II

Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями с помощью тройного интеграла. При вычислении тройного интеграла перейти к цилиндрическим или сферическим координатам.

1. $z = 2 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,\ y = 0 \quad (y \geq 0)$
2. $x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$
   $(|\, z \,| \geq \sqrt{x^2 + y^2})$
3. $z = 1 + x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = -\sqrt{x^2 + y^2}$
4. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 0$
5. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ x = 0 \quad (x \geq 0)$
6. $z = 2 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ x = 0$
   $(x \geq 0),\ z = 0,\ x = y \quad (x \geq y)$
7. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}$
8. $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1 + x^2 + y^2,\ z = 0,$
   $x = 0 \quad (x \geq 0),\ x + y = 0 \quad (x \geq -y)$
9. $z = 2 - x^2 - y^2,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x = 0,\ y = 0 \quad (x, y \geq 0)$
10. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (z \geq \frac{\sqrt{2}}{2})$
11. $z = x^2 + y^2,\ z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2},\ x = 0,\ y = 0 \quad (x, y \geq 0)$
12. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)},\ z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

13. $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2},\ z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 = 1$

14. $z = 3 - \sqrt{x^2+y^2},\ z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 = 1,$
$y = 0 \quad (y \geq 0)$

15. $z = 1 + \sqrt{1-x^2-y^2},\ z = \sqrt{x^2+y^2}, x = 0 \quad (x \geq 0)$

16. $z = x^2+y^2,\ z = 2(x^2+y^2),\ z = 1$

17. $z = 3 - x^2 - y^2,\ z = \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 = 1,$
$y = 0,\ x = 0 \quad (x, y \geq 0)$

18. $z = \sqrt{x^2+y^2},\ z = \sqrt{3(x^2+y^2)},\ z = 3$

19. $z = 1 - \sqrt{1-x^2-y^2},\ z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}, y = 0 \quad (y \geq 0)$

20. $z = x^2+y^2, z = \frac{1}{2}(x^2+y^2),\ z = 1,\ x = 0,\ y = 0 \quad (x, y \geq 0)$

21. $z = \sqrt{x^2+y^2},\ z = 1 + \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 = 1,$
$x = 0 \quad (x \geq 0),\ x = y \quad (x \leq y)$

22. $x^2+y^2 = 1,\ x^2+z^2 = 1$

23. $z = 3 - \sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2 = 1,\ x^2+y^2 = 4, z = 0$

24. $z = \sqrt{1-x^2-y^2},\ z = \sqrt{4-x^2-y^2},\ z = \sqrt{x^2+y^2}$

25. $z = x^2+y^2,\ z = 2(x^2+y^2),\ z = 2 - x^2 - y^2$

26. $z = \sqrt{2(x^2+y^2)},\ z = \sqrt{x^2+y^2},\ z = 1$

27. $z = 2 + \sqrt{1-x^2-y^2},\ x^2+y^2 = 1,$
$z = \sqrt{x^2+y^2}, x = 0 \quad (x \geq 0)$

28. $z = \sqrt{1-x^2-y^2},\ z = \sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2 = 1$

29. $z = x^2+y^2,\ z = 2(x^2+y^2), x^2+y^2 = 1, y = 0 \quad (y \geq 0)$

30. $z = \sqrt{x^2+y^2},\ z = \sqrt{3(x^2+y^2)},\ x^2+y^2 = 1$

III

Доказать, что данное выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом функции $\Phi(x,y)$ и найти ее с помощью криволинейного интеграла.

1. $\left(-\frac{y}{x^2+y^2}+y\right)dx+\left(\frac{x}{x^2+y^2}+x\right)dy$

2. $\frac{y\cdot 2^{y/x}}{x^2}dx-\frac{2^{y/x}}{x}dy$

3. $(2x\cdot e^{x^2-y^2}-\sin x)dx+(2y\cdot e^{x^2-y^2}+\sin y)dy$

4. $(e^{xy}+xy\cdot e^{xy}+2)dx+(x^2\cdot e^{xy}+1)dy$

5. $\left(\frac{1}{x}+y\right)dx+\left(\frac{1}{y}+x\right)dy$

6. $(xy\cdot e^{x^2y}+\cos 2x+x^2)dx+\left(\frac{x^2}{2}e^{x^2y}+y\right)dy$

7. $\left(e^{x+y^3}+\frac{1}{2}y\right)dx+\left(3y^2\cdot e^{x+y^3}+\frac{1}{2}x+3y^2\right)dy$

8. $\left(\sin x+\frac{\cos x\cdot\cos y}{\sin^2 x}\right)dx+\left(\frac{\sin y}{\sin x}-\cos y\right)dy$

9. $\left(\cos x-\frac{\sin x}{\sin y}\right)dx-\left(\sin y+\frac{\cos x\cdot\cos y}{\sin^2 y}\right)dy$

10. $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+2x\right)dx+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}+6y\right)dy$

11. $(\sin^2 y-y\sin 2x)dx+(x\cdot\sin 2y+\cos^2 x+1)dy$

12. $\frac{1-y}{x^2y}dx+\frac{1-2x}{y^2x}dy$

13. $\left(\frac{y}{x}+\ln y+2x\right)dx+\left(\ln x+\frac{x}{y}+1\right)dy$

14. $\left[\frac{y^2}{(x+y)^2}-\frac{1}{x}\right]dx+\left[\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{1}{y}\right]dy$

15. $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+x^2\right)dx+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}+y\right)dy$

16. $\frac{x+y}{xy}dx+\frac{y-x}{y^2}dy$

17. $\left[\frac{y^2}{(x+y)^2}-\frac{1}{x^2y}\right]dx+\left[\frac{x^2}{(x+y)^2}-\frac{1}{xy^2}\right]dy$

18. $\left(\frac{1}{y-1}-\frac{y}{(x-1)^2}-1\right)dx+\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{(y-1)^2}+2y\right)dy$

19. $\frac{1}{xy}dx-\frac{1}{y^2}(\ln x-\ln y^2+2)dy$

20. $\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\cos x}{y-1}+3x^2\right)dx+\frac{1-\sin x}{(y-1)^2}dy$

21. $(y^2\cdot e^{xy^2}+6x-8)dx+(2xy\cdot e^{xy^2}+8y)dy$

22. $(y^2\cdot e^{xy^2}+3)dx+(2xy\cdot e^{xy^2}-1)dy$

23. $\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)dx+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}+y\right)dy$

24. $\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}-\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx+\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}-\frac{1}{y}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}\right)dy$

25. $\frac{\cos x\cdot\cos y}{\sin^2 x}dx+\left(\cos y+\frac{\sin y}{\sin x}\right)dy$

26. $\left(1-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\frac{x}{x^2+y^2}-1\right)dy$

27. $(\cos x\cdot\cos y+6x+3)dx+(18y^2-\sin x\cdot\sin y)dy$

28. $\left(2\cos 2x\cdot\cos 3y-\frac{1}{x}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-3\sin 2x\cdot\sin 3y\right)dy$

29. $\left(\ln y+\frac{y}{x}\right)dx+\left(\ln x+\frac{x}{y}\right)dy$

30. $\frac{1-2y}{x^2y}dx+\frac{1-x}{y^2x}dy$

IV

Вычислить поток векторного поля

$$\vec{a}=a_x(x,y,z)\vec{i}++a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$$

из тела T, ограниченного указанными поверхностями, двумя способами: с помощью поверхностного интеграла 1-го рода и с помощью поверхностного интеграла 2-го рода. Результат проверить с помощью теоремы Гаусса-Остроградского.

1. $T:\quad z=-1+\sqrt{x^2+y^2},\ x=0\ (x\geq 0),\ z=0;\ \vec{a}=2\vec{i}+z\vec{k}$
2. $T:\quad z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ x=0\ (x\geq 0),\ z=0;\ \vec{a}=\vec{j}+z\vec{k}$
3. $T:\quad z=-1+\sqrt{x^2+y^2},\ x=0\ (x\leq 0),\ z=0;\ \vec{a}=\vec{i}+z\vec{k}$
4. $T:\quad z=1-\sqrt{x^2+y^2},\ y=0\ (y\geq 0),\ z=0;\ \vec{a}=x\vec{i}-\vec{j}$
5. $T:\quad z=-1+\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,\ y=0\ (y\geq 0);\ \vec{a}=\vec{i}+3z\vec{k}$
6. $T:\quad z=-1+\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,\ y=0\ (y\geq 0);\ \vec{a}=\vec{i}+2y\vec{j}$
7. $T:\quad z=-\sqrt{1-x^2-y^2},\ z=0,\ x=0\ (x\geq 0);\ \vec{a}=\vec{i}+2y\vec{j}$
8. $T:\quad z=1-\sqrt{x^2+y^2},\ x=0\ (x\geq 0),\ z=0;\ \vec{a}=\vec{i}-z\vec{k}$
9. $T:\quad z=1-\sqrt{x^2+y^2},\ y=0\ (y\leq 0),\ z=0;\ \vec{a}=\vec{i}+2z\vec{k}$
10. $T:\quad z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ y=0\ (y\geq 0),\ z=0;\ \vec{a}=2x\vec{i}+\vec{k}$