Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кривые второго порядка

Индивидуальные задания

Пособие разработано ст. преп. Зубко Т. Я., доцентом Седовой С. М., доцентом Сулавко Т. С..

Одобрено методической комиссией кафедры «Высшая математика»

Пермь 2007

В данных методических указаниях содержится 30 вариантов, каждый из которых состоит из 5 заданий по теме «Кривые 2 порядка и их построение».

Выполнение этих заданий поможет студентам научиться :

1) приводить уравнения линий второго порядка к простейшему (каноническому) виду путем преобразования систем координат;
2) строить данную линию по ее каноническому уравнению;
3) переводить уравнение линии, заданное в декартовых прямоугольных координатах, в полярные координаты;
4) строить эту линию по ее полярному уравнению.

После ознакомления с данным пособием можно приступить к выполнению расчетно-графической работы (вариант указывается преподавателем). Предварительно необходимо самостоятельно изучить указанные вопросы и ответить на контрольные теоретические вопросы, используя литературу :

Рекомендованная литература

1. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. – СПб; М.: Лань, 2004, гл.4,5,6.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Физматлит, 2003, гл.5,6.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т.1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Дрофа, 2003.

Контрольные вопросы

1. Вывести уравнение окружности.
2. Вывести каноническое уравнение эллипса.
3. Исследовать форму эллипса по его уравнению. Эксцентриситет эллипса, эксцентриситет окружности.
4. Вывести каноническое уравнение гиперболы. Сопряженная гипербола.
5. Асимптоты гиперболы. Исследование формы гиперболы по ее уравнению.
6. Вывести каноническое уравнение параболы.
7. Исследование формы параболы по ее уравнению.
8. Преобразование координат на плоскости : параллельный перенос и поворот осей координат.
9. Две канонические формы равносторонней гиперболы. График дробно-линейной функции.
10. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы, оси симметрии которых параллельны осям координат.
11. Исследование общего уравнения второй степени

$$\boldsymbol{Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0}\ :$$

а) Преобразование общего уравнения линии второго порядка к новому началу координат.

б) Центральные кривые. Необходимое и достаточное условие расположения центра кривой в начале координат.

в) Упрощение уравнения кривой с помощью поворота осей координат.

г) Инвариант $\boldsymbol{\delta = AC - B^2}$ уравнения второго порядка. Признаки принадлежности кривых к эллиптическому, параболическому и гиперболическому типам.

д) План приведения к каноническому виду центральной кривой.

е) План приведения к каноническому виду нецентральной кривой.

Краткая теория, приведенная в задании, носит справочный характер и должна лишь помочь студенту в самостоятельной работе над литературой.

В общем случае кривую второго порядка определяет уравнение

$$\boldsymbol{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0} \ .(1)$$

Коэффициенты $\boldsymbol{A, B, C}$ при старших членах здесь одновременно не равны нулю. Так как уравнение отражает не только форму, но и положение линии на плоскости относительно системы координат, то в общем виде оно сложнее, чем известные нам канонические уравнения эллипса

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \ ,$$

гиперболы

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \text{ или } \boldsymbol{xy = k}$$

и параболы

$$\boldsymbol{x^2 = 2py} \text{ или } \boldsymbol{y^2 = 2px}\,.$$

Простота канонических уравнений объясняется тем, что при выводе их используется специально выбранная система координат, а именно: в случае эллипса и гиперболы начало координат выбирается в центре кривой, а координатные оси совпадают с осями симметрии; в случае параболы начало координат выбирается в вершине кривой, а одна из осей совпадает с осью симметрии.

Изменяя положение системы координат на плоскости, можно добиться такого упрощения уравнения (1), что оно станет каноническим. Т.о., наша задача состоит в том, чтобы найти новую систему координат, в которой уравнение (1) примет канонический вид.

При нахождении этой системы координат будем использовать два вида преобразований координат.

1. Параллельный перенос осей координат.

Даны две системы координат с разными началами $\boldsymbol{O}$ и $\boldsymbol{O_1}$ и одинаковыми направлениями осей (рис.1). Обозначим через $\boldsymbol{x, y}$ и $\boldsymbol{\bar{x}, \bar{y}}$ координаты произвольной точки $\boldsymbol{M}$ соответственно в старой $\boldsymbol{xOy}$ и новой $\boldsymbol{\bar{x}O_1\bar{y}}$ системах координат. Если $\boldsymbol{x_0, y_0}$ – координаты нового начала $\boldsymbol{O_1}$ в системе $\boldsymbol{xOy}$, то справедливы формулы преобразования параллельного переноса осей координат

$$\boldsymbol{x = \bar{x} + x_0}\ ,\quad \boldsymbol{y = \bar{y} + y_0}\ \text{, или (2)}$$
$$\boldsymbol{\bar{x} = x - x_0}\ ,\quad \boldsymbol{\bar{y} = y - y_0}\ .$$

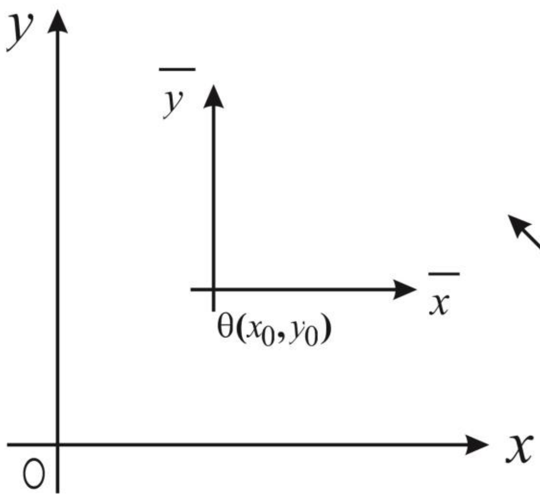

Рис. 1

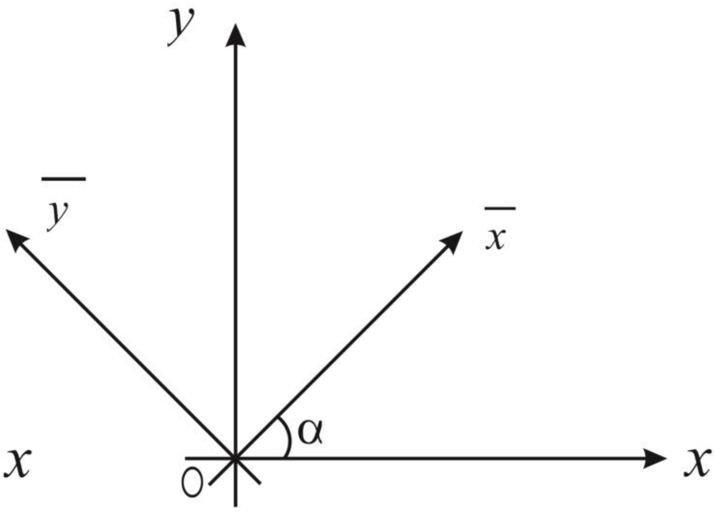

Рис. 2

2. Поворот осей координат.

Даны две системы координат с одинаковым началом и разными направлениями осей. Пусть $\boldsymbol{\alpha}$ (рис.2) – угол между $\boldsymbol{Ox}$ и $\boldsymbol{O\bar{x}}$ (угол поворота системы координат). Справедливы формулы преобразования поворота осей координат

$$\boldsymbol{x = \bar{x}\,cos\alpha - \bar{y}\,sin\alpha} \quad (3)$$
$$\boldsymbol{y = \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha}\ ,$$

где $\boldsymbol{(x,y)-}$ координаты произвольной точки в $\boldsymbol{xOy}$, $\boldsymbol{(\bar{x},\bar{y})-}$ координаты этой точки в новой системе координат $\boldsymbol{\bar{x}O\bar{y}}$.

Образец задания

1. Дано уравнение гиперболы в виде $\boldsymbol{y = \dfrac{5x+3}{2x+3}}$. Путем параллельного переноса системы координат привести ее уравнение к виду $\boldsymbol{\bar{x}\bar{y} = k}$, указать асимптоты гиперболы, построить соответствующие системы координат и данную гиперболу по уравнению $\boldsymbol{\bar{x}\bar{y} = k}$.
2. Даны уравнения кривых второго порядка :

   а) $\boldsymbol{y^2 - 6y - x + 11 = 0}$,

   б) $\boldsymbol{16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0}$.

   Требуется по данному уравнению определить, какого типа кривую (эллиптического, гиперболического, параболического) оно представляет, затем следует привести это уравнение к каноническому виду с помощью параллельного переноса системы координат, построить соответствующие системы координат и кривую по ее каноническому уравнению.
3. Дано уравнение кривой второго порядка

   $$\boldsymbol{4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0}\ .$$

   Требуется привести данное уравнение путем поворота и параллельного переноса системы координат к каноническому виду. Построить соответствующие системы координат и данную кривую по ее каноническому уравнению.

4. а) Дано уравнение кривой в полярных координатах

$$\rho = a(1 - \cos\varphi) .$$

Требуется построить эту кривую по ее полярному уравнению.

б) Дано уравнение кривой в прямоугольных декартовых координатах

$$(x^2 + y^2)^3 = a^4 y^2 .$$

Записать это уравнение в полярных координатах, а затем построить данную линию по ее полярному уравнению.

5. Составить уравнение линии, каждая точка которой в два раза ближе к точке $A(6,3)$, чем к началу координат.

Решение задания 1.

Из школьного курса алгебры известно, что график функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ есть гипербола, асимптоты которой параллельны Ox и Oy (см. Привалов, гл.5, §5, п.2). С другой стороны, график функции $y = \dfrac{k}{x}$ $(xy = k) -$ гипербола, асимптоты которой есть Ox и Oy. Таким образом, взяв за координатные оси асимптоты функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, мы приведем эту функцию к более простому виду $\overline{xy} = k$ (при этом пользуемся формулами преобразования параллельного переноса (2)). Итак, в системе xOy задана линия уравнением

$$y = \frac{5x+3}{2x+3} .(4)$$

Выполним параллельный перенос системы xOy по формулам (2)

$$x = \bar{x} + x_0 , \quad y = \bar{y} + y_0 ,(2)$$

где $(x_0, y_0) -$ координаты нового начала O_1 в системе xOy; $(x, y) -$ координаты произвольной точки в системе xOy; $(\bar{x}, \bar{y}) -$ координаты той же точки в системе $\bar{x}O_1\bar{y}$.

Воспользовавшись формулами (2), запишем уравнение (4) в виде

$$\bar{y} + y_0 = \frac{5(\bar{x} + x_0) + 3}{2(\bar{x} + x_0) + 3} .$$

Умножим обе части этого уравнения на выражение $2(\bar{x} + x_0) + 3$ и раскроем скобки, получим

$$2\overline{xy} + 2\bar{x}y_0 + 2\bar{y}x_0 + 2x_0y_0 + 3\bar{y} + 3y_0 = 5\bar{x} + 5x_0 + 3 .$$

Сгруппируем члены, содержащие $\bar{x}$, $\bar{y}$,

$$2\overline{xy} + \bar{x}(2y_0 - 5) + \bar{y}(2x_0 + 3) = 5x_0 + 3 - 2x_0y_0 - 3y_0 .(5)$$

Выберем точку $\boldsymbol{O_1(x_0, y_0)}$ так, чтобы члены, содержащие $\bar{x}, \bar{y}$, обратились в нуль, т.е. положим $2y_0 - 5 = 0,\ 2x_0 + 3 = 0$, откуда $x_0 = -\frac{3}{2},\ y_0 = \frac{5}{2}$ – координаты нового начала. Подставим эти значения в уравнение (5), имеем $2\overline{xy} = 3$, или

$$\overline{xy} = \frac{3}{2}. \quad (6)$$

Уравнение (6) – уравнение равнобочной гиперболы, асимптотами которой являются новые оси координат.

Изобразим обе системы координат и построим данную линию по ее уравнению (6) в системе координат $\bar{x}O_1\bar{y}$ (рис.3)

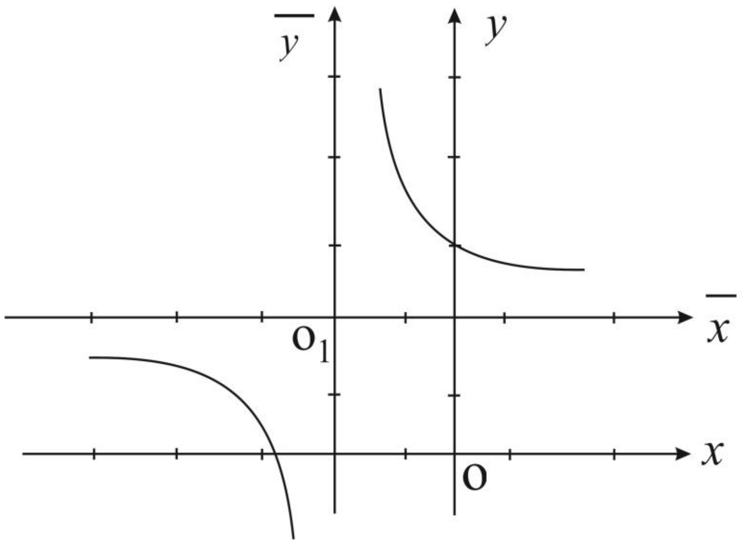

Рис. 3

Решение задания 2 (см. Привалов, гл.5, §6, п.3)

Пусть уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (7)$$

Такой вид уравнения определяет кривую, оси симметрии которой параллельны осям координат Ox, Oy (или, в случае нецентральной кривой, ось симметрии параллельна одной из осей). Выбрав в качестве новых осей координат оси симметрии, или осуществив параллельный перенос системы координат, уравнение (7) может быть приведено к каноническому виду.

Известно также, что 1) если $AC > 0$, то уравнение (7) определяет кривую эллиптического типа ; 2) если $AC < 0$, то гиперболического ; 3) если $AC = 0$ – параболического .

Первый способ решения задания 2 а).

Линия второго порядка задана уравнением

$$y^2 - 6y - x + 11 = 0 .$$

В этом уравнении $A = 0, C = 1$. Так как $AC = 0$, то данная линия – параболического типа. Путем параллельного переноса системы координат приведем уравнение к виду $\bar{x} = c\bar{y}^2$. Подставим вместо x, y их выражения через $\bar{x}, \bar{y}$ по формулам (2) : $x = \bar{x} + x_0$, $y = \bar{y} + y_0$, получим

$$(\bar{y} + y_0)^2 - 6(\bar{y} + y_0) - (\bar{x} + x_0) + 11 = 0, \text{ или}$$

$$\bar{y}^2 + 2\bar{y}y_0 + y_0^2 - 6\bar{y} - 6y_0 - \bar{x} - x_0 + 11 = 0, \text{ или}$$

$$\bar{x} = \bar{y}^2 + \bar{y}(2y_0 - 6) + (y_0^2 - 6y_0 - x_0 + 11) \quad .(8)$$

Подберем (x_0, y_0) так, чтобы слагаемое с $\bar{y}$ и свободный член обратились в нуль, т.е. полагая $2y_0 - 6 = 0$, $y_0^2 - 6y_0 - x_0 + 11 = 0$, найдем $x_0 = 2$, $y_0 = 3 -$ координаты нового начала O_1. Найденные значения x_0, y_0 подставим в уравнение (8), получим $\bar{x} = \bar{y}^2$.

Построим системы координат xOy (данную) и $\bar{x}O_1\bar{y}$. Уравнение $\bar{x} = \bar{y}^2$ в системе координат $\bar{x}O_1\bar{y}$ определяет параболу с вершиной в точке O_1 и осью симметрии $O_1\bar{x}$ (рис.4).

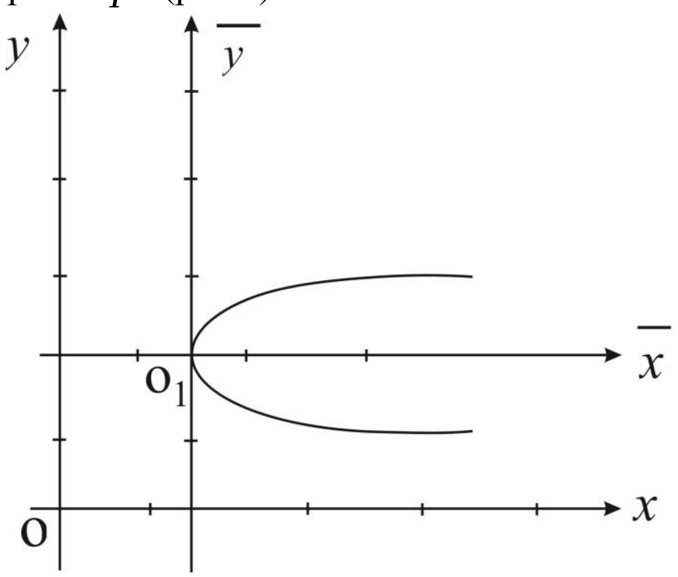

Рис. 4

<u>Второй способ решения задания 2 а).</u>

Возьмем то же уравнение

$$y^2 - 6y - x + 11 = 0$$

и разрешим его относительно x : $x = y^2 - 6y + 11$.

Выделим полный квадрат относительно y

$x = (y^2 - 6y + 9) - 9 + 11$, или $x - 2 = (y - 3)^2$.

Таким образом, имеем уравнение параболы с вершиной в точке, координаты которой $x_0 = 2, y_0 = 3$. Поместим начало новой системы координат в вершину параболы, в точку $O_1(2,3)$, и выполним параллельный перенос осей координат, используя формулы

$\bar{x} = x - 2, \bar{y} = y - 3$,

тогда уравнение данной параболы в системе $\bar{x}O_1\bar{y}$ (см. рис.4) будет $\bar{x} = \bar{y}^2$.

Решение задания 2 б).

Дано уравнение

$$16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0 .$$

Так как $A = 16, C = 25$, $AC = 16 \cdot 25 > 0$, то уравнение определяет кривую эллиптического типа. Приведем уравнение к каноническому виду. Сгруппируем слагаемые с x и слагаемые с y

$$(16x^2 + 32x) + (25y^2 - 100y) - 284 = 0, \text{ или}$$

$$16(x^2 + 2x) + 25(y^2 - 4y) - 284 = 0,$$

выделим полный квадрат относительно x и y

$$16(x^2 + 2x + 1) - 16 + 25(y^2 - 4y + 4) - 100 - 284 = 0, \text{ или}$$

$$16(x+1)^2 + 25(y-2)^2 = 400 ,$$

окончательно имеем

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 .$$

Перенесем начало координат O в точку $O_1(-1,2)$ и воспользуемся формулами параллельного переноса системы координат

$$\bar{x} = x - x_0 , \bar{y} = y - y_0 ,$$

или, учитывая координаты выбранного начала,

$$\bar{x} = x - (-1), \bar{y} = y - 2 ,$$

тогда уравнение данного эллипса в системе $\bar{x}O_1\bar{y}$ будет выглядеть так :

$$\frac{\bar{x}^2}{25} + \frac{\bar{y}^2}{16} = 1 .$$

Построим обе системы координат и эллипс.

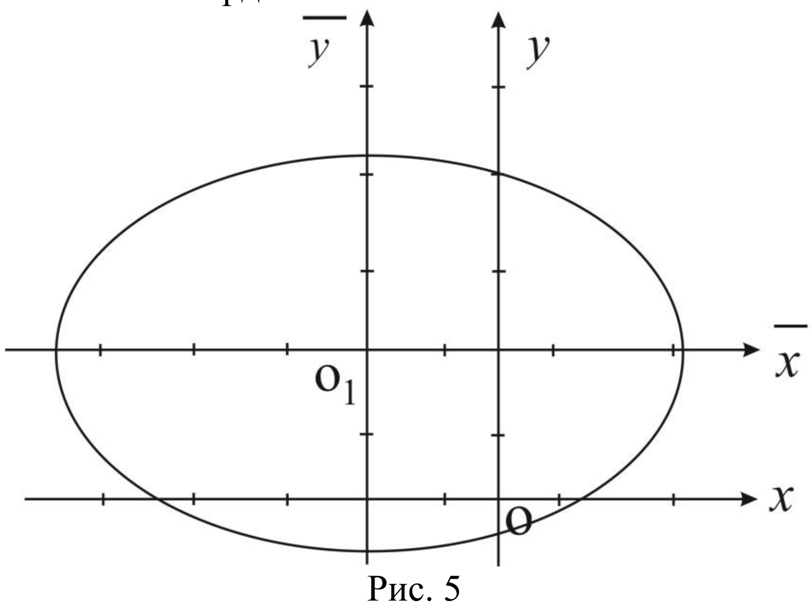

Рис. 5

Решение задания 3.

Рассмотрим уравнение кривой второго порядка общего вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ .(9)$$

Инвариантом δ уравнения (9) называют алгебраическое выражение $AC - B^2$, составленное из коэффициентов при старших членах уравнения (9) A, B, C, которое не изменяется при любом преобразовании координат.

С помощью инварианта $\delta = AC - B^2$ определяют принадлежность кривой к определенному типу : 1) если $\delta > 0$, то уравнение определяет кривую эллиптического типа ; 2) если $\delta < 0$, то гиперболического типа ; 3) если $\delta = 0$, то параболического типа.

Так как в уравнении (9) $B \neq 0$, то оси симметрии кривой не параллельны осям координат Ox, Oy. Повернем оси координат так, чтобы они стали параллельны осям симметрии кривой, для этого воспользуемся формулами поворота осей координат (3) : $x = \bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha$, $y = \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha$.

Подставим выражения для x, y в уравнение (9), имеем

$$A(\bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha)^2 + 2B(\bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha)(\bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha) +$$

$$+C(\bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha)^2 + D(\bar{x}\cos\alpha - \bar{y}\sin\alpha) + E(\bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha) + F = 0 \ .$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены, в новых координатах $\bar{x}, \bar{y}$ получаем уравнение

$$A_1\bar{x}^2 + 2B_1\overline{xy} + C_1\bar{y}^2 + D_1\bar{x} + E_1\bar{y} + F = 0 \ ,(10)$$

где $A_1 = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha$,

$$B_1 = (C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = (C - A)\frac{1}{2}\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha,$$

$$C_1 = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha \ ,$$

$$D_1 = D\cos\alpha + E\sin\alpha \ , \quad E_1 = -D\sin\alpha + E\cos\alpha \ .$$

Выберем угол α так, чтобы в новой системе координат оси симметрии были параллельны осям координат $O\bar{x}, O\bar{y}$, т.е. положим $B_1 = 0$, или

$$(C - A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0 \ .$$

Так как $B \neq 0$, поэтому $ctg2\alpha = \dfrac{A - C}{2B}$. После поворота осей координат на этот угол в уравнении (10) исчезнет произведение переменных $\overline{xy}$.

В задании 3 дано уравнение

$$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0 \ .$$

Так как $A = 0, B = 2, C = 3$, $\delta = AC - B^2 = -4 < 0$, то уравнение определяет кривую гиперболического типа. Приведем его к каноническому виду. Для этого вначале выполним поворот системы координат xOy на угол α, для которого $ctg2\alpha = \dfrac{A - C}{2B} = -\dfrac{3}{4}$; по формулам тригонометрии

$\boldsymbol{cos2\alpha = \dfrac{ctg2\alpha}{\sqrt{1+ctg^2 2\alpha}}}$, $\mathbf{cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}}$, $\mathbf{sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}}$ находим $\mathbf{\cos 2\alpha = -\dfrac{3}{5}}$, $\mathbf{\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}}$, $\mathbf{\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}}$ и записываем по формулам поворота осей координат (3)

$$x = \bar{x}\,cos\alpha - \bar{y}\,sin\alpha = \bar{x}\frac{1}{\sqrt{5}} - \bar{y}\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\bar{x} - 2\bar{y}) ,$$

$$y = \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha = \bar{x}\frac{2}{\sqrt{5}} + \bar{y}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\bar{x} + \bar{y}) .$$

Подставим выражения x и y в данное уравнение, получим

$$4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(\bar{x}-2\bar{y})\frac{1}{\sqrt{5}}(2\bar{x}+\bar{y}) + 3\cdot\frac{1}{5}(2\bar{x}+\bar{y})^2 + \frac{16}{\sqrt{5}}(\bar{x}-2\bar{y}) +$$
$$+\frac{12}{\sqrt{5}}(2\bar{x}+\bar{y}) - 36 = 0 .$$

Раскроем скобки, приведем подобные члены, получим

$$4\bar{x}^2 - \bar{y}^2 + 8\sqrt{5}\bar{x} - 4\sqrt{5}\bar{y} - 36 = 0 .$$

Выполнив параллельный перенос системы координат, приведем это уравнение к каноническому уравнению гиперболы. Для этого сгруппируем слагаемые с одноименными переменными

$$4(\bar{x}^2 + 2\sqrt{5}\bar{x}) - (\bar{y}^2 + 4\sqrt{5}\bar{y}) - 36 = 0 ,$$

выделим полные квадраты относительно $\bar{x}$, $\bar{y}$

$$4(\bar{x}^2 + 2\sqrt{5}\bar{x} + 5) - 20 - (\bar{y}^2 + 4\sqrt{5}\bar{y} + 20) + 20 - 36 = 0 \text{ , или}$$

$$4(\bar{x} + \sqrt{5})^2 - (\bar{y} + 2\sqrt{5})^2 = 36\text{, или}$$

$$\frac{(\bar{x} + \sqrt{5})^2}{9} - \frac{(\bar{y} + 2\sqrt{5})^2}{36} = 1 .$$

Поместим начало новой системы координат $\tilde{x}O_1\tilde{y}$ в точку $O_1(-\sqrt{5},-2\sqrt{5})$, воспользуемся формулами параллельного переноса (2) $\tilde{x} = \bar{x} - x_0$, $\tilde{y} = \bar{y} - y_0$, или, учитывая координаты нового начала O_1, $\tilde{x} = \bar{x} + \sqrt{5}$, $\tilde{y} = \bar{y} + 2\sqrt{5}$, окончательно получим

$$\frac{\tilde{x}^2}{9} - \frac{\tilde{y}^2}{36} = 1 \text{ .(11)}$$

Построим все три системы координат xOy , $\bar{x}O\bar{y}$, $\tilde{x}O_1\tilde{y}$, учитывая, что угол поворота системы xOy

$$\alpha = arctg2 \; \left(tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2/\sqrt{5}}{1/\sqrt{5}} = 2\right),$$

а точка O_1 в системе координат $\bar{x}O\bar{y}$ имеет координаты $(-\sqrt{5},-2\sqrt{5})$. В систему координат $\tilde{x}O_1\tilde{y}$ поместим кривую (гиперболу), определяемую уравнением (11).

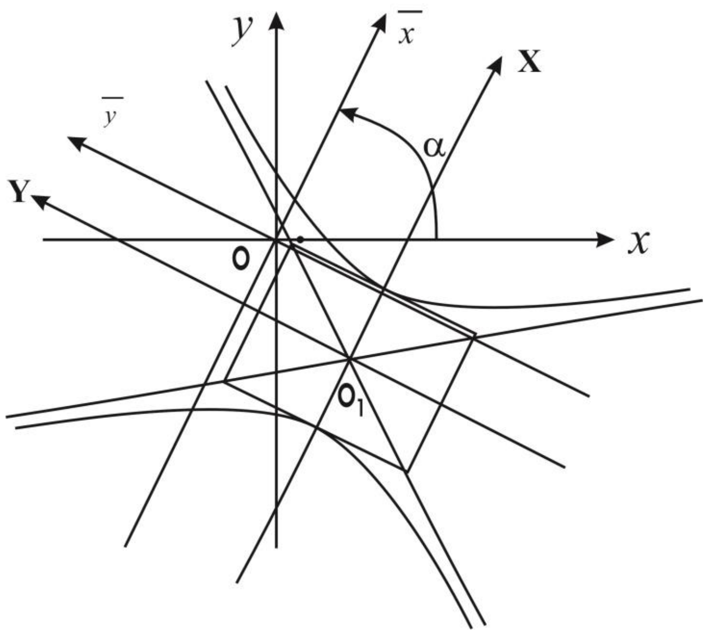

Рис. 6

К заданию 4.

Как известно, пара чисел (x, y) на плоскости определяет точку, а уравнение, связывающее x и y, – линию на плоскости. Помимо декартовых, на плоскости можно построить большое число других систем координат. Каждая из систем употребляется там, где это удобнее (и декартова – чаще всех бывает удобной), но при исследовании вращательных движений самой эффективной является полярная система координат.

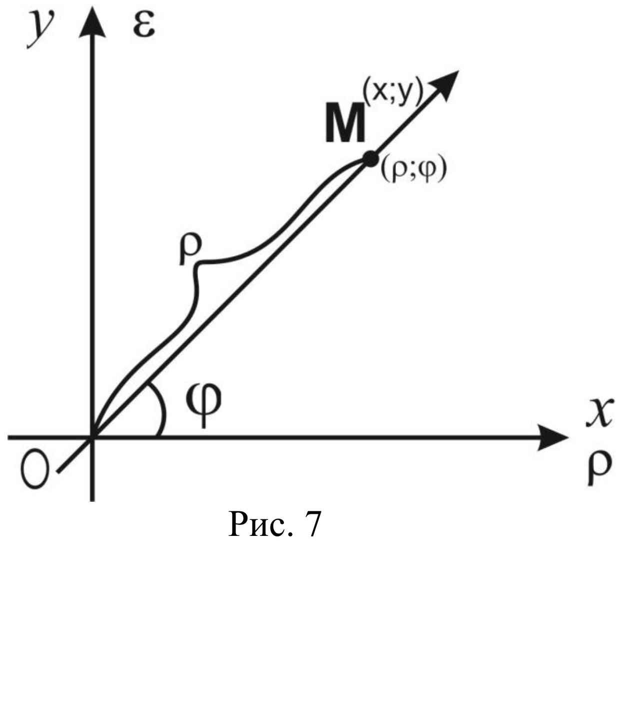

Рис. 7

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки $\boldsymbol{O}$ (полюса), исходящего из этой точки луча (полярной оси) и указанием единицы масштаба. Рассмотрим произвольную точку плоскости $\boldsymbol{M}$; обозначим расстояние точки $\boldsymbol{M}$ от полюса $\boldsymbol{O}$ через $\boldsymbol{\rho}$, угол, на который нужно повернуть луч $\boldsymbol{OP}$ для совмещения его с $\boldsymbol{OM}$, через $\boldsymbol{\varphi}$. Угол $\boldsymbol{\varphi}$ будем понимать так, как это принято в тригонометрии (т.е. углы, получаемые при вращении полярной оси вокруг полюса против часовой стрелки, положительны ; при вращении полярной оси по часовой стрелке – отрицательны). Числа $\boldsymbol{\rho}$ (полярный радиус) и $\boldsymbol{\varphi}$ (полярный угол) называют полярными координатами точки $\boldsymbol{M}$ и записывают $\boldsymbol{M(\rho,\varphi)}$. Для того чтобы соответствие между точками плоскости и парами чисел $\boldsymbol{(\rho,\varphi)}$ было взаимно однозначным, обычно считают, что $\boldsymbol{0 \le \rho < \infty}$ и $\boldsymbol{0 \le \varphi < 2\pi}$ (или $\boldsymbol{-\pi < \varphi \le \pi}$).

Запишем формулы, устанавливающие связь декартовых координат с полярными. Из $\boldsymbol{\Delta OMD}$ получим

$$\boldsymbol{x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi}, \quad (12)$$

а также $\boldsymbol{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}}$.

<u>Решение задания 4 а).</u>

Построим линию, заданную уравнением

$$\boldsymbol{\rho = a(1 - cos\varphi)}\text{ , где } \boldsymbol{a > 0} .$$

Для построения указанной линии составим таблицу значений $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\rho}$ (придавая $\boldsymbol{\varphi}$ значения, равные $\boldsymbol{\dfrac{\pi k}{12}}$, $\boldsymbol{k = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm 12}$).

Ввиду четности $\boldsymbol{cos\varphi}$ значения $\boldsymbol{\rho}$ для $\boldsymbol{\pm\varphi}$ одинаковы.

На плоскости построим точки, соответствующие имеющимся в таблице парам чисел $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\rho}$, в выбранной нами полярной системе координат. Соединяя последовательно эти точки, получим линию, называемую кардиоидой (Рис.8).

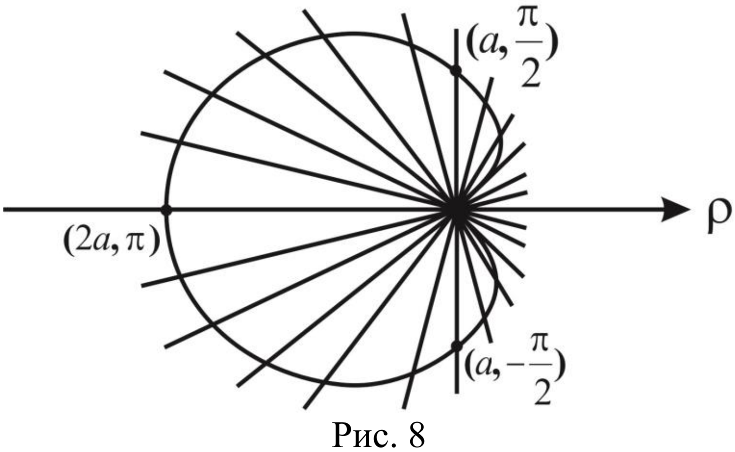

Рис. 8

Решение задания 4 б).

Дано уравнение кривой

$$(x^2+y^2)^3 = a^4y^2 \ , \ a>0 \ .$$

Воспользуемся формулами (12) и запишем уравнение в полярных координатах

$$(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi)^3 = a^4\rho^2\sin^2\varphi \text{ , или}$$

$$\rho^6 = a^4\rho^2\sin^2\varphi ,$$

$$\rho^4 = a^4\sin^2\varphi ,$$

окончательно имеем

$$\rho = a\sqrt{|\sin\varphi|} \ . \ (13)$$

Составим таблицу соответствующих значений ρ и φ

φ	0	$\pm\frac{\pi}{12}$	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{5\pi}{12}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{7\pi}{12}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\frac{11\pi}{12}$	π
ρ	0	0,51	0,71a	0,84a	0,93a	0,98a	1a	0,98a	0,84a	0,71a	0,51a	0

Нанесем на плоскость точки, соответствующие найденным парам чисел. Соединив последовательно точки, получим линию, определяемую уравнением (13).

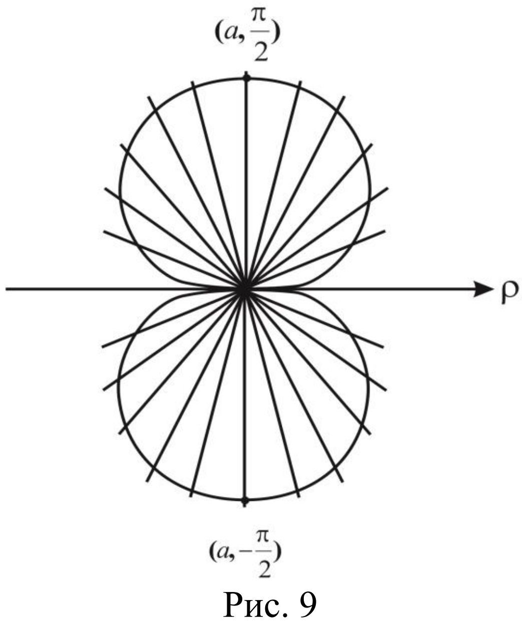

Рис. 9

Решение к заданию 5.

Пусть $M(x,y)$- текущая точка искомой линии. Запишем уравнение линии в векторной форме (см. рис. №№) :

$$|\overline{OM}| = 2|\overline{AM}| \ .$$

Перейдем к координатной форме :

$$|\overline{OM}| = \sqrt{x^2+y^2} \ ,$$

$$\left|\overline{AM}\right| = \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2}\ .$$

Следовательно,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2}\ .$$

Избавимся от иррациональности, возведя обе части уравнения в квадрат,

$$x^2 + y^2 = 4(x-6)^2 + 4(y-3)^2 \text{ , или}$$

$$3x^2 - 48x + 3y^2 - 24y + 180 = 0\ .$$

Преобразуем уравнение, как в задании 2 б),

$$3(x^2 - 16x + 64) - 192 + 3(y^2 - 8y + 16) - 48 + 180 = 0 \text{ , или}$$

$$3(x-8)^2 + 3(y-4)^2 = 60\ ,$$

окончательно имеем

$$(x-8)^2 + (y-3)^2 = 20\ .$$

Полученное уравнение задает окружность с центром в точке $\boldsymbol{O(8,4)}$ радиуса $\boldsymbol{R = \sqrt{20}}$.

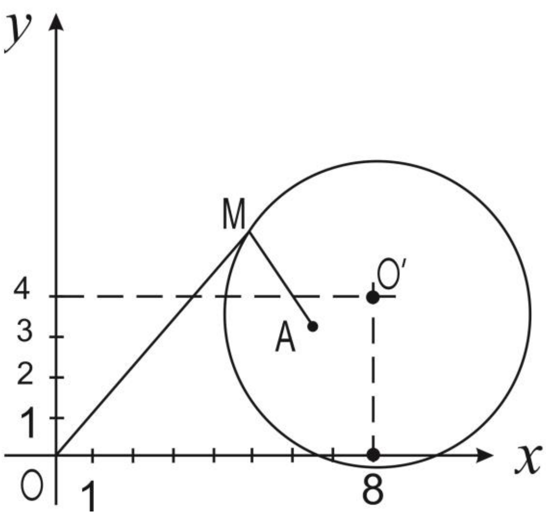

Рис. 10

Варианты заданий

1. Путем параллельного переноса системы координат привести уравнение гиперболы к виду $\boldsymbol{xy = k}$, указать асимптоты, построить системы координат и данную гиперболу по уравнению $\boldsymbol{xy = k}$.
2. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду с помощью параллельного переноса системы координат. Построить соответствующие системы координат и кривые по их каноническим уравнениям.
3. Привести уравнение кривой второго порядка путем поворота и параллельного переноса системы координат к каноническому виду. Построить соответствующие системы координат и кривую по ее каноническому уравнению.
4. а) Построить линию по ее уравнению в полярных координатах. б) Дано уравнение кривой в декартовых координатах. Следует записать это уравнение в полярной системе координат, а затем построить данную линию по ее полярному уравнению.
5. Решить текстовую задачу.

Вариант № 1

1. $\mathrm{y} = \dfrac{4\mathrm{x}+3}{2\mathrm{x}+4}$

2. а) $2x^2 + 4x - y - 3 = 0$, б) $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y - 13 = 0$

3. $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$

4. а) $\rho = \mathrm{a}\cos\phi$; б) $(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$

5. Составить уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от начала координат и точки $\mathrm{A}(-5{,}3)$.

Вариант № 2

1. $\mathrm{y} = \dfrac{-3\mathrm{x}+7}{\mathrm{x}-2}$

2. а) $\mathrm{y} = 3\mathrm{x}^2 - 18x + 19$, б) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$

3. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$

4. а) $\rho = \mathrm{a}\sqrt{\mathbf{sin}\phi}$; б) $(x^2 + y^2)^2 = a\,x^3$

5. Написать уравнение линии, по которой движется точка $\mathrm{M}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox, чем от оси Oy.

Вариант № 3

1. $y = \dfrac{4x+1}{2x+2}$

2. а) $2x^2+8x-y-5=0$, б) $3x^2+5y^2+12x-25y-15=0$

3. $6xy+8y^2+18x+48y+63=0$

4. а) $\rho = a(4+\cos\phi)$; б) $(x^2+y^2-3x)^2 = 9(x^2+y^2)$

5. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $F(2,2)$ и от оси Ox.

Вариант № 4

1. $y = \dfrac{x+5}{2x+6}$

2. а) $\dfrac{1}{2}x^2-x-y-1=0$, б) $2x^2-8x+y^2-6y+1=0$

3. $40x^2+36xy+25y^2-8x-14y+1=0$

4. а) $\rho = a\sqrt{\sin 2\phi}$; б) $x^4 = a^2(x^2+3y^2)$

5. Найти уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая при своем движении все время остается вдвое ближе к точке $A(3,0)$, чем к оси абсцисс.

Вариант № 5

1. $y = \dfrac{8x+3}{2x+4}$

2. а) $x^2-y^2+4x+2y-12=0$, б) $x=3y^2+18y-19$

3. $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$

4. а) $\rho = a\sqrt{\sin\phi}$; б) $(x^2+y^2)^2 = a\,x^3$

5. Найти уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая в каждый момент движения находится вдвое ближе к точке $A(2,0)$, чем к точке $B(8,0)$.

Вариант № 6

1. $y = \dfrac{6x+7}{3x+9}$

2. а) $y+2x^2+4x+1=0$, б) $4x^2-y^2-8x-2y+3=0$

3. $9x^2+24xy+16y^2-20x+110y-50=0$

4. а) $\rho = a\cos 2\phi$; б) $(x^2+y^2)^2 = a^2(4x^2+y^2)$

5. Написать уравнение геометрического места точек, сумма расстояний каждой из которых от точки $F_1(2,0)$ и точки $F_2(-2,0)$ равна $2\sqrt{5}$.

Вариант № 7

1. $y = \dfrac{3x - 7}{x - 2}$

2. а) $y = 2x^2 + 4x + 3$, б) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$

3. $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$

4. а) $\rho = a(1 + \cos\phi)$; б) $x^2 + y^2 = 4(\sqrt{x^2 + y^2} + x)$

5. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x, y)$, равноудаленная от точек $A(0,2)$ и $B(4,-2)$.

Вариант № 8

1. $y = \dfrac{4x + 6}{2x + 1}$

2. а) $x = -y^2 + 2y + 3$, б) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$

3. $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$

4. а) $\rho = a\sqrt{\sin 2\phi}$; б) $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 (4x^2 + 3y^2)$

5. Найти уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая при своем движении все время остается вдвое ближе к точке $A(1,0)$, чем к точке $B(-2,0)$.

Вариант № 9

1. $y = \dfrac{2x - 5}{4x - 6}$

2. а) $y + 5x^2 - 10x - 3 = 0$, б) $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$

3. $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 30x - 40y - 25 = 0$

4. а) $\rho = a\cos 3\phi$; б) $(x^2 + y^2)^3 = 36(x^2 - y^2)^2$

5. Найти уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x = 4$.

Вариант № 10

1. $y = \dfrac{4x + 6}{2x + 1}$

2. а) $y + x^2 - 5x - 7 = 0$, б) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

3. $5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$

4. а) $\rho = a(1 - \sin\phi)$; б) $x^2 + y^2 = 4(\sqrt{x^2 + y^2} + y)$

5. Написать уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая при своем движении находится вдвое ближе к точке $A(-1,1)$, чем к точке $B(-4,4)$.

Вариант № 11

1. $y=\frac{2x-3}{x+2}$

2. а) $x=3y^2-6y+4$, б) $9x^2+4y^2+18x-18y+49=0$

3. $41x^2+24xy+9y^2+24x+18y-36=0$

4. а) $\rho=a\sin^2\phi$; б) $(x^2+y^2)^3=a^2(x^4+y^4)$

5. Определить уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(1,0)$, чем к точке $B(4,0)$.

Вариант № 12

1. $y=\frac{8x+2}{2x-3}$

2. а) $x=-\frac{1}{3}y^2-6y-19$, б) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2-x+\frac{2}{3}y-1=0$

3. $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-15=0$

4. а) $\rho=a\sin2\phi$; б) $4(x^2+y^2)=(3+y)^2$

5. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от оси Ox и от точки $F(0,4)$.

Вариант № 13

1. $y=\frac{3x+1}{2x-5}$

2. а) $x^2+y^2-2x-3=0$, б) $16x^2-9y^2-64x-18y-199=0$

3. $x^2-2xy+y^2-2x-6y+4=0$

4. а) $\rho=a\sqrt{\sin2\phi}$; б) $x^4=a^2(x^2+3y^2)$

5. Найти уравнение геометрического места точек, разность расстояний каждой из которых от точки $F_1(-2,-2)$ и точки $F_2(2,2)$ равна 4.

Вариант № 14

1. $y=\frac{8x+3}{2x+4}$

2. а) $2x^2+8x-y+1=0$, б) $x^2-8x-4y^2=0$

3. $4xy+3y^2+16x+12y-36=0$

4. а) $\rho=a(1+\sin\phi)$; б) $x^6=a^2(x^4-y^4)$

5. Определить уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая движется так, что ее расстояние от точки $A(3,0)$ остается вдвое меньше расстояния от точки $B(6,0)$.

Вариант № 15

1. $y = \dfrac{-2x+3}{x-2}$

2. а) $x - \dfrac{1}{2}y^2 + 2y + 4 = 0$, б) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$

3. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

4. а) $\rho = a(2 - \cos\phi)$; б) $(x^2 + y^2)^2 = 4y^3$

5. Определить уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая движется так, что ее расстояние от точки $F(-1,0)$ остается вдвое меньше расстояния от прямой $x = -4$.

Вариант № 16

1. $y = \dfrac{-3x+7}{x+6}$

2. а) $2x^2 + 8x - y + 5 = 0$, б) $x^2 - 8x - 4y^2 - 8y = 0$

3. $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$

4. а) $\rho = a\sin^2 2\phi$; б) $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2 + 5y^2$

5. Вывести уравнение геометрического места точек, для которых отношение расстояния до точки $F(-4,0)$ к расстоянию до прямой $4x + 25y = 0$ равно $\dfrac{4}{5}$.

Вариант № 17

1. $y = \dfrac{8x+6}{2x+1}$

2. а) $y + 5x^2 - 10x - 3 = 0$, б) $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$

3. $14x^2 + 24xy - 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$

4. а) $\rho = a\sin 4\phi$; б) $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2y^2$

5. Определить уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая при своем движении все время остается вдвое ближе к точке $A(1,0)$, чем к точке $B(4,0)$.

Вариант № 18

1. $y = \dfrac{15x+8}{5x+5}$

2. а) $y + x^2 - 5x - 7 = 0$, б) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

3. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 14y + 33 = 0$

4. а) $\rho = a(\sin\phi + \cos\phi)$; б) $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^3y$

5. Найти уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x = 4$.

Вариант № 19

1. $y = \dfrac{2x+5}{2x-7}$

2. а) $y = 2x^2 + 4x + 3$, б) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$

3. $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

4. а) $\rho = a\sqrt{\cos 4\phi}$; б) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 + 4y^2)$

5. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x, y)$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox, чем от оси Oy.

Вариант № 20

1. $y = \dfrac{3x+1}{2x-5}$

2. а) $y = 4x^2 - 8x - 1$, б) $y^2 - 6y - x^2 + 2x = 0$

3. $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$

4. а) $\rho = a(\cos\phi + 4)$; б) $(x^2 + y^2 - 3x)^2 = 9(x^2 + y^2)$

5. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x, y)$, равноудаленная от точек $A(0,2)$ и $B(4,-2)$.

Вариант № 21

1. $y = \dfrac{2x-1}{3x+6}$

2. а) $x = -y^2 + 2y + 3$, б) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$

3. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y + 2 = 0$

4. а) $\rho = a(2 + \cos\phi)$; б) $x^2 + y^2 - x - y = 0$

5. Найти уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая при своем движении все время остается вдвое ближе к точке $A(3,0)$, чем к оси абсцисс.

Вариант № 22

1. $y = \dfrac{2-3x}{x+2}$

2. а) $x = 3y^2 - 6y + 4$, б) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 18y + 49 = 0$

3. $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$

4. а) $\rho = a\sin^2 4\phi$; б) $(x^2 + y^2)^2 = 2y(3x^2 - y)$

5. Найти уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая в каждый момент движения находится вдвое ближе к точке $A(1,0)$, чем к точке $B(-2,0)$.

Вариант № 23

1. $y = \dfrac{4x + 1}{3x - 6}$
2. а) $y + x^2 - 4x + 1 = 0$, б) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$
3. $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$
4. а) $\rho = a(2 - \sin\phi)$; б) $x^6 = a^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$
5. Найти уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая в каждый момент движения находится вдвое ближе к точке $A(2,0)$, чем к точке $B(8,0)$.

Вариант № 24

1. $y = \dfrac{6x - 5}{2x - 6}$
2. а) $3x^2 - 6x - y + 4 = 0$, б) $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$
3. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$
4. а) $\rho = a\sin 3\phi$; б) $(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$
5. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $F(2,2)$ и от оси Ox.

Вариант № 25

1. $y = \dfrac{x - 1}{2x - 6}$
2. а) $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$, б) $16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y - 199 = 0$
3. $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$
4. а) $\rho = a(1 - \sin\phi)$; б) $x^2 + y^2 = 4(\sqrt{x^2 + y^2} + y)$
5. Написать уравнение геометрического места точек, сумма расстояний каждой из которых от точки $F_1(2,0)$ и точки $F_2(-2,0)$ равна $2\sqrt{5}$.

Вариант № 26

1. $y = \dfrac{1 - 2x}{2x + 1}$
2. а) $2x^2 + 4x - y + 3 = 0$, б) $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$
3. $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 36x + 36y + 63 = 0$
4. а) $\rho = a(2 + \cos\phi)$; б) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$
5. Найти уравнение геометрического места точек, разность расстояний каждой из которых от точки $F_1(2,0)$ и точки $F_2(-2,0)$ равна 4.

Вариант № 27

1. $y = \frac{3x - 1}{3x + 2}$

2. а) $y = -x^2 - 2x + 3$, б) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 4 = 0$

3. $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0$

4. а) $\rho = a\sin^2\phi$; б) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4)$

5. Определить уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая движется так, что ее расстояние от точки $F(-1,0)$ остается вдвое меньше расстояния от прямой $x = -4$.

Вариант № 28

1. $y = \frac{4x - 3}{4x + 5}$

2. а) $y = 2x^2 + 4x + 3$, б) $x^2 + 4y^2 + 8y + 5 = 0$

3. $4x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$

4. а) $\rho = a\cos 3\phi$; б) $(x^2 + y^2)^3 = 36(x^2 - y^2)^2$

5. Определить уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая движется так, что ее расстояние от точки $A(3,0)$ остается вдвое меньше расстояния от точки $B(6,0)$.

Вариант № 29

1. $y = \frac{3 - 2x}{2x + 2}$

2. а) $\frac{1}{2}x^2 - x - y - 1 = 0$, б) $2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 1 = 0$

3. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$

4. а) $\rho = a\sqrt{\sin 2\phi}$; б) $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2(4x^2 + 3y^2)$

5. Написать уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая при своем движении находится вдвое ближе к точке $A(-1,1)$, чем к точке $B(-4,4)$.

Вариант № 30

1. $y = \frac{3 - 2x}{x + 1}$

2. а) $x = -2y^2 + 12y + 7$, б) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$

3. $5x^2 + 8xy + 3y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$

4. а) $\rho = a(1 + \cos\phi)$; б) $x^2 + y^2 = 2(\sqrt{x^2 + y^2} + y)$

5. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от оси Ox и от точки $F(0,4)$.