Расчетно-графическое задание
по теме «Теория поля».
Часть 1.

• Если каждой точке $M(x,y,z)$ пространственной области Ω сопоставлена векторная физическая величина, то говорят, что в области Ω задано *векторное поле*.

• *Циркуляцией* Γ векторного поля $\bar{f}=(P,Q,R)$ по ориентированному замкнутому контуру $\vec{L}$, целиком расположенному в области Ω, называется криволинейный интеграл

$$\Gamma=\oint_{\vec{L}}\bar{f}\cdot d\,\bar{r}=\oint_{\vec{L}}Pdx+Qdy+Rdz$$

Пусть поверхность ω целиком расположена в области Ω. В каждой точке этой поверхности зафиксируем направление ее нормального вектора $\vec{n}$. Координатами его орта $\vec{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ являются направляющие косинусы нормали.

• *Потоком* векторного поля $\vec{f}$ через поверхность ω называется поверхностный интеграл

$$\Pi=\iint_{\omega}\bar{f}\cdot\vec{n}^0d\omega=\iint_{\omega}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\omega$$

Если поверхность ω задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v),\ \ (u,v)\in\Delta,\\ z=z(u,v)\end{cases}$$

то вектор $\vec{N}=(A,B,C)$, где $A=\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}y_u' & z_u'\\ y_v' & z_v'\end{vmatrix}$, $B=\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}z_u' & x_u'\\ z_v' & x_v'\end{vmatrix}$, $C=\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u' & y_u'\\ x_v' & y_v'\end{vmatrix}$,

задает одно из двух противоположных направлений нормали в точке $M\in\omega$, поэтому

$$\vec{n}^0=\pm\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A,B,C),$$

В этом случае формула для вычисления потока примет вид

$$\Pi=\pm\iint_{\Delta}[A\cdot P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))+B\cdot Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))+C\cdot R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))]dudv.$$

где знак «+» относится к тем частям поверхности, где $\vec{N}\uparrow\uparrow\vec{n}^0$,
и знак «–» – к частям поверхности, где $\vec{N}\uparrow\downarrow\vec{n}^0$.

Если поверхность ω задана явным уравнением $z=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in S$, то $\vec{N}=\left(-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},-\dfrac{\partial\varphi}{\partial y},1\right)$, и, следовательно,

• *Дивергенцией* векторного поля $\bar{f}=(P,Q,R)$ называется скалярная величина, определяемая по формуле $\operatorname{div}\bar{f}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$.

• *Ротором* или *вихрем векторного поля* $\bar{f}=(P,Q,R)$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\bar{f}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z};\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x};\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Теорема Гаусса – Остроградского. Поток непрерывно-дифференцируемого векторного поля $\bar{f}$ через замкнутую кусочно-гладкую поверхность $\bar{\omega}$, ограничивающую тело V, равен интегралу по телу V от дивергенции поля:

$$\Pi = \iint\limits_{\bar{\omega}} \bar{f}\cdot\bar{n}d\omega = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\bar{f}\,dxdydz\,,$$

где $\bar{n}$ – внешняя по отношению к телу V нормаль к поверхности ω.

Теорема Стокса. Циркуляция Γ непрерывно дифференцируемого векторного поля $\bar{f}=\left(P,Q,R\right)$ по кусочно-гладкому контуру $\vec{L}$ равна потоку ротора поля через кусочно-гладкую поверхность ω, «натянутую» на контур $\vec{L}$:

$$\Gamma = \oint\limits_{\vec{L}} \bar{f}\cdot d\bar{l} = \int\limits_{\vec{L}} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\bar{\omega}} \operatorname{rot}\bar{f}\cdot\bar{n}d\omega\,,$$

где направление нормали $\vec{n}$ согласовано с направлением обхода контура $\vec{L}$, то есть с конца вектора $\vec{n}$ обход контура представляется происходящим против часовой стрелки.

Пример.

1^0. Найти двумя способами поток поля $\vec{F}=\left\{x-y+z,x+y-z,-x+y+z\right\}$ через поверхность S тела Ω, расположенного в первом октанте и ограниченного координатными плоскостями и поверхностью $\Sigma: z=\pi\cos\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}}$, в направлении нормали $\vec{n}$, внешней по отношению к телу (см. рисунок).

Решение.

1-ый способ. Поверхность Σ пересекает положительные координатные полуоси в точках $M_1\left(\pi,0,0\right), M_2\left(0,3\pi/2,0\right), M_3\left(0,0,\pi\right)$.

Поток через поверхность тела Ω равен

$$\Pi = \oiint\limits_{S} F_n d\sigma = \oiint\limits_{S}\left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma = \Pi_0 + \sum_{k=1}^{3}\Pi_k\,,$$

где Π_0,Π_1,Π_2,Π_3 – потоки через поверхность Σ и плоские области $OM_1M_2, OM_1M_3, OM_2M_3$ соответственно,

α,β,γ -углы, составляемые вектором нормали $\vec{n}$ с осями координат,

P,Q,R -компоненты вектора $\vec{F}$.

В точках области OM_1M_2: $\qquad z=0,\cos\alpha=\cos\beta=0,\cos\gamma=-1.$

Поэтому $\Pi_1 = -\iint\limits_{OM_1M_2}\left(-x+y\right)ds.$

С другой стороны,

$$\iint\limits_{\Sigma} R\cos\gamma d\sigma = \iint\limits_{\Sigma}\left(-x+y+z\right)\cos\gamma d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} z\cos\gamma d\sigma + \iint\limits_{\Sigma}\left(-x+y\right)\underbrace{\cos\gamma d\sigma}_{ds} =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} z\cos\gamma d\sigma + \iint\limits_{S}\left(-x+y\right)ds = \iint\limits_{\Sigma} z\cos\gamma d\sigma - \Pi_1.$$

Таким образом, $\iint\limits_{\Sigma} R\cos\gamma d\sigma + \Pi_1 = \iint\limits_{\Sigma} z\cos\gamma d\sigma.$

Аналогично, $\iint\limits_{\Sigma} P\cos\alpha d\sigma + \Pi_3 = \iint\limits_{\Sigma} x\cos\alpha d\sigma,\quad \iint\limits_{\Sigma} Q\cos\beta d\sigma + \Pi_2 = \iint\limits_{\Sigma} y\cos\beta d\sigma.$

Следовательно, $\Pi = \iint\limits_{\Sigma}\left(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right)d\sigma.$

Введем в области Ω обобщенные цилиндрические координаты: $\begin{matrix} x = 2r\cos\varphi \\ y = 3r\sin\varphi \\ z = z \end{matrix}$

Параметрические уравнения поверхности Σ в координатах (r, φ, z):

$$;\begin{cases} x = 2r\cos\varphi \\ y = 3r\sin\varphi \\ z = \pi\cos r \end{cases} \quad (r,\varphi)\in\Delta : \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le r \le \pi/2 \end{cases}.$$

Поток находим по формуле

$$\Pi = \iint_{\Delta}(A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z)\big|_{\Sigma}\, dr d\varphi = \iint_{\Delta}(A\cdot 2r\cos\varphi + B\cdot 3r\sin\varphi + C\cdot\pi\cos r)\, dr d\varphi,$$

где якобианы

$$A = \frac{D(y,z)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} 3\sin\varphi & -\pi\sin r \\ 3r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = 3\pi r\sin r\cos\varphi,$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} -\pi\sin r & 2\cos\varphi \\ 0 & -2r\sin\varphi \end{vmatrix} = 2\pi r\sin\varphi\sin r,$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 3\sin\varphi \\ -2r\sin\varphi & 3r\cos\varphi \end{vmatrix} = 6r.$$

Таким образом,

$$\Pi = 6\pi\iint_{\Delta}\left(r^2\sin r\cos^2\varphi + r^2\sin r\sin^2\varphi + r\cos r\right)dr d\varphi =$$

$$= 6\pi\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{\pi/2}\left(r^2\sin r + r\cos r\right)dr = 9\pi^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

2-ой способ. По формуле Гаусса-Остроградского

$$\Pi = \iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{F}\cdot dv.$$

В данном случае $\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}\cdot\{P, Q, R\} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3.$

Поэтому $\Pi = \iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{F}dv = 3\iiint_{\omega}\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}dr d\varphi dz$.

Здесь якобиан $\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} 2\cos\varphi & 3\sin\varphi & 0 \\ -2r\sin\varphi & 3r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6r,$

ω: $\begin{cases} 0 \le r \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 0 \le z \le \pi\cos r \end{cases}$ - область интегрирования в переменных (r, φ, z).

Таким образом, $;\Pi = 18\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{\pi/2} r dr\int_0^{\pi\cos r} dz = 9\pi^2\int_0^{\pi/2} r\cos r dr = 9\pi^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$

2^0. Найти двумя способами циркуляцию поля по контуру $M_1M_2M_3M_1$.

Решение.

;*1-ый способ.*

$$\Gamma = \oint_{M_1M_2M_3M_1} \vec{F}d\vec{r} = \oint_{M_1M_2M_3M_1} (x-y+z)dx + (x+y-z)dy + (-x+y+z)dz =$$

$$= \int_{M_1M_2M_3M_1} xdx + ydy + zdz + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3,$$

где

$$;\int_{M_1M_2M_3M_1} xdx + ydy + zdz = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\Big|_{M_1}^{M_1} = 0,$$

$$;\Gamma_1 = \int_{M_1M_2} -ydx + xdy = \left|\begin{matrix} M_1M_2 : r = \pi/2, 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ x = 2\cdot\frac{\pi}{2}\cos\varphi, y = 3\frac{\pi}{2}\sin\varphi \end{matrix}\right| = \frac{3\pi^2}{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{3\pi^3}{4},$$

;;.

$$;\Gamma_2 = \int_{M_2M_3} -zdy + ydz = \left|\begin{matrix} M_2M_3 : z = \pi\cos(y/3) \\ 0 \le y \le 3\pi/2 \end{matrix}\right| = \int_{3\pi/2}^{0}\left(-\pi\cos\frac{y}{3} - \frac{\pi}{3}y\sin\frac{y}{3}\right)dy = 6\pi,$$

$$;\Gamma_3 = \int_{M_3M_1} zdx - xdz = \left|\begin{matrix} M_3M_1 : z = \pi\cos(x/2) \\ 0 \le x \le \pi \end{matrix}\right| = \int_0^{\pi}\left(\pi\cos\frac{x}{2} + x\frac{\pi}{2}\sin\frac{x}{2}\right)dx = 4\pi..$$

;Таким образом, $\Gamma = \frac{3\pi^3}{4} + 10\pi..$

;*2-ой способ.* По формуле Стокса

$$\Gamma = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot}_n \vec{F}\cdot d\sigma .$$

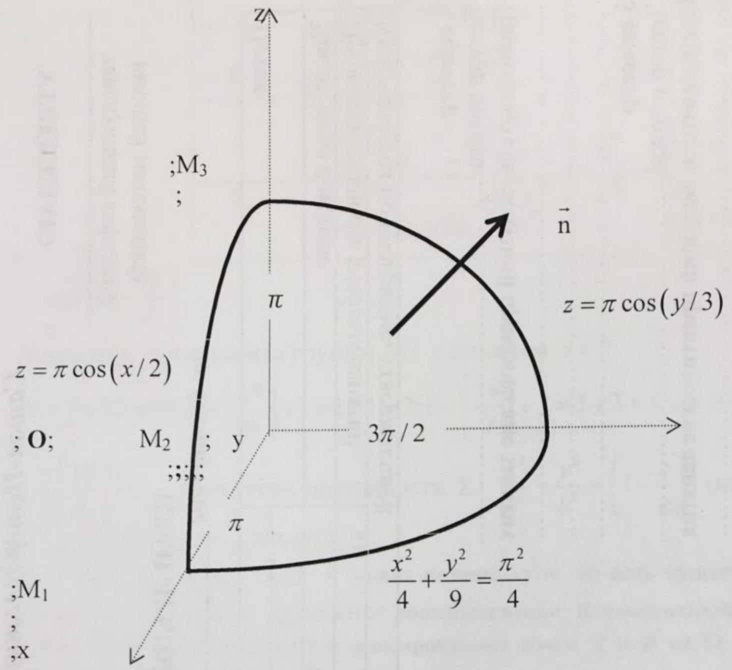
В данном примере

$$;;\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \overline{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-y+z & x+y-z & -x+y+z \end{vmatrix} = \{2,2,2\}.$$

Следовательно (см. пункт 1^0),

$$\Gamma = \iint_{\Delta}(A\cdot 2 + B\cdot 2 + C\cdot 2)drd\varphi = \int_0^{\pi/2} dr \int_0^{\pi/2}(3\pi r\sin r\cos\varphi + 2\pi r\sin r\sin\varphi + 6r)d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}(5\pi r\sin r + 3\pi r)dr = \frac{3\pi^3}{4} + 10\pi.$$



Задание.

Дано: а) тело Ω, расположенное в первом октанте и ограниченное координатными плоскостями и поверхностью Σ;

б) векторное поле $\vec{A} = \{bx + cy + az; ax + by + cz; cx + ay + bz\}$.

Найти:

1. ***Поток поля*** через поверхность тела Ω в направлении внешней по отношению к телу нормали
   двумя способами:
   а) непосредственно;
   б) с помощью формулы *Гаусса – Остроградского*.
2. ***Циркуляцию поля*** по замкнутой ломаной линии $A \to B \to C \to A$, где A, B, C – точки пересечения поверхности Σ с положительными полуосями координат Ox, Oy, Oz соответственно,
   двумя способами:
   а) непосредственно;
   б) с помощью формулы *Стокса*.

Параметры a, b и c определяются следующим образом:

$$a = \left[\frac{N}{9}\right] + 1; b = \left[\frac{N}{7}\right] + 3; c = a + b;$$

$N = n + k$;

n - номер студента в списке группы,

k=10, 12, 13 для групп №1,2,3 соответственно,

$\left[\frac{M}{m}\right]$ - остаток от деления числа M на m.

Уравнение поверхности Σ определяется с помощью таблицы:

;;

q	Поверхность Σ	q	Поверхность Σ
0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	3	$\frac{z}{c}=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(1-\frac{z}{c}\right)^2$	4	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$
2	$z+c=(c+1)e^{-\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}$	5	$z=c+1-\sqrt{c^2+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$

где $q=\left[\frac{N}{6}\right]$.

Например, для студента группы №2 с номером $n=7$

$$N=7+12=19; a=\left[\frac{19}{9}\right]+1=1+1=2; b=\left[\frac{19}{7}\right]+3=5+3=8; c=a+b=2+8=10;$$

$q=\left[\frac{19}{6}\right]=1$; уравнение поверхности Σ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(1-\frac{z}{c}\right)^2$ (конус).;

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;**ЧАСТЬ 2**

• Если векторное поле $\bar{f}$ имеет потенциал w, то есть существует такая функция $w(x,y,z)$, что $\bar{f}=\text{grad}w$, то поле $\bar{f}$ называется *потенциальным*. В односвязной области Ω работа такого поля на любом пути, соединяющем две фиксированные точки A и B из Ω имеет одно и то же значение и равна разности потенциалов H и D.

Условием потенциальности поля в односвязной области является равенство нулю ротора в этой области. *Потенциал* w для потенциального поля $\bar{f}=(P,Q,R)$ можно восстановить (с точностью до постоянного слагаемого) по формуле

$$w(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)\,dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)\,dz+c$$

где (x_0,y_0,z_0) – произвольная точка области, и c – постоянная.

;**Пример 1.** Найти 1. *потенциал поля* $\bar{f}=(2xy;x^2-2yz;-y^2)$, 2. двумя способами *работу поля* на пути, соединяющем точки $A(1,2,3)$ и $B(-2,0,4)$.

Решение.

1. Имеем $P=2xy$, $Q=x^2-2yz$, $R=-y^2$,

$$\text{rot}\,\bar{f}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xy & x^2-2yz & -y^2\end{vmatrix}=(-2y-(-2y);0-0;2x-2x)=(0,0,0)=\bar{0}.$$

Поле определено во всем пространстве, являющемся односвязной областью, и поэтому потенциально. Полагая $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$, получим

$$w=\int_0^x 2x\cdot 0dx+\int_0^y\left(x^2-2y\cdot 0\right)dy+\int_0^z(-y)^2\,dz+c=x^2y-y^2z+c.$$

Проверка: $\text{grad}w=\left(2xy;x^2-2yz;-y^2\right)=\bar{f}$.

2. Работа поля на пути AB:

а) В качестве пути интегрирования выберем ломаную линию

$$A(1,2,3)\to C(-2,2,3)\to D(-2,0,3)\to B(-2,0,4).$$

Тогда $W_{AB}=\int\limits_{1}^{-2}2\cdot 2x dx+\int\limits_{2}^{0}\left[(-2)^2-2yz\right]dy+\int\limits^{4}(-0)^2\,dz=(8-2)+4\cdot(-2)+3\cdot 4=10.$

б) $W_{AB}=w(-2,0,4)-w(1,2,3)=0-(2-12)=10.$

Пример 2. Найти потенциал поля $\bar f=\frac{1}{x}\bar i+z\bar j+y\bar k$.

Решение. Поле определено там, где $x\neq 0$. Плоскость $x=0$ делит пространство на две односвязные области: полупространство, где $x>0$, и полупространство, где $x<0$. Так как $P=1/x$, $Q=z$ и $R=y$, то $\operatorname{rot}\bar f=(1-1;\,0-0;\,0-0)=\bar 0$. Значит, поле потенциально в каждом из полупространств. Полагая для полупространства $x>0$ $(x_0,y_0,z_0)=(1,0,0)$, получим:

$$w_1=\int\limits_{1}^{x}\frac{1}{x}dx+\int\limits_{0}^{y}0dy+\int\limits_{0}^{z}ydz+c=\ln|x|-\ln 1+yz+c=\ln x+yz+c\,.$$

Проверка: $\operatorname{grad}w_1=\left(\frac{1}{x};\,z;\,y\right)=\bar f$.

Для полупространства $x<0$ положим $(x_0,y_0,z_0)=(-1,0,0)$:

$$w_2=\int\limits_{-1}^{x}\frac{1}{x}dx+\int\limits_{0}^{y}0dy+\int\limits_{0}^{z}ydz+c=\ln|x|-\ln 1+yz+c=\ln(-x)+yz+c\,.$$

Задание.

Дано векторное поле $\vec F=\{P,Q,R\}(x,y,z)$.

Требуется:

1. Доказать, что поле является ***безвихревым.***
2. Найти его ***потенциал.***
3. Найти ***работу*** поля на пути, соединяющем заданные точки A и B (путь интегрирования выбрать ***самостоятельно***).
4. Проверить полученный результат с помощью найденного в пункте 2 потенциала.

Компоненты P,Q,R вектора $\boldsymbol{F}$, а также координаты точек A и B приведены в таблице.

;;;;;

N	P	Q	R	A	B
1.	$yx^{y/z-1}/z$	$x^{y/z}\ln x/z$	$-yx^{y/z}\ln x/z^2$	(2;1;1)	(4;3;3)
2.	$e^{y/z}$	$e^{y/z}(x+1)/z$	$-y(x+1)e^{y/z}/z^2$	(1;1;1)	(-1;3;6)
3.	$yz(1+x^2y^2z^2)^{-1/2}$	$zx(1+x^2y^2z^2)^{-1/2}$	$xy(1+x^2y^2z^2)^{-1/2}$	(0;0;0)	(1;-1;1)
4.	$x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$	$y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$	$z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$	(1;1;1)	(3;4;5)
5.	$2x(1-e^{yz})(1+x^2)^{-2}$	$ze^{yz}/(1+x^2)+1$	$ye^{yz}/(1+x^2)-1$	(2;0;3)	(4;-1;0)
6.	$y^2z^{-1/2}$	$2xyz^{-1/2}$	$-xy^2z^{-3/2}/2$	(5;1;4)	(3;6;1)
7.	$(3y-x)(x+y)^{-3}-z$	$(y-3x)(x+y)^{-3}-z$	$\left(2(x+y)^2\right)^{-1}$	(1;3;2)	(8;5;7)
8.	$3x^2z\cos(y^2)$	$2x^3yz\sin(y^2)$	$x^3\cos(y^2)$	(1;0;1)	(3; $\sqrt{\pi}$;4)

9.	$2x\cos z - z^2\sin x$	$3y^2-2y$	$2z\cos x - x^2\sin z$	(0;0;0)	(π/2;1;π)
10.	$1-3x$	$y(y-z)^{-2}-y^2$	$(z-2y)(y-z)^{-2}+2z$	(3;4;5)	(1;6;2)
11.	$(x+2y)(x+y)^{-2}$	$y(x+y)^{-2}$	$1+z^2$	(1;2;4)	(3;1;6)
12.	$(1+xz+yz)\exp(xz)$	$\exp(xz)$	$x(x+y)\exp(xz)$	(0;0;0)	(1;2;ln2)
13.	$x(x^2+2y^2+3z^2)^{-1/2}$	$2y(x^2+2y^2+3z^2)^{-1/2}$	$3z(x^2+2y^2+3z^2)^{-1/2}$	(2;1;3)	(6;5;7)
14.	$2x(x^2+2y^2+3z^2)^{-1}$	$4y(x^2+2y^2+3z^2)^{-1}$	$6z(x^2+2y^2+3z^2)^{-1}$	(1;0;0)	(-2;4;-5)
15.	z^{-1}	$-3z^{-1}$	$(3y-x+z^3)z^{-2}$	(0;0;1)	(6;4;2)
16.	$yz(1+x^2y^2z^2)^{-1}$	$xz(1+x^2y^2z^2)^{-1}$	$xy(1+x^2y^2z^2)^{-1}$	(2;4;6)	(6;2;4)
17.	$-yz(x-yz)^{-2}$	$xz(x-yz)^{-2}$	$xy(x-yz)^{-2}$	(1;2;3)	(3;2;1)
18.	$yz+2z+2y$	$xz+2z+2x$	$xy+2y+2x$	(-3;1;5)	(-2;0;4)
19.	$3x^2+3y-1$	z^2+3x	$2yz+1$	(1;0;1)	(-2:-3;-1)
20.	$yz-2x$	xz-$2y$	xy	(1,1,1)	(3;4;5)
21.	$xy(3x-4y)$	$x^2(x-4y)$	$3z^2$	(-2;-1;3)	(5;4;6)
22.	$y+z$	$x+z$	$x+y$	(1;2;3)	(-3;2;4)
23.	$6x^2$	$3\cos(3y+2z)$	$2\cos(3y+2z)$	(0;0;0)	(π;π;π)
24.	$6x^2$	$3\cos(3y+2z)$	$2\cos(3y+2z)$	(0;0;0)	(π;π;π)
25.	$y+z$	$x+z$	$x+y$	(1;2;3)	(-3;2;4)
26.	$xy(3x-4y)$	$x^2(x-4y)$	$3z^2$	(-2;-1;3)	(5;4;6)
27.	$yz-2x$	xz-$2y$	xy	(1,1,1)	(3;4;5)
28.	$3x^2+3y-1$	z^2+3x	$2yz+1$	(1;0;1)	(-2:-3;-1)
29.	$yz+2z+2y$	$xz+2z+2x$	$xy+2y+2x$	(-3;1;5)	(-2;0;4)
30.	$-yz(x-yz)^{-2}$	$xz(x-yz)^{-2}$	$xy(x-yz)^{-2}$	(1;2;3)	(3;2;1)
31.	$yz(1+x^2y^2z^2)^{-1}$	$xz(1+x^2y^2z^2)^{-1}$	$xy(1+x^2y^2z^2)^{-1}$	(2;4;6)	(6;2;4)
32.	z^{-1}	$-3z^{-1}$	$(3y-x+z^3)z^{-2}$	(0;0;1)	(6;4;2)
33.	$2x(x^2+2y^2+3z^2)^{-1}$	$4y(x^2+2y^2+3z^2)^{-1}$	$6z(x^2+2y^2+3z^2)^{-1}$	(1;0;0)	(-2;4;-5)
34.	$x(x^2+2y^2+3z^2)^{-1/2}$	$2y(x^2+2y^2+3z^2)^{-1/2}$	$3z(x^2+2y^2+3z^2)^{-1/2}$	(2;1;3)	(6;5;7)
35.	$(1+xz+yz)\exp(xz)$	$\exp(xz)$	$x(x+y)\exp(xz)$	(0;0;0)	(1;2;ln2)
36.	$(x+2y)(x+y)^{-2}$	$y(x+y)^{-2}$	$1+z^2$	(1;2;4)	(3;1;6)
37.	$1-3x$	$y(y-z)^{-2}-y^2$	$(z-2y)(y-z)^{-2}+2z$	(3;4;5)	(1;6;2)

38.	$2x\cos z - z^2 \sin x$	$3y^2 - 2y$	$2z\cos x - x^2 \sin z$	(0;0;0)	(π/2;1;π)
39.	$3x^2 z\cos\left(y^2\right)$	$2x^3 yz\sin\left(y^2\right)$	$x^3 \cos\left(y^2\right)$	(1;0;1)	$(3;\sqrt{\pi};4)$
40.	$(3y-x)(x+y)^{-3} - z$	$(y-3x)(x+y)^{-3} - z$	$\left(2(x+y)^2\right)^{-1}$	(1;3;2)	(8;5;7)
41.	$y^2 z^{-1/2}$	$2xyz^{-1/2}$	$-xy^2 z^{-3/2}/2$	(5;1;4)	(3;6;1)
42.	$2x\left(1-e^{yz}\right)\left(1+x^2\right)^{-2}$	$ze^{yz}/\left(1+x^2\right)+1$	$ye^{yz}/\left(1+x^2\right)-1$	(2;0;3)	(4;-1;0)
43.	$x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$	$y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$	$z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$	(1;1;1)	(3;4;5)
44.	$yz\left(1+x^2y^2z^2\right)^{-1/2}$	$zx\left(1+x^2y^2z^2\right)^{-1/2}$	$xy\left(1+x^2y^2z^2\right)^{-1/2}$	(0;0;0)	(1;-1;1)
45.	$e^{y/z}$	$e^{y/z}(x+1)/z$	$-y(x+1)e^{y/z}/z^2$	(1;1;1)	(-1;3;6)
46.	$yx^{y/z-1}/z$	$x^{y/z}\ln x/z$	$-yx^{y/z}\ln x/z^2$	(2;1;1)	(4;3;3)