

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА**  
**Федеральное государственное бюджетное**  
**образовательное учреждение высшего образования**  
**«ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**  
**УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I»**  
**(ФГБОУ ВО ПГУПС)**

---

# **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2023

## Оглавление

Введение	3
<b>1. Осевая деформация</b>	4
1.1. Построение эпюр внутренних усилий	4
1.2. Напряжения и деформации при осевом растяжении – сжатии. Условие прочности	6
1.3. Задания для контрольных работ	10
<i>Задача 1.</i> Расчет прямоосного ступенчатого стержня на осевое действие сил	10
<b>2. Геометрические характеристики плоских фигур</b>	15
2.1. Основные геометрические характеристики	15
2.2. Формулы для моментов инерции при переходе к параллельным осям	16
2.3. Моменты инерции простых фигур	16
2.4. Определение центра тяжести	17
2.5. Определение моментов инерции	19
<b>3. Кручение валов кругового сечения</b>	22
3.1. Построение эпюр крутящего момента	23
3.2. Подбор сечения и определение деформации вала	27
3.3. Задания для контрольных работ	31
<i>Задача 3.</i> Кручение валов кругового сечения	31
<b>4. Плоский поперечный изгиб</b>	36
4.1. Построение эпюр внутренних усилий	36
4.2. Определение напряжений и подбор сечений	48
4.3. Задания для контрольных работ	50
<i>Задача 4.</i> Плоский поперечный изгиб стержня	50
<b>5. Определение перемещений при плоском поперечном изгибе стержня</b>	53
5.1. Применение формул трапеций и Симпсона для определения перемещений	56
5.2. Задания для контрольной работы	63
<i>Задача 5.</i> Определение перемещений при плоском поперечном изгибе стержня	63
Приложения	66
Библиографический список	71

## Введение

Учебная дисциплина «Сопротивление материалов относится к базовым дисциплинам в программах подготовки дипломированных специалистов строительного, машиностроительного, транспортного профилей.

Сопротивление материалов традиционно относится к числу наиболее трудных предметов. Трудности эти объективного характера, т. к. требуют от студентов способностей находить соответствие между абстрактными понятиями теоретической части курса и реальными объектами.

При изучении курса важное значение имеет практическая часть, а именно, решение типовых задач.

Настоящее пособие представляет сборник заданий с примерами решения типовых задач по разделам дисциплины.

Выбор расчетной схемы и исходных данных производится следующим образом. Две последние цифры номера зачетной книжки студента образуют **номер схемы** стержня или стержневой системы. Например, номерам зачетной книжки 07-116-01 или 07-116-101 (здесь буквенные обозначения опускаются) соответствует схема номер 01, т. е. 1.

В тех случаях, когда номер зачетной книжки превышает число вариантов схем, номер схемы определяется как разность между номером зачетной книжки и числом (или кратным числом) схем в задании. Например, номер зачетной книжки 07-116-91 или 07-116-691, а число схем 36. Тогда студент так выбирает номер схемы 91 – 36 = 55 – 36 = 19.

**Числовые значения** задачи выбираются из согласно **шифра**. Шифр строится следующим образом: выписываются **шесть последних цифр** из номера зачетной книжки. Под ними записываются первые шесть букв русского алфавита.

07-116-01	→	7	1	1	6	0	1
07-116-101	→	1	1	6	1	0	1
		<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>г</b>	<b>д</b>	<b>е</b>

Из каждого столбца таблицы исходных данных, обозначенного определенной буквой, выбирается число, стоящее в той строке, номер которой, совпадает с номером буквы. Итак, сначала буква, затем цифра.

Задачи, выполненные с нарушением этих условий, преподавателем не принимаются.

# 1. Осевая деформация

## 1.1. Построение эпюр внутренних усилий

Осевая деформация возникает при приложении к стержню нагрузок, действующих вдоль его продольной оси. При этом в поперечных сечениях возникает только одно внутреннее усилие – продольная сила  $N$ , а остальные усилия (поперечные силы, изгибающие и крутящий моменты) равны нулю. Осевая деформация реализуется, например, в различных стойках, опорах, колоннах, подвесах, а также в шарнирно-стержневых системах при узловом нагружении [1-3].

Продольную силу  $N$  будем считать положительной, если она вызывает растяжение, т. е. направлена от сечения (рис. 1.1). При сжатии продольная сила отрицательна.

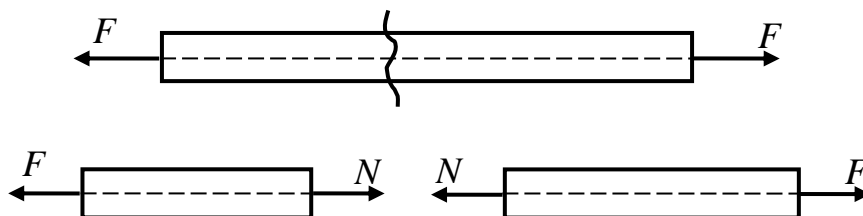


Рис. 1.1.

Продольная сила в произвольном сечении стержня равна алгебраической сумме проекций на ось стержня всех внешних сил, взятых по одну сторону от сечения; при этом растягивающие силы суммируются с плюсом, сжимающие – с минусом. Значение продольной силы может меняться по длине стержня. График, показывающий изменение внутреннего усилия по длине стержня, называют эпюрой.

Продольная сила  $N$  и интенсивность распределенной нагрузки  $q$  связаны дифференциальной зависимостью:

$$\frac{dN}{dz} = q_z. \quad (1.1)$$

Зависимость (1.1) можно использовать как для построения эпюры продольной силы, так и для проверки правильности ее построения.

Сформулируем несколько правил проверки эпюр продольной силы:

1) если на участке стержня отсутствует распределенная нагрузка, т.е.  $q = 0$ , то продольная сила на этом участке – постоянна или кусочно-постоянна;

2) если на участке стержня действует равномерно распределенная нагрузка ( $q = \text{const}$ ), то продольная сила – линейная функция от  $z$ ;

3) в сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре продольной силы наблюдается скачок на величину этой силы.

**Пример 1.1.** Построить эпюры продольной силы для стержня, представленного на рис. 1.2, а. Принять  $a = 2$  м,  $b = 3$  м,  $F_1 = 16$  кН,  $F_2 = 24$  кН,  $q = 10$  кН/м.

**Решение.**

Найдем реакцию в закреплении. Для этого запишем уравнение равновесия стержня:

$$\sum_i F_{iz} = 0: R - F_1 + F_2 + qb = 0 \Rightarrow R = F_1 - F_2 - qb = -38 \text{ кН}$$

При построении эпюры продольной силы стержень разбивают на участки. Границами участков являются начало и конец стержня, места приложения сосредоточенных сил, начало и конец действия распределенной нагрузки, а также места изменения закона ее распределения. В данном примере стержень имеет два участка.

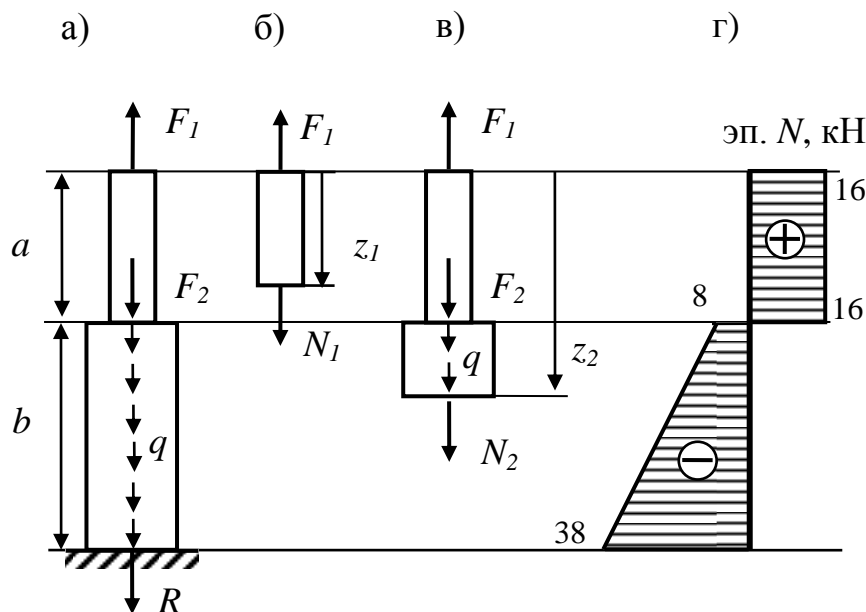


Рис. 1.2

Для определения продольной силы используют метод сечений. Проведем в пределах первого участка сечение на расстоянии  $z_1$  от верхнего края и отбросим нижнюю часть (рис. 1.2, б). В сечении покажем продольную силу в положительном направлении согласно правилу знаков. Если весь стержень находится в равновесии, то и любая его часть также находится в равновесии. Запишем уравнение равновесия: сумма проекций сил на ось стержня равна нулю.

I участок  $0 \leq z_1 < a$ :

$$\sum_i F_{iz} = 0: N_1 - F_1 = 0 \Rightarrow N_1 = F_1 = 16 \text{ кН}$$

Проведем сечение на втором участке (рис. 1.2, в).

II участок  $a \leq z_2 < a+b$ :

$$\sum_i F_{iz} = 0: N_2 - F_1 + F_2 + q(z_2 - a) = 0 \Rightarrow N_2 = F_1 - F_2 - q(z_2 - a)$$

Функция  $N_2$  линейная, следовательно, для построения эпюры продольной силы в пределах второго участка необходимо определить два значения функции  $N_2$ , например, в начале и конце участка:

$$N_2(a) = F_1 - F_2 = 16 - 24 = -8 \text{ кН};$$

$$N_2(a+b) = F_1 - F_2 - q(a+b-a) = 16 - 24 - 10 \cdot 3 = -38 \text{ кН}.$$

Эпюру продольной силы строят на линии параллельной оси стержня, значения откладывают перпендикулярно этой линии в некотором выбранном масштабе. Положительные значения будем откладывать справа, а отрицательные слева. На первом участке продольная сила положительна, т.е. происходит растяжение, а на втором – отрицательная, следовательно, реализуется сжатие.

Эпюра продольной силы показана на рис. 1.2, г. Для проверки правильности ее построения воспользуемся правилами, сформулированными выше. На первом участке нет распределенной нагрузки, поэтому продольная сила постоянна. На втором участке продольная сила линейно зависит от координаты  $z$ , т. к. действует равномерно распределенная нагрузка, эпюра – прямая наклонная линия. В сечениях, где приложены сосредоточенные силы  $F_1$ ,  $F_2$  и  $R$ , наблюдаются скачки равные величинам сосредоточенных сил, приложенных в сечениях.

Из решения видно, что если рассматривать равновесие отсеченной части со стороны свободного конца стержня, то реакцию  $R$  можно не определять предварительно. Она получится автоматически как скачок на эпюре  $N$  в защемлении.

## 1.2. Напряжения и деформации при осевом растяжении – сжатии. Условие прочности

Нормальные напряжения при осевой деформации вычисляются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (1.2)$$

Условие прочности при осевом растяжении – сжатии формулируется следующим образом: наибольшее расчетное нормальное напряжение не должно превышать допускаемого значения

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|N|_{\max}}{A} \leq [\sigma] \quad (1.3)$$

где  $|\sigma|_{\max}$  – наибольшее по модулю нормальное напряжение,  $|N|_{\max}$  – продольная сила в опасном сечении, взятая по модулю,  $A$  – площадь поперечного сечения опасного элемента,  $[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

Используя условия прочности, решают три задачи:

1) **Проверка прочности:** если размеры конструкции и внешние нагрузки известны, вычисляются наибольшие нормальные напряжения и делается вывод, выполняется ли условие прочности.

2) **Подбор поперечного сечения стержня:** если известны внешние нагрузки и допустимые напряжения материала стержня, из условия прочности (1.3) выражают площадь поперечного сечения

$$A \geq \frac{|N|_{\max}}{[\sigma]}. \quad (1.4)$$

3) **Определение грузоподъемности:** если известны размеры конструкции и допускаемые напряжения, то из условия прочности выражается  $|N|_{\max}$ :

$$|N|_{\max} \leq A[\sigma].$$

По  $|N|_{\max}$  вычисляется наибольшая допускаемая величина внешней нагрузки.

Удлинение стержня длиной  $l$  находится по формуле

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EA} dz. \quad (1.5)$$

Рассмотрим частные случаи формулы (1.5):

1) если жесткость сечения стержня при осевом растяжении-сжатии  $EA = \text{const}$ , то жесткость можно вынести из-под знака интеграла

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EA} dz = \frac{1}{EA} \int_0^l N dz = \frac{\omega_N}{EA}, \quad (1.6)$$

где  $\omega_N$  – площадь эпюры  $N$  (с учетом знака) на участке стержня длины  $l$ .

2) в случае, когда  $EA = \text{const}$  и  $N = \text{const}$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (1.7)$$

Чтобы найти перемещение заданного сечения  $K$ , нужно посчитать удлинение части стержня от заделки до сечения  $K$ .

**Пример 1.2.** Построить эпюры продольной силы для стержня, представленного на рис. 1.3, а. Подобрать площадь поперечного сечения каждого участка стержня. Вычислить перемещение точки  $K$  и удлинение стержня. Материал стержня – древесина,  $[\sigma]=12$  МПа,  $E=10^4$  МПа,  $a=0,9$  м,  $b=0,8$  м,  $c=0,7$  м,  $F_1=40$  кН,  $F_2=100$  кН,  $F_3=60$  кН,  $q=80$  кН/м.

**Решение.**

Найдем реакцию в закреплении. Запишем уравнение равновесия стержня:

$$\sum_i F_{iz} = 0: R + F_2 - F_1 + F_3 - qb = 0,$$

$$R = -F_2 + F_1 - F_3 + qb = -56 \text{ кН}.$$

Данный стержень имеет три грузовых участка. На каждом из них проведем по сечению (рис. 1.3, б, в, г). Для каждой отсеченной части записываем уравнение равновесия.

I участок  $0 \leq z_1 < a$ :

$$\sum_i F_{iz} = 0: N_1 - F_3 = 0 \Rightarrow N_1 = F_3 = 60 \text{ кН}.$$

II участок  $a \leq z_2 < a+b$ :

$$\sum_i F_{iz} = 0: N_2 - F_3 + F_1 + q(z_2 - a) = 0;$$

$$N_2 = F_3 - F_1 - q(z_2 - a).$$

Функция  $N_2$  линейная, для построения эпюры продольной силы определим два значения, в начале и в конце участка:

$$N_2(a) = F_3 - F_1 = 20 \text{ кН}, \quad N_2(a+b) = F_3 - F_1 - qb = -44 \text{ кН}.$$

III участок  $a+b \leq z_3 < a+b+c$ :

$$\sum_i F_{iz} = 0: N_3 - F_3 + F_1 + qb - F_2 = 0;$$

$$N_3 = F_3 - F_1 - qb + F_2 = 56 \text{ кН}.$$

Эпюра продольной силы приведена на рис. 1.3 д.

Для подбора площадей поперечных сечений участков ступенчатого стержня используем формулу (1.4):

$$A_1 \geq \frac{|N_1|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{60 \text{ кН}}{12 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 50 \text{ см}^2.$$

$$A_2 \geq \frac{|N_2|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{44 \text{ кН}}{12 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2} = 3,67 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 36,7 \text{ см}^2.$$

$$A_3 \geq \frac{|N_3|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{56 \text{ кН}}{12 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2} = 4,67 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 46,7 \text{ см}^2.$$

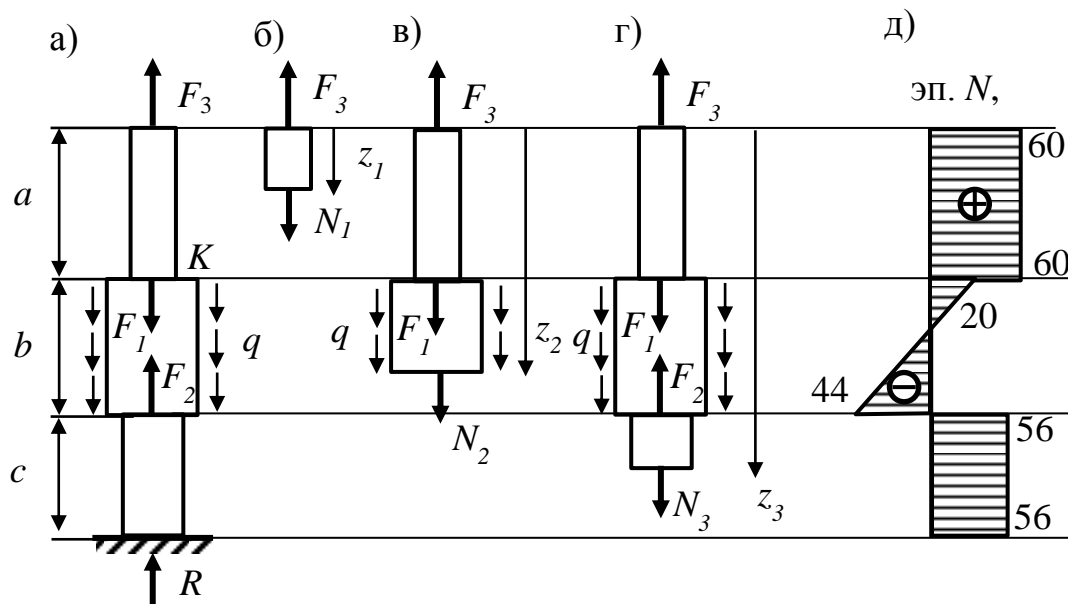


Рис. 1.3.

Удлинение стержня найдем, как сумму удлинений участков стержня. На первом и третьем участках продольные силы постоянны, для определения удлинений воспользуемся формулой (1.7):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 a}{EA_1} = \frac{60 \text{ кН} \cdot 0,9 \text{ м}}{10^4 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 10,8 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1,08 \text{ мм}.$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 c}{EA_3} = \frac{56 \text{ кН} \cdot 0,7 \text{ м}}{10^4 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 \cdot 4,67 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 8,4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,84 \text{ мм}.$$

На втором участке для вычисления удлинения используем формулу (1.6):

$$\Delta l_2 = \frac{\omega_{N_2}}{EA_2} = \frac{\left(\frac{20 - 44}{2}\right) \text{ кН} \cdot 0,8 \text{ м}}{10^4 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 \cdot 3,67 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = -2,6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,26 \text{ мм}.$$

Полное удлинение стержня:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 1,08 - 0,26 + 0,84 = 1,66 \text{ мм}.$$

Перемещение точки  $K$  складывается из удлинений второго и третьего участков:

$$\Delta K = \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0,26 + 0,84 = 0,58 \text{ мм}.$$

Сечение  $K$  переместилось вверх на 0,58 мм.

## 1.2. Задания для контрольных работ

### Задача 1. Расчет прямоосного ступенчатого стержня на осевое действие сил

Прямоосный ступенчатый стержень нагружен осевыми силами  $F_i$  и равномерно распределенной нагрузкой  $q$  (табл. 1.1).

Требуется:

1. Сделать схематический чертеж стержня по заданным размерам, соблюдая масштаб.

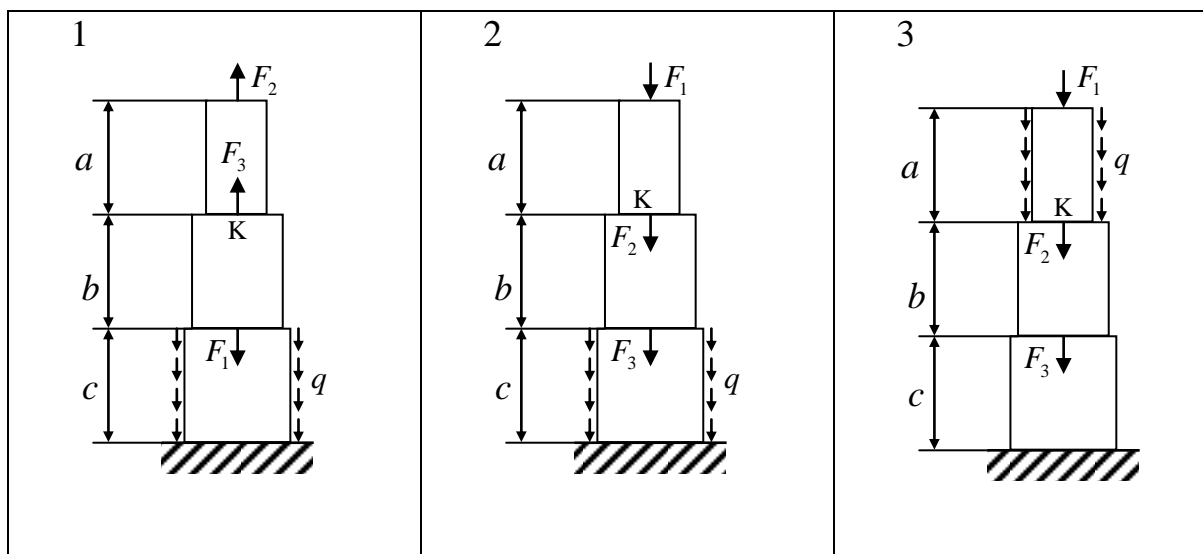
2. Построить эпюру продольной силы  $N$  (эпюра продольной силы должна быть расположена рядом со схемой стержня).

3. Подобрать площадь поперечного сечения стержня на каждом участке.

4. Вычислить перемещение точки  $K$  и удлинение стержня. Материал стержня – древесина;  $[\sigma]=12$  МПа,  $E=10^4$  МПа.

Исходные данные приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.1



Продолжение табл. 1.1

<p>4</p>	<p>5</p>	<p>6</p>
<p>7</p>	<p>8</p>	<p>9</p>
<p>10</p>	<p>11</p>	<p>12</p>

<p>13</p>	<p>14</p>	<p>15</p>
<p>16</p>	<p>17</p>	<p>18</p>
<p>19</p>	<p>20</p>	<p>21</p>

<p>22</p>	<p>23</p>	<p>24</p>
<p>25</p>	<p>26</p>	<p>27</p>
<p>28</p>	<p>29</p>	<p>30</p>

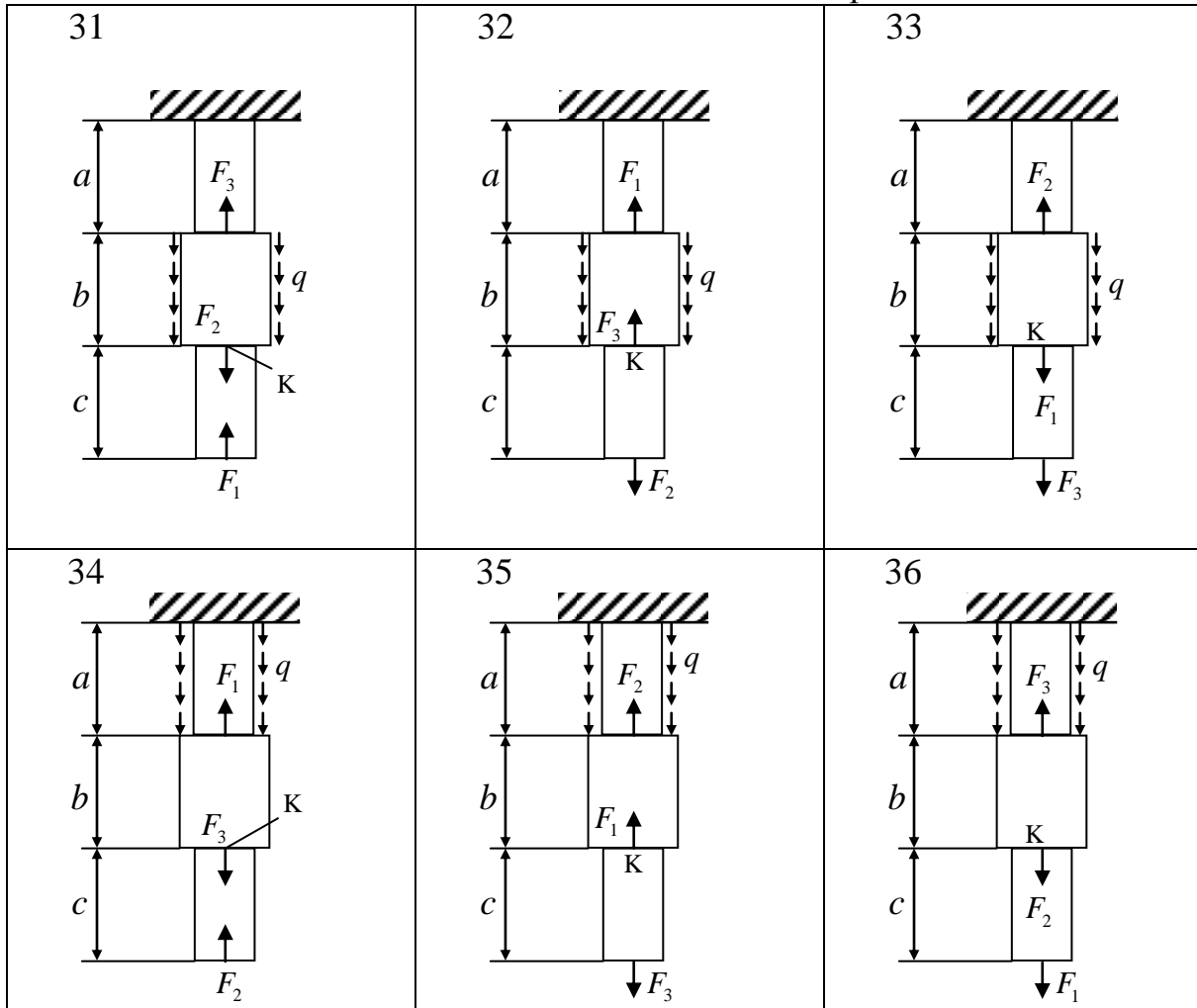


Таблица 1.2

Номер строки	$a$	$b$	$c$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$q$
	м			кН			кН/м
<b>1</b>	0,6	0,5	1	10	80	30	20
<b>2</b>	1	1,5	2	20	70	40	30
<b>3</b>	0,5	1,5	0,6	30	55	40	20
<b>4</b>	2	3	1,5	40	70	60	15
<b>5</b>	1	2	1,5	50	30	50	40
<b>6</b>	2	1	1,8	60	40	20	30
<b>7</b>	1	0,6	0,5	55	30	55	10
<b>8</b>	1,2	1,5	1,2	65	20	65	10
<b>9</b>	2	2,5	1,5	80	35	70	25
<b>0</b>	1,4	0,5	0,6	10	25	75	5
	<b><i>a</i></b>	<b><i>б</i></b>	<b><i>с</i></b>	<b><i>в</i></b>	<b><i>г</i></b>	<b><i>д</i></b>	<b><i>е</i></b>

## 2. Геометрические характеристики плоских фигур

### 2.1. Основные геометрические характеристики

Площадь фигуры  $A = \int_A dA$ .

Статические моменты площади относительно осей  $x$  и  $y$  (рис. 2.1):

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA.$$

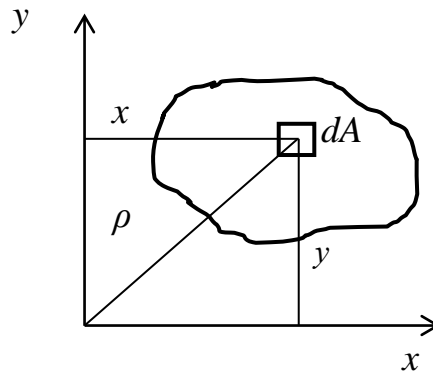


Рис. 2.1

Если известна площадь фигуры  $A$  и координаты центра тяжести  $x_c$  и  $y_c$ , то

$$S_x = Ay_c, \quad S_y = Ax_c.$$

Отсюда следует, что если оси координат проходят через центр тяжести, то статические моменты относительно этих осей равны нулю. Такие оси называют центральными.

Моменты инерции относительно осей  $x$  и  $y$ :

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA.$$

Центробежный момент инерции:

$$I_{xy} = \int_A xy dA.$$

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями.

Полярный момент инерции:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

## 2.2. Формулы для моментов инерции при переходе к параллельным осям

Если известны моменты инерции и статические моменты относительно осей  $x$  и  $y$ , то моменты инерции относительно осей  $x_1$  и  $y_1$ , параллельных исходным (рис. 2.2), можно найти по формулам:

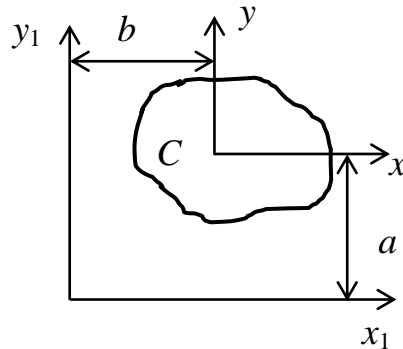


Рис. 2.2

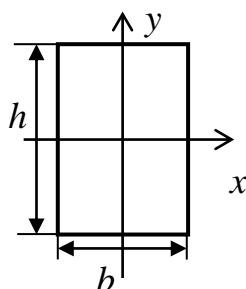
$$\begin{aligned}
 x_1 &= x + b, & y_1 &= y + a. \\
 I_{x_1} &= I_x + 2aS_x + a^2A, \\
 I_{y_1} &= I_y + 2bS_y + b^2A, \\
 I_{x_1y_1} &= I_{xy} + aS_y + bS_x + abA.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Если оси  $x$  и  $y$  главные центральные, то  $S_x = S_y = 0$  и

$$\begin{aligned}
 I_{x_1} &= I_x + a^2A, \\
 I_{y_1} &= I_y + b^2A, \\
 I_{x_1y_1} &= abA.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

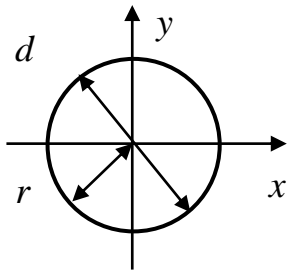
## 2.3. Моменты инерции простых фигур

*Прямоугольник*



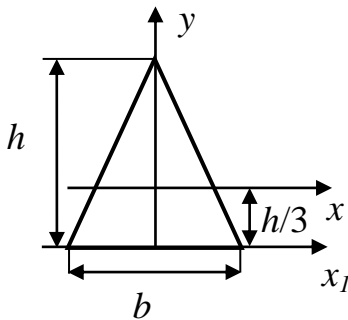
$$\begin{aligned}
 I_x &= \frac{bh^3}{12}, & I_y &= \frac{hb^3}{12}, \\
 I_{xy} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

*Круг*



$$\begin{aligned}
 I_x = I_y &= \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \\
 I_p &= \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \\
 I_{xy} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

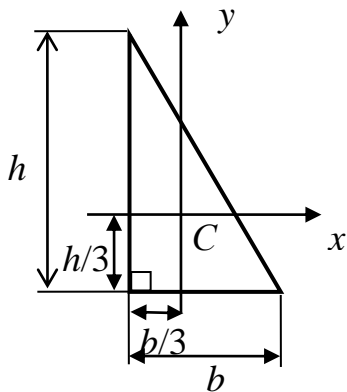
*Равнобедренный треугольник*



Оси  $x, y$  – главные центральные.

$$\begin{aligned}
 I_{x_1} &= \frac{bh^3}{12} \\
 I_y = \frac{b^3h}{48}, \quad I_x &= \frac{bh^3}{36}
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

*Прямоугольный треугольник*



Оси  $x, y$  – главные центральные.

$$\begin{aligned}
 I_x &= \frac{bh^3}{36} \\
 I_y &= \frac{b^3h}{36}
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

**2.4. Определение центра тяжести**

Если фигура имеет две оси симметрии, то центр тяжести лежит на пересечении осей симметрии (рис. 2.3). Если фигура имеет одну ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси, и нужно найти только одну координату.

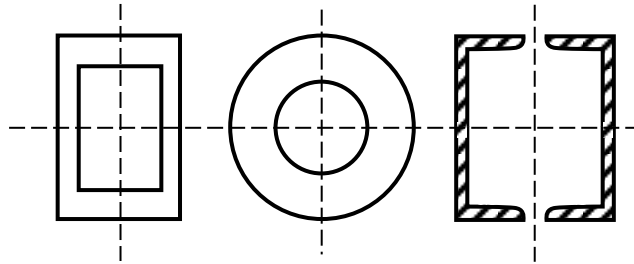
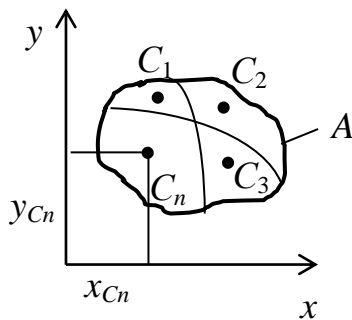


Рис. 2.3

В общем случае, когда оси симметрии отсутствуют, координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{Ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{Ci}}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (2.7)$$



$A_i$  – составляющие, на которые разделена площадь  $A$ .

$x_{Ci}, y_{Ci}$  – координаты центров тяжести площадей  $A_i$ .

**Пример 2.1.** Определить положение центра тяжести сечения (рис. 2.4, а).

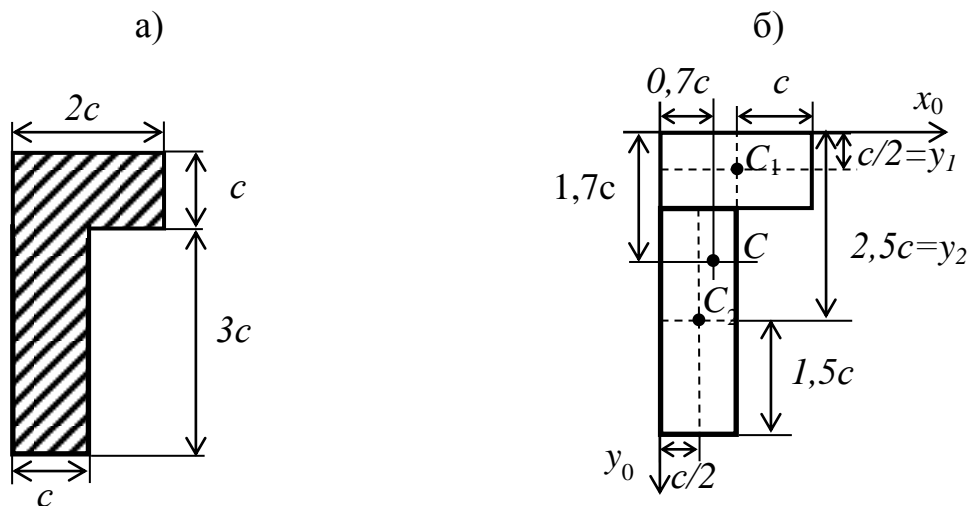


Рис. 2.4

**Решение.**

1. Для определения положения центра тяжести фигуры введем вспомогательные оси  $x_0, y_0$  (рис. 2.4, б).

2. Делим фигуру на два прямоугольника (рис. 2.4, б) с площадями

$$A_1 = 2c^2, \quad A_2 = 3c^2.$$

Найдем координаты центров тяжести каждого прямоугольника относительно осей  $x_0, y_0$ :

$$\begin{aligned}x_1 &= c, \\y_1 &= 0,5c, \\x_2 &= 0,5c, \\y_2 &= c+1,5c = 2,5c.\end{aligned}$$

3. Тогда координаты центра тяжести сечения  $C$  вычисляются по формулам (2.7):

$$x_c = \frac{c \cdot 2c^2 + 0,5 \cdot 3c^2}{2c^2 + 3c^2} = 0,7c, \quad y_c = \frac{0,5c \cdot 2c^2 + 2,5 \cdot 3c^2}{2c^2 + 3c^2} = 1,7c.$$

## 2.5. Определение моментов инерции

**Пример 2.2.** Найти моменты инерции сечения, показанного на рис. 2.5, а, относительно главных центральных осей ( $b$  – размер полки указанного прокатного профиля).

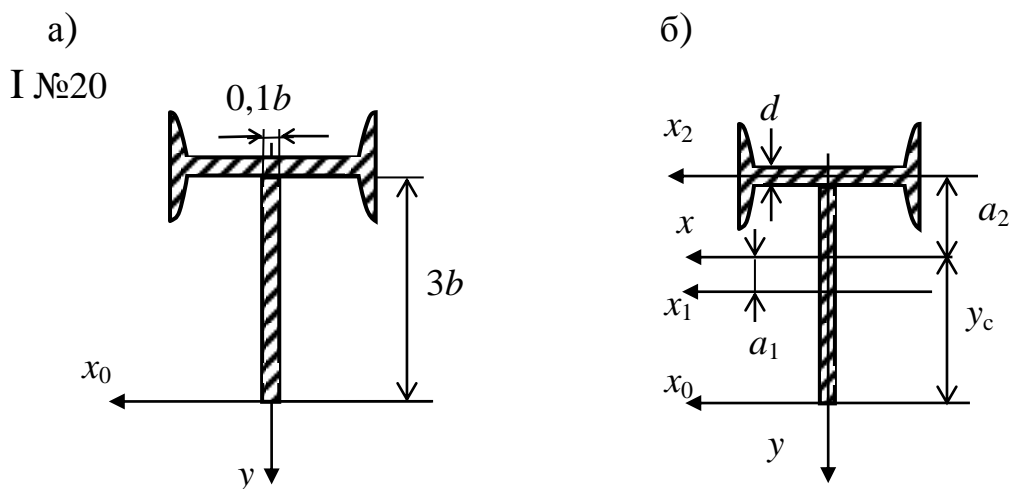


Рис. 2.5

### Решение.

Одной из главных центральных осей является ось симметрии  $y$ . Для определения положения второй необходимо найти центр тяжести фигуры. Сечение разбиваем на две части: 1 – прямоугольник, 2 – двутавр № 20. Размеры и моменты инерции относительно собственных главных центральных осей двутавра берем из сортамента (табл. П.1):  $h = 20$  см,  $b = 10$  см,  $d = 0,52$  см,  $A_{дв} = 26,8$  см<sup>2</sup>,  $I_{x_1}^{дв} = 1840$  см<sup>4</sup>,  $I_{y_1}^{дв} = 115$  см<sup>4</sup>.

Площадь прямоугольника  $A_{\text{пр}} = 0,1b \cdot 3b = 0,3b^2 = 30 \text{ см}^2$ . Координата центра тяжести прямоугольника относительно оси  $x_0$  есть  $y_{\text{пр}} = -1,5b$ , координата центра тяжести двутавра относительно оси  $x_0$  есть  $y_{\text{дв}} = -(3b+0,5d)$ . Координаты  $y_{\text{пр}}$ ,  $y_{\text{дв}}$  отрицательные, т. к. откладываются от оси  $x_0$  в направлении противоположном положительному направлению оси  $y$ .

Координата  $y_c$  центра тяжести фигуры:

$$y_c = \frac{-1,5b \cdot 0,3b^2 - (3b + 0,5d) \cdot A_{\text{дв}}}{0,3b + A_{\text{дв}}} = -22,2 \text{ см}$$

Центр тяжести фигуры находится на 22,2 см выше оси  $x_0$ . Вторая главная центральная ось – ось  $x$  проходит через центр тяжести перпендикулярно оси  $y$  (рис. 2.5, б).

Найдем моменты инерции относительно главных центральных осей.

Главные центральные оси двутавра и прямоугольника не совпадают с осью  $x$ , поэтому при подсчете  $I_x$  необходимо использовать формулу перехода к параллельным осям (2.2). За  $a_1$ ,  $a_2$  обозначим расстояние от главной центральной оси  $x$  до осей  $x_1$  и  $x_2$ .

$$a_1 = 22,2 - 1,5b = 22,2 - 15 = 7,2 \text{ см},$$

$$a_2 = 3b + 0,5d - 22,2 = 30 + 0,26 - 22,2 = 8,06 \text{ см}$$

Моменты инерции прямоугольника относительно собственных главных центральных осей находятся по формулам (2.3).

Тогда моменты инерции относительно главных центральных осей равны:

$$I_x = I_y^{\text{дв}} + I_x^{\text{пр}} = \left( I_y^{\text{дв}} + a_2^2 A_{\text{дв}} \right) + \left( \frac{(3b)^3 \cdot 0,1b}{12} + a_1^2 A_{\text{пр}} \right) =$$

$$= 115 + 7,2^2 \cdot 26,8 + \frac{(30)^3 \cdot 1}{12} + 8,06^2 \cdot 30 = 3486 \text{ см}^4$$

$$I_y = I_x^{\text{дв}} + I_y^{\text{пр}} = I_y^{\text{дв}} + \frac{(0,1b)^3 \cdot 3b}{12} = 1840 + \frac{(1)^3 \cdot 30}{12} = 1842,5 \text{ см}^4$$

**Пример 2.3.** Найти моменты инерции прямоугольного сечения с квадратными вырезами (рис. 2.6) относительно главных центральных осей.

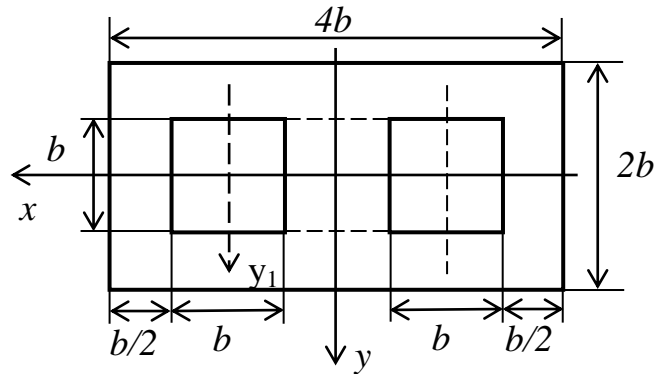


Рис. 2.6

**Решение.**

Сечение имеет две оси симметрии. Эти оси и являются главными центральными осями. Разбиваем сечение на три простые фигуры – прямоугольник и два вырезанных из него квадрата. Ось  $x$  является главной центральной осью для всех фигур. Ось  $y$  параллельна главным центральным осям квадратов.

Моменты инерции квадратов относительно собственных главных центральных осей:  $I_x^{кв} = I_{y1}^{кв} = \frac{b^4}{12}$ , площадь квадрата  $A_{кв} = b^2$ .

Моменты инерции прямоугольника:  $I_x^{пр} = \frac{(2b)^3 4b}{12}$ ,  $I_y^{пр} = \frac{2b(4b)^3}{12}$

Расстояние между центром тяжести квадрата и центром тяжести прямоугольника равно  $b$ .

Тогда моменты инерции сечения:

$$I_x = I_x^{пр} - 2I_x^{кв} = \frac{(2b)^3 4b}{12} - 2 \frac{b^4}{12} = \frac{30b^4}{12} = 2,5b^4,$$

$$I_y = I_y^{пр} - 2(I_{y1}^{кв} + b^2 A_{кв}) = \frac{2b(4b)^3}{12} - 2 \left( \frac{b^4}{12} + b^2 b^2 \right) = \frac{102b^4}{12} = 8,5b^4.$$

При нахождении момента инерции относительно оси  $y$  использовали формулу перехода к параллельным осям (2.2).

### 3. Кручение валов кругового сечения

Кручение возникает при приложении к стержню моментов (пар сил), расположенных в плоскости перпендикулярной оси стержня. Стержень, работающий на кручение, называют валом. При таком нагружении в поперечном сечении вала отлично от нуля только одно внутреннее усилие – крутящий момент  $M_z$ .

**Правило знаков.** Для определенности условимся считать крутящий момент положительным, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он стремится повернуть оставшуюся часть вала против хода часовой стрелки (рис. 3.1) [2, 4].

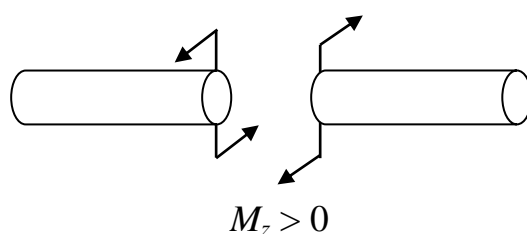


Рис. 3.1

Следует отметить, что физического смысла знак крутящего момента не имеет.

Касательное напряжение при кручении определяется по формуле

$$\tau_\rho = \frac{M_z \rho}{I_p}, \quad (3.1)$$

где  $I_p$  – полярный момент инерции,  $\rho$  – расстояние от начала координат до точки, в которой нужно определить напряжение.

Полярные моменты инерции:

для круга :

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (3.2)$$

для кольца:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad (3.3)$$

где  $r$ ,  $d$  – радиус и диаметр круга,  $R$  – внешний радиус кольца,  $D$  – внешний диаметр кольца,  $\alpha$  – отношение внутреннего радиуса кольца к внешнему.

Условие прочности при кручении:

$$|\tau|_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (3.4)$$

где  $W_p$  – полярный момент сопротивления сечения:

для круга 
$$W_p = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \quad (3.5)$$

для кольца 
$$W_p = \frac{\pi r^3}{2}(1 - \alpha^4) = \frac{\pi d^3}{16}(1 - \alpha^4). \quad (3.6)$$

Угол закручивания: 
$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{GI_p} dz, \quad \text{где } l \text{ – расстояние между}$$

сечениями, для которых определяется угол поворота.

Если на участке величины крутящего момента  $M_z = const$  и жесткости сечения при кручении  $GI_p = const$ , то

$$\varphi = \frac{M_z l}{GI_p}. \quad (3.7)$$

Условие жесткости: 
$$\theta_{\max} = \frac{|M_z^{\max}|}{GI_p} \leq [\theta_{\max}], \quad (3.8)$$

где  $[\theta]$  – относительный допускаемый угол закручивания вала, т. е. угол, отнесенный к единице длины вала, например, 1 м.

### 3.1. Построение эпюр крутящего момента

**Пример 3.1.** Вал (рис. 3.2) загружен сосредоточенными моментами  $M_1 = 24 \text{ кНм}$ ,  $M_2 = 40 \text{ кНм}$ ,  $M_3 = 28 \text{ кНм}$ . Требуется построить эпюру крутящих моментов.

**Решение.**

1. Определим реакцию в заделке.

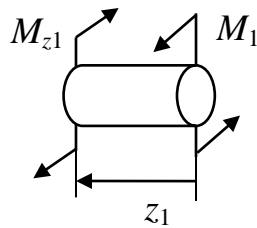
Так как на вал действуют только сосредоточенные моменты, расположенные в плоскостях перпендикулярных оси стержня, то будет только можно записать только одно уравнение равновесия – сумма моментов относительно оси вала равна нулю (рис. 3.2):

$$\begin{aligned} \sum M_z &= 0 \\ M_0 + M_3 - M_2 + M_1 &= 0; \\ M_0 &= -M_3 + M_2 - M_1 = -28 + 40 - 24 = -12 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

2. Построим эпюру крутящих моментов.

Вал имеет три грузовых участка. Методом сечений определим крутящие моменты на каждом из участков. Начнем со свободного конца. Проводим сечение на расстоянии  $z_1$  от правого конца. Рассматриваем правую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутреннее

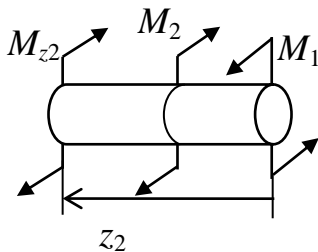
усилие, положительное согласно правилу знаков (рис. 3.1), составляем уравнение равновесия.



I участок:  $0 \leq z_1 < c$

$$M_{z1} = M_1 = 24 \text{ кНм}$$

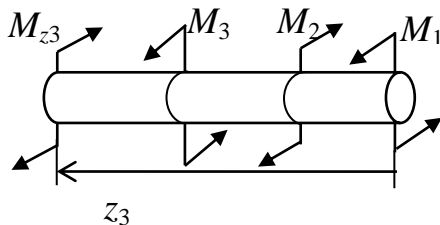
Проводим сечение в пределах второго грузового участка – на расстоянии  $z_2$  от правого конца вала, рассматриваем правую отсеченную часть.



II участок:  $c \leq z_2 < c+b$

$$M_{z2} = M_1 - M_2 = 24 - 40 = \\ = -16 \text{ кНм}$$

Проводим сечение в пределах третьего грузового участка – на расстоянии  $z_3$  от правого конца вала, рассматриваем правую отсеченную часть.



III участок:  $c+b \leq z_3 < c+b+a$

$$M_{z3} = M_1 - M_2 + M_3 = 24 - 40 + 28 = \\ = 12 \text{ кНм}$$

Функции крутящих моментов на каждом из участков представляют собой постоянную величину. Эпюра моментов изображена на рис. 3.2.

3. Проверка: в сечениях, где приложены внешние сосредоточенные моменты, на эпюре крутящего момента должны быть скачки на величину этих моментов.

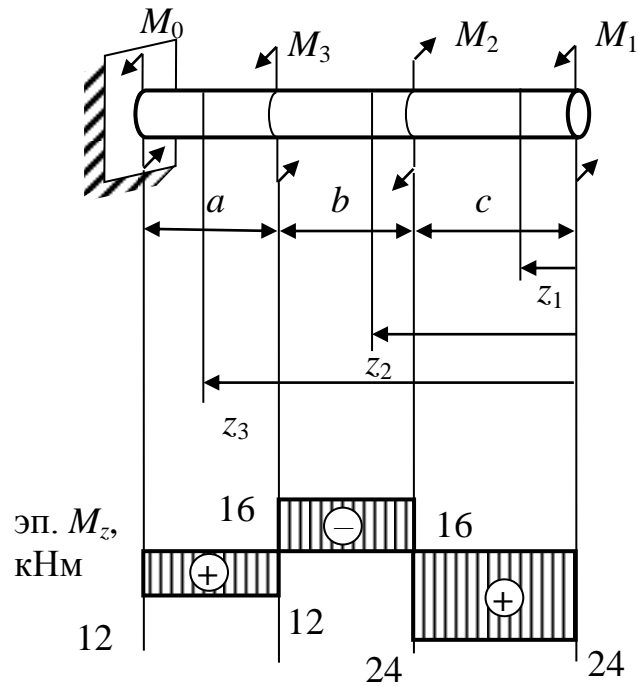


Рис. 3.2

**Пример 3.2.** Вал нагружен моментами  $M_1 = 16$  кНм,  $M_2 = 18$  кНм,  $M_3 = 30$  кНм (рис. 3.3). Требуется построить эпюру крутящих моментов. Опорные подшипники не препятствуют повороту вала относительно оси, трением в них пренебрегаем.

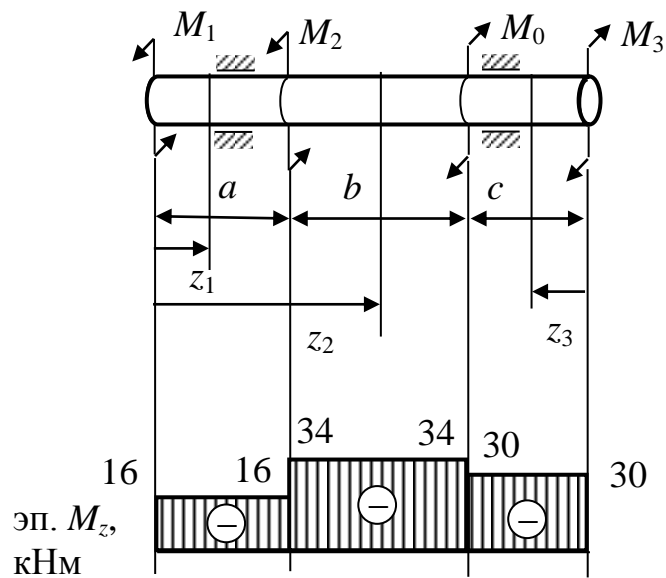


Рис. 3.3

**Решение.**

1. Определим неизвестный момент  $M_0$ .

Запишем уравнение равновесия: сумма моментов относительно оси вала должна равняться нулю.

$$\sum M_z = 0:$$

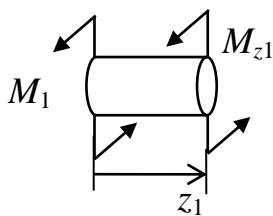
$$M_1 + M_2 - M_0 - M_3 = 0;$$

$$M_0 = M_1 + M_2 - M_3 = 16 + 18 - 30 = 4 \text{ кНм.}$$

2. Построим эпюру крутящих моментов.

Вал имеет три грузовых участка. Методом сечений определим крутящие моменты на каждом из участков.

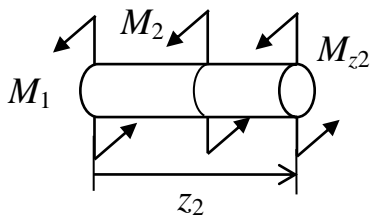
Проводим сечение на расстоянии  $z_1$  от левого конца вала. Рассматриваем левую отсеченную часть. Показывая в проведенном сечении внутреннее усилие, положительное согласно правилу знаков (рис. 3.1), составляем уравнение равновесия.



I участок:  $0 \leq z_1 < a$

$$M_{z1} = -M_1 = -16 \text{ кНм}$$

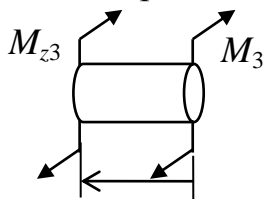
Проводим сечение на втором грузовом участке расстоянии  $z_2$  от левого конца вала. Рассматриваем левую отсеченную часть.



II участок:  $a \leq z_2 < a+b$

$$M_{z2} = -M_1 - M_2 = -16 - 18 = -34 \text{ кНм}$$

Проводим сечение на третьем грузовом участке на расстоянии  $z_3$  от правого конца вала. Рассматриваем правую отсеченную часть. Записываем уравнение равновесия и выражаем крутящий момент  $M_z$ .



III участок:  $0 \leq z_3 < c$

$$M_{z3} = -M_3 = -30 \text{ кНм}$$

Функции крутящих моментов на каждом из участков представляют собой постоянную величину. Эпюра моментов изображена на рис. 3.3.

3. Проверка: в сечениях, где приложены внешние сосредоточенные моменты, на эпюре крутящего момента должны быть скачки на величину этих моментов.

### 3.2. Подбор сечения и определение деформации вала

**Пример 3.3.** Для стального вала, нагруженного скручивающими моментами (рис. 3.4), выполнить

1. Из условия равновесия найти  $M_0$ ;
2. Построить эпюру крутящего момента;
3. Подобрать диаметр сплошного вала кругового сечения по условиям прочности и жесткости;
4. Подобрать диаметр полого вала по условиям прочности и жесткости, приняв отношение внутреннего диаметра к внешнему равным 0,8;
5. Вычислить в процентах величину экономии материала для полого вала;
6. Построить эпюру углов закручивания, приняв в качестве неподвижного левое крайнее сечение.

Материал стержня сталь,  $[\tau] = 80$  МПа,  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа,  $M_1 = 60$  кНм,  $M_2 = 15$  кНм,  $M_3 = 50$  кНм,  $[\theta] = 0,3$  град/м,  $a = 1,2$  м,  $b = 2,1$  м,  $c = 1,5$  м.

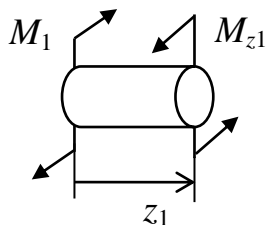
**Решение.**

1. Из уравнения равновесия находим  $M_0$ :

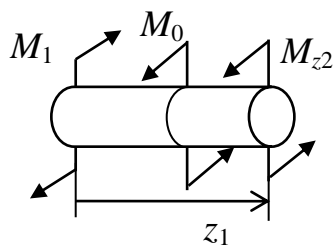
$$M_1 - M_2 + M_3 - M_0 = 0;$$

$$M_0 = M_1 - M_2 + M_3 = 60 - 15 + 50 = 95 \text{ кНм.}$$

2. Вал имеет три грузовых участка. Воспользовавшись методом сечений, находим крутящие моменты по участкам.



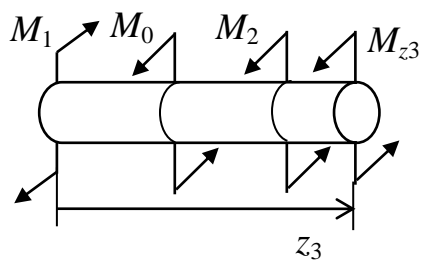
I участок  
 $0 \leq z_1 < a$   
 $M_{z1} = M_1 = 60 \text{ кНм}$



II участок

$$a \leq z_2 < a+b$$

$$M_{z_2} = M_1 - M_0 = 60 - 95 = -35 \text{ кНм}$$



III участок

$$a+b \leq z_3 < a+b+c$$

$$M_{z_3} = M_1 - M_0 - M_2 = 60 - 95 - 15 = -50 \text{ кНм}$$

Эпюра крутящего момента представлена на рис. 3.4.

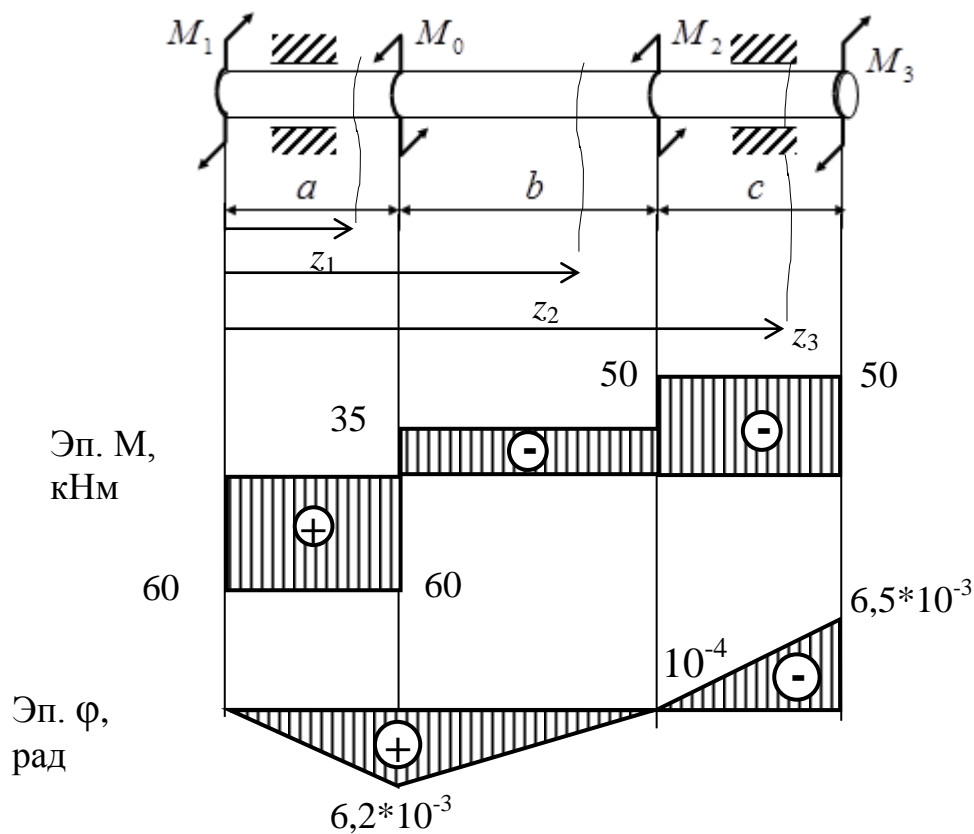


Рис. 3.4

3. Из условия прочности (3.4) и условия жесткости (3.8) подберем сечение вала в виде круга.

**Условие прочности:**  $|\tau|_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_p} \leq [\tau] \Rightarrow W_p \geq \frac{|M_z|_{\max}}{[\tau]}$

Полярный момент сопротивления для круга  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ .

Определяем диаметр круга из условия прочности:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16|M_z|_{\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 60 \text{ кНм}}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2}} = 0,156 \text{ м}$$

**Условие жесткости:**  $|\theta|_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{GI_p} \leq [\theta] = \frac{[\varphi]\pi}{180^\circ}$

Полярный момент инерции для круга  $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ .

Определяем диаметр круга из условия жесткости:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32|M_z|_{\max} \cdot 180^\circ}{\pi^2[\varphi]G}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 60 \text{ кНм} \cdot 180^\circ}{3,14^2 \cdot 0,3^\circ/\text{м} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2}} = 0,196 \text{ м}$$

Выбираем наибольший диаметр вала  $d = 19,6$  см.

4. Подберем диаметр полого вала по условиям прочности и жесткости, приняв отношение внутреннего диаметра к внешнему диаметру  $\alpha = d/D = 0,8$ .

Полярный момент сопротивления и полярный момент инерции для кольца  $W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4)$ ,  $I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4)$ .

Определяем диаметр кольца из условия прочности:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16|M_z|_{\max}}{\pi[\tau](1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 60 \text{ кНм}}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 (1 - 0,8^4)}} = 0,186 \text{ м}.$$

Определяем диаметр кольца из условия жесткости:

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32|M_z|_{\max} \cdot 180^\circ}{\pi^2[\varphi]G(1 - \alpha^4)}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 60 \text{ кНм} \cdot 180^\circ}{3,14^2 \cdot 0,3^\circ/\text{м} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2 (1 - 0,8^4)}} = 0,224 \text{ м}.$$

Выбираем наибольший диаметр вала  $D = 22,4$  см.

5. Вычислим в процентах величину экономии материала для полого вала:

$$\begin{aligned} \frac{A_{\text{кр}} - A_{\text{кол}}}{A_{\text{кр}}} \cdot 100\% &= \frac{d^2 - D^2(1 - \alpha^2)}{d^2} \cdot 100\% = \\ &= \frac{19,6^2 - 22,4^2(1 - 0,8^2)}{19,6^2} \cdot 100\% = 53\% \end{aligned}$$

6. Построим эпюру углов закручивания вала, используя формулу  $\varphi = \int_0^z \frac{M_{z_i} dz}{GI_p}$ , где  $M_{z_i}$  – крутящий момент на соответствующем участке эпюры. Поскольку сечение в виде кольца более рационально, то построим эпюру углов закручивания для полого вала, приняв в качестве неподвижного левое крайнее сечение.

$$\text{Момент инерции кольца } I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) = 14585,4 \text{ см}^4.$$

Тогда жесткость вала на кручение

$$GI_p = 14585,4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \text{ кН / м}^2 = 11668,32 \text{ кНм}^2$$

Поскольку в пределах грузового участка крутящий момент и жесткость вала постоянны, для подсчета углов закручивания в пределах грузового участка можно использовать формулу (3.7).

I участок:  $0 \leq z_1 < a$

$$\varphi_1(z_1) = \frac{M_{z_1} z_1}{GI_p} = \frac{60 z_1}{11668,32};$$

Угол закручивания представляет собой линейную функцию от  $z_1$ . График линейной функции – прямая наклонная линия. Чтобы построить эпюру  $\varphi_1$ , необходимо найти значения функции в двух точках – в начале и в конце грузового участка.

$$\varphi_1(0) = 0; \quad \varphi_1(a) = 0,0062 \text{ рад.}$$

II участок:  $a \leq z_2 < a+b$

$$\varphi_2(z_2) = \frac{M_{z_1} a}{GI_p} + \frac{M_{z_2} (z_2 - a)}{GI_p} = 0,0062 + \frac{(-35)(z_2 - a)}{GI_p};$$

$$\varphi_2(a) = 0,0062 \text{ рад}; \quad \varphi_2(a+b) = 0,0062 - 0,0063 = -10^{-4} \text{ рад.}$$

III участок:  $a+b \leq z_3 < a+b+c$

$$\varphi_3(z_3) = \frac{M_{z1}a}{GI_p} + \frac{M_{z2}b}{GI_p} + \frac{M_{z3}(z_3 - a - b)}{GI_p};$$

$$\varphi_3(a+b) = -10^{-4} \text{ рад}; \quad \varphi_3(a+b+c) = -10^{-4} - 0,0064 = -0,0065 \text{ рад}.$$

Эпюра углов закручивания представлена на рис. 3.4.

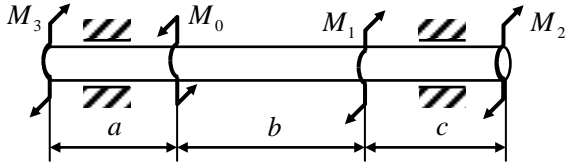
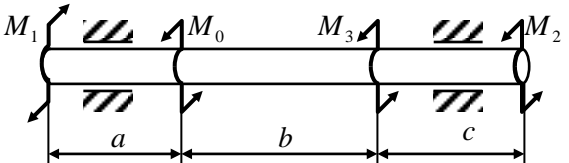
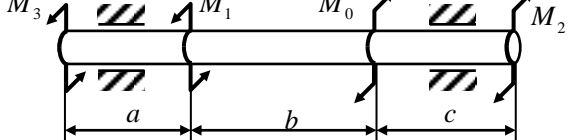
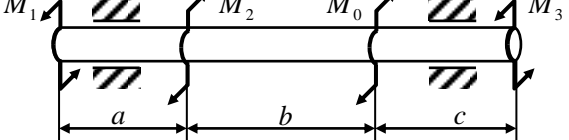
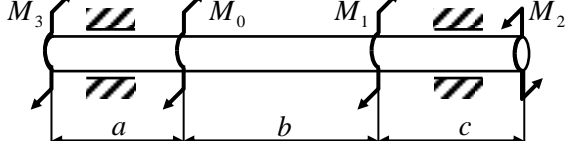
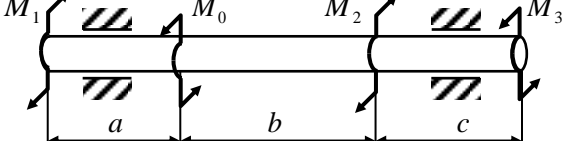
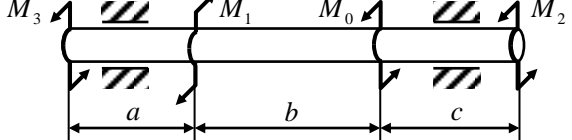
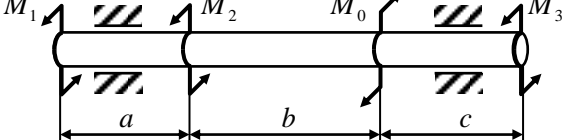
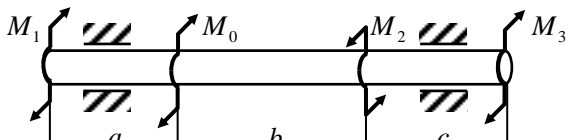
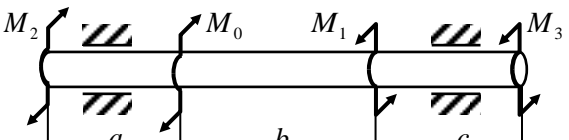
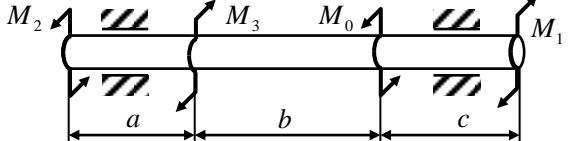
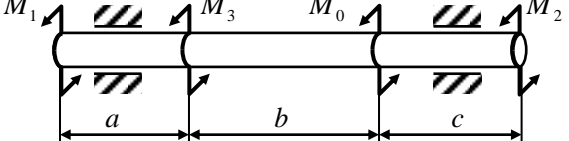
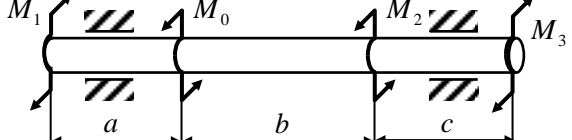
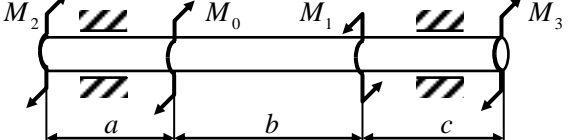
### 3.3. Задания для контрольных работ

#### Задача 3. Кручение валов кругового сечения

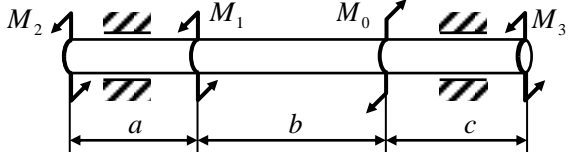
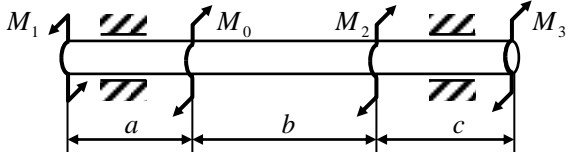
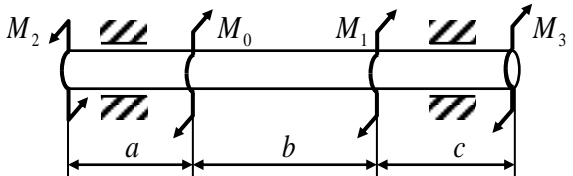
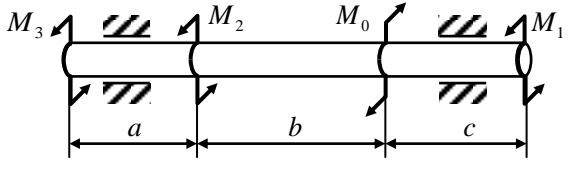
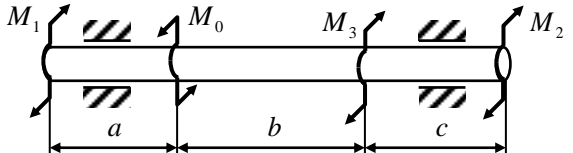
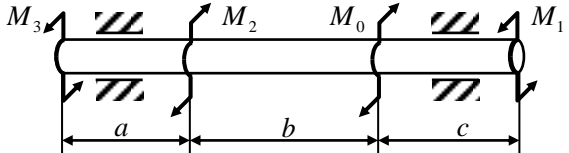
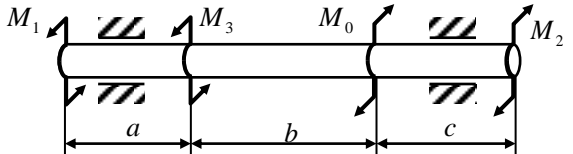
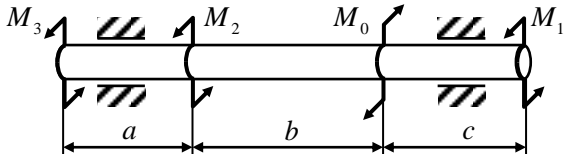
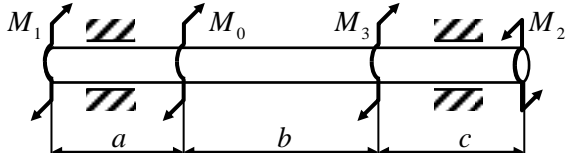
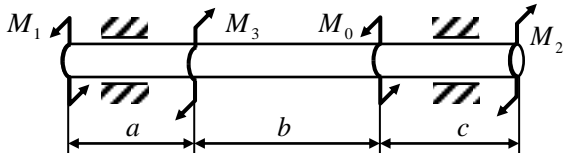
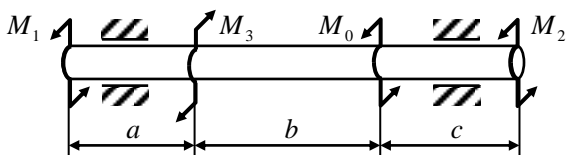
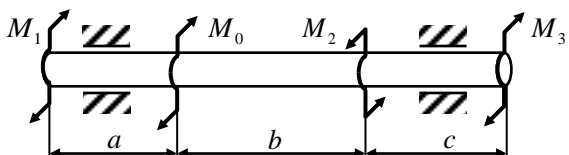
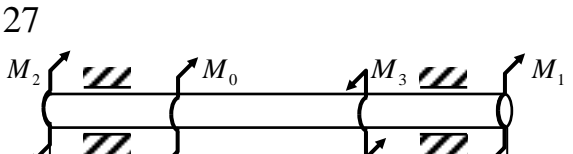
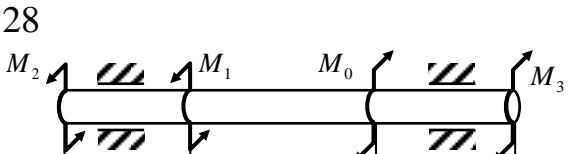
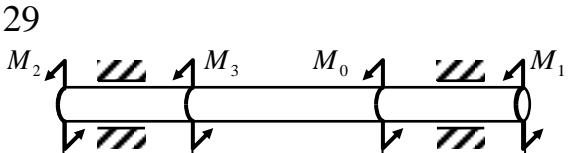
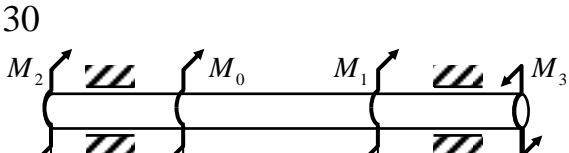
Последовательность решения задачи:

1. Из условия равновесия найти  $M_0$ .
  2. Построить эпюру крутящего момента.
  3. Подобрать диаметр сплошного вала кругового сечения по условиям прочности и жесткости.
  4. Подобрать диаметр полого вала по условиям прочности и жесткости, приняв отношение внутреннего диаметра к внешнему диаметру равным 0,8.
  5. Вычислить в процентах величину экономии материала для полого вала.
  6. Построить эпюру углов закручивания для полого вала, приняв в качестве неподвижного крайнее левое сечение.
- Материал стержня – сталь,  $[\tau] = 80 \text{ МПа}$ ,  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .  
Исходные данные принять по табл. 3.1 и 3.2.

Таблица 3.1

<p>1</p> 	<p>2</p> 
<p>3</p> 	<p>4</p> 
<p>5</p> 	<p>6</p> 
<p>7</p> 	<p>8</p> 
<p>9</p> 	<p>10</p> 
<p>11</p> 	<p>12</p> 
<p>13</p> 	<p>14</p> 

Продолжение табл. 3.1

<p>15</p> 	<p>16</p> 
<p>17</p> 	<p>18</p> 
<p>19</p> 	<p>20</p> 
<p>21</p> 	<p>22</p> 
<p>23</p> 	<p>24</p> 
<p>25</p> 	<p>26</p> 
<p>27</p> 	<p>28</p> 
<p>29</p> 	<p>30</p> 

Продолжение табл. 3.1

<p>31</p>	<p>32</p>
<p>33</p>	<p>34</p>
<p>35</p>	<p>36</p>
<p>37</p>	<p>38</p>
<p>39</p>	<p>40</p>
<p>41</p>	<p>42</p>
<p>43</p>	<p>44</p>
<p>45</p>	<p>46</p>

Продолжение табл. 3.1

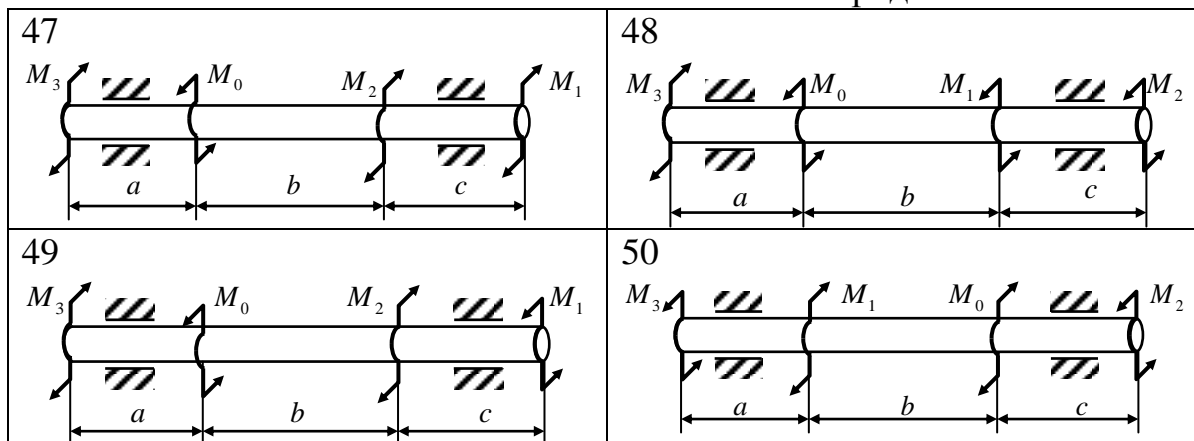


Таблица 3.2

	$a$	$b$	$c$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$[\theta]$
	м			кН·м			град/м
<b>1</b>	2	1,2	3	40	30	20	0,2
<b>2</b>	2	1,3	1,5	30	25	30	0,3
<b>3</b>	1,5	1,4	2	25	50	40	0,4
<b>4</b>	1,6	1,5	2,5	20	40	34	0,5
<b>5</b>	1,8	2	0,8	50	65	70	0,6
<b>6</b>	2	1,8	1	60	70	50	0,45
<b>7</b>	2,2	1,6	1,2	70	35	60	0,3
<b>8</b>	2,4	2,5	1,5	80	40	20	0,35
<b>9</b>	2,6	2,2	3	65	44	40	0,25
<b>0</b>	2,5	3	2	55	45	50	0,4
	$\partial$	$e$	$e$	$a$	$z$	$e$	$e$

## 4. Плоский поперечный изгиб

В общем случае плоского изгиба в поперечных сечениях стержня возникают два внутренних усилия: поперечная сила и изгибающий момент. В случае, когда изгибающий момент единственное внутреннее усилие, изгиб называется чистым. Если наряду с изгибающим моментом возникает поперечная сила, то изгиб называется поперечным. Стержень, работающий на изгиб, называют балкой.

Условия реализации плоского поперечного изгиба: все внешние силы лежат в одной плоскости, включающей в себя ось стержня; все внешние силы перпендикулярны оси стержня; плоскость действия сил включает в себя главную ось инерции поперечного сечения [4-6].

### 4.1. Построение эпюр внутренних усилий

Для определения знаков поперечной силы и изгибающего момента рекомендованы следующие правила.

Поперечная сила считается положительной, если она вращает отсеченную часть балки по ходу часовой стрелки; изгибающий момент положителен, если он растягивает нижние волокна балки. На рис. 4.1 показаны положительные направления поперечной силы и изгибающего момента согласно принятому правилу знаков.

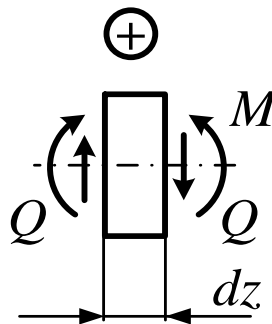


Рис. 4.1

Изгибающий момент  $M_x$ , поперечная сила  $Q_y$  и интенсивность распределенной нагрузки  $q$  в выбранном сечении связаны между собой дифференциальными зависимостями:

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q_y; \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y.$$

Они позволяют установить качественный характер изменения внутренних усилий на участках балки. Так, если на некотором участке

балки  $q=0$ , то поперечная сила  $Q_y$  постоянна, а изгибающий момент  $M_x$  изменяется по линейному закону. Если некоторый участок балки нагружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$ , то поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент по закону квадратной параболы.

На основании дифференциальной зависимости  $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$  можно определить положение сечения, в котором изгибающий момент достигает экстремального (максимального или минимального) значения. Для этого выражение для поперечной силы приравняют к нулю и из получившегося уравнения определяют абсциссу  $z$  этого сечения.

В сечениях, где приложены внешние сосредоточенные силы, на эпюре  $Q_y$  будет скачок на величину этой силы; там, где приложен внешний сосредоточенный момент – скачок на эпюре  $M_x$  на величину этого момента.

**Пример 4.1.** Построить эпюры внутренних усилий для балки, изображенной на рис. 4.2.

Дано:  $a = 2$  м,  $b = 3$  м,  $F = 15$  кН,  $M = 20$  кНм,  $q = 10$  кН/м.

**Решение.**

Определяем опорные реакции. Реакции в жесткой заделке (опоре  $B$ ):  $M_B$  – опорный момент,  $H_B$  и  $R_B$  – реакции, направленные вдоль и перпендикулярно оси балки соответственно. Распределенная по длине  $a$  нагрузка интенсивности  $q$ , заменяется эквивалентной сосредоточенной силой  $qa$  (показана на рис. 4.2 пунктиром), приложенной посередине участка длины  $a$ .

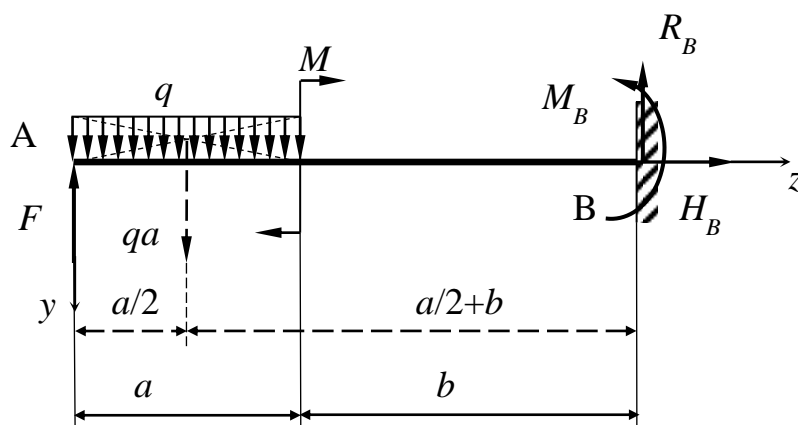


Рис. 4.2

Составляем уравнения равновесия.

Сумма моментов относительно опоры  $B$ :

$$\sum_i M_i^B = 0; \quad M_B - F \cdot (a + b) + qa \cdot (a/2 + b) - M = 0,$$

откуда

$$M_B = F \cdot (a + b) - qa \cdot (a/2 + b) + M = 15 \cdot 5 - 10 \cdot 2 \cdot 4 + 20 = 15 \text{ кНм}.$$

Сумма проекций сил на вертикальную ось  $y$  (перпендикулярно оси балки):

$$\sum_i Y_i = 0; \quad -F + qa - R_B = 0, \quad \Rightarrow R_B = -F + qa = -15 + 10 \cdot 2 = 5 \text{ кН}.$$

Сумма проекций сил на ось балки  $z$ :

$$\sum_i Z_i = 0; \quad H_B = 0 - \text{этот результат очевиден, поскольку в условиях плоского}$$

изгиба все внешние силы ортогональны оси стержня. В дальнейшем при решении задач плоского изгиба реакции в жесткой заделке и шарнирно-неподвижной опоре, направленные вдоль оси стержня  $z$ , показывать не будем.

Проверку правильности найденных значений опорных реакций производим по уравнению суммы моментов относительно опоры  $A$ :

$$\sum_i M_i^A = 0; \quad M_B + R_B \cdot (a + b) - M - qa \cdot \frac{a}{2} = 15 + 5 \cdot 5 - 20 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 0.$$

Отсюда делаем вывод, что реакции вычислены правильно.

Далее, используя метод сечений, находим внутренние силовые факторы и строим эпюры поперечных сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$  (рис. 4.3).

На балке можно выделить два грузовых участка. Проводим сечение  $I$  в пределах первого грузового участка – на расстоянии  $z_1$  ( $0 \leq z_1 < a = 2$  м) от левого конца балки, рассматриваем левую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутренние усилия, положительные согласно правилу знаков, показываем равнодействующую и точку ее приложения от распределенной нагрузки, действующей на отсеченную часть; составляем уравнения равновесия.

Сумма проекций на вертикальную ось  $y$ , направленную вниз:

$$\sum_i Y_i = 0; \quad -F + qz_1 + Q_y = 0, \quad \Rightarrow Q_y = F - qz_1$$

Поперечная сила изменяется по длине балки по линейному закону. Для построения линейной функции вычисляем ее значение в начале и конце рассматриваемого грузового участка:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad Q_y = F = 15 \text{ кН};$$

$$\text{при } z_1 = a = 2 \text{ м} \quad Q_y = 15 - 10 \cdot 2 = -5 \text{ кН}.$$

Поперечная сила в начале и конце рассматриваемого участка имеет разные знаки. Поэтому в некотором сечении она обращается в нуль.

Приравнявая выражение для поперечной силы к нулю, получаем уравнение, из которого определяем координату искомого сечения:

$$Q_y = F - qz_1^* = 0 \Rightarrow z_1^* = \frac{F}{q} = \frac{15}{10} = 1,5 \text{ м.}$$

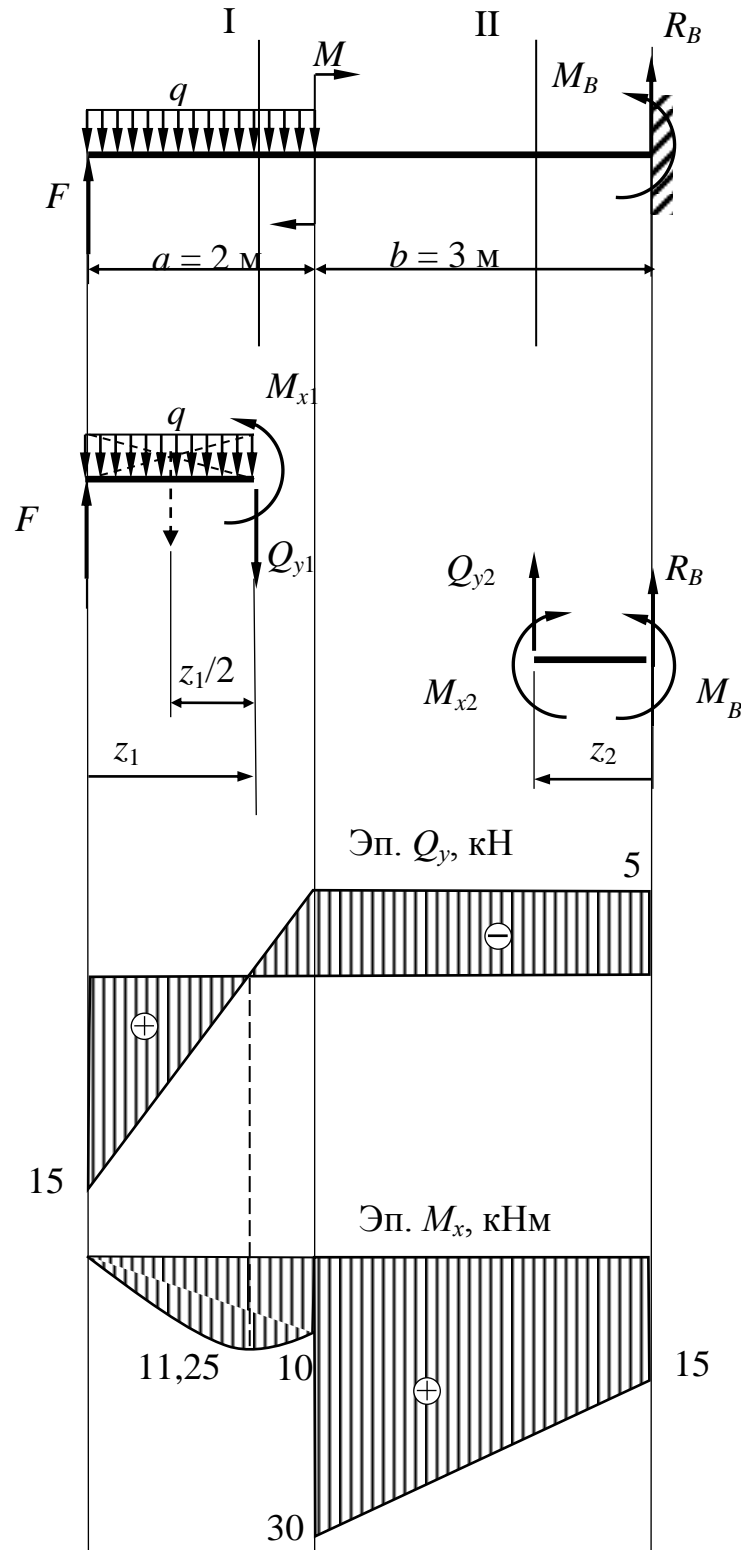


Рис. 4.3

Сумма моментов относительно проведенного сечения I:

$$\sum_i M_x^i = 0; M_x + qz_1 \cdot \frac{z_1}{2} - F \cdot z_1 = 0 \Rightarrow M_x = F \cdot z_1 - qz_1 \cdot \frac{z_1}{2}.$$

Изгибающий момент по длине балки изменяется по закону квадратной параболы, для построения которой необходимо знать значение минимум в трех точках. Две точки – начало и конец участка, третья – или там, где поперечная сила обращается в нуль (при этом изгибающий момент достигает экстремального значения), или середина участка. В рассматриваемом примере  $Q_y$  обращается в нуль при  $z_1^* = 1,5 м$ , ее и берем в качестве третьей. Тогда:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_x = 0;$$

$$\text{при } z_1 = a = 2 м \quad M_x = 15 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 10 \text{ кНм};$$

$$\text{при } z_1^* = 1,5 м \quad M_x = 15 \cdot 1,5 - 10 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 11,25 \text{ кНм}.$$

Проводим сечение II в пределах второго грузового участка – на расстоянии  $z_2$  ( $0 \leq z_2 < b = 3 м$ ) от правого конца балки, рассматриваем правую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутренние усилия, положительные согласно правилу знаков, показываем опорные реакции как внешние силы, действующие на отсеченную часть; составляем уравнения равновесия.

Сумма проекций на вертикальную ось  $Oy$ :

$$\sum_i Y_i = 0; \quad -R_B - Q_y = 0, \quad \Rightarrow Q_y = -R_B = -5 \text{ кН}$$

Поперечная сила в пределах второго грузового участка постоянна. График постоянной – прямая, параллельная оси абсцисс.

Сумма моментов относительно проведенного сечения II:

$$\sum_i M_x^i = 0; \quad -M_x + R_B \cdot z_2 + M_B = 0 \Rightarrow M_x = R_B \cdot z_2 + M_B$$

Изгибающий момент изменяется по длине балки по линейному закону. Для построения линейной функции вычисляем ее значение в начале и в конце рассматриваемого грузового участка:

$$\text{при } z_2 = 0 \quad M_x = M_B = 15 \text{ кНм};$$

$$\text{при } z_2 = b = 3 м \quad M_x = M_B + R_B \cdot b = 15 + 3 \cdot 5 = 30 \text{ кНм}.$$

По полученным выражениям для  $M_x$  и  $Q_y$  в масштабе строятся эпюры внутренних усилий (рис. 4.3).

**Пример 4.2.** Построить эпюры внутренних усилий для балки, изображенной на рис. 4.4.

Дано:  $a = 1 м$ ,  $b = 4 м$ ,  $M = 30 \text{ кНм}$ ,  $q = 15 \text{ кН/м}$ .

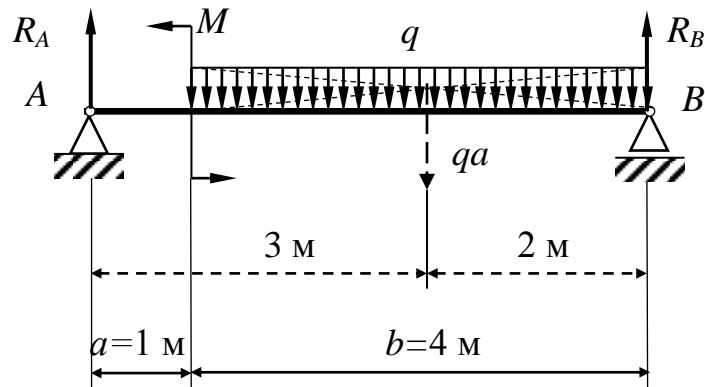


Рис. 4.4

**Решение.**

Показываем опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$ , равнодействующую распределенной нагрузки  $qb$  и место ее приложения (рис. 4.4).

Составляем уравнения равновесия.

Сумма моментов относительно опоры A:

$$\sum_i M_i^A = 0; \quad M - qb \cdot (a + b / 2) + R_B \cdot (a + b) = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{qb \cdot (a + b / 2) - M}{a + b} = \frac{15 \cdot 4 \cdot 3 - 30}{5} = 30 \text{ кН}.$$

Сумма моментов относительно опоры B:

$$\sum_i M_i^B = 0; \quad M + qb \cdot b / 2 - R_A \cdot (a + b) = 0,$$

откуда

$$R_A = \frac{qb \cdot b / 2 + M}{a + b} = \frac{15 \cdot 4 \cdot 2 + 30}{5} = 30 \text{ кН}.$$

Проверку правильности найденных значений опорных реакций производим по уравнению суммы проекций сил на вертикальную ось  $y$ , направленную вниз

$$\sum_i Y_i = -R_A - R_B + qb = -30 - 30 + 15 \cdot 4 = 0.$$

Делаем вывод, что реакции вычислены правильно.

Используя метод сечений, находим поперечные силы и изгибающие моменты и строим их эпюры (рис. 4.5).

На балке можно выделить два грузовых участка. Проводим сечение I в пределах первого грузового участка – на расстоянии  $z_1$  ( $0 \leq z_1 < a = 1$  м) от левого конца балки, рассматриваем левую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутренние усилия, положительные согласно правилу знаков, составляем уравнения равновесия.

Сумма проекций на вертикальную ось  $y$ :

$$\sum_i Y_i = 0; \quad -R_A + Q_y = 0, \quad \Rightarrow Q_y = R_A = 30 \text{ кН}.$$

Поперечная сила по длине участка балки постоянна.

Сумма моментов относительно проведенного сечения I:

$$\sum_i M_x^i = 0; \quad M_x - R_A \cdot z_1 = 0, \quad \Rightarrow M_x = R_A \cdot z_1.$$

Изгибающий момент изменяется по длине балки по линейному закону. Для построения линейной функции вычисляем ее значение в начале и в конце рассматриваемого грузового участка:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_x = 0;$$

$$\text{при } z_1 = a = 1 \text{ м} \quad M_x = R_A \cdot a = 30 \cdot 1 = 30 \text{ кНм}.$$

Проводим сечение II в пределах второго грузового участка – на расстоянии  $z_2$  ( $0 \leq z_2 < b = 4$  м) от правого конца балки, рассматриваем правую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутренние усилия, положительные согласно правилу знаков. От распределенной нагрузки, действующей на отсеченную часть, показываем равнодействующую  $qz_2$  и точку ее приложения. Составляем уравнения равновесия.

Сумма проекций на вертикальную ось  $y$ :

$$\sum_i Y_i = 0; \quad -R_B - Q_y + qz_2 = 0, \quad \Rightarrow Q_y = qz_2 - R_B$$

Поперечная сила изменяется по длине балки по линейному закону. Для построения линейной функции вычисляем ее значение в начале и в конце рассматриваемого грузового участка:

$$\text{при } z_2 = 0 \quad Q_y = -R_B = -30 \text{ кН};$$

$$\text{при } z_2 = b = 4 \text{ м} \quad Q_y = 30 - 15 \cdot 4 = -30 \text{ кН}.$$

Поперечная сила в начале и в конце рассматриваемого участка имеет разные знаки. Поэтому в некотором сечении она обращается в нуль. Приравняв выражение для поперечной силы к нулю, получаем уравнение, из которого определяем координату искомого сечения:

$$Q_y = qz_2^* - R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad z_2^* = \frac{R_B}{q} = \frac{30}{15} = 2 \text{ м}$$

Сумма моментов относительно проведенного сечения II:

$$\sum_i M_x^i = 0; \quad R_B \cdot z_2 - M_x - qz_2 \cdot \frac{z_2}{2} = 0 \Rightarrow M_x = R_B \cdot z_2 - qz_2 \cdot \frac{z_2}{2}$$

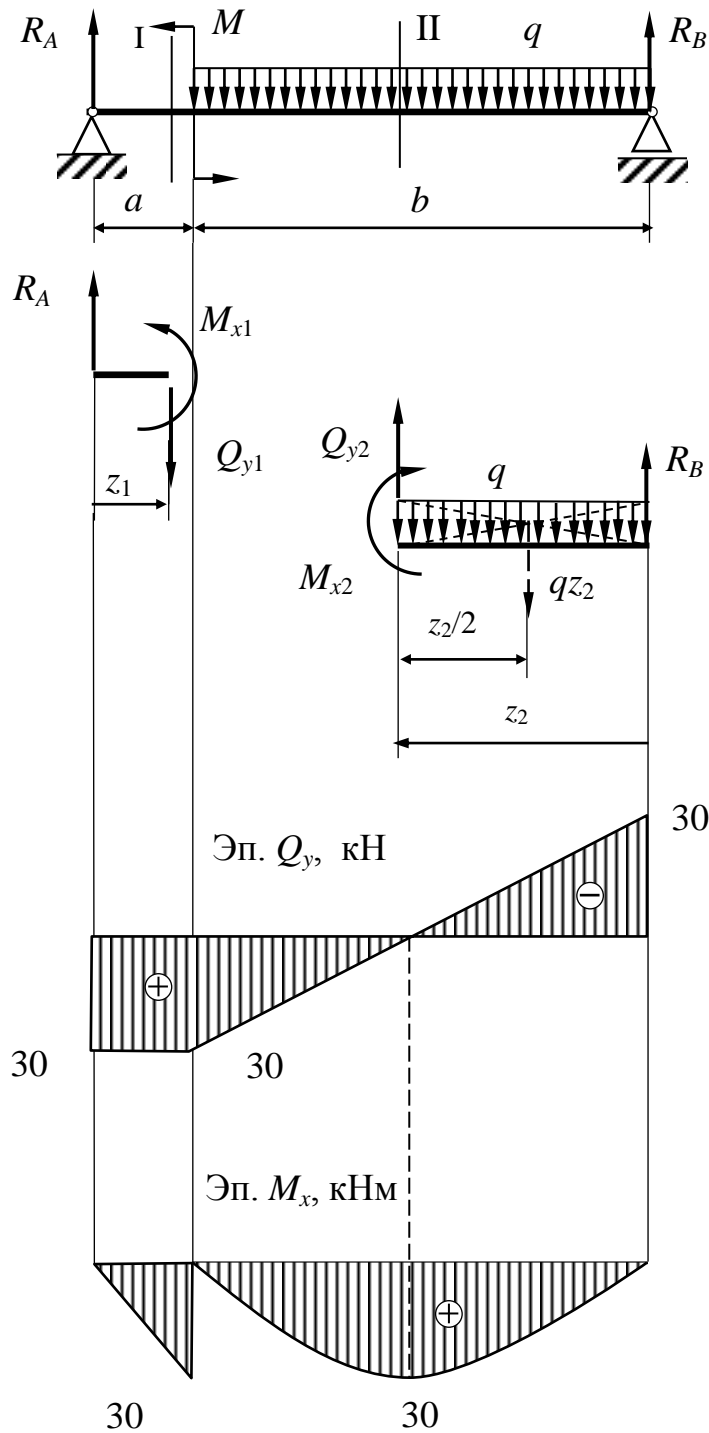


Рис. 4.5

Изгибающий момент по длине балки изменяется по закону квадратной параболы. Для построения эпюры  $M_x$  выбираем три точки – начало и конец рассматриваемого участка, и также точку, в которой поперечная сила обращается в нуль ( $z_2 = R_B / q = 2$  м), здесь изгибающий момент достигает экстремального значения:

$$\text{при } z_2 = 0 \quad M_x = 0;$$

$$\text{при } z_2^* = 2 \text{ м} \quad M_x = 30 \cdot 2 - 15 \cdot 2 \cdot 1 = 30 \text{ кНм};$$

$$\text{при } z_2^* = 4 \text{ м} \quad M_x = 30 \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0.$$

По полученным выражениям для  $Q_y$  и  $M_x$  в масштабе строятся эпюры внутренних усилий (рис. 4.5).

**Пример 4.3.** Построить эпюры внутренних усилий для балки, изображенной на рис. 4.6.

Дано:  $a = 4$  м,  $b = 1$  м,  $M = 20$  кНм,  $q = 20$  кН/м.

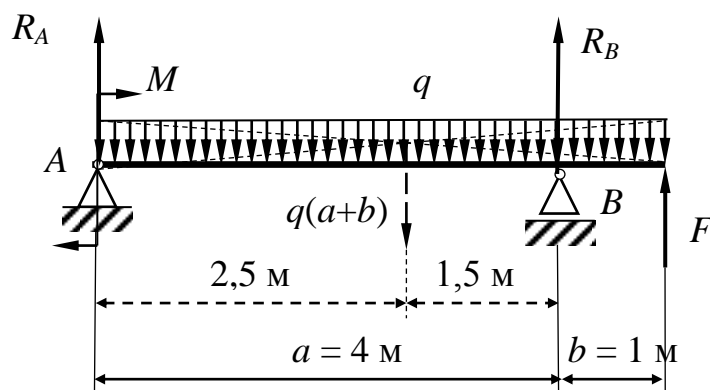


Рис. 4.6

**Решение.**

Показываем опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$ , равнодействующую распределенной нагрузки  $q(a+b)$  и место ее приложения (рис. 4.4).

Составляем уравнения равновесия.

Сумма моментов относительно опоры A:

$$\sum_i M_i^A = 0; \quad -M - q(a+b) \cdot (a+b) / 2 + R_B \cdot a + F \cdot (a+b) = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{M + q(a+b)^2 / 2 - F \cdot (a+b)}{a} = \frac{20 + 20 \cdot 5^2 / 2 - 10 \cdot 5}{4} = 55 \text{ кН}.$$

Сумма моментов относительно опоры  $B$ :

$$\sum_i M_i^B = 0; \quad -M + q(a+b) \cdot (a-b) / 2 - R_A \cdot a + F \cdot b = 0,$$

откуда

$$R_A = \frac{q(a+b) \cdot (a-b) / 2 - M + F \cdot b}{a} = \frac{20 \cdot 5 \cdot 1,5 - 20 + 10 \cdot 1}{4} = 35 \text{ кН}.$$

Проверку правильности найденных значений опорных реакций производим по уравнению суммы проекций сил на вертикальную ось  $y$

$$\sum_i Y_i = -R_A - R_B + q(a+b) - F = -35 - 55 + 20 \cdot 5 - 10 = 0.$$

Реакции вычислены правильно.

Методом сечений строим эпюры внутренних усилий (рис. 4.7).

На балке можно выделить два грузовых участка. Проводим сечение I в пределах первого грузового участка – на расстоянии  $z_1$  ( $0 \leq z_1 < a = 4$  м) от левого конца балки, рассматриваем левую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутренние усилия, положительные согласно правилу знаков; составляем уравнения равновесия.

Сумма проекций на вертикальную ось  $Oy$ :

$$\sum_i Y_i = 0; \quad -R_A + qz_1 + Q_y = 0, \quad \Rightarrow Q_y = R_A - qz_1$$

Для построения линейной функции вычисляем ее значение в начале и конце рассматриваемого грузового участка:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad Q_y = R_A = 35 \text{ кН};$$

$$\text{при } z_1 = a = 4 \text{ м} \quad Q_y = 35 - 20 \cdot 4 = -45 \text{ кН}.$$

Определяем абсциссу сечения, в котором поперечная сила равна нулю:

$$Q_y = R_A - qz_1^* = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1^* = \frac{R_A}{q} = \frac{35}{20} = 1,75 \text{ м}.$$

Сумма моментов относительно проведенного сечения I:

$$\sum_i M_x^i = 0; \quad M_x + qz_1 \cdot \frac{z_1}{2} - R_A \cdot z_1 - M = 0 \Rightarrow M_x = M + R_A \cdot z_1 - q \cdot \frac{z_1^2}{2}.$$

Для построения параболы выбираем три точки: начало, конец рассматриваемого промежутка, сечение, в котором поперечная сила обращается в нуль. Тогда:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_x = M = 20 \text{ кНм};$$

$$\text{при } z_1 = a = 4 \text{ м} \quad M_x = 20 + 35 \cdot 4 - 20 \cdot 4^2 / 2 = 0;$$

$$\text{при } z_1^* = 1,75 \text{ м} \quad M_x = 20 + 35 \cdot 1,75 - 20 \cdot 1,75^2 / 2 = 50,625 \text{ кНм}.$$

Проводим сечение II в пределах второго грузового участка – на расстоянии  $z_2$  ( $0 \leq z_2 < b = 1$  м) от правого конца балки, рассматриваем

правую отсеченную часть. Показываем в проведенном сечении внутренние усилия, положительные согласно правилу знаков; составляем уравнения равновесия.

Сумма проекций сил на вертикальную ось  $y$ :

$$\sum_i Y_i = 0; \quad -F + qz_1 + Q_y = 0 \Rightarrow Q_y = qz_1 - F.$$

Для построения линейной функции вычисляем ее значение в начале и в конце рассматриваемого грузового участка:

при  $z_2 = 0$ ;  $Q_y = -F = -10$  кН;

при  $z_2 = b = 1$  м;  $Q_y = q \cdot 1 - F = 20 \cdot 1 - 10 = 10$  кН.

Определяем абсциссу сечения, в котором поперечная сила равна нулю:

$$Q_{y2} = qz_2^* - F = 0 \Rightarrow z_2^* = \frac{F}{q} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ м.}$$

Сумма моментов относительно проведенного сечения II:

$$\sum_i M_x^i = 0; \quad M_x + q \cdot \frac{z_2^2}{2} - F \cdot z_2 = 0 \Rightarrow M_x = F \cdot z_2 - q \cdot \frac{z_2^2}{2}.$$

Для построения параболы выбираем три точки: начало, конец рассматриваемого промежутка, сечение, в котором поперечная сила обращается в нуль. Тогда:

при  $z_2 = 0$   $M_x = 0$ ;

при  $z_2 = b = 1$  м  $M_x = 10 \cdot 1 - 20 \cdot 1^2 / 2 = 0$ ;

при  $z_1^* = 0,5$  м  $M_x = 10 \cdot 0,5 - 20 \cdot 0,5^2 / 2 = 2,5$  кНм.

По полученным значениям для  $Q_y$  и  $M_x$  в масштабе строятся эпюры внутренних усилий (рис. 4.7).

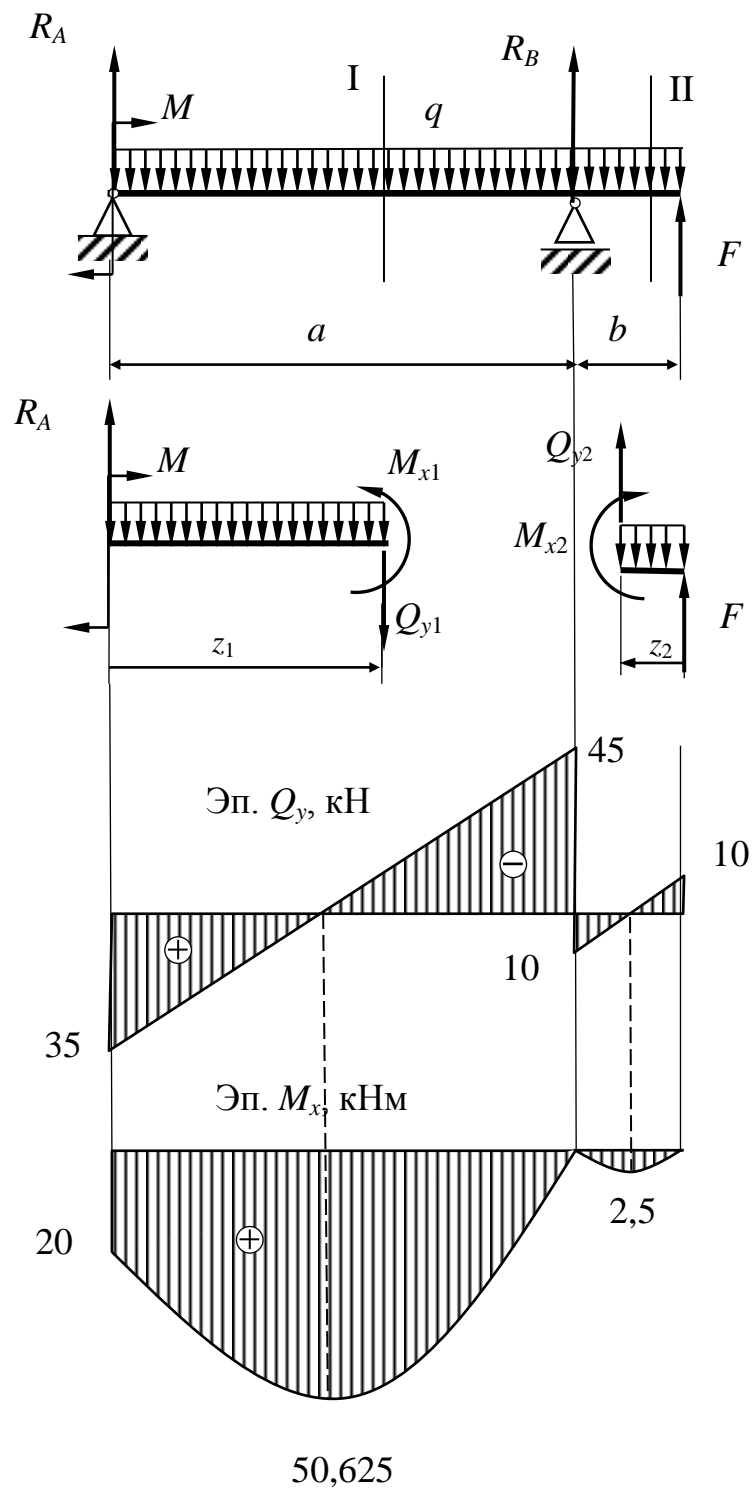


Рис. 4.7

## 4.2. Определение напряжений и подбор сечений

Нормальные напряжения в поперечном сечении балки при плоском изгибе определяются по формуле

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y,$$

где  $M_x$  – изгибающий момент в сечении балки;  $I_x$  – осевой момент инерции сечения балки.

Наибольшие по модулю нормальные напряжения при изгибе балки в сечении, где изгибающий момент равен  $M_x$ , вычисляют по формуле

$$\sigma_z = \frac{M_x}{W_x},$$

где  $W_x$  – осевой момент сопротивления сечения балки.

Прочность балки, работающей на изгиб, проверяется, как правило, по наибольшим нормальным напряжениям в опасном сечении, т. е. в том сечении балки, где изгибающие моменты имеют наибольшее значение  $M_x^{\max}$ . Условие прочности записывают в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x^{\max}|}{W_x} \leq [\sigma],$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

Касательные напряжения при изгибе балки вычисляют по формуле

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b(y)},$$

где  $Q_y$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении балки;  $b(y)$  – ширина поперечного сечения балки на том уровне, где определяются касательные напряжения;  $S_x^{\text{отс}}$  – статический момент относительно нейтральной оси части площади поперечного сечения, расположенной выше или ниже точки, в которой определяется касательное напряжение.

Условие прочности при изгибе балки по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_y|_{\max} \cdot S_x^{\max}}{I_x \cdot b(y)} \leq [\tau].$$

**Пример 4.4.** Подобрать поперечное сечение в форме двутавра для балки, рассмотренной в примере 4.3. Проверить прочность балки по касательным напряжениям.

**Решение.** Из условия прочности по нормальным напряжениям получаем формулу для подбора поперечного сечения балки:

$$W_x \geq \frac{|M_x|_{\max}}{[\sigma]}.$$

Значение максимального по модулю изгибающего момента находим по эпюре изгибающего момента (рис. 4.7):

$$|M_x|_{\max} = 50,625 \text{ кНм}$$

Допускаемое напряжение для материала двутавра (сталь)  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Получаем

$$W_x \geq \frac{50,625 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,316 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 316 \text{ см}^3.$$

По сортаменту "Сталь горячекатаная. Балки двутавровые" (табл. П.1) выбираем двутавр №27, для которого момент сопротивления  $W_x = 371 \text{ см}^3$ ; момент инерции  $I_x = 5010 \text{ см}^4$ ; толщина стенки двутавра  $d = 6,0 \text{ мм}$ , статический момент полусечения  $S_x = 210 \text{ см}^3$ .

Проверяем прочность по касательным напряжениям при заданном значении  $[\tau] = 80 \text{ МПа}$ . По эпюре поперечной силы (рис. 4.7) находим  $|Q_y|_{\max} = 45 \text{ кН}$ . Для двутавра №27  $b(y) = d = 6 \text{ мм}$ ,  $S_x^{\max} = S_x = 210 \text{ см}^3$ .

Тогда

$$\tau_{\max} = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 210 \cdot 10^{-6}}{5010 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 31,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 31,4 \text{ МПа} \leq [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

### 4.3. Задания для контрольных работ

#### Задача 4. Плоский поперечный изгиб стержня

Статически определимая балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , сосредоточенными силами  $F$  и моментами  $M$  (табл. 4.1).

Требуется:

1. Вычертить в масштабе схему балки и указать числовые значения размеров и нагрузок.

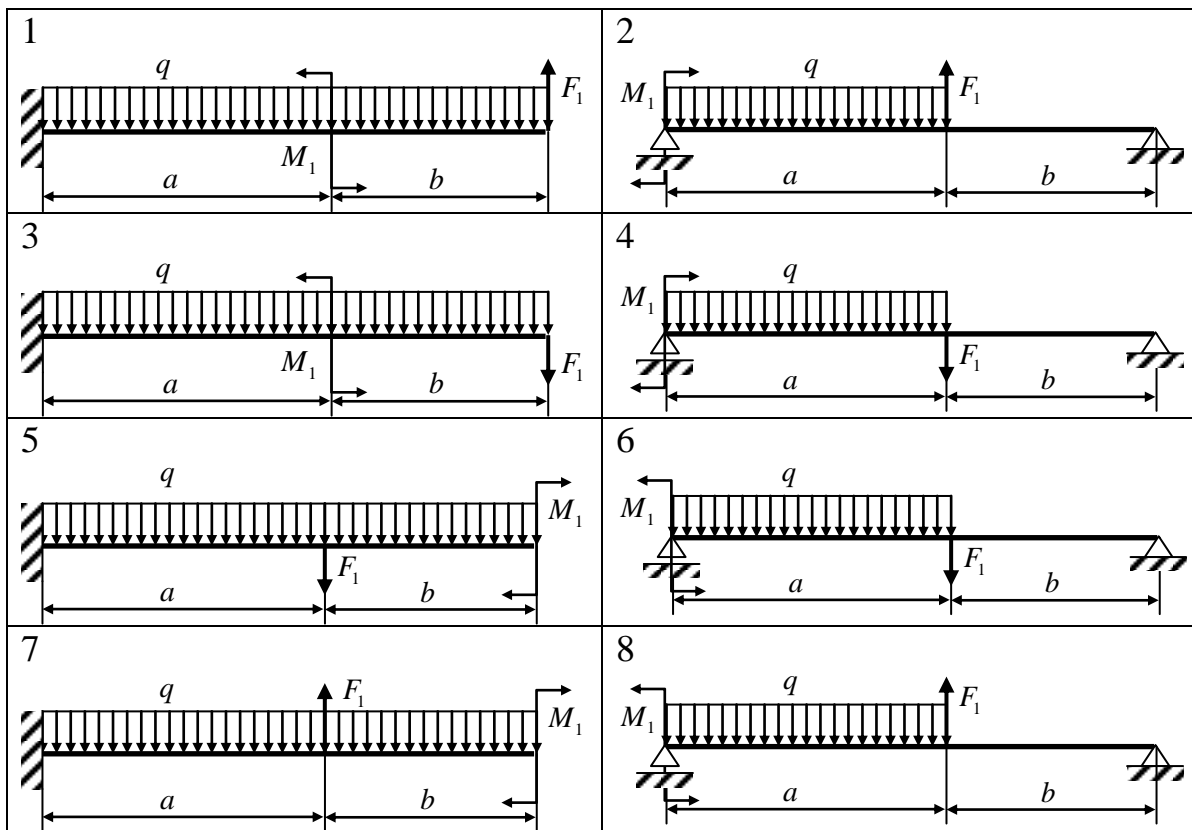
2. Построить эпюры поперечной силы  $Q_y$  и изгибающего момента  $M_x$  (эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  располагаются под схемой балки).

3. Подобрать поперечное сечение балки в виде двутавра, если  $[\sigma]=160$  МПа. При подборе двутавра использовать сортамент табл. П.1.

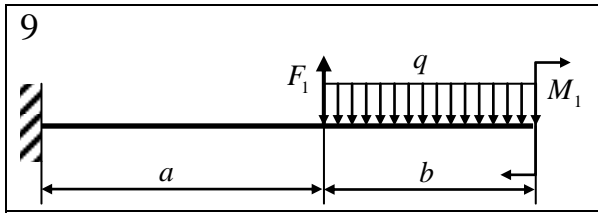
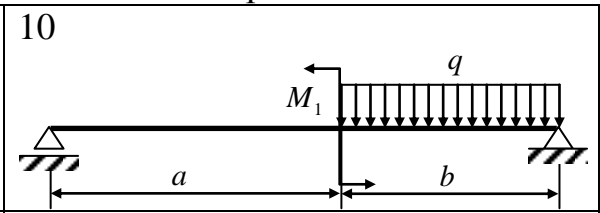
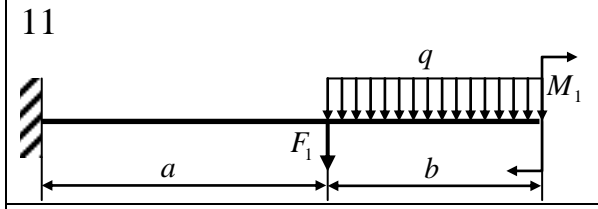
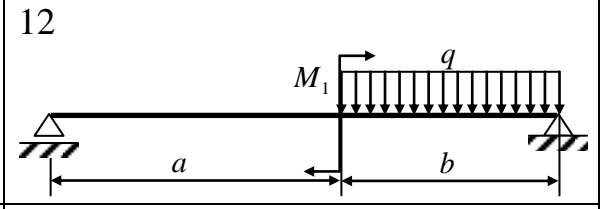
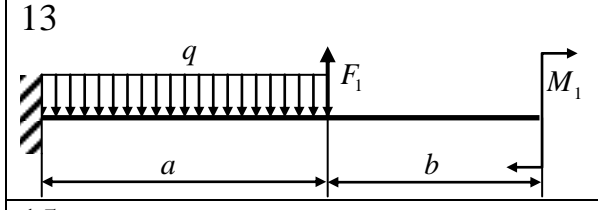
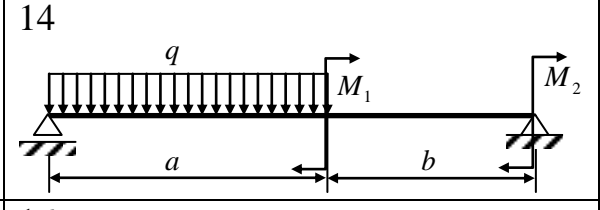
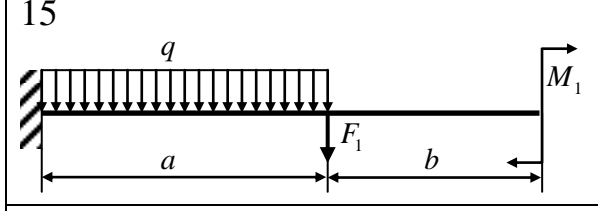
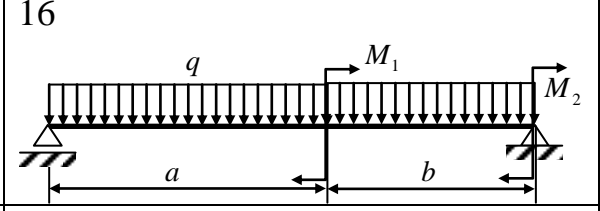
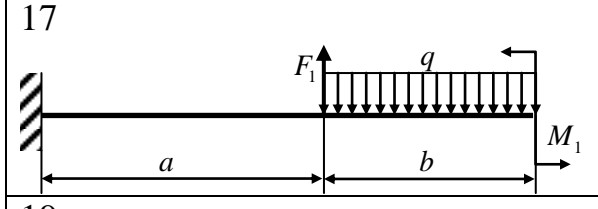
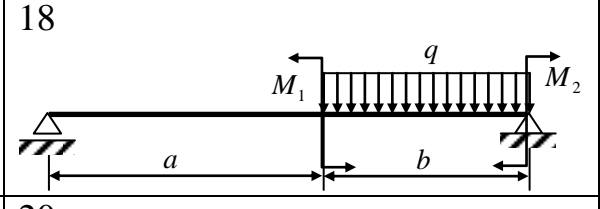
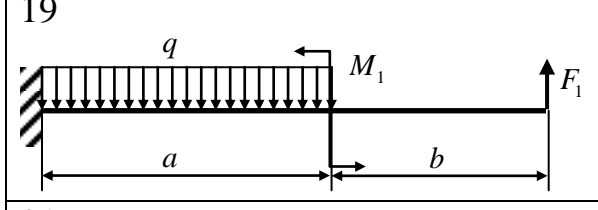
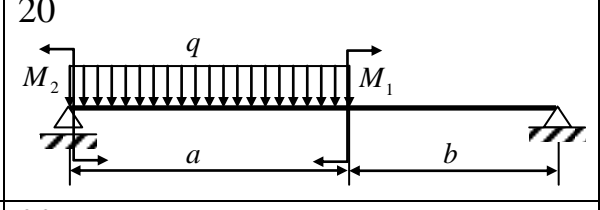
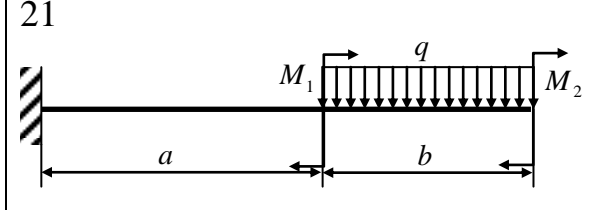
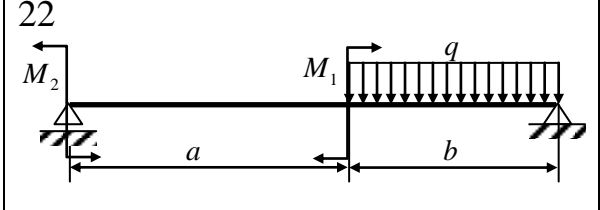
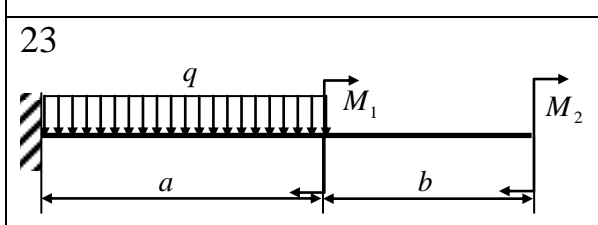
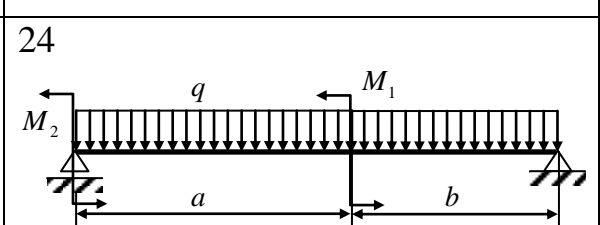
4. Проверить прочность балки в точках, расположенных на нейтральной оси, если  $[\tau]=80$  МПа.

Исходные данные приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.1



Продолжение табл. 4.1

<p>9</p> 	<p>10</p> 
<p>11</p> 	<p>12</p> 
<p>13</p> 	<p>14</p> 
<p>15</p> 	<p>16</p> 
<p>17</p> 	<p>18</p> 
<p>19</p> 	<p>20</p> 
<p>21</p> 	<p>22</p> 
<p>23</p> 	<p>24</p> 

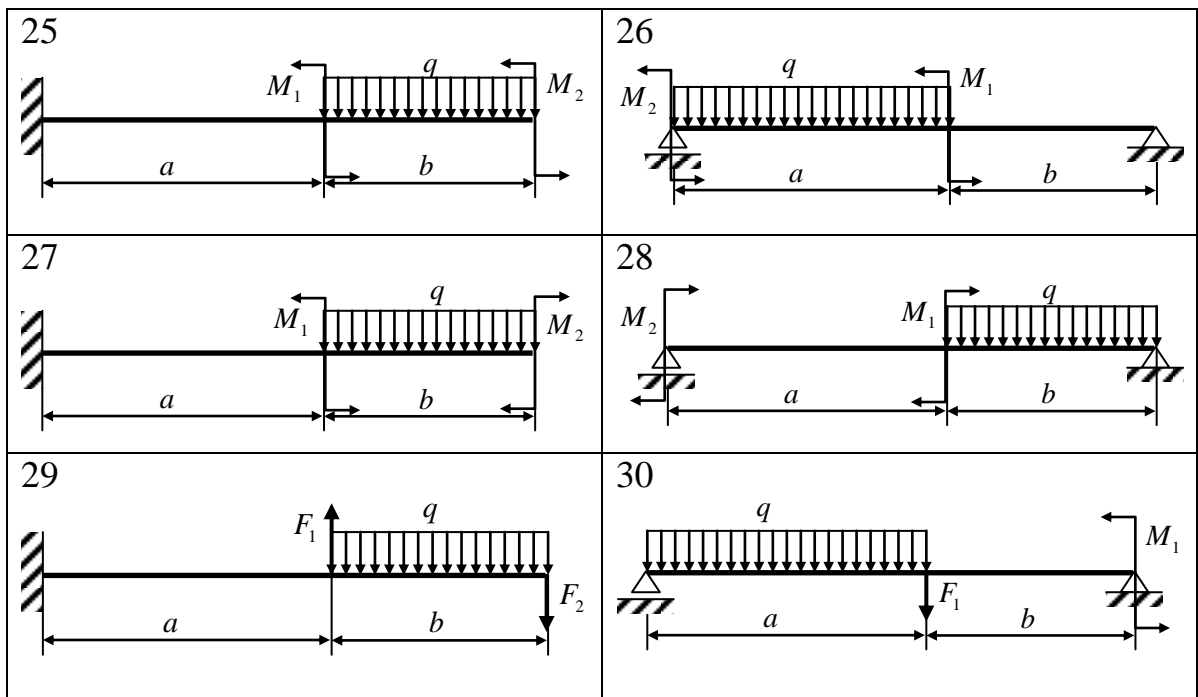


Таблица 4.2

	$a$	$b$	$F_1$	$F_2$	$M_1$	$M_2$	$q$
	м		кН		кН·м		кН/м
<b>1</b>	2	3	15	15	50	50	20
<b>2</b>	2	4	25	25	60	60	25
<b>3</b>	3	2	30	30	80	80	10
<b>4</b>	3	1	40	40	70	70	8
<b>5</b>	1	3	50	50	65	65	15
<b>6</b>	4	3	15	15	75	75	10
<b>7</b>	3	2	25	25	50	50	25
<b>8</b>	2	2	30	30	60	60	30
<b>9</b>	4	4	40	40	80	80	12
<b>0</b>	1	2	50	50	70	70	20
	$z$	$e$	$e$	$e$	$z$	$a$	$\delta$

## 5. Определение перемещений при плоском поперечном изгибе стержня

Метод Максвелла – Мора определения перемещений является универсальным методом, справедливым для любых стержневых систем. В частном случае для плоского изгиба балки без учета влияния на перемещения поперечной силы формула Мора принимает вид

$$\Delta = \int_0^l \frac{M(z) \cdot \bar{M}(z)}{EI_x} dz \quad (5.1)$$

В этой формуле  $\Delta$  – искомое перемещение (это может быть и прогиб, и угол поворота любого сечения);  $M(z)$  – изгибающий момент от заданной нагрузки;  $\bar{M}(z)$  – изгибающий момент, вызванный единичной силой (моментом);  $EI_x$  – жесткость стержня при изгибе. Интегрирование ведется по длинам всех участков балки.

### Порядок определения перемещений по методу Мора.

1. Определить изгибающий момент  $M(z)$  на каждом участке от заданной нагрузки.

2. Освободить балку от заданной нагрузки и загрузить ее единичной обобщенной силой, соответствующей искомому перемещению, то есть:

- для определения вертикального перемещение какой-то точки в этой точке следует приложить вертикально единичную сосредоточенную безразмерную силу и найти изгибающий момент, вызванный действием только этой силы;

- для определения угла поворота какого-то сечения в этом сечении следует приложить единичный сосредоточенный безразмерный момент и найти изгибающий момент от действия только этого момента.

3. Подставить произведение изгибающих моментов от нагрузки и от единичной обобщенной силы в интеграл (5.1) и проинтегрировать по всей длине балки.

### Правило знаков в методе Максвелла – Мора.

Если вычисленное перемещение имеет положительный знак, то это означает, что искомое перемещение происходит по направлению, совпадающему с принятым направлением единичной обобщенной силы. Отрицательный знак указывает на то, что действительное перемещение противоположно направлению единичной обобщенной силы.

Распространенным способом взятия интеграла Мора является способ графического интегрирования, называемый способом "перемножения эпюр". Для этого необходимо построить эпюры от заданной нагрузки

(грузовая эпюра  $M(z)$ ) и единичной силы (единичная эпюра  $\bar{M}(z)$ ), при этом единичная эпюра является графиком линейной функции.

В том случае, когда грузовая эпюра также является графиком линейной функции (рис. 5.1, а), что соответствует случаю отсутствия распределенной нагрузки на рассматриваемом грузовом участке, для вычисления интеграла Мора методом перемножения эпюр удобно использовать **формулу трапеций**:

$$\Delta = \frac{l}{6EI_x} (2ac + 2bd + ad + bc) \quad (5.2)$$

Если грузовая эпюра очерчена по квадратной параболе (рис. 5.1, б), что соответствует загрузке равномерно распределенной нагрузкой, то для перемножения эпюр используют **формулу Симпсона**:

$$\Delta = \frac{l}{6EI_x} (ac + 4ef + bd) \quad (5.3)$$

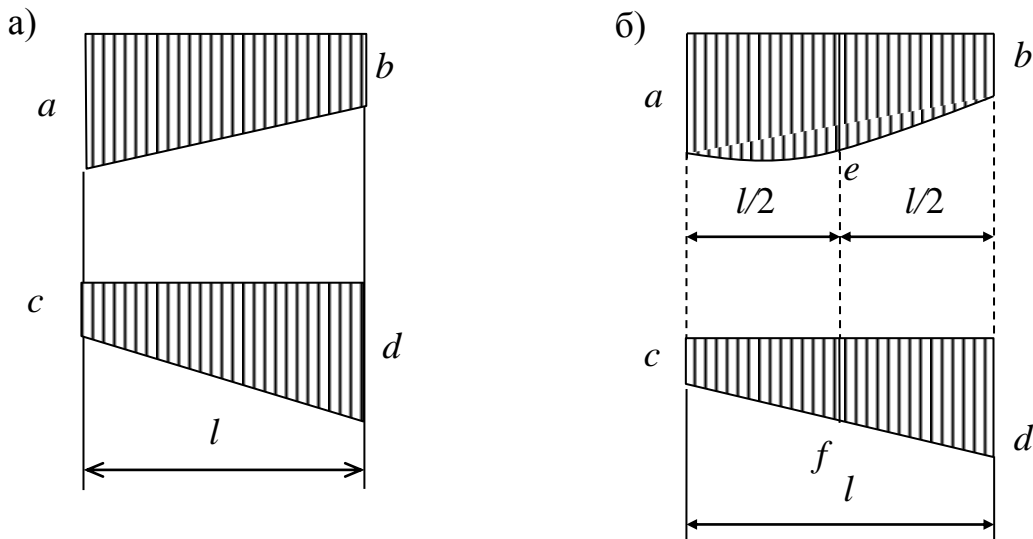


Рис. 5.1

Традиционным в сопротивлении материалов является использование для определения перемещений **приема Верещагина**, согласно которому для балки

$$\Delta = \frac{\omega \cdot \bar{\eta}}{EI_x}, \quad (5.4)$$

где  $\omega$  – площадь фигуры, взятой на грузовой эпюре;  $\bar{\eta}$  – ордината, взятая на единичной эпюре, под центром тяжести фигуры на грузовой эпюре;  $z_c$  – абсцисса центра тяжести фигуры на грузовой эпюре (рис. 5.2).

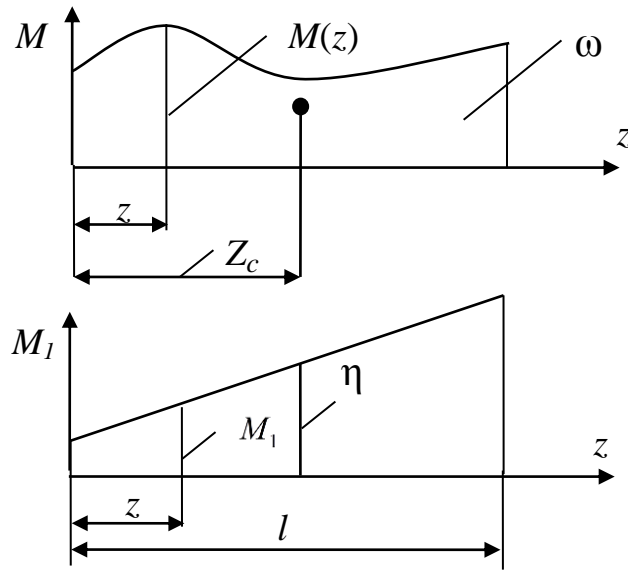


Рис. 5.2

В табл. 5.1 приведены данные о площадях и положении центра тяжести самых распространенных эпюр.

Таблица 5.1

Геометрические фигуры	Площадь $\omega$	Положение центра тяжести	
		$z_1$	$z_2$
<p>Прямоугольник</p>	$hl$	$l/2$	$l/2$
<p>Треугольник</p>	$hl/2$	$l/3$	$2l/3$
<p>Квадратная парабола</p>	$hl/3$	$l/4$	$3l/4$

## 5.1. Применение формул трапеций и Симпсона для определения перемещений

**Пример 5.1.** Для балки, изображенной на рис. 5.3, а определить вертикальное перемещение  $v_B$  сечения  $B$  и угол поворота  $\theta_C$  сечения  $C$ . Принять:  $a=2$  м;  $b=2$  м;  $F=15$  кН;  $M=15$  кНм;  $q=15$  кН/м;  $EI_x = 5 \cdot 10^4$  кНм<sup>2</sup>.

### Решение.

Следуем порядку определения перемещений по методу Мора.

1. Строим эпюру изгибающего момента  $M$  от заданной нагрузки (рис. 5.3, б). Построение эпюры подробно рассмотрено в примере 4.1.

2. Для определения вертикального перемещения сечения  $B$  к балке, освобожденной от внешних нагрузок, прикладываем единичную сосредоточенную силу (рис. 5.3, в) и строим эпюру изгибающего момента  $\bar{M}_1$  (рис. 5.3, г).

3. Вычисляем интеграл Мора, используя прием "перемножения эпюр". Выделяем на грузовой и единичной эпюрах совпадающие грузовые участки. Для вычисления интеграла Мора на первом участке используем формулу Симпсона (т. к. грузовая эпюра описывается квадратной параболой), на втором, т. к. обе эпюры линейные, формулу трапеций; искомое вертикальное перемещение получаем суммированием результатов вычислений на всех грузовых участках:

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{2}{6EI_x} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 10 \cdot (-1) + 10 \cdot (-2)) + \\ &+ \frac{3}{6EI_x} (2 \cdot 30 \cdot (-2) + 2 \cdot 15 \cdot (-5) + 30 \cdot (-5) + 15 \cdot (-2)) = \\ &= -\frac{245}{EI_x} = -4,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -4,9 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Полученный результат имеет отрицательный знак.

Это означает, что перемещение  $v_B$  направлено вверх, противоположно приложенной единичной силе.

4. Для определения угла поворота сечения  $C$  к балке, освобожденной от внешних нагрузок, прикладываем единичный сосредоточенный момент (рис. 5.3, д) и строим эпюру изгибающего момента  $\bar{M}_2$  (рис. 5.3, е).

5. Выделяем на грузовой и единичной эпюрах совпадающие грузовые участки. Интеграл Мора на первом участке равен нулю (нулевая единичная эпюра), на втором, т. к. обе эпюры линейные, применяем формулу трапеций.

В результате имеем:

$$\theta_C = \frac{3}{6EI_x} (2 \cdot 30 \cdot 1 + 2 \cdot 15 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 15 \cdot 1) = \frac{405}{6EI_x} = 1,35 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Положительный знак результата показывает, что сечение поворачивается в том же направлении, что и приложенный единичный момент.

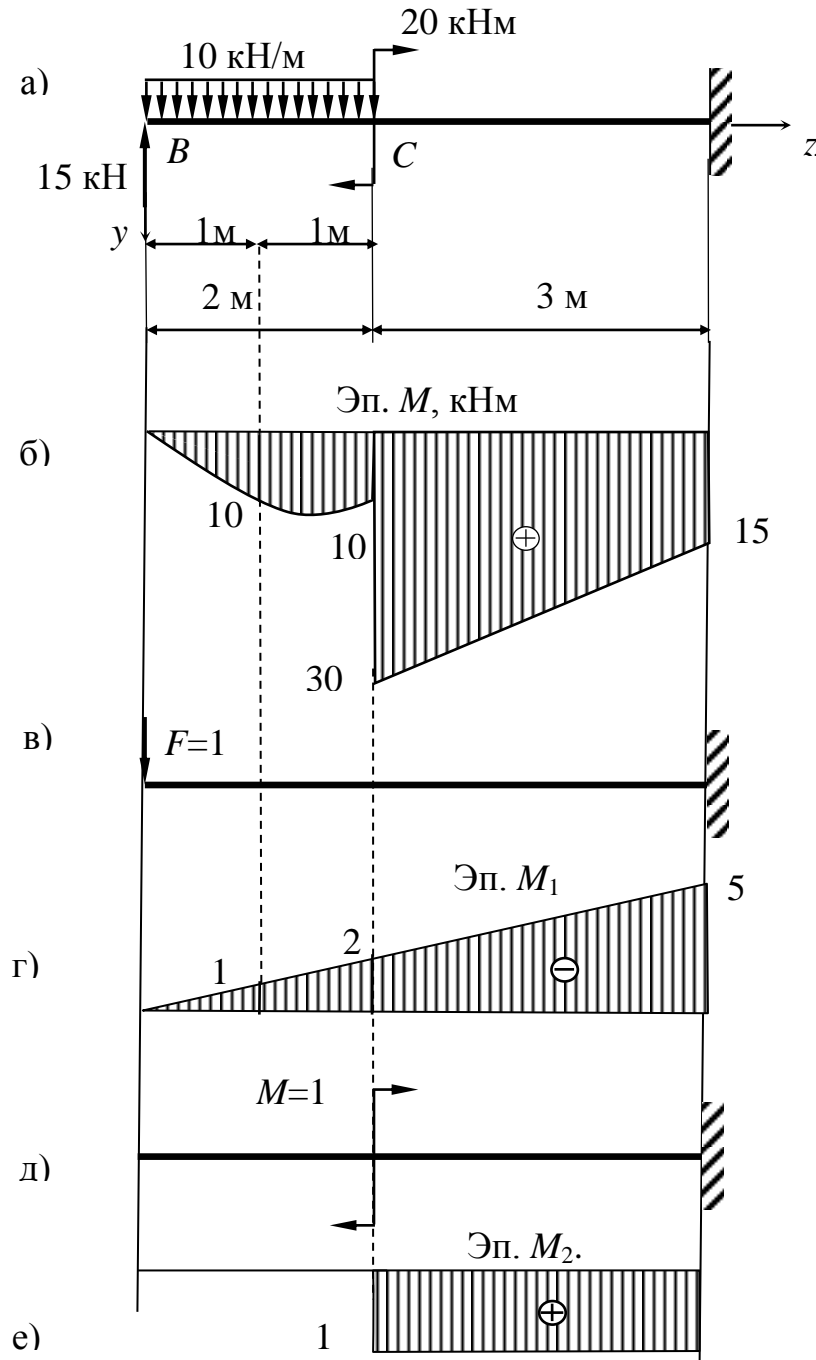


Рис. 5.3

**Пример 5.2.** Однопролетная статически определимая балка нагружена распределенной нагрузкой и моментом (рис. 5.4, а). Требуется вычислить прогиб и угол поворота в сечении  $C$ . Изгибная жесткость балки  $EI_x = \text{const}$ ,  $a = 1$  м,  $b = 4$  м,  $M = 30$  кНм,  $q = 15$  кН/м.

**Решение.**

Следуем порядку определения перемещений по методу Мора.

1. Строим эпюру поперечных сил  $Q_y$  и изгибающего момента  $M_x$  от заданной нагрузки (рис. 5.4, б, в). Построение эпюр подробно рассмотрено в примере 5.2.

2. Для определения вертикального перемещения сечения  $C$  к балке, освобожденной от внешних нагрузок, прикладываем единичную сосредоточенную силу (рис. 5.4, г) и строим единичную эпюру (рис. 5.4, д).

3. Вычисляем интеграл Мора, используя прием "перемножения эпюр". Выделяем на грузовой и единичной эпюрах совпадающие грузовые участки. Для вычисления интеграла Мора на первом участке используем формулу трапеций, т. к. обе эпюры линейные, на втором формулу Симпсона (т. к. грузовая эпюра описывается квадратной параболой); искомое вертикальное перемещение получаем суммированием результатов вычислений на всех грузовых участках:

$$v_C = \frac{1}{6EI_x} (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 30 \cdot 0,8 + 0 \cdot 0,8 + 30 \cdot 0) + \frac{4}{6EI_x} (0 \cdot 0,8 + 4 \cdot 30 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0) = \frac{40}{EI_x}.$$

Полученный результат имеет положительный знак. Это означает, что перемещение  $v_C$  происходит в направлении единичной силы.

4. Для определения угла поворота сечения  $C$  к балке, освобожденной от внешних нагрузок, прикладываем единичный сосредоточенный момент (рис. 5.3, е) и строим единичную эпюру (рис. 5.4, ж).

5. Выделяем на грузовой и единичной эпюрах совпадающие грузовые участки. Для вычисления интеграла Мора на первом участке используем формулу трапеций, т. к. обе эпюры линейные, на втором участке формулу Симпсона (здесь грузовая эпюра описывается квадратной параболой); в результате:

$$\theta_C = \frac{1}{6EI_x} (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 30 \cdot (-0,2) + 0 \cdot (-0,2) + 30 \cdot 0) + \frac{4}{6EI_x} (0 \cdot 0,8 + 4 \cdot 30 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0) = \frac{30}{EI_x}.$$

Положительный знак результата показывает, что сечение поворачивается в том же направлении, что и приложенный единичный момент.

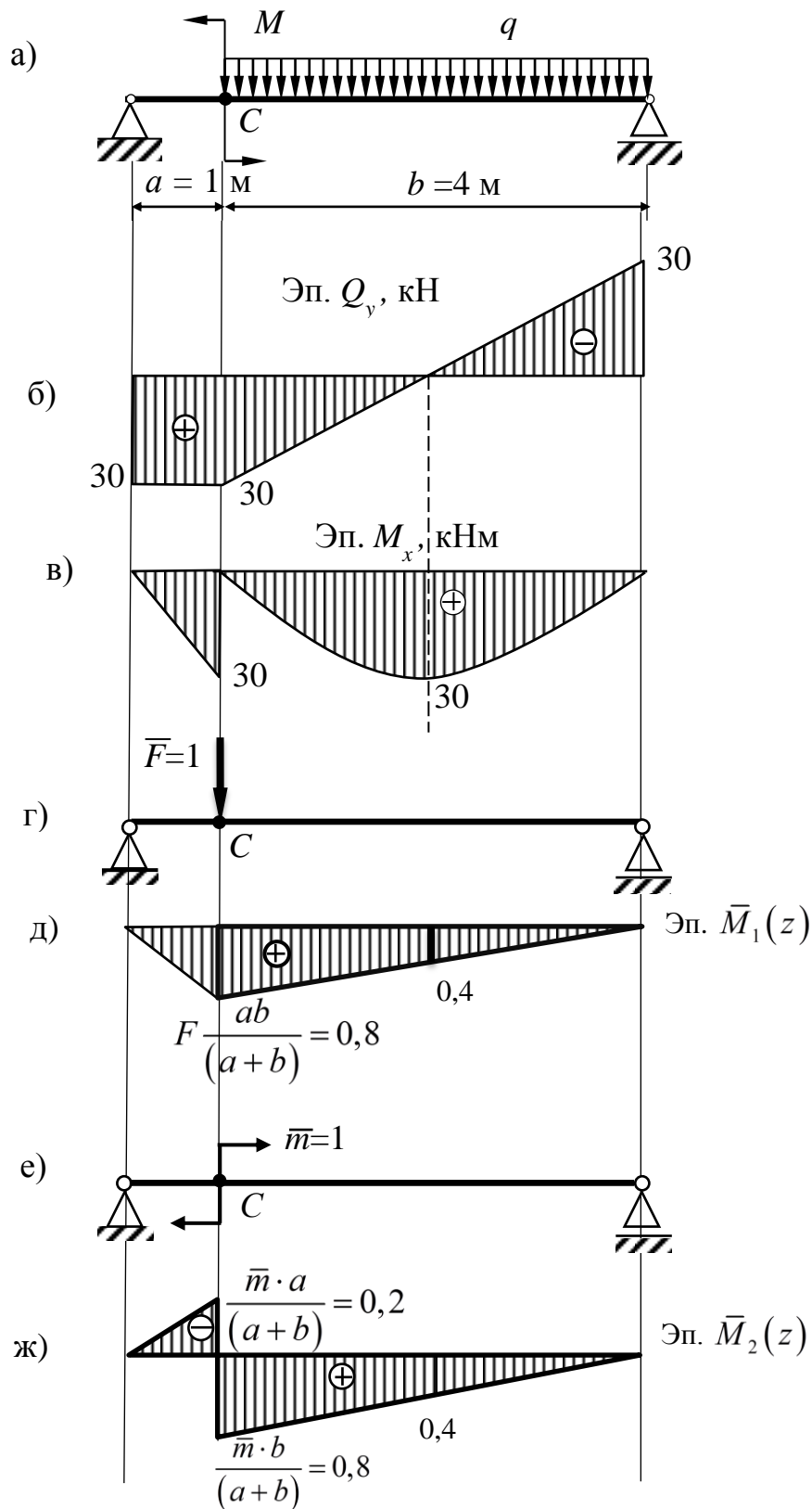


Рис. 5.4

**Пример 5.3.** На рис. 5.5, а показана статически определимая однопролетная балка с консолью, нагруженная по всей длине равномерно распределенной нагрузкой, сосредоточенным моментом на левой опоре и сосредоточенной силой на свободной крае консоли.

Требуется:

1. Построить эпюры изгибающего момента  $M_x$  и поперечной силы  $Q_y$ .
2. Подобрать поперечное сечение балки в виде двутавра.
3. Построить изогнутую ось стержня, вычислив прогибы не менее чем в двух характерных сечениях.

Принять:  $a = 4$  м;  $b = 1$  м;  $F = 10$  кН;  $M = 20$  кНм;  $q = 20$  кН/м;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

**Решение.**

1. Строим эпюру поперечных сил  $Q_y$  и изгибающего момента  $M_x$  от заданной нагрузки (рис. 5.5, б, в). Построение эпюр подробно рассмотрено в примере 4.3.

2. Подбираем поперечное сечение балки в виде двутавра №27, для которого момент сопротивления  $W_x = 371$  см<sup>3</sup>; момент инерции  $I_x = 5010$  см<sup>4</sup>. Подбор сечения подробно рассмотрено в примере 4.4. Вычисляем изгибную жесткость балки  $EI_x = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5010 \cdot 10^{-8} = 10020$  кНм<sup>2</sup>

3. Для построения изогнутой оси балки, вычислим прогибы в сечении  $C$  на свободном крае консоли и в сечении  $D$  в середине пролета балки (рис. 5.5, г, е).

**Вычисление прогиба свободного края консоли.**

Для определения вертикального перемещения сечения  $C$  к балке, освобожденной от внешних нагрузок, прикладываем единичную сосредоточенную силу (рис. 5.5, г) и строим эпюру изгибающего момента  $\bar{M}_1$  (рис. 5.5, д).

Вычисляем интеграл Мора, используя прием "перемножения эпюр". Выделяем на грузовой и единичной эпюрах совпадающие грузовые участки. Для вычисления интеграла Мора на первом и втором участках используем формулу Симпсона (т.к. грузовая эпюра описывается квадратной параболой); искомое вертикальное перемещение получаем суммированием результатов вычислений на всех грузовых участках:

$$v_C = \frac{4}{6EI_x} (20 \cdot 0 + 4 \cdot 50 \cdot (-0,5) + 0 \cdot (-1)) + \frac{1}{6EI_x} (0 \cdot (-1) + 4 \cdot 2,5 \cdot (-0,5) + 0 \cdot 0) = \frac{-405}{EI_x} = \frac{-405 \text{ кНм}^3}{10020 \text{ кНм}^2} = -0,04 \text{ м.}$$

Сечение  $C$  переместилось вверх, т. к. прогиб получился отрицательным.

**Вычисление прогиба в середине пролета балки.**

Для определения вертикального перемещения сечения  $D$  к балке, освобожденной от внешних нагрузок, прикладываем единичную сосредоточенную силу (рис. 5.5, е) и строим эпюру изгибающего момента  $\bar{M}_2$  (рис. 5.5, ж).

Вычисляем интеграл Мора, используя прием "перемножения эпюр". Выделяем на грузовой и единичной эпюрах совпадающие грузовые участки. Для вычисления интеграла Мора в пролете используем формулу Симпсона (т.к. грузовая эпюра описывается квадратной параболой), но пролет разобьётся на два грузовых участка и для применения формулы Симпсона нужно определить на грузовой эпюре ординаты по середине этих участков, т. е. при  $z = 1$  м и при  $z = 3$  м. Для этого, воспользуемся выражением для определения момента в пролете балки (см. пример 4.3.):

$$M_x = M + R_A \cdot z_1 - q \cdot \frac{z_1^2}{2} = 20 + 35 \cdot z_1 - 20 \cdot \frac{z_1^2}{2}$$

Тогда:

при  $z_1 = 1$  м  $M_x = 20 + 35 \cdot 1 - 20 \cdot 1^2 / 2 = 45$  кНм;

при  $z_1 = 3$  м  $M_x = 20 + 35 \cdot 3 - 20 \cdot 3^2 / 2 = 35$  кНм.

Искомое вертикальное перемещение получаем суммированием результатов вычислений на двух грузовых участках:

$$v_D = \frac{2}{6EI_x} (20 \cdot 0 + 4 \cdot 45 \cdot 0,5 + 50 \cdot 1) + \frac{2}{6EI_x} (50 \cdot 1 + 4 \cdot 35 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0) = \frac{520}{EI_x} = \frac{520 \text{ кНм}^3}{10020 \text{ кНм}^2} = 0,052 \text{ м.}$$

Поскольку прогиб получился положительным, точка  $D$  переместилась вниз по направлению единичной силы.

Изогнутая ось балки показана на рисунке 5.5, з. Согласно эпюре изгибающего момента, растянуты нижние волокна балки, поэтому у изогнутой оси выпуклость вниз.

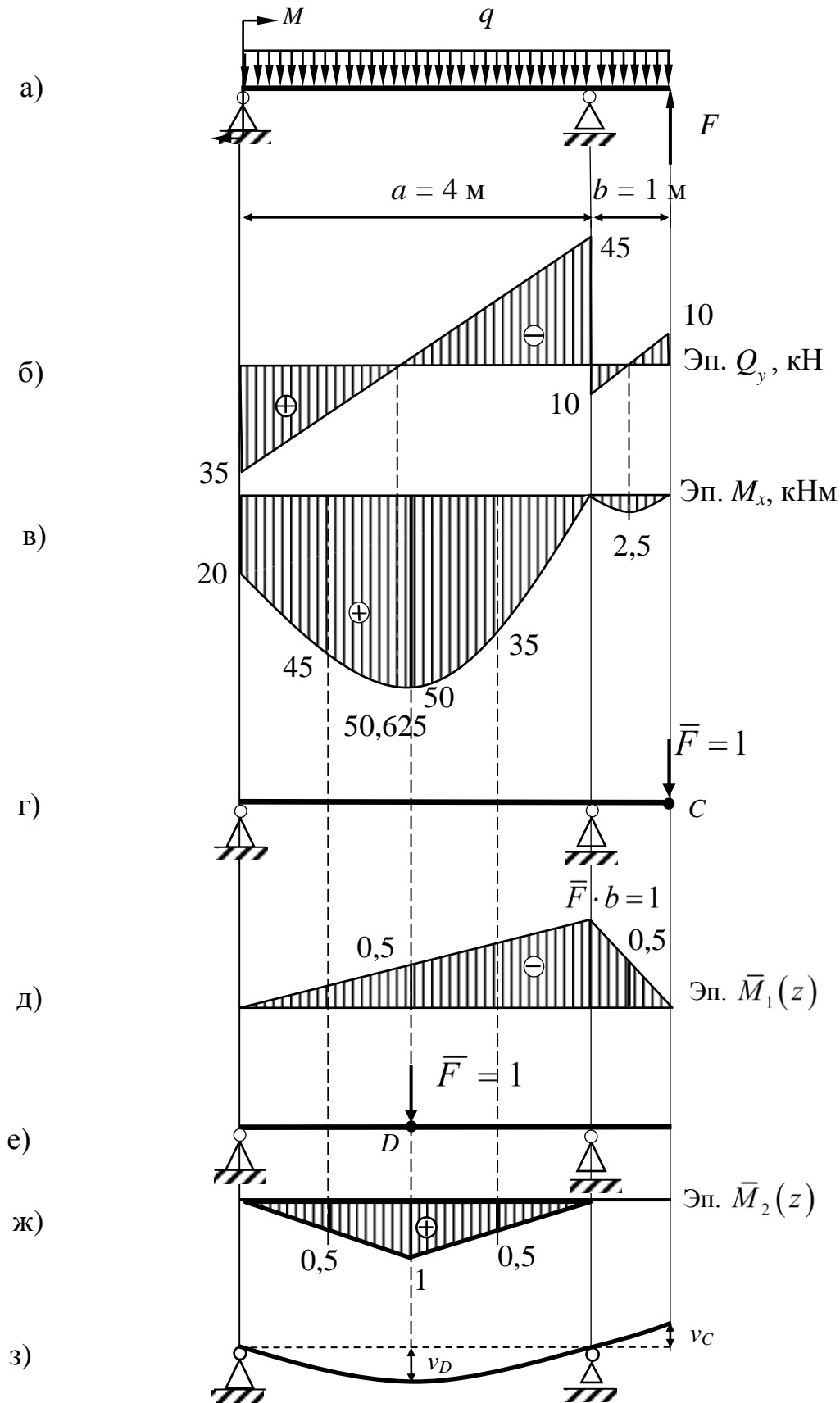


Рис. 5.5

## 5.2. Задания для контрольной работы.

### Задача 5. Определение перемещений при плоском поперечном изгибе стержня

Статически определимая балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , сосредоточенными силами  $F$  и моментами  $M$  (табл. 5.1).

Требуется:

1. Вычертить в масштабе схему балки и указать числовые значения размеров и нагрузок.

2. Построить эпюры поперечной силы  $Q_y$  и изгибающего момента  $M_x$  (эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  располагаются под схемой балки).

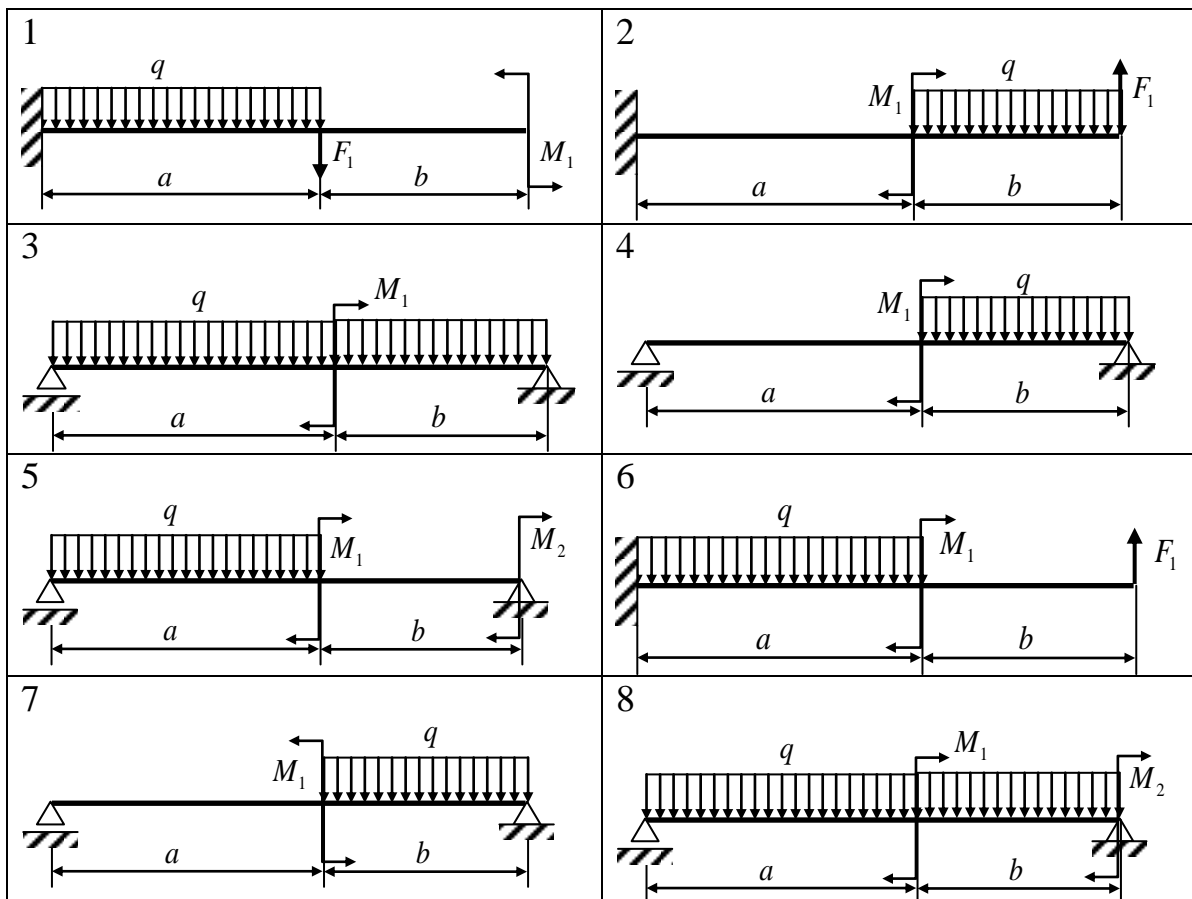
3. Подобрать поперечное сечение балки в виде двутавра, если  $[\sigma] = 160$  МПа.

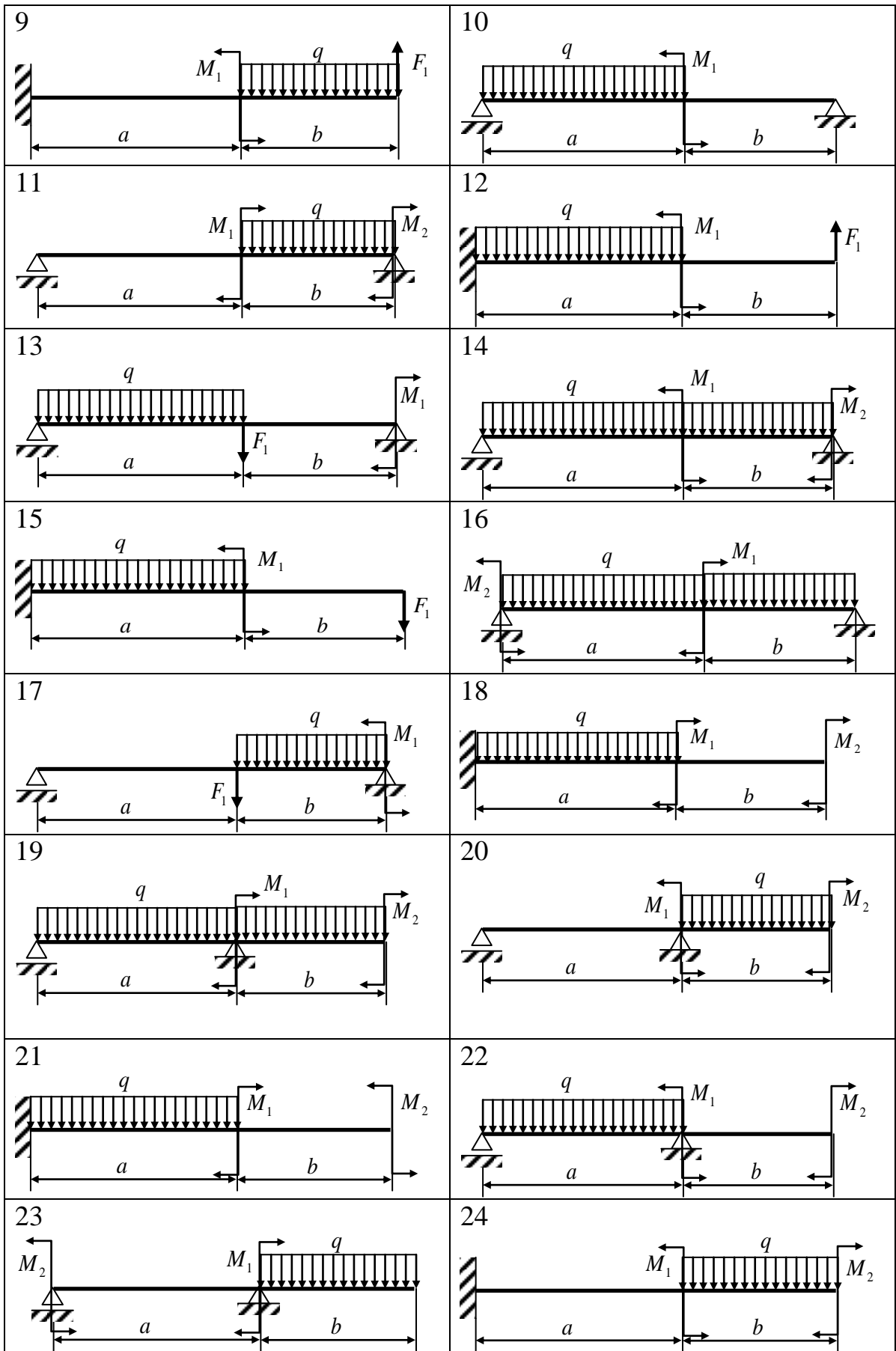
4. Построить изогнутую ось стержня, вычислив прогибы не менее чем в двух характерных сечениях.

При вычислении перемещений использовать графоаналитические приемы вычисления интеграла Мора (прием Верещагина, формулу трапеций, формулу Симпсона).

Исходные данные приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.1





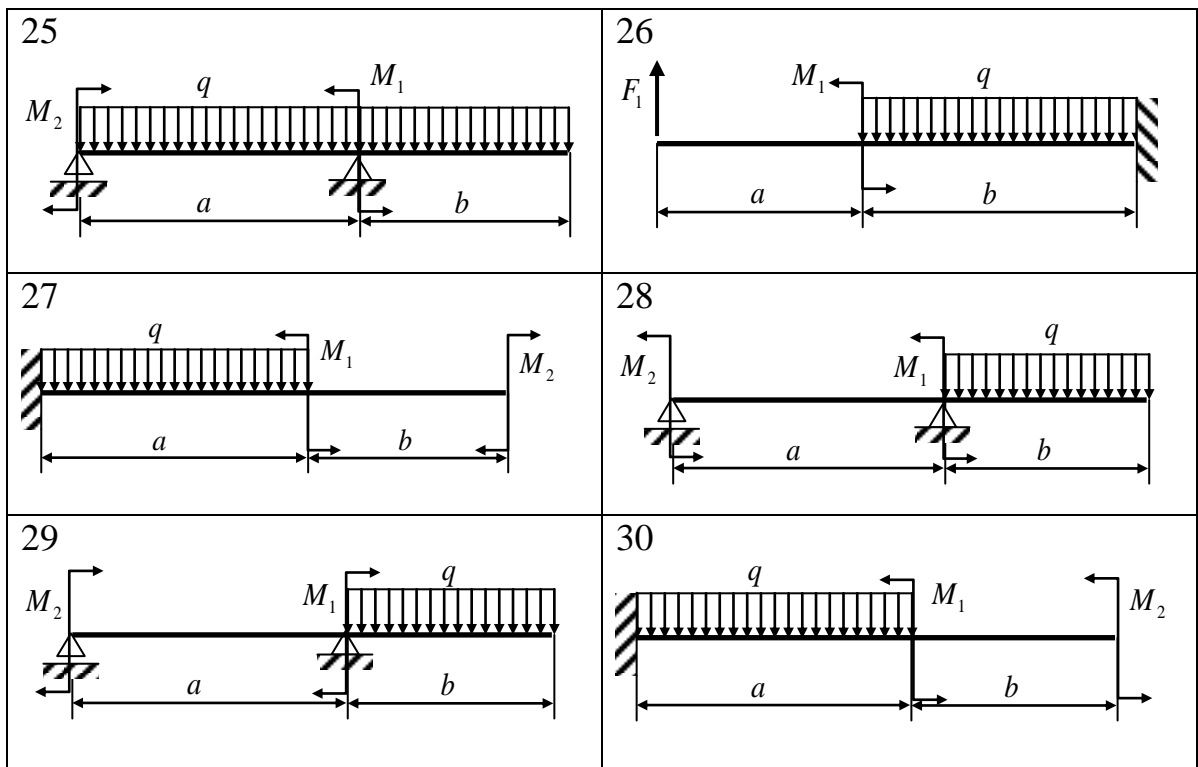
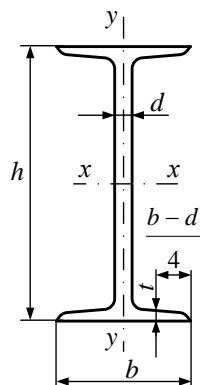


Таблица 5.2

	$a$	$b$	$F_1$	$F_2$	$M_1$	$M_2$	$q$
	м		кН		кН·м		кН/м
<b>1</b>	1	2	10	40	80	40	10
<b>2</b>	2	3	15	50	70	15	20
<b>3</b>	3	2	20	30	60	20	15
<b>4</b>	4	3	30	20	50	30	20
<b>5</b>	2	4	20	10	40	50	10
<b>6</b>	3	2	10	15	30	40	15
<b>7</b>	1	2	40	25	20	30	30
<b>8</b>	2	3	50	30	40	20	20
<b>9</b>	3	2	30	35	50	80	15
<b>0</b>	4	1	20	40	60	50	10
	$e$	$z$	$e$	$e$	$e$	$\partial$	$z$

**СТАЛЬ ГОРЯЧЕКАТАНАЯ. БАЛКИ ДВУТАВРОВЫЕ (по ГОСТ 8239–89)**

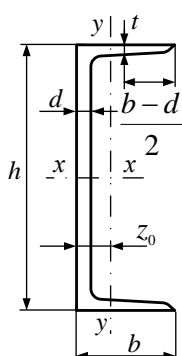


$h$  – высота балки;  
 $b$  – ширина балки;  
 $d$  – толщина стенки;  
 $t$  – средняя толщина полки;  
 $A$  – площадь сечения;  
 $I$  – осевой момент инерции;  
 $w$  – осевой момент сопротивления;  
 $i$  – радиус инерции;  
 $S$  – статический момент полусечения.

Таблица П.1

Номер профиля	Масса, кг/м	Размеры, мм				$A$ , см <sup>2</sup>	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$w_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$w_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см
		$h$	$b$	$d$	$t$								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

**СТАЛЬ ГОРЯЧЕКАТАНАЯ. ШВЕЛЛЕРЫ (по ГОСТ 8240–89)**

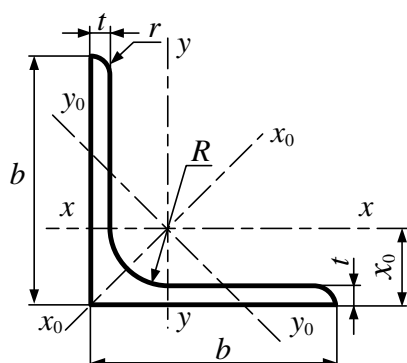


- $h$  – высота швеллера;
- $b$  – ширина швеллера;
- $d$  – толщина стенки;
- $t$  – средняя толщина полки;
- $I$  – осевой момент инерции;
- $A$  – площадь швеллера;
- $w$  – осевой момент сопротивления;
- $i$  – радиус инерции;
- $S$  – статический момент полусечения;
- $z_0$  – расстояние от оси  $y$  до наружной грани стенки.

Таблица П.2

Номер профиля	Масса, кг/м	Размеры, мм				$A$ , см <sup>2</sup>	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$w_{x3}$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_{x3}$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$w_{y3}$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$z_0$ , см
		$h$	$b$	$d$	$t$									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,68
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,12	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16а	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	6,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	80	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
22	21	220	82	5,4	8,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
27	27,7	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

**СТАЛЬ ПРОКАТНАЯ УГОЛКОВАЯ РАВНОПОЛОЧНАЯ (по ГОСТ 8509–86)**



- $b$  – ширина полки;
- $t$  – средняя толщина полки;
- $R$  – радиус внутреннего закругления;
- $r$  – радиус закругления полки;
- $A$  – площадь поперечного сечения;
- $I$  – момент инерции;
- $i$  – радиус инерции;
- $I_{xy}$  – центробежный момент инерции;
- $x_0$  – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки.

Таблица ПЗ

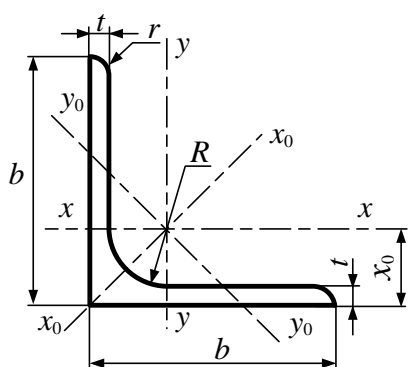
Номер уголка	$b$	$t$	$R$	$r$	$A, \text{ см}^2$	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
						$x-x$			$x_0-x_0$		$y_0-y_0$			$I_{xy}, \text{ см}^4$	$x_0, \text{ см}$	
						$I_x, \text{ см}^4$	$W_x, \text{ см}^3$	$i_x, \text{ см}$	$I_{x_0 \text{ max}}, \text{ см}^4$	$i_{x_0 \text{ max}}, \text{ см}$	$I_{y_0 \text{ min}}, \text{ см}^4$	$W_{y_0}, \text{ см}^3$	$i_{y_0 \text{ min}}, \text{ см}$			
						мм										
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89
		4	3,5	1,2	1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64	1,15
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12
		4	3,5	1,2	1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76	1,46
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27
3	30	3	4,0	1,3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36
		4	4,0	1,3	2,27	1,84	0,87	0,90	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46
		4	4,5	1,5	2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60
		4	4,5	1,5	2,67	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01	2,10
		5	4,5	1,5	3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58
4	40	3	5,0	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85
		4	5,0	1,7	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42
		5	5,0	1,7	3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98
4,5	45	3	5,0	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08
		4	5,0	1,7	3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73
		5	5,0	1,7	4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32
		4	5,5	1,8	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
		5	5,5	1,8	4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42	3,77
		6	5,5	1,8	5,69	13,07	3,69	1,52	20,73	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44
		5	6,0	2,0	5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,0	1,69	3,90
		5	7,0	2,3	6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,7	1,74	4,81
		6	7,0	2,3	7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,9	1,78	5,72

Продолжение табл. 3

Номер уголка	b	t	R	r	A, см <sup>2</sup>	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
						x-x			x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>			I <sub>xy</sub> , см <sup>4</sup>	x <sub>0</sub> , см	
						I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	I <sub>x0</sub> max, см <sup>4</sup>	i <sub>x0</sub> max, см	I <sub>y0</sub> min, см <sup>4</sup>	W <sub>y0</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y0</sub> min, см			
						мм										
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,0	1,88	4,87
		5	8,0	2,7	6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,7	1,90	5,38
		6	8,0	2,7	8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,1	1,94	6,39
		7	8,0	2,7	9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,2	1,99	7,39
		8	8,0	2,7	10,7	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,2	2,02	8,37
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	7,91	16,41	5,74	1,49	23,1	2,02	5,80
		6	9,0	3,0	8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,3	2,06	6,89
		7	9,0	3,0	10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,2	2,10	7,96
		8	9,0	3,0	11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,0	2,15	9,02
		9	9,0	3,0	12,83	66,10	12,43	2,27	104,7	2,86	27,48	8,91	1,46	38,6	2,18	10,1
8	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,9	2,17	6,78
		6	9,0	3,0	9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,4	2,19	7,36
		7	9,0	3,0	10,85	65,31	11,32	2,45	103,6	3,09	26,97	8,55	1,58	38,3	2,23	8,51
		8	9,0	3,0	12,30	73,36	12,80	2,44	116,4	3,08	30,32	9,44	1,57	43,0	2,27	9,65
9	90	6	10,0	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,0	3,50	33,97	9,88	1,79	48,1	2,43	8,33
		7	10,0	3,3	12,28	94,30	14,45	2,77	149,7	3,49	38,94	11,15	1,78	55,4	2,47	9,6
		8	10,0	3,3	13,93	106,1	16,36	2,76	168,4	3,48	43,80	12,34	1,77	62,3	2,51	10,9
		9	10,0	3,3	15,60	118,0	18,29	2,75	186,0	3,46	48,60	13,48	1,77	68,0	2,55	12,2
10	100	6,5	12,0	4,0	12,82	122,1	16,69	3,09	193,5	3,89	50,73	13,38	1,99	71,4	2,68	10,1
		7	12,0	4,0	13,75	130,6	17,90	3,08	207	3,88	54,16	14,13	1,98	76,4	2,71	10,8
		8	12,0	4,0	15,60	147,2	20,30	3,07	233	3,87	60,92	15,66	1,98	86,3	2,75	12,2
		10	12,0	4,0	19,24	178,9	24,97	3,05	284	3,84	74,08	18,51	1,96	110	2,83	15,1
		12	12,0	4,0	22,80	208,9	29,47	3,03	331	3,81	86,84	21,10	1,95	122	2,91	17,9
		14	12,0	4,0	26,28	237,2	33,83	3,00	375	3,78	99,32	23,49	1,94	138	2,99	20,6
		16	12,0	4,0	29,68	263,8	38,04	2,98	416	3,74	111,6	25,79	1,94	152	3,06	23,3
11	110	7	12,0	4,0	15,15	175,6	21,83	3,40	279	4,29	72,68	17,36	2,19	106	2,96	11,9
		8	12,0	4,0	17,20	198,2	24,77	3,39	315	4,28	81,83	19,29	2,18	116	3,00	13,5
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	294	32,20	3,87	467	4,87	122,0	25,67	2,49	172	3,36	15,5
		9	14,0	4,6	22,00	327	36,00	3,86	520	4,86	135,9	28,26	2,48	192	3,40	17,3
		10	14,0	4,6	24,33	360	39,74	3,85	571	4,84	148,6	30,45	2,47	211	3,45	19,1
		12	14,0	4,6	28,89	422	47,06	3,82	670	4,82	174,4	34,94	2,46	248	3,53	22,7
		14	14,0	4,6	33,37	482	54,17	3,80	764	4,78	199,6	39,10	2,45	282	3,61	26,2
		16	14,0	4,6	37,77	539	61,09	3,78	853	4,75	224,3	43,10	2,44	315	3,68	29,6
14	140	9	14,0	4,6	24,72	466	45,55	4,34	739	5,47	192,0	35,92	2,79	274	3,76	19,4
		10	14,0	4,6	27,33	512	50,32	4,33	814	5,46	211,0	39,05	2,78	301	3,82	21,4
		12	14,0	4,6	32,49	602	59,66	4,31	957	5,43	248,0	44,97	2,76	354	3,90	25,5
16	160	10	16,0	5,3	31,43	774	66,19	4,96	1229	6,25	319,3	52,52	3,19	455	4,30	24,7
		11	16,0	5,3	34,42	844	72,44	4,95	1340	6,24	347,8	56,53	3,18	496	4,35	27,0
		12	16,0	5,3	37,39	913	78,62	4,94	1450	6,23	375,8	60,53	3,17	537	4,39	29,4
		14	16,0	5,3	43,57	1046	90,77	4,92	1662	6,20	430,8	68,15	3,16	615	4,47	34,2
		16	16,0	5,3	49,07	1175	102,6	4,89	1865	6,17	484,6	75,92	3,14	690	4,55	38,5
		18	16,0	5,3	54,79	1290	114,2	4,87	2061	6,13	537,5	82,08	3,13	771	4,63	43,0
		20	16,0	5,3	60,40	1419	125,6	4,85	2248	6,10	589,4	90,02	3,12	830	4,70	47,4

Продолжение табл. 3

Номер уголка	<i>b</i>	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	<i>A</i> , см <sup>2</sup>	Справочные значения величин для осей										Масса <i>l</i> м, кг
						<i>x-x</i>			<i>x<sub>0</sub>-x<sub>0</sub></i>		<i>y<sub>0</sub>-y<sub>0</sub></i>			<i>I<sub>xy</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>x<sub>0</sub></i> , см	
						<i>I<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>x</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>x</sub></i> , см	<i>I<sub>x0</sub></i> max, см <sup>4</sup>	<i>i<sub>x0</sub></i> max, см	<i>I<sub>y0</sub></i> min, см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y0</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y0</sub></i> min, см			
						мм										
18	180	11	16,0	5,3	38,80	1216	92,5	5,60	1933	7,06	499,8	72,86	3,59	716	4,85	30,5
		12	16,0	5,3	42,19	1317	100,4	5,59	2092	7,04	540,4	78,15	3,58	776	4,89	33,1
20	200	12	18,0	6,0	47,10	1823	124,6	6,22	2896	7,84	749,4	98,68	3,99	1073	5,37	37,0
		13	18,0	6,0	50,85	1961	134,4	6,21	3116	7,83	805,4	105,1	3,98	1156	5,42	39,9
		14	18,0	6,0	54,60	2097	144,2	6,20	3333	7,81	861,0	111,5	3,97	1236	5,46	42,8
		16	18,0	6,0	61,98	2363	163,4	6,17	3755	7,78	969,7	123,8	3,96	1393	5,54	48,6
		20	18,0	6,0	76,54	2871	200,4	6,12	4860	7,72	1182	146,6	3,93	1689	5,70	60,1
		25	18,0	6,0	94,29	3466	245,6	6,06	5494	7,63	1438	172,7	3,91	2028	5,89	74,0
		30	18,0	6,0	111,5	4020	288,6	6,00	6351	7,55	1698	193,1	3,89	2332	6,07	87,6
22	220	14	21,0	7,0	60,38	2814	175,2	6,83	4470	8,60	1159	138,6	4,38	1655	5,91	47,4
		16	21,0	7,0	68,58	3175	198,7	6,80	5045	8,58	1306	153,3	4,36	1869	6,02	53,8
25	250	16	24,0	8,0	78,40	4717	258,4	7,76	7492	9,78	1942	203,4	4,98	2775	6,75	61,5
		18	24,0	8,0	87,72	5247	288,8	7,73	8337	9,75	2158	223,4	4,96	3089	6,83	68,9
		20	24,0	8,0	96,96	5765	318,8	7,71	9160	9,72	2370	242,5	4,94	3395	6,91	76,1
		22	24,0	8,0	106,1	6270	348,3	7,69	9961	9,69	2579	260,5	4,93	3691	7,00	83,3
		25	24,0	8,0	119,7	7006	391,7	7,65	11126	9,64	2887	287,1	4,91	4119	7,11	94
		28	24,0	8,0	133,1	7717	434,2	7,61	12244	9,59	3180	312,0	4,90	4527	7,23	105
		30	24,0	8,0	142,0	8177	462,1	7,59	12965	9,56	3389	327,8	4,89	4788	7,31	111
		35	24,0	8,0	163,7	9281	530,1	7,53	14683	9,47	3879	366,1	4,87	5401	7,53	128



*b* – ширина полки;  
*t* – средняя толщина полки;  
*R* – радиус внутреннего закругления;  
*r* – радиус закругления полки;  
*A* – площадь поперечного сечения;  
*I* – момент инерции;  
*i* – радиус инерции;  
*I<sub>xy</sub>* – центробежный момент инерции;  
*x<sub>0</sub>* – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки.

## Библиографический список

1. Александров А.В. Сопротивление материалов : учебник для студентов вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин ; под ред. А.В. Александрова. – 8-е изд., испр. – М. : Студент, 2012. – 560 с.
2. Варданян Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : ИНФРА-М, 2013. – 638 с.
3. Сопротивление материалов в примерах и задачах : учеб. пособие / С.В. Елизаров, Н.И. Невзоров, Ю.П. Каптелин, Я.К. Кульгавий, Е.Г. Шулайкина. – СПб. : ФГБОУ ВО ПГУПС, 2017. – 465 с.
4. Техническая механика. Ч. 1 : учеб. пособие / В.П. Кутовой, С.А. Видюшенков, А.С. Кухарева ; под ред. В.П. Кутового. – СПб.: ФГБОУ ВО ПГУПС, 2017. – 129 с.
5. Техническая механика. Ч. 2 : учеб. пособие / С.А. Видюшенков, А.С. Кухарева . – СПб.: ФГБОУ ВО ПГУПС, 2021. – 115 с.
6. Прикладная механика. : учеб. пособие / С.А. Видюшенков, В.И. Смирнов, И.Б. Поварова, А.С. Кухарева . – СПб.: ФГБОУ ВО ПГУПС, 2021. – 157 с.