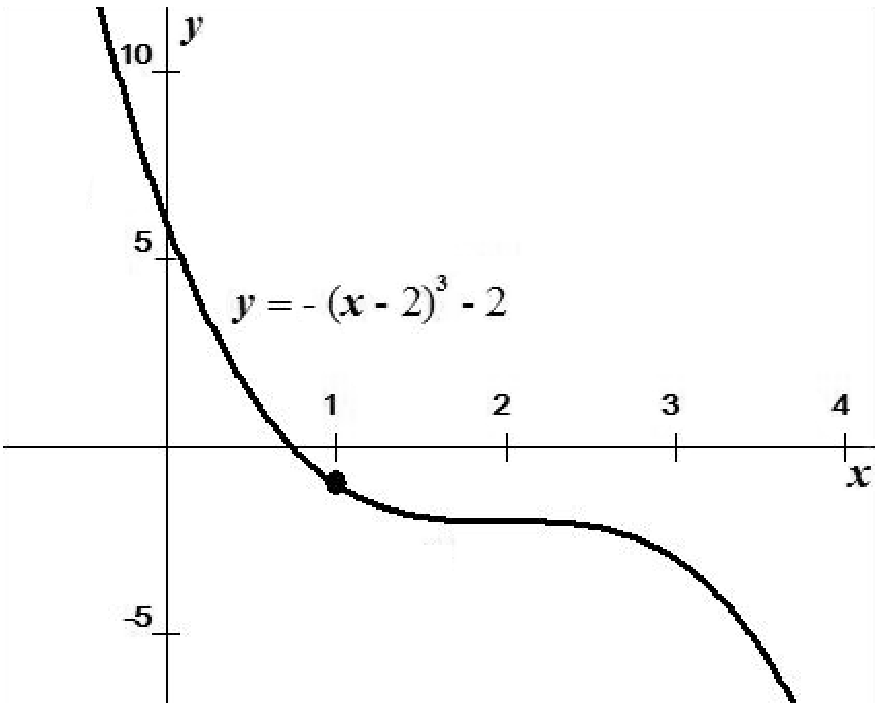


Рисунок 3 – Интегральная кривая в задании 1

**Задание 2.** Найдите общее решение уравнения

$$y' - \frac{2y}{x-3} = (x-3)^2(x+1). \tag{49}$$

**Решение.** Уравнение (49) имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x)$$

и, следовательно, относится к линейным неоднородным дифференциальным уравнениям первого порядка. Найдём его общее решение методом вариации произвольной постоянной. Составим сначала соответствующее ему линейное однородное дифференциальное уравнение

$$Y' - \frac{2Y}{x-3} = 0. \tag{50}$$

Решим уравнение (50) разделением переменных. Перепишем уравнение в виде

$$dY = \frac{2Y}{x-3}\,dx,$$

разделим обе части на $Y$

$$\frac{dY}{Y} = \frac{2dx}{x-3}.$$

Интегрируя обе части этого уравнения (дифференциального уравнения с разделёнными переменными), получим

$$\ln|Y| = 2\ln|x-3| + \ln|C|$$

и, окончательно,

$$Y = C(x-3)^2. \tag{51}$$

Зная общее решение линейного однородного уравнения, задаваемое формулой (51), будем искать решение исходного уравнения (49) в виде

$$y = C(x)\cdot(x-3)^2, \tag{52}$$

где $C(x)$ — новая неизвестная функция. Дифференцируя равенство (52), получаем

$$y' = C'(x)(x-3)^2 + 2C(x)(x-3). \tag{53}$$

Подставляя соотношения (52) и (53) в исходное уравнение (49), получаем равенство

$$C'(x)(x-3)^2 + 2C(x)(x-3) - \frac{2C(x)\cdot(x-3)^2}{x-3} = (x-3)^2(x+1),$$

упрощая которое получаем

$$C'(x) = x + 1.$$

Интегрируя, получаем

$$C(x) = \int (x+1)dx = \frac{(x+1)^2}{2} + C. \tag{54}$$

Подставляя $C(x)$ из (54) в формулу (52), получаем общее решение исходного уравнения (49):

$$y = \left(\frac{1}{2}(x+1)^2 + C\right)(x+3)^2.$$

**Задание 3.** Найдите общее решение уравнения

$$y'''' - 8y''' + 15y'' = 0.$$

**Решение.** Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 15\lambda^2 = 0.$$

Найдём корни характеристического уравнения

$$\lambda^2\left(\lambda^2 - 8\lambda + 15\right) = 0.$$

Получаем, что характеристическое уравнение имеет один кратный корень и два простых:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 3, \quad \lambda_4 = 5.$$

Зная корни характеристического уравнения, построим фундаментальную систему решений:

$$y_1 = e^{0x} = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = e^{3x}, \quad y_4 = e^{5x}.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{3x} + C_4e^{5x}.$$

**Задание 4.** Найдите общее решение уравнения

$$y'' - y' = \frac{e^x}{e^x + 1}\,. \tag{55}$$

**Решение.** Уравнение (55) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Найдём сначала общее решение линейного однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному:

$$Y'' - Y' = 0. \tag{56}$$

Составим характеристическое уравнение и найдём его корни

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0.$$

Получаем, что корнями характеристического уравнения являются числа

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^x. \tag{57}$$

Общее решение линейного однородного уравнения (56) является линейной комбинацией функций, образующих фундаментальную систему решений (57):

$$Y = C_1 + C_2 e^x. \tag{58}$$

Найдём теперь общее решение исходного уравнения (55) методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа), для чего в формуле (57) заменим произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$ неизвестными функциями:

$$y = C_1(x) + C_2(x)e^x. \tag{59}$$

Производные новых неизвестных функций, как известно, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x), \end{cases}$$

где $y_1$, $y_2$ — функции, образующие фундаментальную систему решений (см. формулу (57)), а $f(x)$ — правая часть линейного неоднородного уравнения (55). Учитывая, что

$$y_1' = 0, \quad y_2' = e^x,$$

имеем:

$$\begin{cases} C_1' + C_2' e^x = 0, \\ \qquad\quad C_2' e^x = \dfrac{e^x}{e^x+1}. \end{cases}$$

Получаем

$$C_2' = \frac{1}{1+e^x}, \quad C_1' = -\frac{e^x}{e^x+1}.$$

Неизвестные функции находим интегрированием:

$$C_1(x) = -\int \frac{e^x dx}{e^x+1} = -\int \frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1} = -\ln\left(1+e^x\right) + C_1.$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{1+e^x}\, dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\, dx = \int dx - \int \frac{e^x dx}{e^x+1} =$$
$$= x - \ln\left(1+e^x\right) + C_2.$$

Подставляя найденные выражения для функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (59), получаем

$$y = -\ln\left(1+e^x\right) + C_1 + \left(x - \ln\left(1+e^x\right)\right) e^x,$$

$$y = C_1 + C_2 e^x + x e^x - e^x \ln\left(1+e^x\right) - \ln\left(1+e^x\right).$$

**Задание 5.** Найдите общее решение уравнения

$$y'' + 4y = 2\cos x \tag{60}$$

**Решение.** Уравнение (60) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Действительно, правая часть уравнения имеет вид

$$e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right), \text{где } a=0, b=1, Q_m(x)\equiv 0, P_n(x) = P_0 = 2.$$

Найдём сначала общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (60):

$$Y'' + 4Y = 0. \tag{61}$$

Характеристическое уравнение для уравнения (61) имеет вид

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения является пара комплексно-сопряжённых чисел

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Фундаментальная система решений уравнения (61) образована функциями

$$y_1 = e^{0x} \cos 2x = \cos 2x, \quad y_2 = e^{0x} \sin 2x = \sin 2x.$$

Общее решение уравнения (61) имеет вид

$$Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x. \tag{62}$$

Теперь найдём частное решение исходного неоднородного уравнения (60) методом неопределённых коэффициентов. С учётом того, что число

$$a + bi = 0 + i = i$$

не является корнем характеристического уравнения, частное решение уравнения (60) имеет вид

$$y_* = A_0 \cos bx + B_0 \sin bx,$$

$$y_* = A \cos x + B \sin x. \tag{63}$$

Дифференцируя равенство (63), находим

$$y_*' = -A \sin x + B \cos x. \tag{64}$$

$$y_*'' = -A \cos x - B \sin x. \tag{65}$$

Подставляя соотношения (63, 64, 65) в уравнение (60), получаем

$$-A \cos x - B \sin x + 4A \cos x + 4B \sin x = 2 \cos x,$$

$$3A \cos x + 3B \sin x = 2 \cos x.$$

Приравнивая коэффициенты в левой и правой частях при $\cos x$ и $\sin x$, получим

$$\begin{cases} 3A = 2, \\ 3B = 0, \end{cases}$$

откуда $B = 0$, $A = \frac{2}{3}$. Подставляя найденные значения $A$ и $B$ в формулу (63), получаем частное решение уравнения (60):

$$y_* = \frac{2}{3} \cos x.$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения (60) находим по формуле

$$y = Y + y_*,$$

где $Y$ — общее решение линейного однородного уравнения (61), а $y_*$ — частное решение линейного неоднородного уравнения (60). Окончательно получаем:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{2}{3} \cos x.$$

**Вариант 2.**

**Задание 1.** Найдите общее решение уравнения

$$y' = \frac{3y}{x} + 2. \tag{66}$$

Выделите частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$, и постройте соответствующую интегральную кривую для этого уравнения.

**Решение.** Уравнение (66) имеет вид

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

и, следовательно, является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Введём новую неизвестную функцию с помощью замены

$$t = \frac{y}{x}.$$

Получаем:

$$y = t \cdot x, \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \cdot x + t.$$

Подставляя выражения для $y$ и $y'$ в уравнение (66), получаем

$$\frac{dt}{dx} \cdot x + t = 3t + 2, \quad x \cdot \frac{dt}{dx} = 2(t + 1).$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными, перепишем его в виде

$$xdt = 2(t + 1)dx.$$

Отметим, что среди решений уравнения есть постоянная функция $t \equiv -1$, и поделим обе части на $x(t+1) \neq 0$:

$$\frac{dt}{t+1} = \frac{2dx}{x}.$$

Получилось уравнение с разделёнными переменными. Интегрируя обе его части, получаем

$$\ln|t+1| = 2\ln|x| + \ln|C|, \qquad \ln|t+1| = \ln\left|x^2 C\right|,$$

откуда следует, что

$$t = Cx^2 - 1.$$

Возвращаясь к старым переменным, получаем

$$\frac{y}{x} = Cx^2 - 1$$

и, окончательно, заключаем, что общее решение исходного уравнения (66) может быть записано в виде

$$y = Cx^3 - x. \tag{67}$$

Подстановкой в равенство (67) начальных условий $x = 1$, $y = 0$ находим значение произвольной постоянной $C$:

$$C - 1 = 0, \qquad C = 1.$$

Окончательно, подстановкой в равенство (67) значения $C = 1$, получаем частное решение уравнения (66), являющееся решением поставленной задачи Коши:

$$y = x^3 - x.$$

Интегральную кривую (т.е график частного решения) можно построить, применяя стандартные методы построения графиков функций. Интегральная кривая является в данном случае кубической параболой, её график представлен на рисунке 4.

**Задание 2.** Найдите общее решение уравнения

$$y' - \frac{y}{x+4} = (x+4)\sin 2x. \tag{68}$$

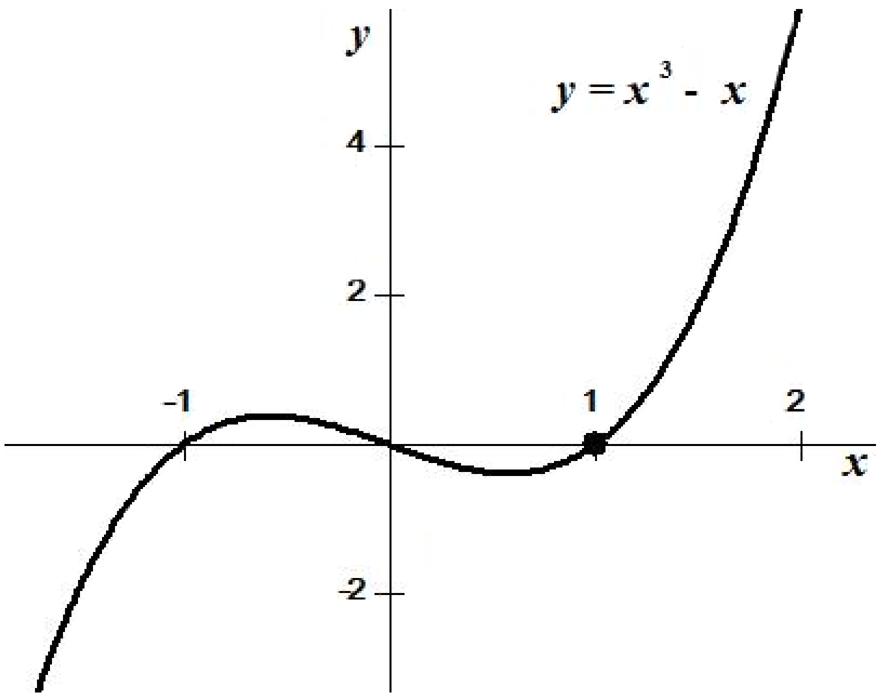


Рисунок 4 — Интегральная кривая в задании 2

**Решение.** Уравнение (68) является линейным линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка, т. к. имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Найдём общее решение уравнения методом вариации произвольной постоянной (методом Лагранжа). Однородное линейное уравнение, соответствующее данному неоднородному, имеет вид

$$Y' - \frac{Y}{x+4} = 0. \tag{69}$$

Разделим переменные в уравнении (68):

$$\frac{dY}{dx} = \frac{Y}{x+4} \Longrightarrow \frac{dY}{Y} = \frac{dx}{x+4}.$$

Получили уравнение с разделёнными переменными, проинтегрировав обе части которого, имеем:

$$\ln|Y| = \ln|x+4| + \ln|C|,$$

$$Y = C(x+4). \tag{70}$$

Формула (70) задаёт общее решение линейного однородного уравнения (69). Общее решение исходного линейного неоднородного уравнения (68) будем искать, заменив в формуле (68) произвольную постоянную новой неизвестной функцией $C(x)$:

$$y = C(x)(x+4). \tag{71}$$

Дифференцируя равенство (71), получаем

$$y' = C'(x)(x+4) + C(x).$$

Подставив выражения для $y$ (равенство (71)) и для $y'$ в исходное уравнение (68), получим

$$C'(x)(x+4) + C(x) - \frac{C(x)(x+4)}{x+4} = (x+4)\sin 2x.$$

В результате упрощений приходим к равенству

$$C'(x) = \sin 2x,$$

интегрируя которое, получаем

$$C(x) = \int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

Подставив найденное выражение для $C(x)$ в равенство (71), находим общее решение уравнения (68):

$$y = \left(C - \frac{1}{2}\cos 2x\right)(x+4).$$

**Задание 3.** Найдите общее решение уравнения

$$y'''' - 256y = 0. \tag{72}$$

**Решение.** Уравнение (72) является линейным однородным дифференциальным уравнением четвёртого порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^4 - 256 = 0, \qquad \left(\lambda^2 - 16\right)\left(\lambda^2 + 16\right) = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа

$$\lambda_{1,2} = \pm 4, \quad \lambda_{3,4} = \pm 4i.$$

Составим фундаментальную систему решений для уравнения (72):

$$y_1 = e^{-4x}, \quad y_2 = e^{4x}, \quad y_3 = \cos 4x, \quad y_4 = \sin 4x.$$

Общее решение уравнения (72) имеет вид:

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{4x} + C_3 \cos 4x + C_4 \sin 4x.$$

**Задание 4.** Найдите общее решение уравнения

$$y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x. \tag{73}$$

**Решение.** Уравнение (73) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Сначала найдём общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$Y'' + Y = 0, \tag{74}$$

соответствующее исходному (неоднородному) уравнению (73). Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (74) имеет вид

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

его корнями являются числа $\lambda_{1,2} = \pm i$ и, следовательно, фундаментальная система решений уравнения (74) состоит из функций

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x. \tag{75}$$

Общее решение линейного однородного уравнения (74) имеет вид

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{76}$$

Общее решение исходного уравнения (73) будем искать методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа), заменив в общем решении однородного уравнения (76) произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$ новыми неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x. \tag{77}$$

Производные новых неизвестных функций, как известно, могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x), \end{cases}$$

где $f(x) = -\operatorname{ctg}^2 x$ — правая часть линейного неоднородного уравнения, а $y_1$ и $y_2$ — функции, составляющие фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения, задаваемые в нашем случае формулой (75). Из равенств (75) легко получить, что

$$y_1' = -\sin x, \quad y_2' = \cos x,$$

поэтому в нашем случае система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \phantom{-}C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = -\operatorname{ctg}^2 x. \end{cases}$$

Данную систему линейных уравнений удобно решать по формулам Крамера. Составим и вычислим соответствующие определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ -\operatorname{ctg}^2 x & \cos x \end{vmatrix} = \sin x \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{ctg}^2 x \end{vmatrix} = -\cos x \operatorname{ctg}^2 x = -\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}.$$

По формулам Крамера имеем:

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\cos^2 x}{\sin x}, \qquad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}.$$

Остаётся проинтегрировать полученные выражения:

$$C_1(x) = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\, dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin x} - \int \sin x\, dx =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C_1;$$

$$C_2(x) = -\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = -\int \frac{\left(1 - \sin^2 x\right) \cos x dx}{\sin^2 x} = \left\| \cos x dx = d(\sin x) \right\| =$$

$$= -\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) d(\sin x) = \frac{1}{\sin x} + \sin x + C_2.$$

Подставляя найденные выражения для $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (77), получаем общее решение исходного уравнения (73):

$$y = \left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C_1\right) \cos x + \left(\frac{1}{\sin x} + \sin x + C_2\right) \sin x.$$

**Задание 5.** Найдите общее решение уравнения

$$y'' - 8y' + 16y = 6e^{2x}. \tag{78}$$

**Решение.** Уравнение (78) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Действительно, правая часть уравнения (78) может быть записана в виде

$$e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m \sin\beta x\right),$$

если положить $a = 2$, $b = 0$, $P_n(x) = P_0 = 6$.

Сначала найдём общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, соответствующего исходному неоднородному уравнению (78):

$$Y'' - 8Y' + 16Y = 0. \tag{79}$$

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (79) имеет вид

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - 4)^2 = 0.$$

Это уравнение имеет один корень кратности 2:

$$\lambda_{1,2} = 4.$$

Фундаментальная система решений для уравнения (79) состоит, следовательно, из функций

$$y_1 = e^{4x}, \quad y_2 = x \cdot e^{4x}.$$

Общее решение уравнения (79), таким образом, имеет вид

$$Y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}. \tag{80}$$

Теперь найдём частное решение неоднородного уравнения (78) методом неопределённых коэффициентов. С учётом того, что число $\alpha + i\beta = 2$ не является корнем характеристического уравнения, частное решение исходного уравнения будем искать в виде:

$$y_* = Ae^{2x}. \tag{81}$$

Последовательным дифференцированием равенства (81) находим

$$y_*' = 2Ae^{2x}, \qquad y_*'' = 4Ae^{2x}.$$

Подставляя выражения для $y_*$, $y'_*$, $y''_*$ в уравнение (78), получим

$$4Ae^{2x} - 16Ae^{2x} + 16Ae^{2x} = 6e^{2x} \Longrightarrow 4Ae^{2x} = 6e^{2x} \Longrightarrow A = \frac{3}{2}.$$

Подставляя найденное значение коэффициента $A$ в равенство (81), получим, что частным решением исходного неоднородного уравнения является функция

$$y_* = \frac{3}{2}\,e^{2x}.$$

Общее решение неоднородного уравнения (78) находим как сумму его частного решения и общего решения однородного уравнения (79), т. е. по формуле

$$y = y_* + Y.$$

Окончательно получаем:

$$y = \frac{3}{2}\,e^{2x} + C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}.$$

# Контрольная работа № 10

## Содержание контрольной работы № 10

### Задание № 1

Исследуйте на сходимость числовой знакоположительный ряд.

### Задание № 2

Исследуйте на сходимость числовой знакочередующийся ряд.

### Задание № 3

Найдите область сходимости степенного ряда.

**Указание.**

Перед решением задач контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими методическими указаниями:


1. Груздков, А. А. Ряды: учебное пособие / А. А. Груздков, О. В. Шаляпина, В. С. Капитонов.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2014.— 65 с.

2. Баскакова, П. Е. Типовые варианты контрольной работы по теме ряды: методические указания / П. Е. Баскакаова, Т. В. Винник, Н. Н. Гизлер, Л. В. Зайцева.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2007.— 21 с.

3. Капитонов, В. С. Функциональные ряды: методические указания / В. С. Капитонов, Н. Н. Гизлер, С. Э. Деркачев, Л. В. Зайцева. — СПб., СПбГТИ(ТУ). — 2005. – 30 с.


## Условия задач контрольной работы № 10

## Вариант № 1.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2^n}.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}.$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+2)^n}{n2^n}.$

**Вариант № 2.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+n+1}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$.

**Вариант № 3.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2+n+1}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$.

**Вариант № 4.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n+1}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n3^n}$.

**Вариант № 5.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+n+1}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n^2}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-4)^n}{n4^n}$.

## Вариант № 6.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n+3}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n(x+2)^n}{3^n}$.

## Вариант № 7.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n3^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{4^n}$.

## Вариант № 8.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{4^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{3n+4}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x+3)^n}{2n+1}$.

**Вариант № 9.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{2n}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n+3}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n}.$

**Вариант № 10.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n^2+4}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n4^n}.$

3. $\sum\limits_{N=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{(n+1)4^n}.$

**Вариант № 11.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{10n+1}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{10n+1}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}.$

**Вариант № 12.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{4^n}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n+4^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{3^n}$.

**Вариант № 13.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{4n+1}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{4n+1}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-4)^n}{n4^n}$.

**Вариант № 14.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+4)^n}{n^2+n}$.

**Вариант № 15.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3n^2+n+4}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{3n+1}{4n+1}\right)^n$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{n5^n}$.

**Вариант № 16.**

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+1}{3n+2}\right)^n.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{6n+1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(x-5)^n}{5^n}.$

**Вариант № 17.**

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{6n+5}{3n+2}\right)^n.$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n+1}.$

**Вариант № 18.**

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n+1}\right)^n.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{4^n}.$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+4)^n}{3^n}.$

**Вариант № 19.**

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+11}{3n+5}.$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3n+5}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-6)^n}{6^n}$.

### Вариант № 20.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n++11}{2n+3}\right)^n$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{6^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2n+13}$.

### Вариант № 21.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+5^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4^n}{n+3}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{2n+3}$.

### Вариант № 22.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8n-1}{4n+3}\right)^n$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3n+7^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-8)^n}{n8^n}$.

**Вариант № 23.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{8^n}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{8n+5}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-3)^n}{n6^n}$.

**Вариант № 24.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{3n-2}\right)^n$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)5^n}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n$.

**Вариант № 25.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5^n}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n+5}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{8^n}$.

## Решение типовых вариантов контрольной работы № 10

### Вариант 1.

**Задание 1.** Исследуйте на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{7^n}{n+3}\,.$$

**Решение.** Данный ряд является знакоположительным числовым рядом. Применим признак сходимости Даламбера. Вычислим предел

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

где $u_n$ — общий член ряда. Для нашей задачи

$$u_n = \frac{7^n}{n+3}, \qquad u_{n+1} = \frac{7^{n+1}}{n+4}\,.$$

Таким образом,

$$q = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7^{n+1}}{n+4} : \frac{7^n}{n+3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+1}(n+3)}{(n+4)7^n} = 7 \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+4} =$$

$$= 7 \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)} = 7 \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}} = 7.$$

Поскольку $q = 7 > 1$, на основании признака Даламбера заключаем, что рассматриваемый ряд расходится.

**Ответ:** расходится.

**Задание 2.** Исследуйте сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{8n-5}\,. \tag{82}$$

**Решение.** Ряд (82) является знакочередующимся числовым рядом. Исследуем ряд на абсолютную сходимость, для этого рассмотрим ряд из абсолютных величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1} \frac{1}{8n-5}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n-5}\,. \tag{83}$$

Ряд (83) является знакоположительным числовым рядом. Для исследования на сходимость ряда (83) применим предельный признак сравнения. В качестве эталонного ряда возьмём гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \tag{84}$$

который, как известно, расходится. Вычислим

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

где $a_n$ и $b_n$ — общие члены сравниваемых рядов, в нашем случае

$$a_n = \frac{1}{8n-5}, \qquad b_n = \frac{1}{n}.$$

Имеем:

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{8n-5} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{8n-5}\cdot\frac{n}{1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(8-\frac{5}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{8-\frac{5}{n}} = \frac{1}{8}.$$

Поскольку $0 < C < \infty$, ряды (83) и (84) в смысле сходимости ведут себя одинаково, т. е. либо оба сходятся, либо оба расходятся. Учитывая, что гармонический ряд (84) является расходящимся, делаем вывод, что ряд из абсолютных величин (83) тоже расходится и, следовательно, свойством абсолютной сходимости исходный ряд (82) не обладает.

Для доказательства сходимости исходного знакочередующегося ряда (82) покажем, что выполнены условия теоремы Лейбница. Первое условие заключается в стремлении общего члена ряда к нулю (необходимое условие сходимости), это условие выполнено:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{8n-5} = 0.$$

Второе условие теоремы Лейбница заключается в монотонном убывании модуля общего члена ряда. В данном случае это условие, очевидно, выполнено, поскольку числитель остаётся постоянным (равен 1), а знаменатель растёт с увеличением $n$. Действительно,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{1}{8n-5} \geqslant \frac{1}{8(n+1)-5} = \frac{1}{8n+3} = a_{n+1}.$$

Итак, на основании теоремы Лейбница делаем вывод о том, что исходный ряд (82) сходится. Ранее было показано, что ряд из абсолютных величин (83) расходится, следовательно, сходимость ряда (82) будет условной.

**Ответ:** ряд (82) сходится условно.

**Задание 3.** Найдите область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+4)^n}{(n+2)\cdot 5^n}. \tag{85}$$

**Решение.** Ряд (85) относится к степенным рядам. Исследуем его на абсолютную сходимость с помощью признака Даламбера. Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{(x+4)^n}{(n+2)\cdot 5^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x+4|^n}{(n+2)\cdot 5^n}$$

и, таким образом для общего члена ряда из абсолютных величин можно записать

$$|u_n(x)| = \frac{|x+4|^n}{(n+2)5^n}, \qquad |u_{n+1}(x)| = \frac{|x+4|^{n+1}}{(n+3)5^{n+1}}\,.$$

Для фиксированного значения $x$ вычислим предел

$$q(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+4|^{n+1}(n+2)5^n}{(n+3)5^{n+1}|x+4|^n} = \frac{|x+4|}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3} =$$

$$= \frac{|x+4|}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{|x+4|}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}} = \frac{|x+4|}{5}.$$

Согласно признаку Даламбера ряд сходится, если $q(x) < 1$, и расходится, если $q(x) > 1$. Таким образом, степенной ряд (85) будет сходится абсолютно при выполнении условия

$$\frac{|x+4|}{5} < 1 \iff |x+4| < 5.$$

Раскрывая знак модуля в неравенстве, получаем

$$-5 < x+4 < 5 \iff -9 < x < 1.$$

Мы получили интервал сходимости степенного ряда $(-9;1)$. Остаётся исследовать сходимость ряда в граничных точках интервала сходимости.

Подставим в исходный степенной ряд (85) значение $x=-9$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-9+4)^n}{(n+2)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-5)^n}{(n+2)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n 5^n}{(n+2)5^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{1}{n+2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\,.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots = \sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}$$

является гармоническим рядом, который, как известно, расходится. Таким образом, в точке $x = -9$ степенной ряд (85) расходится.

Подставим в исходный степенной ряд (85) значение $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+4)^n}{(n+2)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{5^n}{(n+2)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+2}\,.$$

Полученный ряд является знакочередующимся числовым рядом, который не обладает свойством абсолютной сходимости, поскольку ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2},$$

как было показано выше, расходится. Проверка условий теоремы Лейбница не составляет особого труда:

$$1) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = 0;$$

$$2) \qquad \frac{1}{n+2} \geqslant \frac{1}{(n+1)+2} = \frac{1}{n+3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, в точке $x = 1$ по теореме Лейбница ряд сходится, а поскольку он не обладает свойством абсолютной сходимости, сходимость будет условная.

**Ответ:** область сходимости степенного ряда $D = (-9; 1]$. В точке $x = 1$ ряд сходится условно.

**Вариант 2.**

**Задание 1.** Исследуйте сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+9^n}\,. \tag{86}$$

**Решение.** Ряд (86) является знакоположительным числовым рядом. Для исследования на сходимость применим признак сравнения. Для общего члена ряда верно очевидное неравенство

$$a_n = \frac{1}{n+9^n} \leqslant \frac{1}{9^n} = b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{87}$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n, \tag{88}$$

который согласно (87) является мажорантой для исходного ряда (86), представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем по модулю меньшим единицы: $q = \frac{1}{9}$. Следовательно, геометрическая прогрессия является сходящейся.

По теореме сравнения, в силу выполнения условия (87), из сходимости ряда (88) следует сходимость ряда (86).

**Ответ:** ряд сходится.

**Задание 2.** Исследуйте сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{3n+2}{6n-1}\right)^{2n}. \tag{89}$$

**Решение.** Ряд (89) является знакочередующимся числовым рядом. Исследуем его на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \left(\frac{3n+2}{6n-1}\right)^{2n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{6n-1}\right)^{2n}. \tag{90}$$

Полученный ряд (86) является знакоположительным числовым рядом. Исследуем его сходимость с помощью радикального признака Коши. Вычислим

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{6n-1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{6n-1}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{6n-1}\right)^2 =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(6-\frac{1}{n}\right)}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}}{6-\frac{1}{n}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

По радикальному признаку Коши ряд из абсолютных величин (90) сходится, поскольку $q = \frac{1}{4} < 1$. Следовательно, исходный знакочередующийся ряд (89) сходится абсолютно.

**Ответ:** ряд сходится абсолютно.

**Задание 3.** Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-11)^n}{n!}. \tag{91}$$

**Решение.** Ряд (91) является степенным рядом. Исследуем его на абсолютную сходимость с помощью признака Даламбера. Рассмотрим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{3^n (x-11)^n}{n!} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n |x-11|^n}{n!}.$$

При произвольном фиксированном значении $x$ имеем

$$|u_n(x)| = \frac{3^n |x-11|^n}{n!}, \ |u_{n+1}(x)| = \frac{3^{n+1} |x-11|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3^n 3 |x-11|^n |x-11|}{n!(n+1)}.$$

Тогда

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n 3|x-11|^n |x-11| n!}{n!(n+1)3^n |x-11|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3|x-11|}{(n+1)} =$$

$$= 3|x-11| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0.$$

Таким образом, $q(x) \equiv 0$ и, следовательно, условие $q < 1$ выполнено при любом значении $x$. Это означает, что ряд (91) сходится на всей числовой оси, а радиус сходимости равен $R = \infty$.

**Ответ:** область сходимости $D = (-\infty; +\infty)$.

# Контрольная работа № 11

## Содержание контрольной работы № 11

### Задание № 1

Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислите интеграл с точностью до 0,001.

### Задание № 2

Разложите в тригонометрический ряд Фурье функцию, заданную на указанном отрезке и имеющую период $T = 2\pi$. Постройте графики функции и суммы ряда Фурье.

### Задание № 3

Разложите функцию, заданную на отрезке, в тригонометрический ряд Фурье указанным способом. Постройте графики функции и суммы ряда Фурье.

**Указание.** Перед решением задач контрольной работы рекомендуется ознакомиться со следующими методическими указаниями:


1. Груздков, А. А. Ряды: учебное пособие / А. А. Груздков, О. В. Шаляпина, В. С. Капитонов.– СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2014.– 65 с.

2. Функциональные ряды: методические указания / В. С. Капитонов, Н. Н. Гизлер, С. Э. Деркачев, Л. В. Зайцева– СПб., СПбГТИ(ТУ).– 2005. – 30 с.

3. Ряды Фурье. Индивидуальные задания: методические указания / Т. В. Слободинская, В. В. Березникова, А. Н. Паульсен.– СПб., СПбГТИ(ТУ).– 2000. – 26 с.


## Условия задач контрольной работы № 11

## Вариант № 1.

1. $\displaystyle\int_0^{0,1} e^{-6x^2} dx.$

2. $f(x)=\begin{cases} 3, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 9x+7, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x)=(x-1)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$ по синусам.

**Вариант № 2.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^1 \cos x^2 dx.$

2. $f(x)=\begin{cases} 5x-12, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 11, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x)=(x-1)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$ по косинусам.

**Вариант № 3.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{0{,}1} \sin(100x^2) dx.$

2. $f(x)=\begin{cases} -2x+5, & -\pi \leqslant x < 0, \\ -10, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x)=-(x+2)^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$ по синусам.

**Вариант № 4.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{0{,}5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

2. $f(x)=\begin{cases} 11, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 9x-11, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x)=-(x+2)^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$ по косинусам.

**Вариант № 5.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{0{,}1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx.$

2. $f(x) = \begin{cases} 4, & -\pi \leqslant x < 0, \\ -12x - 9, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = (x+1)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$ по синусам.

**Вариант № 6.**

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 + x/5)}{x} dx.$

2. $f(x) = \begin{cases} -8x + 2, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 6, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = (x+1)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$ по косинусам.

**Вариант № 7.**

1. $\displaystyle\int_0^{1{,}5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27 + x^3}}.$

2. $f(x) = \begin{cases} 8x - 3, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 9, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = (x-1)^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$ по синусам.

**Вариант № 8.**

1. $\displaystyle\int_0^{0{,}2} e^{-3x^2}.$

2. $f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 6x - 3, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = (x-1)^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$ по косинусам.

**Вариант № 9.**

1. $\displaystyle\int_0^{0{,}2} \sin(25x^2) dx.$

2. $f(x)=\begin{cases} -2, & -\pi \leqslant x < 0, \\ x+12, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x)=-(x+1)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$ по синусам.

**Вариант № 10.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{0{,}5} \cos(4x^2)dx.$

2. $f(x)=\begin{cases} 8x-3, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 9, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x)=-(x+1)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$ по косинусам.

**Вариант № 11.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$

2. $f(x)=\begin{cases} 10x+8, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 4, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x)=-(x+1)^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$ по синусам.

**Вариант № 12.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{0{,}2} \frac{1-e^{-x}}{x}.$

2. $f(x)=\begin{cases} 10, & -\pi \leqslant x < 0, \\ -8x+6, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x)=-(x+1)^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$ по косинусам.

**Вариант № 13.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{0{,}4} \frac{\ln(1+x/2)}{x}dx.$

2. $f(x) = \begin{cases} 7, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 6x - 5, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = -(x-2)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$ по синусам.

**Вариант № 14.**

1. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64 + x^3}}.$

2. $f(x) = \begin{cases} x - 8, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 4, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = -(x-2)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$ по косинусам.

**Вариант № 15.**

1. $\int\limits_0^{0,3} e^{-2x^2}.$

2. $f(x) = \begin{cases} 12x - 5, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 4, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = -(x-2)^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$ по синусам.

**Вариант № 16.**

1. $\int\limits_0^{0,4} \sin{(5x/2)^2} dx.$

2. $f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi \leqslant x < 0, \\ -6x - 2, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = -(x-2)^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$ по косинусам.

**Вариант № 17.**

1. $\int\limits_0^{0,2} \cos(25x^2).$

2. $f(x) = \begin{cases} -8, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 2x - 12, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = (x-2)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$ по синусам.

**Вариант № 18.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81 + x^4}}.$

2. $f(x) = \begin{cases} x + 7, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 9, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = (x-2)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$ по косинусам.

**Вариант № 19.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{0,4} \frac{1 - e^{-x/2}}{x} dx.$

2. $f(x) = \begin{cases} -x - 7, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 2, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = -(x-1)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$ по синусам.

**Вариант № 20.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} dx.$

2. $f(x) = \begin{cases} -11, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 6x - 12, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = -(x-1)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$ по косинусам.

**Вариант № 21.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125 + x^3}}.$

2. $f(x) = \begin{cases} -4, & -\pi \leqslant x < 0, \\ -6x + 10, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = -(x-1)^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$ по синусам.

**Вариант № 22.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{0,4} e^{-3x^2/4} dx.$

2. $f(x) = \begin{cases} -4x - 4, & -\pi \leqslant x < 0, \\ -4, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = -(x-1)^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$ по косинусам.

**Вариант № 23.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{0,5} \sin(4x^2) dx.$

2. $f(x) = \begin{cases} 11x - 4, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = (x-2)^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$ по синусам.

**Вариант № 24.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{0,4} \cos{(5x/2)^2} dx.$

2. $f(x) = \begin{cases} 4, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 9x - 8, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = (x-2)^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$ по косинусам.

**Вариант № 25.**

1. $\displaystyle\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{256 + x^4}}.$

2. $f(x) = \begin{cases} -9, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 10x + 5, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. $f(x) = (x+1)^2, \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0$ по синусам.

## Решение типовых вариантов контрольной работы № 11

### Вариант 1.

**Задание 1.** Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислите с точностью до $0,001$ интеграл

$$\int\limits_0^{0,1} \cos\left(100x^2\right)\, dx.$$

**Решение.** Используем стандартное разложение в ряд Маклорена функции $\cos t$:

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \dots, \qquad t \in (-\infty; +\infty).$$

Подставляя $t = 100x^2$, получаем

$$\cos 100x^2 = 1 - \frac{100^2 x^4}{2!} + \frac{100^4 x^8}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{100^{2n} x^{4n}}{(2n)!} + \dots$$

Почленно интегрируя степенной ряд, получаем

$$\int\limits_0^{0,1} \cos\left(100x^2\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{0,1} \left(1 - \frac{100^2 x^4}{2!} + \frac{100^4 x^8}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{100^{2n} x^{4n}}{(2n)!} + \dots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{100^2 x^5}{2! \cdot 5} + \frac{100^4 x^9}{4! \cdot 9} - \dots + (-1)^n \frac{100^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)} + \dots\right)\Bigg|_0^{0,1} =$$

$$= 0,1 - \frac{0,1}{2! \cdot 5} + \frac{0,1}{4! \cdot 9} - \dots + (-1)^n \frac{0,1}{(2n)!(4n+1)} + \dots$$

Окончательно:

$$\int\limits_0^{0,1} \cos\left(100x^2\right)dx = 0,1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!(4n+1)}\,. \tag{92}$$

Нетрудно убедиться, что полученный числовой ряд обладает следующими свойствами:

1. ряд является знакочередующимся;
2. предел общего члена ряда равен нулю;
3. модуль общего члена монотонно убывает.

Таким образом, полученный числовой ряд (92) удовлетворяет условиям теоремы Лейбница (является рядом лейбницевского типа). Отсюда следует, во-первых, что ряд сходится, и, во-вторых, что остаток ряда, т. е. погрешность, возникающая при учёте только конечного числа первых слагаемых, не превосходит по модулю первого отброшенного члена.

Вычислим первые слагаемые ряда:

$$\int\limits_0^{0,1} \cos\left(100x^2\right)dx = \frac{1}{10}-\frac{1}{10\cdot 2\cdot 5}+\frac{1}{10\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 9}-\dots = \frac{1}{10}-\frac{1}{100}+\frac{1}{2160}-\dots$$

Поскольку третье слагаемое меньше требуемой точности вычислений:

$$\frac{1}{2160}<\frac{1}{1000}=0,001,$$

для приближённого вычисления суммы ряда достаточно взять два первых слагаемых

$$\int\limits_0^{0,1} \cos\left(100x^2\right)dx \approx 0,1-0,01=0,09.$$

Поскольку вычисления производились с точностью до 0,001, ответ следует округлить до трёх знаков после запятой.

**Ответ:** 0,090.

**Задание 2.** Разложить функцию

$$f(x)=\left\{\begin{array}{cc} 0, & -\pi\leqslant x\leqslant 0; \\ \pi-x, & 0<x\leqslant\pi. \end{array}\right. \tag{93}$$

в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$. Построить график функции и суммы ряда Фурье.

**Решение.** Рядом Фурье на отрезке $[-L;L]$ называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{\pi n x}{L}+b_n\sin\frac{\pi n x}{L},\qquad a_n,b_n\in\mathbb{R}. \tag{94}$$

Рядом Фурье для функции $f$, определённой на отрезке $[-L;L]$, называется ряд вида (94), коэффициенты которого определяются по следующим формулам

$$a_k=\frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{\pi k x}{L}\,dx,\quad k=0,1,2,\ldots \tag{95}$$

$$b_k=\frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{\pi k x}{L}\,dx,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{96}$$

В нашем случае следует применить формулы (95) и (96) при $L=\pi$. Т. к. функция $f$ на разных частях отрезка задаётся разными выражениями (см. формулу (93)), интеграл по отрезку $[-\pi;\pi]$ следует разбить в сумму интегралов по его частям — отрезкам $[-\pi;0]$ и $[0;\pi]$. Учтём, что, поскольку во всех точках отрезка $[-\pi;0]$ функция $f$ равна нулю, интеграл по этой части отрезка также равен нулю. В результате получаем:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\pi-x)\ dx=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\pi-x)\ d\,(\pi-x)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{(\pi-x)^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$

при $k\geqslant 1$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos kx\,dx=$$

$$\left\|\begin{array}{l|l} u=\pi-x & du=-dx \\ dv=\cos kx\,dx & v=\dfrac{\sin kx}{k}\end{array}\right\|=\frac{(\pi-x)\sin kx}{\pi k}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi k}\int\limits_{0}^{\pi}\sin kx\,dx=$$

$$= 0 - \frac{1}{\pi k}\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} = \frac{\cos 0 - \cos \pi}{\pi k^2} = \frac{1-(-1)^k}{\pi k^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi k^2}, & k = 2m-1; \\ 0, & k = 2m. \end{cases}$$

По формуле (96) при $L = \pi$ получаем

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin kx\,dx =$$

$$\left\| \begin{array}{l|l} u = \pi - x & du = -dx \\ dv = \sin kx\,dx & v = -\dfrac{\cos kx}{k} \end{array} \right\| = -\,\frac{(\pi - x)\cos kx}{\pi k}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi k}\int\limits_0^{\pi}\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{\sin kx}{\pi k^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{k}\,.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов $a_k$ и $b_k$ в формулу (94), получаем, что ряд Фурье для функции $f$ имеет вид

$$S(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2\cos x}{\pi} + \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{2\cos 3x}{9\pi} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{2\cos 5x}{25\pi} + \dots =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\,.$$

Функция $f$ определена на отрезке $[-\pi;\pi]$ и является кусочно-линейной. Её график приведён на рисунке (5), стрелочки на концах линий показывают что эти граничные точки не входят в состав линии.

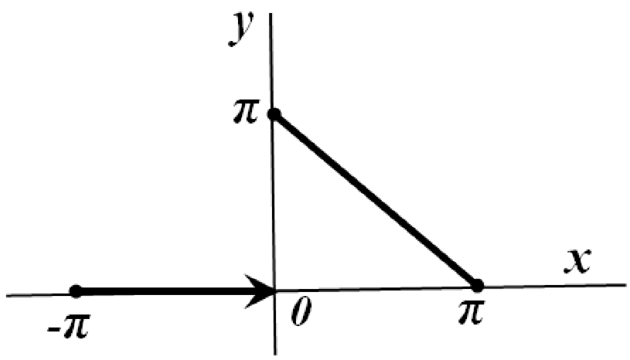


Рисунок 5 — График функции $f$ (к заданию 2 первого варианта)

Согласно теореме Дирихле в точках непрерывности значения функции совпадают со значениями суммы соответствующего ей ряда Фурье. Поэтому, чтобы построить график суммы ряда Фурье, следует продолжить график функции $f$ по периодичности, т. е. с учётом свойства

$$S(x+2\pi) = S(x),$$

а также учесть, что в точках разрыва, согласно теореме Дирихле, значение суммы ряда Фурье равно полусумме значений на концах разрыва. Сумма ряда Фурье в точке $x = 0$ равна, следовательно,

$$S(0) = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Такое же значение сумма ряда будет принимать во всех точках вида $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. График суммы ряда Фурье приведён на рисунке 6.

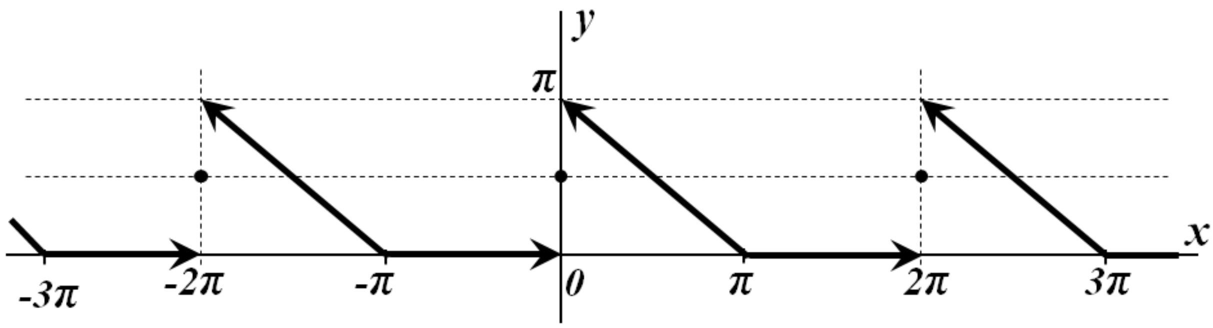


Рисунок 6 — График суммы ряда Фурье (к заданию 2 первого варианта)

**Задание 3.** Разложить по синусам функцию

$$f(x) = 1 - x, \quad x \in [0;1],$$

построить график функции и суммы её ряда Фурье.

**Решение.** Коэффициенты ряда Фурье в случае разложения по синусам определяются формулой

$$a_k = 0, \qquad b_k = \frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x)\sin\frac{\pi k x}{L}\,dx. \tag{97}$$

Применим формулы (97) при $L = 1$:

$$b_k = 2\int\limits_0^1 (1-x)\sin\pi k x\,dx = \left\| \begin{array}{l|l} u = 1-x & du = -dx \\ dv = \sin\pi k x\,dx & v = -\dfrac{\cos\pi k x}{\pi k} \end{array} \right\| =$$

$$= -\left.\frac{2(1-x)\cos\pi kx}{\pi k}\right|_0^1 - \frac{2}{\pi k}\int\limits_0^1 \cos\pi kx\,dx = \frac{2}{\pi k} - \left.\frac{2}{\pi^2k^2}\sin\pi kx\right|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\pi k}.$$

Разложение по синусам имеет, следовательно, вид:

$$f \sim \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\pi kx}{k} = \frac{2\sin\pi x}{\pi} + \frac{2\sin 2\pi x}{2\pi} + \frac{2\sin 3\pi x}{3\pi} + \frac{2\sin 4\pi x}{4\pi} + \ldots$$

Функция $f$ определена на отрезке $[0;1]$ и является линейной. Её график приведён на рисунке 7.

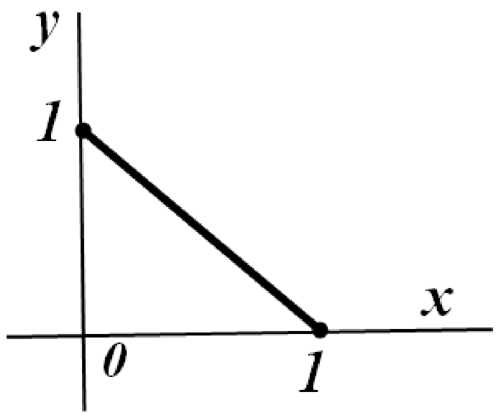


Рисунок 7 — График функции $f$ (к заданию 3 первого варианта)

Чтобы построить график суммы ряда по синусам, нужно сперва продолжить по нечётности функцию $f$ на отрезок $[-1;1]$, а потом по периодичности на всю числовую прямую. Для $x \in [-1;0)$:

$$\hat{f}(x) = -\hat{f}(-x) = \left\|\text{т. к. } -x \in (0;1]\right\| = -f(-x) = -\left(1-(-x)\right) = -x-1.$$

Таким образом, продолженная по нечётности на весь отрезок $[-1;1]$ функция имеет вид:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -x-1, & -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

График функции $\hat{f}$ получается добавлением к графику функции $f$ (см. рисунок 7) участка, полученного поворотом вокруг начала координат на угол $\pi$, поскольку график нечётной функции обладает свойством центральной

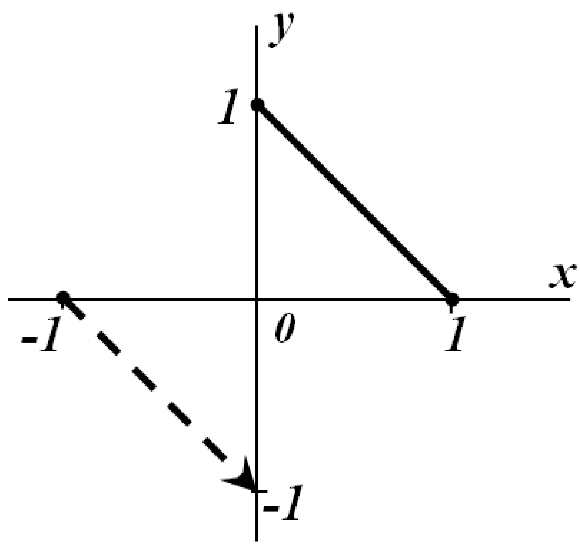


Рисунок 8 — Продолжение функции по нечётности (к заданию 3 первого варианта)

симметрии относительно начала координат. График функции $\hat{f}$ приведён на рисунке 8

Разложение функции $f$ по синусам на отрезке $[0; 1]$ совпадает с рядом Фурье для функции $\hat{f}$ на отрезке $[-1; 1]$. Продолженная по периодичности на всю числовую прямую функция будет иметь разрывы первого рода в точках $x_k = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$. В этих точках, согласно теореме Дирихле функция должна принимать нулевое значение:

$$S(0) = \frac{S(0-) + S(0+)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0.$$

График суммы ряда Фурье приведён на рисунке 9.

## Вариант 2.

**Задание 1.** Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислите с точностью до $0,001$ интеграл

$$\int\limits_0^{0,3} \frac{1 - e^{-\frac{x}{3}}}{x}\, dx.$$

**Решение.** Используем стандартное разложение в ряд Маклорена функции $e^t$:

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \qquad t \in (-\infty; +\infty).$$

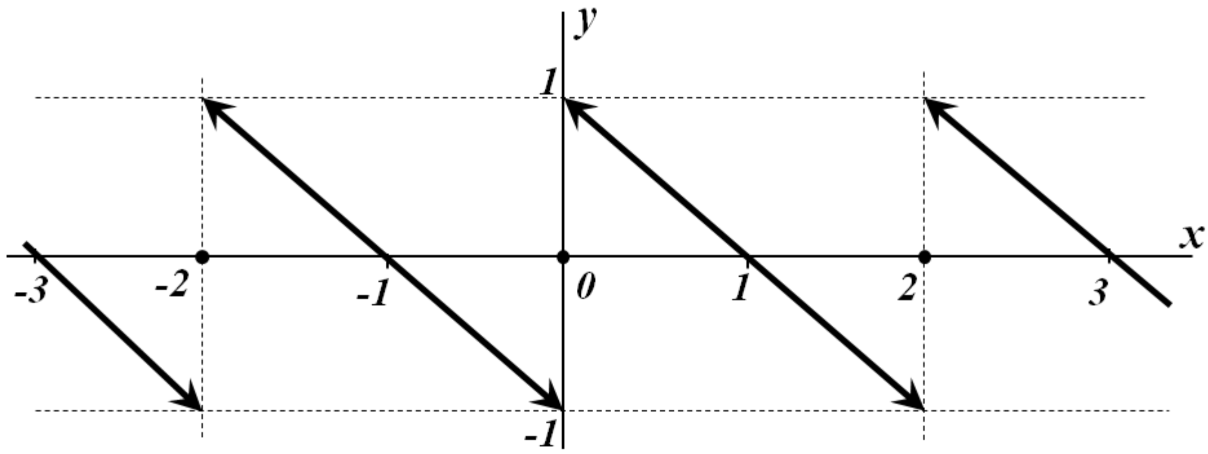


Рисунок 9 — График суммы ряда Фурье (к заданию 3 первого варианта)

Подставляя $t = -\frac{x}{3}$, получим

$$e^{-\frac{x}{3}} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{3^3 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{3^n \cdot n!} + \dots$$

Для подынтегральной функции получим:

$$\frac{1 - e^{-\frac{x}{3}}}{x} = \frac{1}{3} - \frac{x}{3^2 \cdot 2!} + \frac{x^2}{3^3 \cdot 3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{3^n \cdot n!} + \dots$$

Интегрируя почленно степенной ряд, получаем

$$\int\limits_0^{0,3} \frac{1 - e^{-\frac{x}{3}}}{x}\, dx =$$

$$= \int\limits_0^{0,3} \left( \frac{1}{3} - \frac{x}{3^2 \cdot 2!} + \frac{x^2}{3^3 \cdot 3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{3^n \cdot n!} + \dots \right) dx =$$

$$= \left( \frac{x}{3} - \frac{x^2}{2 \cdot 3^2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3^3 \cdot 3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n \cdot 3^n \cdot n!} + \dots \right) \Bigg|_0^{0,3} =$$

$$= \frac{3}{10 \cdot 3} - \frac{3^2}{10^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 2!} + \frac{3^3}{10^3 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot 3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{3^n}{10^n \cdot n \cdot 3^n \cdot n!} + \dots =$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2 \cdot 2 \cdot 2!} + \frac{1}{10^3 \cdot 3 \cdot 3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{10^n \cdot n!} + \dots$$

Окончательно можно записать

$$\int\limits_0^{0,3} \frac{1 - e^{-\frac{x}{3}}}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{10^n \cdot n \cdot n!}\,. \tag{98}$$

Нетрудно убедиться, что полученный числовой ряд обладает следующими свойствами:

1. ряд является знакочередующимся;
2. предел общего члена ряда равен нулю;
3. модуль общего члена монотонно убывает.

Таким образом, полученный числовой ряд (98) удовлетворяет условиям теоремы Лейбница (является рядом лейбницевского типа). Отсюда следует, во-первых, что ряд сходится, и, во-вторых, что остаток ряда, т. е. погрешность, возникающая при учёте только конечного числа первых слагаемых, не превосходит по модулю первого отброшенного члена.

Вычислим первые слагаемые ряда:

$$\int\limits_0^{0,3} \frac{1-e^{-\frac{x}{3}}}{x}\,dx = \frac{1}{10} - \frac{1}{400} + \frac{1}{18000} - \ldots$$

Поскольку третье слагаемое меньше требуемой точности вычислений:

$$\frac{1}{18000} < \frac{1}{1000} = 0,001,$$

для приближённого вычисления суммы ряда достаточно взять два первых слагаемых

$$\int\limits_0^{0,3} \frac{1-e^{-\frac{x}{3}}}{x}\,dx \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{400} = 0,1 - 0,0025 = 0,0975.$$

Поскольку первое отброшенное слагаемое было положительным, приближённое значение оказывается меньше точной суммы ряда. Т. к. вычисления производились с точностью до 0,001, ответ следует округлить до трёх знаков после запятой.

**Ответ:** 0,098.

**Задание 2.** Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & -2 \leqslant x \leqslant 0; \\ 1, & 0 < x \leqslant 2. \end{cases} \tag{99}$$

в ряд Фурье на отрезке $[-2;2]$. Построить график функции и суммы ряда Фурье.

**Решение.** Найдём коэффициенты ряда Фурье по известным формулам $(L = 2)$, учитывая что интеграл по отрезку $[-2; 2]$ необходимо разбивать в сумму интегралов по его частям. Сперва найдём коэффициенты при косинусах $(a_k)$. При $k \neq 0$:

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi k x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x-1)\cos\frac{\pi k x}{2}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\cos\frac{\pi k x}{2}\,dx =$$

$$\left\|\begin{array}{l|l} u = x-1 & du = dx \\ dv = \cos\frac{\pi k x}{2}dx & v = \dfrac{2\sin\frac{\pi k x}{2}}{\pi k} \end{array}\right\|$$

$$= \frac{1}{2}\left( (x-1)\frac{2\sin\frac{\pi k x}{2}}{\pi k}\bigg|_{-2}^{0} - \frac{2}{\pi k}\int_{-2}^{0}\sin\frac{\pi k x}{2}dx \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi k x}{2}}{\pi k}\right)\bigg|_{0}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{4}{\pi^2 k^2}\cos\frac{\pi k x}{2}\bigg|_{-2}^{0}\right) + 0 = \frac{2}{\pi^2 k^2}\left(1 - \cos\pi k\right) = \frac{2}{\pi^2 k^2}\left(1 - (-1)^k\right).$$

Нетрудно заметить, что при чётных значениях $k$ коэффициенты $a_k$ равны нулю. Окончательный результат удобно записать в виде

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 2m \quad (m \in \mathbb{N}) \\ \dfrac{4}{\pi^2 k^2}, & k = 2m-1 \quad (m \in \mathbb{N}). \end{cases} \tag{100}$$

Нулевой коэффициент вычислим отдельно:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x-1)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}1\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x-1)d(x-1) + \frac{1}{2}\cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x-1)^2}{2}\bigg|_{-2}^{0} + 1 = \frac{1}{4}(1-9) + 1 = -1.$$

Получилось, что $a_0$ — единственный чётный коэффициент при косинусах отличный от нуля.

Теперь вычислим коэффициенты при синусах:

$$b_k = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{\pi k x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(x-1)\sin\frac{\pi k x}{2}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}\sin\frac{\pi k x}{2}\,dx =$$

$$\left\| \begin{array}{l|l} u = x-1 & du = dx \\ dv = \sin\frac{\pi k x}{2}dx & v = -\dfrac{2\cos\frac{\pi k x}{2}}{\pi k} \end{array} \right\|$$

$$= \frac{1}{2}\left( -(x-1)\frac{2\cos\frac{\pi k x}{2}}{\pi k}\Bigg|_{-2}^{0} + \frac{2}{\pi k}\int\limits_{-2}^{0} \cos\frac{\pi k x}{2}\,dx \right) - \frac{1}{2}\frac{2}{\pi k}\cos\frac{\pi k x}{2}\Bigg|_{0}^{2} =$$

$$= \frac{1-3\cos\pi k}{\pi k} + \frac{2}{\pi^2 k^2}\sin\frac{\pi k x}{2}\Bigg|_{-2}^{0} - \frac{\cos\pi k - 1}{\pi k} = \frac{2-4\cos\pi k}{\pi k} = \frac{2(1-2(-1)^k)}{\pi k}.$$

Для коэффициентов $b_k$ также можно отдельно расписать случаи чётных и нечётных номеров:

$$b_k = \begin{cases} -\frac{2}{\pi k}, & k = 2m \quad (m \in \mathbb{N}) \\ \frac{6}{\pi k}, & k = 2m-1 \quad (m \in \mathbb{N}). \end{cases} \tag{101}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов, получаем ряд Фурье для заданной функции:

$$S(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\left(1-(-1)^k\right)}{\pi^2 k^2}\cos\frac{\pi k x}{2} + \frac{2\left(1-(-1)^k\right)}{\pi k}\sin\frac{\pi k x}{2}\ . \tag{102}$$

С учётом формул (100) и (101) выражение (102) можно переписать в виде

$$S(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\cos\frac{\pi(2m-1)x}{2}}{\pi^2(2m-1)^2} - \frac{2\sin\frac{\pi(2m-1)x}{2}}{\pi(2m-1)} + \frac{3\sin\pi m x}{\pi m} \tag{103}$$

или

$$S(x) = -\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi(2m-1)x}{2}}{(2m-1)^2} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi(2m-1)x}{2}}{2m-1} + \frac{3}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\pi m x}{m}.$$

Нетрудно убедиться, что формулы (102) и (103) задают одну и ту же сумму:

$$S(x) = -\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{3}{\pi}\sin\pi x + \frac{4}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{2} - \frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{2} +$$

$$+ \frac{3}{2\pi}\sin 2\pi x + \frac{4}{25\pi^2}\cos\frac{5\pi x}{2} - \frac{2}{5\pi}\sin\frac{5\pi x}{2} + \frac{1}{\pi}\sin 3\pi x + \ldots$$

Чтобы построить график суммы ряда Фурье, нужно продолжить изображённый на рисунке 10 график функции $f$ по периодичности на всю числовую прямую, т. е. воспользоваться условиями

$$S(x) = f(x) \quad \text{при } x \in (-2;0) \cup (0;2) \qquad \text{и} \qquad S(x+4) = S(x),$$

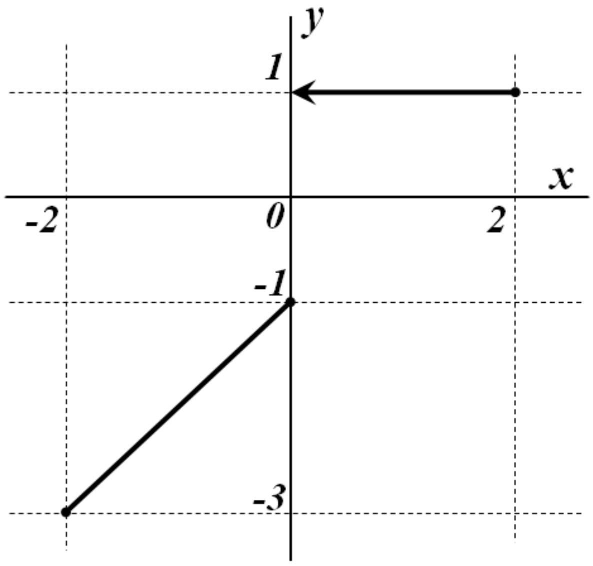


Рисунок 10 — График функции $f$ (к заданию 2 второго варианта)

а затем определить значение суммы ряда в точках разрыва с помощью теоремы Дирихле:

$$S(x_0) = \frac{S(x_0+0)+S(x_0-0)}{2}\,.$$

В нашем случае

$$S(0) = S(4n) = \frac{1+(-1)}{2} = 0, \quad S(2+4n) = \frac{-3+1}{2} = -1 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

График суммы ряда Фурье приведён на рисунке 11.

**Задание 3.** Разложить по косинусам функцию

$$f(x) = 1-x, \quad x \in [0;1],$$

построить график функции и суммы её ряда Фурье.

**Решение.** Коэффициенты ряда Фурье в случае разложения по косинусам определяются формулами

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{\pi k x}{L}\,dx, \qquad b_k = 0. \tag{104}$$

Применим формулы (104) при $L=1$:

$$a_0 = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = -2\int_0^1 (1-x)\,d(1-x) = -\left.(1-x)^2\right|_0^1 = 1.$$

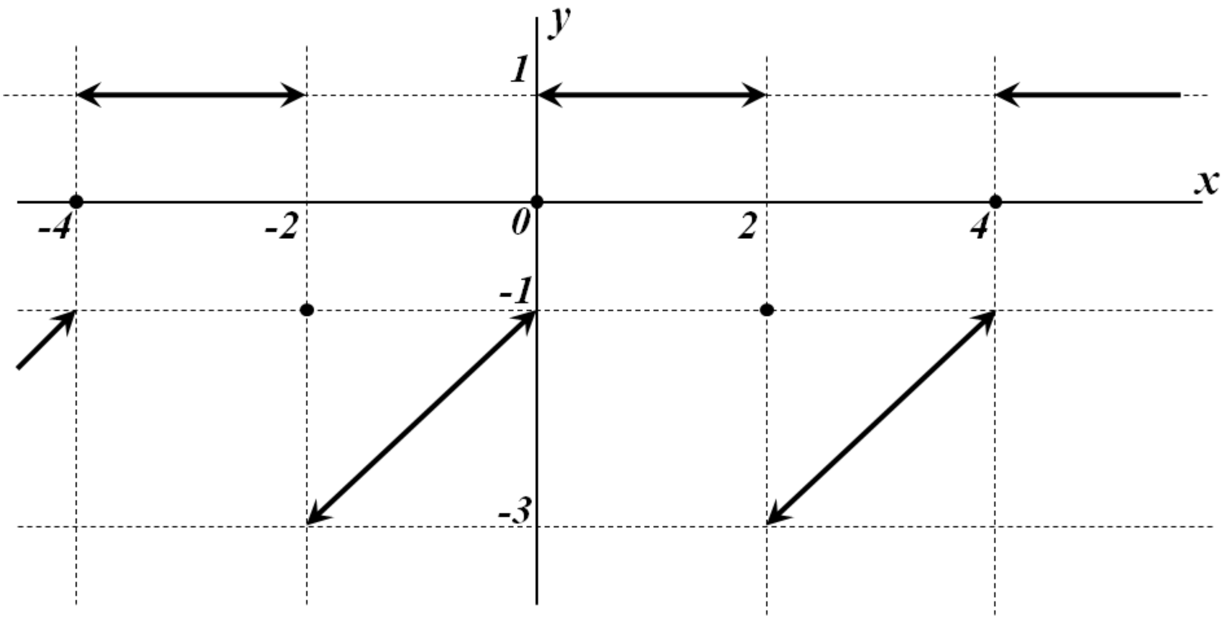


Рисунок 11 — График суммы ряда Фурье (к заданию 2 второго варианта)

При $k \geqslant 1$

$$a_k = 2\int\limits_0^1 (1-x)\cos \pi kx\, dx = \left\| \begin{array}{l|l} u = 1-x & du = -dx \\ dv = \cos\pi kx\, dx & v = \dfrac{\sin \pi kx}{\pi k} \end{array} \right\| =$$

$$= \left.\frac{2(1-x)\sin\pi kx}{\pi k}\right|_0^1 + \frac{2}{\pi k}\int\limits_0^1 \sin\pi kx\, dx = 0 - \left.\frac{2}{\pi^2 k^2}\cos\pi kx\right|_0^1 =$$

$$= 2\cdot\frac{\cos 0 - \cos\pi k}{\pi^2 k^2} = 2\cdot\frac{1-(-1)^k}{\pi^2k^2} = \begin{cases} 0, & k = 2m, \\ \dfrac{4}{\pi^2 k^2}, & k = 2m-1. \end{cases}$$

Разложение по косинусам имеет вид:

$$f \sim \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\pi(2m-1)x}{(2m-1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{4\cos\pi x}{\pi^2} + \frac{4\cos 3x}{9\pi^2} + \frac{4\cos 5x}{25\pi^2} + \ldots$$

Функция $f$ определена на отрезке $[0;1]$ и является линейной. Её график приведён на рисунке 12а.

Чтобы построить график суммы ряда нужно сперва продолжить по чётности функцию $f$ на отрезок $[-1;1]$, а потом по периодичности на всю числовую прямую. Для $x \in [-1;0)$:

$$\tilde f(x) = \tilde f(-x) = \left\| \text{т. к. } -x \in (0;1] \right\| = f(-x) = 1-(-x) = 1+x.$$

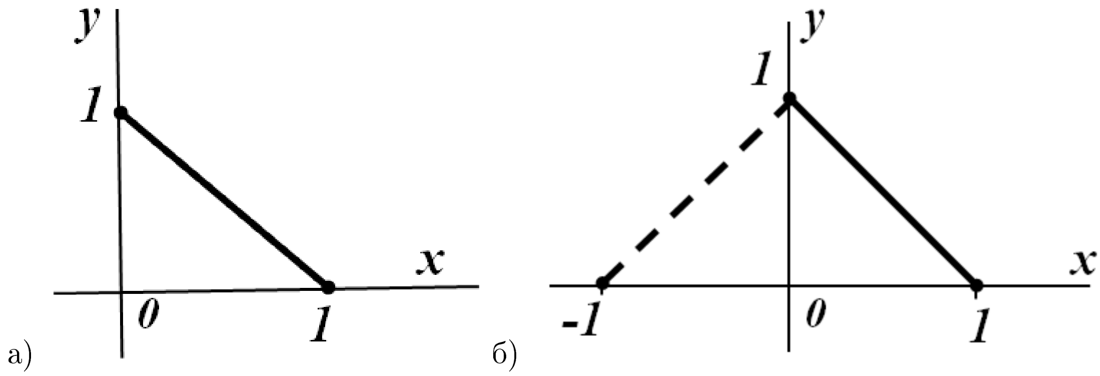


Рисунок 12 — К заданию 3 второго варианта: график функции $f$ (а) и её продолжения по чётности $\hat{f}$ (б)

Таким образом, продолженная по чётности на весь отрезок $[-1; 1]$ функция имеет вид:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 + x, & -1 \leqslant x < 0, \end{cases}$$

т. е. $\tilde{f}(x) = 1 - |x|$ при $x \in [-1; 1]$. График функции $\hat{f}$ получается добавлением к графику функции $f$ (рисунок 12а) участка, полученного зеркальным отражением относительно оси $Oy$, поскольку график чётной функции всегда симметричен относительно оси ординат. График функции $\hat{f}$ приведён на рисунке 12б.

Разложение функции $f$ по косинусам на отрезке $[0; 1]$ совпадает с рядом Фурье для функции $\tilde{f}$ на отрезке $[-1; 1]$. Поскольку $\tilde{f}(-1) = \tilde{f}(1)$, продолженная по периодичности на всю числовую прямую функция оказывается непрерывной и, в силу теоремы Дирихле, будет совпадать с суммой ряда Фурье (см. рисунок 13).

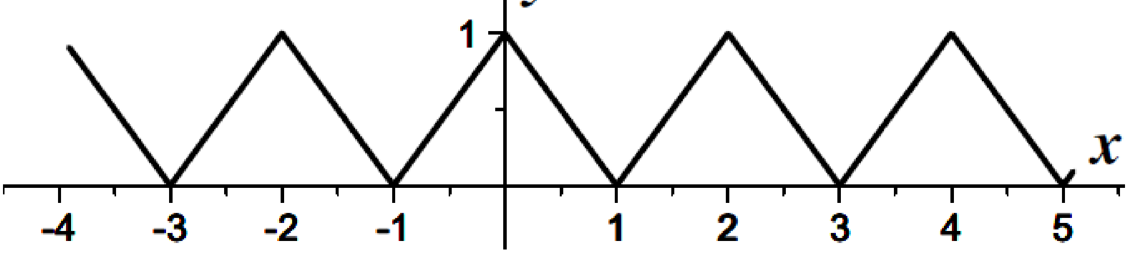


Рисунок 13 — График суммы ряда Фурье (к заданию 3 второго варианта)

## Литература


1 Шипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов – 5-е изд., стереотип / В. С. Шипачев. Изд-во «Высшая школа».– М.: 2002.– 479 с.

2 Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Том 1 / Л. Д. Кудрявцев. Изд-во «Дрофа» – М., 2003.— 704 с.

3 Ильин, В. А. Основы математического анализа. Часть 1 / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. Изд-во «Физматлит».— М., 2005.— 648 с.

4 Берман, Г. Н. Сборник задач по математическому анализу / Г. Н. Берман. Изд-во «Лань». — СПб., 2008.— 608 с.

5 Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. Изд-ва: Оникс, Мир и Образование. — М., 2008.— 815 с.

6 Лунгу К. Н. Высшая математика: Руководство к решению задач: Учебное пособие / К. Н. Лунгу, Е.В. Макаров. Изд-во Физматлит.— М., 2009.— 381 с.

7 Вдовин, А.Ю. Высшая математика. Стандартные задачи с основами теории / А.Ю. Вдовин, Л.В. Михалёва, В. М. Мухина и др. Изд-во «Лань».— СПб., 2008.— 256 с.

8 Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике / Л. А. Кузнецов. Изд-во «Лань».— СПб., 2008.— 240 с.

9 Баранова Е. С. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие / Е. С. Баранова, Н. В. Васильева. Изд-во «Питер».— СПб., 2009.— 320 с.

10 Запорожец, Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. — СПб.: «Лань», 2010. — 464 с.

11 Бутузов, В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 480 с.

# Содержание

Кафедра математики

# Математика (третий семестр) учебное пособие для студентов заочной формы обучения

Татьяна Васильевна Слободинская

Алексей Андреевич Груздков

Алексей Викторович Ржонсницкий

Отпечатано с оригинал-макета. Формат $60 \times 90$ 1/16
Печ. л. 4,75. Тираж 100 экз.

Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(Технический университет)

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26

Типография изд. СПбГТИ(ТУ), тел.: 4949365