Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МОРСКОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики

***РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ ПО РАЗДЕЛУ***

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Санкт-Петербург
2012

**Типовой расчет**

**«Обыкновенные дифференциальные уравнения»**

# Вариант расчета (образец)

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения
$$xe^y dx - x^2 e^y dy = e^y dy + 2xdx .$$
2. Найти решение задачи Коши:
$$y' + 2xy = 2x ,\ y(0) = 2 .$$
3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения
$$(2xy - 5)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0 .$$
4. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y''' \operatorname{ctg} x = 2y'' .$$
5. Найти решение задачи Коши.
$$y'' = 16 \sin y \cos y ,\ y(0) = \pi / 2 ,\ y'(0) = 4 .$$
6. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 3x^2 + 2x + 80.$$
7. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} .$$
8. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y'' - 9y = e^{3x} \cos x .$$
9. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y'' + y = 3\sin 2x + \cos x .$$
10. Найти общее решение дифференциального уравнения
$$y'' + y = \operatorname{tg} x .$$
11. Решить систему дифференциальных уравнений методом Эйлера и операционным методом:

а) $\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 3x + 1 \end{cases}$, $x(0) = 2$, $y(0) = 0$;

б) $\begin{cases} x' = 5x + y + 1 \\ y' = -x + 3y - 2 \end{cases}$, $x(0) = \dfrac{11}{16}$, $y(0) = \dfrac{9}{16}$;

в) $\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = -2x + t \end{cases}$, $x(0) = \dfrac{1}{2}$, $y(0) = -\dfrac{1}{2}$.

## Справочный материал

*Обыкновенным дифференциальным уравнением* (ОДУ) *первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0,$$

где $x$ - независимая переменная, $y = y(x)$ - дифференцируемая функция, $y'$ - производная этой функции по переменной $x$.

Уравнение вида

$$y' = f(x, y)$$

называется уравнением, *разрешенным относительно производной*.

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной, можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

или

$$dy = f(x, y)dx,$$

а в более общем случае

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Функция $\varphi(x)$ называется *решением* уравнения на интервале $(x_1, x_2)$, если она определена на этом интервале, непрерывно-дифференцируема на нем, и если подстановка этой функции в исходное уравнение обращает его в тождество для $\forall x \in (x_1, x_2)$.

Решить дифференциальное уравнение - значит, найти функцию $y = \varphi(x)$, являющуюся решением.

Процесс нахождения решения ОДУ называется *интегрированием* дифференциального уравнения.

Задача, в которой требуется найти решение дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши.*

**Теорема существования и единственности решения задачи Коши.**

Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ определена в некоторой области *D* плоскости $Oxy$, содержащей точку $(x_0, y_0)$. Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x, y)$ есть непрерывная функция двух переменных $x$ и $y$ в области *D*;

2) $f(x, y)$ имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ограниченную в области *D*,

тогда найдется интервал $(x_0 - h, x_0 + h)$, на котором существует единственное решение $y = \varphi(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Функция $y = \varphi(x, C)$, где $C$ - произвольная постоянная, называется *общим решением* уравнения $F(x, y, y') = 0$, если

1) она является решением этого уравнения при любых допустимых значениях произвольной постоянной $C$;

2) каково бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0$, где точка $(x_0, y_0)$ принадлежит области, в которой выполняются условия существования и единственности решения задачи Коши, можно подобрать такое единственное значение $C_0$ постоянной $C$, что $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Функция $\psi(x, y, C) = 0$ называется *общим интегралом* уравнения, если она задает общее решение уравнения в неявном виде.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением*.

Решение, полученное из общего при некотором допустимом значении произвольной постоянной, называется *частным решением*.

Частное решение может быть получено из общего решения при некотором значении константы $C$. Особое решение не может быть получено из общего ни при каком значении произвольной постоянной $C$, включая $C = \infty$.

*Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными* называется уравнение вида:

$$y' = f(x)g(y)$$

или

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0 .$$

Рассмотрим первое уравнение. Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$, умножим уравнение на $\frac{dx}{g(y)}$.

Получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx ,$$

или

$$\frac{dy}{g(y)} - f(x)dy = 0 .$$

Интегрируя это равенство, получим

$$\int \frac{dy}{g(y)} - \int f(x)dx = C .$$

Вычислив интегралы, найдем решение уравнения в виде общего интеграла. Если из этого уравнения можно выразить $y(x)$ в явном виде, тогда функция $y = y(x, C)$ будет являться общим решением уравнения.

Рассмотрим второе уравнение. Умножая уравнение на $\frac{1}{M_2(y)N_1(x)}$, получим

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0 .$$

Это равенство можно интегрировать, причем, первое слагаемое в левой части по $x$, а второе - по $y$:

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C .$$

Это выражение является общим интегралом уравнения.

Уравнения вида $M(x)dx + N(y)dy = 0$ являются *уравнениями с разделенными переменными.*

Общим интегралом такого уравнения будет выражение:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C .$$

При умножении уравнений на $\frac{dx}{g(y)}$ и $\frac{1}{M_2(y)N_1(x)}$ мы могли потерять решения исходного уравнения вида $g(y) = 0$ (для первого уравнения) и $M_2(y) = 0$, $N_1(x) = 0$ (для второго уравнения). Эти решения необходимо рассмотреть отдельно. Возможны три варианта. Решения, удовлетворяющие соотношениям $g(y) = 0$, $M_2(y) = 0$, $N_1(x) = 0$:

1) могут не являться решениями исходных дифференциальных уравнений;
2) могут являться **частными** решениями исходных дифференциальных уравнений;
3) могут являться **особыми** решениями исходных дифференциальных уравнений.

Это проверяется непосредственной подстановкой решений в исходное уравнение.

**Теорема**. **(О существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения с разделяющимися переменными).**

Пусть дано дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$y' = f(x)g(y),$$

где $f(x)$ и $g(y)$ - непрерывные функции на прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ и $g(y) \neq 0$.

Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in \Pi$, решение задачи Коши существует и единственно.

Полезным будет вспомнить таблицу интегралов от основных элементарных функций.

**Таблица интегралов**

| | |
|---|---|
| **1.** $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$ | **2.** $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$ |
| **3.** $\int a^x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ | **4.** $\int e^x dx = e^x + C$ |
| **5.** $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | **6.** $\int \cos x dx = \sin x + C$ |
| **7.** $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ | **8.** $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ |
| **9.** $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$ | **10.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ |
| **11.** $\int \dfrac{1}{\sin x} dx = \ln\left\|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right\| + C$ | **12.** $\int \dfrac{1}{\cos x} dx = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\| + C$ |
| **13.** $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$ | **14.** $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$ |
| **15.** $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$ | **16.** $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$ |
| **17.** $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{x-a}{x+a}\right\| + C$ | **18.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$ |
| **19.** $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$ | **20.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 + a}\right\| + C$ |

## Задача 1

Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$xe^y dx - x^2 e^y dy = e^y dy + 2x dx.$$

## Решение задачи 1

Сгруппируем слагаемые в данном уравнении и вынесем за скобки общие множители:

$$xe^y dx - 2x dx = e^y dy + x^2 e^y dy,$$

$$(xe^y - 2x)dx - (e^y + x^2 e^y)dy = 0,$$

$$x(e^y - 2)dx - e^y(1 + x^2)dy = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные путем деления уравнения на выражение $(1 + x^2)\cdot(e^y - 2)$, имеем

$$\frac{x}{1+x^2}dx - \frac{e^y}{(e^y - 2)}dy = 0.$$

Интегрируем последнее уравнение:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx - \int \frac{e^y}{(e^y-2)}\,dy = C_1,$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} - \int \frac{d(e^y-2)}{(e^y-2)} = C_1,$$
$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln\left|e^y-2\right| = C_1,$$
или
$$\ln\sqrt{1+x^2} - \ln\left|e^y-2\right| = C_1,$$
Преобразуем полученный общий интеграл.

Так как $C_1$ - произвольная постоянная, представим ее в виде $C_1 = \ln|C|$.
Тогда
$$\ln\sqrt{1+x^2} - \ln\left|e^y-2\right| = \ln|C|$$
Отсюда по свойству логарифма
$$\ln\frac{\sqrt{1+x^2}}{\left|e^y-2\right|} = \ln|C|,$$
или
$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{e^y-2} = C.$$
При делении на $(1+x^2)\cdot(e^y-2)$ мы могли потерять решение $y=\ln 2$. Непосредственной подстановкой в дифференциальное уравнение убеждаемся, что $y=\ln 2$, действительно, является его решением:
$$x(e^{\ln 2}-2)dx - e^{\ln 2}(1+x^2)d\ln 2 = 0$$
$$x(2-2)dx - 2(1+x^2)\cdot 0 = 0,$$
$$0 = 0.$$
Однако решение $y=\ln 2$ может быть получено из общего решения при $C=\infty$, то есть не является особым решением.

Окончательно получаем общий интеграл вида
$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{e^y-2} = C.$$

## Справочный материал

*Линейным дифференциальным уравнением 1-ого порядка* называется уравнение вида
$$y' + p(x)y = g(x).$$
Это уравнение линейно относительно $y$ и $y'$.

Если функция $g(x)\equiv 0$, уравнение принимает вид $y'+p(x)y=0$. В этом случае оно называется *однородным* линейным ОДУ. Иначе уравнение называется *неоднородным* линейным ОДУ.

Найдем решение неоднородного уравнения *методом Лагранжа*. Решение состоит из двух этапов.

**1 этап**. Рассмотрим однородное уравнение $y'+p(x)y=0$, где $p(x)$ - непрерывная функция. Оно является также уравнением с разделяющимися переменными. Для него выполнены условия теоремы существования и единственности задачи Коши.

Пусть $y\neq 0$. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \text{ или } \frac{dy}{y} + p(x)dx = 0$$

и проинтегрируем его:

$$\int \frac{dy}{y} + \int p(x)dx = C_1.$$

Получим

$$\ln|y| + \ln e^{\int p(x)dx} = \ln|C_1|$$

или

$$|y| = |C|e^{-\int p(x)dx}.$$

В силу произвольности постоянной $C$ общее решение однородного уравнения примет вид:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Заметим, что решение было получено при условии $y \neq 0$. Проверим, является ли $y = 0$ решением однородного уравнения. Подставим его в уравнение. Уравнение превращается в тождество. Следовательно, $y = 0$ есть решение однородного линейного уравнения. Проверим, является оно особым или частным решением. Так как это решение может быть получено из общего решения при $C = 0$, то это решение - частное.

Особых решений уравнение не имеет. Таким образом, на первом этапе было получено общее решение однородного уравнения.

**2 этап**. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в том же виде, что и полученное общее решение однородного уравнения, заменяя произвольную постоянную $C$ на новую искомую функцию $C(x)$:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

$C(x)$ следует подобрать так, чтобы функция $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ являлась решением исходного неоднородного уравнения. Подставим ее в исходное неоднородное уравнение.

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x).$$

Отсюда $C'(x)e^{-\int p(x)dx} = g(x)$ или $C'(x) = g(x)e^{\int p(x)dx}$. Интегрируя, получим вид функции $C(x)$.

$$C(x) = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + \widetilde{C}.$$

Следует заметить, что интеграл существует, так как $g(x)$ по условию теоремы является непрерывной функцией.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + \widetilde{C}\right),$$

или

$$y(x) = \widetilde{C}e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

### Задача 2

Найти решение задачи Коши:

$$y' + 2xy = 2x, \; y(0) = 2.$$

### Решение задачи 2

**Метод Лагранжа**.

**1 этап**. Рассмотрим однородное уравнение

$$y' + 2xy = 0.$$

Оно является также уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 .$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y} = -2xdx .$$

Общий интеграл этого уравнения

$$\int \frac{dy}{y} + \int 2xdx = C_1 .$$

Интегрируя, получим

$$\ln|y| + x^2 = C_1 ,$$

откуда $\ln|y| = C_1 - x^2$, то есть $|y| = e^{C_1 - x^2} = e^{C_1} e^{-x^2}$ .

Обозначив $C = e^{C_1}$, и опустив знак $\pm$ перед $C$, получаем общее решение однородного уравнения в виде

$$y = Ce^{-x^2} .$$

**2 этап**. Решение исходного неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = C(x)e^{-x^2} ,$$

где $C(x)$ - неизвестная функция.

Имеем $y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}$ . Подставим $y$ и $y'$ в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2x ,$$

отсюда

$$C'(x)e^{-x^2} = 2x .$$

Находим $C(x) = \int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + \widetilde{C}$ .

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$y = (e^{x^2} + \widetilde{C})e^{-x^2}$$

или

$$y = 1 + \widetilde{C}e^{-x^2} .$$

Решим теперь задачу Коши. Подставим начальное условие $y(0) = 2$ в общее решение неоднородного уравнения:

$$2 = 1 + \widetilde{C} \Rightarrow \widetilde{C} = 1$$

Решением задачи Коши является функция

$$y = 1 + e^{-x^2} .$$

## Справочный материал

Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется уравнением в *полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой дифференцируемой функции двух переменных $u(x, y)$, то есть левая часть уравнения представима в виде

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y),$$

или

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy .$$

Для того чтобы уравнение было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Общий интеграл уравнения можно найти двумя способами.

**1 способ**. Общий интеграл уравнения в полных производных находится по формулам

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = C$$

или

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = C,$$

где $x_0$ и $y_0$ - любые значения, входящие в область определения функций $M(x,y)$ и $N(x,y)$. Их выбирают таким образом, чтобы полученный интеграл легче вычислялся. Чаще всего принимают $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$.

**2 способ**. Общий интеграл уравнения находится из системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y).$$

### Задача 3

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$(2xy - 5)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0.$$

### Решение задачи 3

Проверим, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то есть покажем, что $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Здесь $M(x;y) = 2xy - 5$, а $N(x;y) = 3y^2 + x^2$. Поэтому

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x,$$

откуда видно, что $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Следовательно, условие выполнено, и уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

**1 способ.**

Запишем уравнение в виде его общего интеграла

$$\int_{x_0}^{x} (2xy - 5)dx + \int_{y_0}^{y} (3y^2 + x^2)dy = C.$$

Выбираем вариант подстановки: либо в первом подынтегральном выражении полагаем $y = y_0$, либо во втором полагаем $x = x_0$.

Выберем подстановку со вторым подынтегральным выражением.

$$\int_{x_0}^{x}(2xy-5)dx+\int_{y_0}^{y}(3y^2+x_0^2)dy=C;$$

Пусть $x_0=0$ и $y_0=0$, тогда

$$\int_{0}^{x}(2xy-5)dx+\int_{0}^{y}3y^2dy=C\,.$$

Вычислим интегралы:

$$(x^2y-5x)\Big|_0^x+y^3\Big|_0^y=C\,.$$

Подставив пределы интегрирования, получим общий интеграл уравнения:

$$x^2y-5x+y^3=C\,.$$

**2 способ**.

Так как уравнение в полных дифференциалах, следовательно, существует функция $u(x,y)$, такая что

$$(2xy-5)dx+(3y^2+x^2)dy=du(x,y).$$

Тогда для функции $u(x,y)$ справедливы равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy-5\,,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2+x^2\,.$$

Проинтегрируем равенство $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy-5$ по $x$.

Получим, что

$$u=yx^2-5x+\varphi(y).$$

Найдем $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+\varphi'(y).$$

С другой стороны, $\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2+x^2$. Следовательно,

$$x^2+\varphi'(y)=3y^2+x^2\,,$$

откуда

$$\varphi'(y)=3y^2\,.$$

Тогда

$$\varphi(y)=\int 3y^2dy=y^3+C_1\,.$$

Следовательно,

$$u=yx^2-5x+y^3+C_1\,.$$

Общий интеграл уравнения имеет вид $u=C$, то есть $yx^2-5x+y^3=C$.

## Справочный материал

## Дифференциальные уравнения высших порядков

Обыкновенным дифференциальным уравнением $n$- ого порядка называется уравнение вида

$$F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right)=0,$$

где $x$ – независимая переменная, $y=y(x)$ – искомая функция, $y',\ y'',\ldots,\ y^{(n)}$ – производные функции $y(x)$ по переменной $x$.

Порядок старшей производной называется *порядком* уравнения.

Уравнение вида

$$y^{(n)}=F_1\left(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}\right)$$

называется уравнением, разрешенным относительно старшей производной.

Функция $\varphi(x)$ называется решением уравнения на интервале $(x_1, x_2)$, если она определена на этом интервале, $n$ раз непрерывно-дифференцируема, и подстановка ее в уравнение обращает уравнение в тождество при $\forall x \in (x_1, x_2)$.

Задача нахождения решения $\varphi(x)$ уравнения $F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right)=0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_{01}$, …, $y^{(n-1)}(x_0)=y_{0n-1}$ называется *задачей Коши* для уравнения $n$-ого порядка.

**Теорема существования и единственности задачи Коши.**

Пусть задано уравнение

$$y^{(n)}=f\left(x, y, y', y'',... y^{(n-1)}\right)$$

и начальные условия

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_{01},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{0n-1}.$$

Если функция $f\left(x, y, y', y'',... y^{(n-1)}\right)$ непрерывна в некоторой окрестности начальных условий, и ее частные производные первого порядка непрерывны по $y, y', y'',..., y^{(n-1)}$ в этой же окрестности, то заданным начальным условиям соответствует одно решение дифференциального уравнения для всех $x$ из этой окрестности, и это решение единственно.

Функция $y=\varphi(x, C_1, C_2,..., C_n)$, где $C_1,\ldots,\ C_n$ – произвольные постоянные, называется общим решением уравнения $y^{(n)}=f\left(x, y, y', y'',... y^{(n-1)}\right)$, если

1) она является решением этого уравнения при любых допустимых значениях постоянных $C_1,\ldots,\ C_n$;

2) для любых начальных условий $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_{01}$, …, $y^{(n-1)}(x_0)=y_{0n-1}$ система уравнений

$$\begin{cases}\varphi(x_0, C_1, C_2,..., C_n)=y_0\\ \varphi'(x_0, C_1, C_2,..., C_n)=y_{01}\\ \ldots\ldots.\\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2,..., C_n)=y_{0n-1}\end{cases}$$

однозначно разрешима относительно произвольных постоянных $C_1,\ldots,\ C_n$. То есть найдется единственный набор произвольных постоянных $C_{01},\ldots,\ C_{0n}$, являющихся решением системы и таких что $\varphi(x_0, C_{01}, C_{02},..., C_{0n})=y_0$.

Общее решение дифференциального уравнения $n$- ого порядка всегда содержит ровно $n$ произвольных констант.

Решение, полученное из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1,..., C_n$, называется *частным* решением.

Функция $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ называется *общим интегралом* уравнения, если она задает общее решение уравнения в неявном виде.

### Уравнения, допускающие понижение порядка

**1 тип**. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$.

Общее решение данного уравнения находится $n$-кратным интегрированием.

$$y = \underbrace{\int dx \int dx \ldots \int f(x)}_{n \text{ раз}} dx + C_1 + C_2 x + C_3 x^2 \ \ldots + C_n x^{n-1}.$$

**2 тип.** Уравнение вида $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0$.

Это уравнение не содержит искомой функции $y(x)$ и ее производных до порядка $k-1$ включительно. Порядок такого уравнения можно понизить на $k$ единиц заменой $p = y^{(k)}$. Здесь функция $p$ рассматривается как новая неизвестная функция от $x$, то есть $p = p(x)$. При такой замене уравнение примет вид $F(x; p; p'; ...; p^{(n-k)}) = 0$. Если удастся найти общее решение полученного уравнения $p = \varphi(x, C_1, ..., C_{n-k})$, то общее решение исходного уравнения найдется $n$-кратным интегрированием уравнения

$$y^{(n)} = \varphi(x, C_1, ..., C_{n-k}).$$

**3 тип.** Уравнение вида $F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$.

Это уравнение не содержит независимую переменную $x$. Порядок уравнения можно понизить на единицу, используя подстановку $y' = p$. Здесь функция $p$ рассматривается как новая неизвестная функция от $y$, то есть $p = p(y)$.

Все производные $y'', ..., y^{(n)}$ выражаются через производные от функции $p$ по $y$. Соответствующие формулы имеют вид:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y' = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p^2\frac{d^2 p}{dp^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2$$

и так далее. Подставив эти выражения для производных в исходное уравнение, получим дифференциальное уравнение $(n-1)$-ого порядка относительно новой неизвестной функции $p(y)$.

### Задача 4

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' \operatorname{ctg} x = 2y''.$$

### Решение задачи 4

Дано дифференциальное уравнение третьего порядка. Оно относится к типу уравнений, допускающих понижение порядка, не содержащих явно искомой функции $y$. Полагаем $y'' = p$, где $p = p(x)$, тогда $y''' = p'$ и исходное уравнение принимает вид:

$$p' \operatorname{ctg} x = 2p,$$

или

$$p' - \frac{2p}{\operatorname{ctg} x} = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Запишем его в виде

$$\frac{dp}{dx} - \frac{2p}{\operatorname{ctg} x} = 0,$$

или

$$\frac{dp}{p}-\frac{2dx}{\operatorname{ctg} x}=0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\int\frac{dp}{p}-\int\frac{2dx}{\operatorname{ctg} x}=0,$$

$$\ln|p|+2\ln|\cos x|=C,$$

или

$$\ln|p|+2\ln|\cos x|=\ln C_1,$$

$$\ln|p|=-2\ln|\cos x|+\ln C_1;$$

$$\ln|p|=\ln\left|\frac{C_1}{\cos^2 x}\right|;$$

$$p=\frac{C_1}{\cos^2 x}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем

$$y''=\frac{C_1}{\cos^2 x}.$$

Понижаем степень нового уравнения двукратным интегрированием:

$$y'=C_1\int\frac{dx}{\cos^2 x}=C_1\operatorname{tg} x+C_2.$$

$$y=C_1\int\operatorname{tg} x dx+C_2\int dx=C_1\int\frac{\sin x}{\cos x}dx+C_2x=-C_1\int\frac{d\cos x}{\cos x}+C_2x=-C_1\ln|\cos x|+C_2x+C_3.$$

Общее решение уравнения:

$$y=-C_1\ln|\cos x|+C_2x+C_3.$$

### Задача 5

Найти решение задачи Коши $y''=16\sin y\cos y$, $y(0)=\pi/2$, $y'(0)=4$.

### Решение задачи 5

Исходное уравнение не содержит независимую переменную. Заменой $y'=p$ и $y''=p\frac{dp}{dy}$, уравнение приводится к виду

$$p\,p'=16\sin y\cos y.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Запишем его в виде

$$p\,dp=16\sin y\cos y dy$$

и проинтегрируем.

$$\int p\,dp=\int 16\sin y\cdot\cos y dy,$$

$$\int p\,dp=\int 16\sin y\,d(\sin y),$$

$$\frac{p^2}{2}=16\frac{\sin^2 y}{2}+C_1,$$

$$p^2=16\sin^2 y+C_1.$$

Воспользуемся начальными условиями $y(1)=\pi/2$, $y'(1)=4$. Получим

$$4^2=16\sin^2\frac{\pi}{2}+C_1$$

или

$$16=16+C_1.$$

Отсюда $C_1 = 0$ и, следовательно,

$$p^2 = 16\sin^2 y\,,$$

$$p = \pm\sqrt{16\sin^2 y} = \pm 4\sin y\,.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$y' = \pm 4\sin y\,.$$

Воспользуемся начальными условиями, чтобы выбрать знак. Из того, что $y(0) = \pi/2$, $y'(0) = 4$, следует, что нужно выбрать положительный знак:

$$y' = 4\sin y\,.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными; запишем его в виде

$$\frac{dy}{\sin y} = 4dx\,.$$

Вычислим интеграл $\int \frac{dy}{\sin y}$, воспользовавшись универсальной тригонометрической подстановкой $t = \operatorname{tg}\frac{y}{2}$:

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \int \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| + C\,.$$

Получим $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| + C = 4x$, откуда $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = e^{4x} + C_2$.

Найдем константу, используя начальные условия: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = C_2$, то есть $C_2 = 1$. Следовательно, решение задачи Коши имеет вид

$$\operatorname{tg} y = e^{4x} + 1\,.$$

## Справочный материал

Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_n \cdot y = f(x)\,,$$

где $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ - постоянные, называется линейным уравнениям $n$-ого порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение такого уравнения имеет вид

$$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}\,,$$

то есть является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_n \cdot y = 0$$

и частного решения неоднородного уравнения.

Для нахождения общего решения однородного уравнения составляется характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\,.$$

Находятся корни характеристического уравнения.

Общее решение ищется в виде

$$y_{о.о.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n\,.$$

При нахождении $y_1, y_2, \ldots y_n$ возможны следующие случаи.

- **Корни характеристического уравнения действительные и различные**.

Обозначим эти корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$. Таким корням в формуле общего решения будут соответствовать

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_k = e^{\lambda_k x}.$$

- **Среди корней характеристического уравнения имеются комплексные**.

Корням $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ в формуле общего решения будут соответствовать

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

- **Среди корней характеристического уравнения имеются кратные.**

Если $\lambda$ - корень характеристического уравнения кратности $k$, то в формуле общего решения ему соответствуют

$$y_1 = e^{\lambda x},\ y_2 = e^{\lambda x} x, \ldots, y_k = e^{\lambda x} x^{k-1}.$$

Вернемся теперь к решению неоднородного уравнения.

Рассмотрим сначала случай правой части $f(x)$ *специального вида.* Такой правой частью является функция вида

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_l(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx),$$

или, в частном случае,

$$f(x) = e^{\alpha x} P_l(x),$$

где $P_l$ - многочлен степени $l$, а $Q_m(x)$ - многочлен степени $m$.

Частное решение неоднородного уравнения $y_{ч.н.}$ со специальной правой частью ищется методом подбора.

- **Если правая часть имеет вид**

$$f(x) = e^{\alpha x} P_l(x),$$

то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y_{ч.н.} = x^s e^{\alpha x} \widetilde{P}_l(x),$$

где $s$ - кратность корня $\lambda = \alpha$ характеристического уравнения, $\widetilde{P}_l(x)$ - многочлен степени $l$ с неопределенными коэффициентами.

Если же $\alpha$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$.

- **Если правая часть имеет вид**

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_l(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x),$$

то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y_{ч.н.} = x^s e^{\alpha x}(\widetilde{P}_k(x)\cos \beta x + \widetilde{Q}_k(x)\sin \beta x),$$

где $s$ - кратность корня $\lambda = \alpha + i\beta$ характеристического уравнения, $k = \max(l, m)$, $\widetilde{P}_k(x), \widetilde{Q}_k(x)$ - многочлены степени $k$ с неопределёнными коэффициентами.

Если же $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$.

Неопределенные коэффициенты подбираются так, чтобы функция $y_{ч.н.}$ была решением исходного уравнения.

### Задача 6

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 3x^2 + 2x + 80.$$

### Решение задачи 6

Исходное уравнение – линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью $f(x) = 3x^2 + 2x + 80.$

Найдем сначала общее решение $y_{о.о.}$ соответствующего однородного уравнения

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda = 0\,.$$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$\lambda(\lambda - 1)^3 = 0\,.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = 0\,,\ \lambda_{2,3,4} = 1\,.$$

Тогда общее решение

$$y_{о.о.} = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + C_4 x^2 e^x$$

Правая часть исходного уравнения $f(x) = 3x^2 + 2x + 80$, то есть содержит только многочлен (так как $a = 0$). В этом случае частное решение ищется в виде $y_{ч.н.} = x^s \cdot P_l(x)$, где $s$ – кратность корня $\lambda = 0$ в характеристическом уравнении, а $l$ – степень многочлена в правой части исходного уравнения.

В данном случае $\lambda = 0$ – корень характеристического уравнения кратности 1, степень многочлена $l = 2$, поэтому частное решение уравнения ищется в виде

$$y_{ч.н.} = x \cdot \widetilde{P}_2(x) = x \cdot (Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Для того чтобы найти неопределенные коэффициенты, подставим $y_{ч.н.}$ в исходное уравнение

$$y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 3x^2 + 2x + 80.$$

Для этого сначала найдем производные до четвертого порядка включительно:

$$(y_{ч.н.})' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$(y_{ч.н.})'' = 6Ax + 2B$$

$$(y_{ч.н.})''' = 6A$$

$$(y_{ч.н.})^{(4)} = 0.$$

Получаем:

$$-18A + 3(6Ax + 2B) - \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = 3x^2 + 2x + 80\,,$$

или

$$-3Ax^2 + (18A - 2B)x + 6B - 18A - C = 3x^2 + 2x + 80\,.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях

$$\begin{cases} -3A = 3 \\ 18A - 2B = 2 \\ 6B - 18A - C = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -10 \\ C = -122 \end{cases}$$

Таким образом,

$$y_{ч.н.} = -x^3 - 10x^2 - 122x.$$

Общее решение уравнения

$$y_{о.н.} = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + C_4 x^2 e^x - x^3 - 10x^2 - 122x\,.$$

**Задача 7**

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}\,.$$

## Решение задачи 7

Исходное уравнение является неоднородным линейным уравнением 3 порядка с постоянными коэффициентами. Правая часть данного уравнения имеет специальный вид $f(x) = P_l(x) \cdot e^{\alpha x}$, а именно $f(x) = xe^{3x}$.

Найдем сначала общее решение $y_{о.о.}$ соответствующего однородного уравнения

$$y''' - 6y'' + 9y' = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0,$$

разложим на множители:

$$\lambda \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0,$$

или

$$\lambda \cdot (\lambda - 3)^2 = 0.$$

Найдем корни:

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_{2,3} = 3.$$

Таким образом, характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$ имеет корень $\lambda = 3$ кратности 2 и корень $\lambda = 0$ кратности 1. Решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{о.о.} = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{3x} x.$$

Найдем частное решение. Правая часть данного уравнения $f(x) = xe^{3x}$. Число $\lambda = 3$ является корнем кратности *s*=2, степень многочлена $l = 1$, поэтому частное решение уравнения ищется в виде:

$$y_{ч.н.} = x^2 \widetilde{P}_1(x) e^{3x} = x^2 (Ax + B) e^{3x} = Ax^3 e^{3x} + Bx^2 e^{3x}.$$

Для того чтобы найти неопределенные коэффициенты, подставим $y_{ч.н.}$ в исходное уравнение

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}.$$

Вычислим сначала производные до третьего порядка включительно:

$y'_{ч.н.} = 3e^{3x}x^2 A + 3e^{3x}x^3 A + 2e^{3x}xB + 3e^{3x}x^2 B$,

$y''_{ч.н.} = 6e^{3x}xA + 18e^{3x}x^2 A + 9e^{3x}x^3 A + 2e^{3x}B + +12e^{3x}xB + 9e^{3x}x^2 B$,

$y'''_{ч.н.} = 6e^{3x}A + 54e^{3x}xA + 81e^{3x}x^2 A + 27e^{3x}x^3 A + 18e^{3x}B + 54e^{3x}xB + 27e^{3x}x^2 B.$

Подставив $y', y'', y'''$ в исходное уравнение, получим:

$$6e^{3x}A + 54e^{3x}xA + 81e^{3x}x^2 A + 27e^{3x}x^3 A + 18e^{3x}B + 54e^{3x}xB + 27e^{3x}x^2 B - 36e^{3x}xA - 108e^{3x}x^2 A -$$
$$- 54e^{3x}x^3 A - 12e^{3x}B - 72e^{3x}xB - 54e^{3x}x^2 B + 27e^{3x}x^2 A + 27e^{3x}x^3 A + 12e^{3x}xB + 18e^{3x}x^2 B = xe^{3x}.$$

Приведя подобные члены и сократив уравнение на $e^{3x}$, получим

$$6A + 6B + 18Ax = x.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $x$:

$$18A = 1,$$
$$A + B = 0.$$

Отсюда $A = 1/18, \ B = -1/18$.

Частное решение

$$y_{ч.н.} = \frac{1}{18} e^{3x} x^3 - \frac{1}{18} e^{3x} x^2.$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид.

$$y_{о.н.} = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{3x} x + \frac{1}{18} e^{3x} x^3 - \frac{1}{18} e^{3x} x^2.$$

## Задача 8

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-9y = e^{3x}\cos x\ .$$

## Решение задачи 8

Исходное уравнение является неоднородным линейным уравнением 2 порядка с постоянными коэффициентами.

Найдем сначала общее решение $y_{o.o.}$ соответствующего однородного уравнения

$$y''-9y = 0\,.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 9 = 0\,,$$

найдем его корни:

$$\lambda_1 = 3\,,\ \lambda_2 = -3\,.$$

Следовательно, общее решение

$$y_{o.o.} = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-3x}\,.$$

Найдем теперь частное решение. Правая часть уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)\,,$$

где $l = 0$, $m = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.

Так как число $\alpha + \beta \cdot i = 3 + i$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$.

Частное решение ищем в виде

$$y_{ч.н.} = e^{3x}(A\cos x + B\sin x)\,.$$

Подставим его в исходное уравнение. Для этого вычислим производные до второго порядка включительно:

$$y'_{ч.н.} = 3\cdot e^{3x}\cdot(A\cdot\cos x + B\cdot\sin x) + e^{3x}\cdot(-A\cdot\sin x + B\cdot\cos x) =$$
$$= e^{3x}\cdot(3A\cdot\cos x + 3B\cdot\sin x - A\cdot\sin x + B\cdot\cos x)\,,$$

$$y''_{ч.н.} = 3\cdot e^{3x}(\cos x(B+3A) + \sin x(3B-A)) + e^{3x}(-\sin x(B+3A) + \cos(3B-A))\,.$$

После подстановки в уравнение получаем

$$e^{3x}(\cos x(3B+9A) + \sin x(9B-3A)) + \cos x(3B-A) - \sin x(B+3A) - 9\cdot e^{3x}(A\cos x + B\sin x) =$$
$$= e^{3x}\cos x\,.$$

Приведем подобные члены в последнем выражении:

$$\cos x(3B + 3B - A) + \sin x(9B - 3A - B - 3A + 9B) = \cos x$$

$$\cos x(6B - A) + \sin x(-6A - B) = \cos x$$

Приравняем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$:

$$\begin{cases} 6B - A = 1 \\ 6A + B = 0 \end{cases}$$

Решив систему, получим $A = -1/37,\ B = 6/37$. Тогда частное решение имеет вид

$$y_{ч.н.} = e^{3x} \cdot (-\frac{1}{37}\cos x + \frac{6}{37}\sin x) .$$

Общее решение исходного уравнения

$$y_{о.н.} = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-3x} + e^{3x} (\frac{6}{37}\sin x - \frac{1}{37}\cos x) .$$

## Справочный материал

**Принцип суперпозиции**. Пусть правая часть неоднородного линейного уравнения представима в виде суммы

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x) ,$$

то есть дифференциальное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x) .$$

Если $y_i(x)$ – частное решение уравнения $y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = f_i(x)$, где $i = 1,\ldots,k$, то частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_k(x).$$

Таким образом, для нахождения частных решений исходное уравнение разбивается на совокупность $k$ уравнений, для каждого из которых находится частное решение.

## Задача 9

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = 3\sin 2x + \cos x .$$

## Решение задачи 9

Общее решение этого уравнения имеет вид $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y^1_{ч.н.} + y^2_{ч.н.}$.

Решая однородное уравнение $y'' + y = 0$, найдем $y_{о.о.}$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$. Его корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Таким корням соответствует

$$y_{о.о.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Правая часть есть сумма двух функций $f_1(x) = 3\sin 2x,\ f_2(x) = \cos x$. Частное решение исходного уравнения будем искать в виде

$$y_{ч.н.} = y^1_{ч.н.} + y^2_{ч.н.}$$

Найдем $y^1_{ч.н.}$.

Рассмотрим уравнение

$$y'' + y = 3\sin 2x ,$$

Правая часть вида

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_l(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx) ,$$

где $l = 0$, $m = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$.

Так как число $\alpha + i\beta = 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$.

Частное решение ищется в виде

$$y^1_{ч.н.} = A\cos 2x + B\sin 2x .$$

Подставим $y^1_{ч.н.}$ в уравнение $y'' + y = 3\sin 2x$. Вычислим сначала производные функции $y^1_{ч.н.}$ до второго порядка включительно:

$y^1_{ч.н.} = A\cos 2x + B\sin 2x$ ,

$\left(y^{1}_{ч.н.}\right)' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$,

$\left(y^{1}_{ч.н.}\right)'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$.

Подставим значения $y^{1}_{ч.н.}$ и $\left(y^{1}_{ч.н.}\right)''$ в уравнение:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = 3\sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в правой и левой части уравнения, получим систему для определения коэффициентов $A$ и $B$:

$$\begin{cases} -4A + A = 0 \\ -4B + B = 3 \end{cases}.$$

Отсюда $A = 0$, $B = -1$ Следовательно,

$$y^{1}_{ч.н.} = -\sin 2x$$

Найдем $y^{2}_{ч.н.}$.

Рассмотрим уравнение $y'' + y = \cos x$.

Правая часть вида

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_l(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx),$$

где $l = 0$, $m = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Так как число $\alpha + i\beta = i$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, то $s = 1$. Частное решение ищется в виде

$$y^{2}_{ч.н.} = x(A\cos x + B\sin x).$$

Подставим $y^{2}_{ч.н.}$ в уравнение $y'' + y = \cos x$. Вычислим сначала производные функции $y^{2}_{ч.н.}$ до второго порядка включительно:

$y^{2}_{ч.н.} = x(A\cos x + B\sin x)$,

$\left(y^{2}_{ч.н.}\right)' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$,

$\left(y^{2}_{ч.н.}\right)'' = -A\sin x + B\cos x - A\sin x + B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x) =$

$= -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)$.

Подставим значения $y^{1}_{ч.н.}$ и $\left(y^{1}_{ч.н.}\right)''$ в уравнение:

$$-2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x) + x(A\cos x + B\sin x) = \cos x,$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x,$$

откуда $A = 0$, $B = \dfrac{1}{2}$.

$$y^{2}_{ч.н.} = \frac{1}{2}x\sin x.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения

$$y_{ч.н.} = y^{1}_{ч.н.} + y^{2}_{ч.н.},$$

или

$$y_{ч.н.} = -\sin 2x + \frac{1}{2}x\sin x.$$

Отсюда

$$y_{о.н.} = C_1\cos x + C_2\sin x - \sin 2x + \frac{1}{2}x\sin x.$$

## Справочный материал

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $n$-ого порядка можно найти *методом Лагранжа*. Это метод называется также *методом вариации произвольных постоянных*.

Рассмотрим этот для линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-ого порядка:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x).$$

Пусть общее решение соответствующего однородного имеет вид

$$y_{о.о.} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде

$$y_{о.н.} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x),$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – неизвестные функции. Система для нахождения этих неизвестных функций

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}.$$

Разрешая эту систему относительно $C_i'(x), i = 1,2$, получаем

$$\frac{dC_i}{dx} = \varphi_i(x), \; i = 1,2,$$

откуда

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + \widetilde{C}_i, \; i = 1,2,$$

где $\widetilde{C}_i$ - произвольные постоянные.

Подставляя найденные $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу

$$y_{о.н.} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x),$$

получаем окончательный ответ.

### Задача 10

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

### Решение задачи 10

Решим сначала соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Тогда решение однородного уравнения

$$y_{о.о.}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

где $C_1(x), C_2(x)$ - неизвестные функции от $x$. Для их нахождения составим систему

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}.$$

Разрешаем эту систему относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) = -\operatorname{tg} x \cdot \sin x;$$

$$C_2'(x) = \operatorname{tg} x \cdot \cos x.$$

Интегрируя, находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

$$C_1(x) = -\int \operatorname{tg} x \cdot \sin x dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} dx = \int \cos x dx - \int \frac{1}{\cos x} dx =$$

$$= \sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \widetilde{C}_1 .$$

$C_2(x) = \int \operatorname{tg} x \cdot \cos x dx = \int \sin x dx = -\cos x + \widetilde{C}_2$

Таким образом, общее решение данного уравнения

$$y_{он} = \left( \sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \widetilde{C}_1 \right)\cos x + \left(-\cos x + \widetilde{C}_2\right)\sin x ,$$

или

$$y_{он} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\cos x + \widetilde{C}_1 \cos x + \widetilde{C}_2 \sin x .$$

## Справочный материал

## Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

*Системой обыкновенных дифференциальных уравнений* называется система уравнений, связывающая независимую переменную $x$, функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ и производные от этих функций:

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(k_n)}\right) = 0 \\ F_2\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(k_n)}\right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', ..., y_2^{(k_2)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(k_n)}\right) = 0 \end{cases} .$$

Сумма порядков старших производных функций $n = k_1 + k_2 + ... + k_n$ называется *порядком* системы.

Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных, называется *нормальной* системой:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} .$$

**Задача Коши**. Задача определения функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, являющихся решением системы дифференциальных уравнений и удовлетворяющих *начальным условиям* $y_1(x_0) = y_1^0,\ \ y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0$, где $x_0,\ y_1^0,\ y_2^0, \dots, y_n^0$ - заданные числа, называется *задачей Коши* для системы дифференциальных уравнений.

**Теорема. (Существования и единственности решения задачи Коши).** Пусть функции $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = 1, ..., n$ непрерывны в окрестности точки $M\ (x_0,\ y_1^0,\ y_2^0, \dots, y_n^0)$ и имеют в этой окрестности непрерывные частные производные $\partial f_i / \partial y_j$, $j = 1, ..., n$. Тогда найдётся интервал $(x_0 - h, x_0 + h)$, в котором существует единственное решение нормальной системы, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

*Общим решением* нормальной системы называется набор $n$ функций:

$$\begin{cases} y_1(x) = y_1(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y_2(x) = y_2(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ \dots \\ y_n(x) = y_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases} ,$$

которые удовлетворяют следующим условиям.

1. Функции $y_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, …, $y_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, являются решениями системы при любых значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.
2. Каковы бы ни были начальные условия, найдется единственный набор значений $C_1, C_2, ..., C_n$, при которых эти функции удовлетворяют системе и любым поставленным начальным условиям из области существования и единственности решений.

Линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{cases}.$$

Если все функции $f_i(x) \equiv 0$, $i = 1, ..., n$, то система дифференциальных уравнений называется линейной однородной системой:

Далее ограничимся рассмотрением систем второго порядка.

Пусть имеется линейная однородная система с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x'(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ y'(t) = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases}$$

Матричная запись однородной системы имеет вид:

$$Y'(t) = AY(t),$$

где

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$a_{ij}$ – константы.

**Метод Эйлера**. Этот метод используется для нахождения общего решения линейных однородных систем. По методу Эйлера решение системы ищется в виде

$$x = \alpha e^{\lambda t}, \; y = \beta e^{\lambda t},$$

где $\alpha, \beta, \lambda$ - постоянные числа, причем числа $\alpha$ и $\beta$ не равны нулю одновременно.

Система линейных однородных алгебраических уравнений для определения $\alpha$ и $\beta$ имеет вид:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta = 0 \end{cases}.$$

Для того чтобы система имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Полученное уравнение называется *характеристическим уравнением*, а корни этого уравнения, называются *собственными числами* матрицы $A$.

Задача нахождения корней характеристического уравнения сводится к задаче нахождения корней многочлена второй степени. Рассмотрим следующие случаи.

**Случай 1. Корни характеристического уравнения действительны и различны.**

Для каждого простого действительного корня $\lambda_i$ $i = 1{,}2$ запишем систему

$$\begin{cases}(a_{11} - \lambda_i)\alpha + a_{12}\ \beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda_i)\beta = 0\end{cases}.$$

Система будет иметь бесконечно много решений, поэтому один из коэффициентов $\alpha$ или $\beta$ выберем произвольно (отличным от нуля).

Общее решение системы запишем в виде

$$\begin{cases}x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ y = C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}\end{cases}.$$

**Случай 2. Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные.**

Вид частных решений определяют таким же образом, что и в первом случае, и также имеет вид

$$\begin{cases}x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ y = C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}\end{cases},$$

при этом удобно воспользоваться *формулами Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

и выделить действительную и мнимую составляющие. Переобозначением произвольных констант удается убрать из записи мнимую единицу $i$.

**Случай 3. Характеристическое уравнение имеет кратные корни.**

Пусть $\lambda$ – действительный корень характеристического уравнения кратности $k = 2$. Для такого корня соответствующее решение системы ищем в виде

$$\begin{cases}x = (C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 t)e^{\lambda t} \\ y = (C_1\beta_1 + C_2\beta_2 t)e^{\lambda t}\end{cases},$$

где коэффициенты $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$ и $\beta_2$ находятся из системы алгебраических уравнений, получающейся с помощью приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях при подстановке вектора $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ в исходную систему.

Рассмотрим теперь неоднородную линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Ее решение будем искать как сумму

$$Y = \begin{cases}x_{о.н.} = x_{о.о.} + x_{ч.н.} \\ y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}\end{cases},$$

где $\begin{pmatrix} x_{о.о.} \\ y_{о.о.} \end{pmatrix}$ - обще решение соответствующей однородной системы, а $\begin{pmatrix} x_{ч.н.} \\ y_{ч.ч.} \end{pmatrix}$ - частное решение неоднородной системы.

Будем рассматривать для простоты только правую часть специального вида $\begin{pmatrix} e^{at}P_l(t) \\ e^{at}Q_m(t) \end{pmatrix}$,

где $P_l$ - многочлен степени $l$, а $Q_m(x)$ - многочлен степени $m$.

Частное решение будем находить методом подбора неопределенных коэффициентов в виде $\begin{pmatrix} x_{ч.н.} \\ y_{ч.ч.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at}\widetilde{P}_k(t)t^s \\ e^{at}\widetilde{Q}_k(t)t^s \end{pmatrix}$, где $k = \max(l, m)$, а $s$ - кратность корня $\lambda = \alpha$ характеристического уравнения.

## Задача 11

Найти решение систем методом Эйлера:

а) $\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 3x + 1 \end{cases}$, $x(0) = 2$, $y(0) = 0$;

б) $\begin{cases} x' = 5x + y + 1 \\ y' = -x + 3y - 2 \end{cases}$, $x(0) = \dfrac{11}{16}$, $y(0) = \dfrac{9}{16}$;

в) $\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = -2x + t \end{cases}$, $x(0) = \dfrac{1}{2}$, $y(0) = -\dfrac{1}{2}$.

## Решение задачи 11

а) Решим сначала однородную систему $\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 3x \end{cases}$.

Этой системе соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 \\ -3 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^2 - 9 = 0$. Это уравнение имеет два различных корня: $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -3$. Тогда решение системы будет записано в виде

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{3t} + C_2\alpha_2 e^{-3t} \\ y = C_1\beta_1 e^{3t} + C_2\beta_2 e^{-3t} \end{cases}.$$

Для каждого из корней $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -3$ составим и решим систему

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\,\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta = 0 \end{cases}.$$

Пусть $\lambda_1 = 3$. Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} -3\alpha_1 + 3\,\beta_1 = 0 \\ 3\alpha_1 - 3\,\beta_1 = 0 \end{cases}.$$

Эта система имеет бесконечно много решений, при этом $\alpha_1 = \beta_1$. Положим, например, $\alpha_1 = \beta_1 = 1$.

Пусть $\lambda_2 = -3$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 3\alpha_2 + 3\,\beta_2 = 0 \\ 3\alpha_2 + 3\,\beta_2 = 0 \end{cases}.$$

Эта система имеет также бесконечно много решений, при этом $\alpha_2 = -\beta_2$. Положим, например, $\beta_2 = -1$, тогда $\alpha_2 = 1$.

Таким образом, общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_{o.o.} = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} \\ y_{o.o.} = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-3t} \end{cases}.$$

Частное решение будем искать в виде $\begin{pmatrix} x_{ч.н.} \\ y_{ч.ч.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, так как столбец свободных членов неоднородной системы $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, и $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения.

Подставим $\begin{pmatrix} x_{ч.н.} \\ y_{ч.ч.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ в исходное уравнение:

$$\begin{cases} 0 = 3B \\ 0 = 3A + 1 \end{cases},$$

откуда $A = -\frac{1}{3}$, $B = 0$.

Общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_{о.н.} = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} - \frac{1}{3} \\ y_{о.н.} = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-3t} \end{cases}.$$

Воспользуемся начальными условиями $x(0) = 2$, $y(0) = 0$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{3} = 2 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases},$$

откуда найдем $C_1 = C_2 = \frac{7}{6}$.

Решением задачи Коши будет

$$\begin{cases} x(t) = \frac{7}{6} e^{3t} + \frac{7}{6} e^{-3t} - \frac{1}{3} \\ y(t) = \frac{7}{6} e^{3t} - \frac{7}{6} e^{-3t} \end{cases},$$

или

$$\begin{cases} x(t) = \frac{7}{3} \operatorname{ch} 3t - \frac{1}{3} \\ y(t) = \frac{7}{3} \operatorname{sh} 3t \end{cases}.$$

б) Решим сначала однородную систему

$$\begin{cases} x' = 5x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}.$$

Этой системе соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$. Это уравнение имеет корень $\lambda = 4$ и кратности 2.

Решение будем искать в виде

$$\begin{cases} x = (C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 t) e^{4t} \\ y = (C_1 \beta_1 + C_2 \beta_2 t) e^{4t} \end{cases}.$$

Для нахождения коэффициентов $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$ и $\beta_2$ подставим записанное выше решение в однородное уравнение:

$$\begin{cases} \left((C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 t)e^{4t}\right)' = 5(C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 t)e^{4t} + (C_1\beta_1 + C_2\beta_2 t)e^{4t} \\ \left((C_1\beta_1 + C_2\beta_2 t)e^{4t}\right)' = -(C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 t)e^{4t} + 3(C_1\beta_1 + C_2\beta_2 t)e^{4t} \end{cases}.$$

Выполнив дифференцирование, приведя подобные члены и сократив на $e^{4t}$, приравняем коэффициенты при $t$ и при $t^0$ и получим алгебраическую систему

$$\begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 + \beta_1 = 0 \\ -\beta_1 - \beta_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 = 0 \end{cases}.$$

Эта система эквивалентна системе

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ \beta_1 + \beta_2 = 0 \end{cases}.$$

Положим $\beta_2 = -C_1$, а $\alpha_2 = -C_2$ найдем $\beta_1 = C_1$, $\alpha_1 = C_1 + C_2$.

Таким образом, общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_{о.о.} = \left((C_1 + C_2) + C_1 t\right)e^{4t} \\ y_{о.о.} = (-C_2 - C_1 t)e^{4t} \end{cases}.$$

Частное решение будем искать в виде $\begin{pmatrix} x_{ч.н.} \\ y_{ч.ч.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, так как столбец свободных членов неоднородной системы $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, и $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения.

Подставим $\begin{pmatrix} x_{ч.н.} \\ y_{ч.ч.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ в исходное уравнение:

$$\begin{cases} 0 = 5A + B + 1 \\ 0 = -A + 3B - 2 \end{cases},$$

откуда $A = -\dfrac{5}{16}$, $B = \dfrac{9}{16}$.

Общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_{о.н.} = \left((C_1 + C_2) + C_1 t\right)e^{4t} - \dfrac{5}{16} \\ y_{о.н.} = (-C_2 - C_1 t)e^{4t} + \dfrac{9}{16} \end{cases}.$$

Воспользуемся начальными условиями $x(0) = \dfrac{11}{16}$, $y(0) = \dfrac{9}{16}$:

$$\begin{cases} \dfrac{11}{16} = C_1 + C_2 - \dfrac{5}{16} \\ \dfrac{9}{16} = -C_2 + \dfrac{9}{16} \end{cases},$$

откуда $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

Решением задачи Коши будет

$$\begin{cases} x(t) = (1+t)e^{4t} - \dfrac{5}{16} \\ y(t) = -te^{4t} + \dfrac{9}{16} \end{cases}.$$

в) Решим сначала однородную систему

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -2x \end{cases}.$$

Этой системе соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Это уравнение имеет комплексные корни $\lambda_1 = 1 + i$ и $\lambda_2 = 1 - i$.

Решение будем искать в виде

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{(1+i)t} + C_2\alpha_2 e^{(1-i)t} \\ y = C_1\beta_1 e^{(1+i)t} + C_2\beta_2 e^{(1-i)t} \end{cases}.$$

Для каждого из корней составим и решим систему

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\,\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta = 0 \end{cases}.$$

Пусть $\lambda_1 = 1 + i$. Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} (2 - (1+i))\alpha_1 + \beta_1 = 0 \\ -2\alpha_1 - (1+i)\beta_1 = 0 \end{cases}.$$

Эта система имеет бесконечно много решений, при этом $(1-i)\alpha_1 + \beta_1 = 0$. Положим, например, $\alpha_1 = 1$, тогда $\beta_1 = -1 + i$.

Пусть $\lambda_2 = 1 - i$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} (2 - (1-i))\alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ -2\alpha_2 - (1-i)\beta_2 = 0 \end{cases}.$$

Эта система имеет также бесконечно много решений, при этом $(1+i)\alpha_2 + \beta_2 = 0$. Положим, например, $\alpha_2 = 1$, тогда $\beta_2 = -1 - i$.

Таким образом, общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_{o.o.} = C_1 e^{(1+i)t} + C_2 e^{(1-i)t} \\ y_{o.o.} = C_1(-1+i)e^{(1+i)t} + C_2(-1-i)e^{(1-i)t} \end{cases}.$$

Преобразуем выражение, воспользовавшись формулами Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Имеем

$$e^{(1+i)t} = e^{t+it} = e^t e^{it} = e^t(\cos t + i\sin t),$$

$$e^{(1-i)t} = e^{t-it} = e^t e^{-it} = e^t(\cos t - i\sin t),$$

откуда

$$x_{o.o.} = C_1 e^t(\cos t + i\sin t) + C_2 e^t(\cos t - i\sin t) = e^t\cos t(C_1 + C_2) + e^t\sin t(C_1 - C_2)i,$$

$$y_{o.o.} = C_1(-1+i)e^t(\cos t + i\sin t) + C_2(-1-i)e^t(\cos t - i\sin t) =$$

$= e^t(-\cos t - \sin t)(C_1 + C_2) + e^t(\cos t - \sin t)(C_1 - C_2)i$.

Введем обозначения:

$$\widetilde{C}_1 = C_1 + C_2,$$

$$\widetilde{C}_1 = (C_1 - C_2)i.$$

Теперь общее решение однородной системы можно записать в виде

$$\begin{cases} x_{о.о.} = \widetilde{C}_1 e^t \cos t + \widetilde{C}_2 e^t \sin t \\ y_{о.о.} = \widetilde{C}_1 e^t(-\cos t - \sin t) + \widetilde{C}_2 e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}.$$

Частное решение будем искать в виде $\begin{pmatrix} x_{ч.н.} \\ y_{ч.ч.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} At + B \\ Ct + D \end{pmatrix}$, так как столбец свободных членов неоднородной системы $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ содержит многочлен первой степени, а $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения.

Подставим $\begin{pmatrix} x_{ч.н.} \\ y_{ч.ч.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} At + B \\ Ct + D \end{pmatrix}$ в исходное уравнение:

$$\begin{cases} A = 2(At + B) + Ct + D + 1 \\ C = -2(At + B) + t \end{cases}.$$

Приравнивая коэффициенты при $t$ и при $t^0$, получаем систему

$$\begin{cases} 2A + C = 0 \\ 2A = 1 \\ A - 2B - D = 1 \\ C + 2B = 0 \end{cases}.$$

Решая, находим $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -1$, $D = -\frac{3}{2}$.

Общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_{о.н.} = \widetilde{C}_1 e^t \cos t + \widetilde{C}_2 e^t \sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ y_{о.н.} = \widetilde{C}_1 e^t(-\cos t - \sin t) + \widetilde{C}_2 e^t(\cos t - \sin t) - t - \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Воспользуемся начальными условиями $x(0) = \frac{1}{2}$, $y(0) = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \widetilde{C}_1 + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} = -\widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2 - \frac{3}{2} \end{cases},$$

откуда $\widetilde{C}_1 = 0$, $\widetilde{C}_2 = 1$.

Решением задачи Коши будет

$$\begin{cases} x(t) = e^t \sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ y(t) = e^t(\cos t - \sin t) - t - \frac{3}{2} \end{cases}.$$

## Справочный материал

Функция $f(t)$, где $t \in R$, называется *оригиналом*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

2) $f(t)$ - кусочно-непрерывная при $t \geq 0$.

3) Существуют такие числа $M > 0$ и $s_0 \geq 0$, что для всех $t$ выполняется неравенство $|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$.

Чтобы удовлетворить первому условию, функцию – оригинал $f(t)$ записывают в виде $f(t) \cdot \sigma(t)$, где $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ - *единичная функция Хэвисайда*.

*Изображением оригинала* $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая несобственным интегралом

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Операцию перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называют *преобразованием Лапласа*. Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде

$$f(t) \xleftarrow[\bullet]{\bullet} F(p).$$

**Свойство линейности**

Если $f_1(t) \xleftarrow[\bullet]{\bullet} F_1(p)$ и $f_2(t) \xleftarrow[\bullet]{\bullet} F_2(p)$, то

$$c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) \xleftarrow[\bullet]{\bullet} c_1 \cdot F_1(p) + c_2 \cdot F_2(p).$$

**Теорема запаздывания**

Если $f(t) \xleftarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, $\tau > 0$, то

$$f(t-\tau) \cdot \sigma(t-\tau) \xleftarrow[\bullet]{\bullet} F(p) \cdot e^{-\tau p},$$

где $\sigma(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases}$ - *обобщенная единичная функция*.

**Теорема смещения**

Если $f(t) \xleftarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$, $\alpha$ - вещественное число, то

$$f(t) \cdot e^{\alpha t} \xleftarrow[\bullet]{\bullet} F(p-\alpha).$$

**Теорема о дифференцировании оригинала**

Если $f(t) \xleftarrow[\bullet]{\bullet} F(p)$ и функции $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t) \xleftarrow[\bullet]{\bullet} p \cdot F(p) - f(0),$$

$$f''(t) \xleftarrow[\bullet]{\bullet} p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \xleftarrow[\bullet]{\bullet} p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

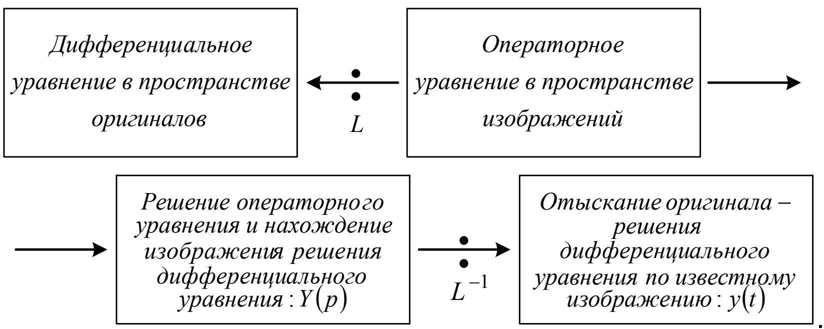
$$f^{(n)}(t) \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\longleftarrow}} p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

При решении примеров следует пользоваться таблицей, устанавливающей соответствие между оригиналами и их изображениями.

**Таблица оригиналов и изображений**

| № | Оригинал $f(t)$ | Изображение $F(p) = \int\limits_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$ |
|---|---|---|
| 1 | $\sigma(t)$ | $\dfrac{1}{p}$ |
| 2 | $t \cdot \sigma(t)$ | $\dfrac{1}{p^2}$ |
| 3 | $t^n \cdot \sigma(t)$ | $\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ |
| 4 | $\sin \alpha t \cdot \sigma(t)$ | $\dfrac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$ |
| 5 | $\cos \alpha t \cdot \sigma(t)$ | $\dfrac{p}{p^2 + \alpha^2}$ |
| 6 | $\operatorname{sh} \alpha t \cdot \sigma(t)$ | $\dfrac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$ |
| 7 | $\operatorname{ch} \alpha t \cdot \sigma(t)$ | $\dfrac{p}{p^2 - \alpha^2}$ |
| 8 | $t \cdot \sin \alpha t \cdot \sigma(t)$ | $\dfrac{2p\alpha}{\left(p^2 + \alpha^2\right)^2}$ |
| 9 | $t \cdot \cos \alpha t \cdot \sigma(t)$ | $\dfrac{p^2 - \alpha^2}{\left(p^2 + \alpha^2\right)^2}$ |
| 10 | $\dfrac{1}{2\alpha^3} \cdot (\sin \alpha t - \alpha t \cdot \cos \alpha t) \cdot \sigma(t)$ | $\dfrac{1}{\left(p^2 + \alpha^2\right)^2}$ |

Обозначим через $L$ преобразование Лапласа, а через $L^{-1}$ - обратное преобразование Лапласа. Тогда схема решения линейного дифференциального уравнения операционным методом кратко выглядит так:




.

## Задача 11

Найти решение систем операционным методом:

а) $\begin{cases} x' = 3y \\ y' = 3x + 1 \end{cases}$, $x(0) = 2$, $y(0) = 0$;

б) $\begin{cases} x' = 5x + y + 1 \\ y' = -x + 3y - 2 \end{cases}$, $x(0) = \dfrac{11}{16}$, $y(0) = \dfrac{9}{16}$;

в) $\begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = -2x + t \end{cases}$, $x(0) = \dfrac{1}{2}$, $y(0) = -\dfrac{1}{2}$.

## Решение задачи 11

а) Пусть

$$\begin{cases} x(t) \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\longleftarrow}} X(p) \\ y(t) \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\longleftarrow}} Y(p) \end{cases},$$

тогда по теореме дифференцирования оригинала

$$\begin{cases} x'(t) \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\longleftarrow}} p \cdot X(p) - 2 \\ y'(t) \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\longleftarrow}} p \cdot Y(p) \end{cases}.$$

Так как

$$1 = 1 \cdot \sigma(t) \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\longleftarrow}} \frac{1}{p},$$

то система операторных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} pX - 2 = 3Y \\ pY = 3X + \dfrac{1}{p} \end{cases}.$$

Получили систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений $X(p)$ и $Y(p)$:

$$\begin{cases} pX - 3Y = 2 \\ -3X + pY = \dfrac{1}{p} \end{cases}.$$

Найдем решение данной системы по формулам Крамера.

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & -3 \\ -3 & p \end{vmatrix} = p^2 - 9$$

и вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ \dfrac{1}{p} & p \end{vmatrix} = 2p + \frac{3}{p} = \frac{2p^2 + 3}{p},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p & 2 \\ -3 & \dfrac{1}{p} \end{vmatrix} = 7.$$

Получим

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{2p^2+3}{p\left(p^2-9\right)},\ Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{7}{p^2-9}.$$

Частные решения $x(t)$ и $y(t)$ являются оригиналами для вычисленных изображений. Чтобы найти $x(t)$, разложим дробь $\frac{2p^2+3}{p\left(p^2-9\right)}$ на сумму простейших:

$$\frac{2p^2+3}{p(p-3)(p+3)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{p+3}.$$

Из этого равенства следует, что

$$2p^2+3=A(p-3)(p+3)+Bp(p+3)+Cp(p-3).$$

Положим $p=0$. Тогда $3=-9A$, или $A=-\frac{1}{3}$.

При $p=3$: $21=18B$, значит $B=\frac{7}{6}$.

При $p=-3$: $21=18C$, откуда $C=\frac{7}{6}$.

Таким образом,

$$X(p)=\frac{2p^2+3}{p(p-3)(p+3)}=-\frac{\frac{1}{3}}{p}+\frac{\frac{7}{6}}{p-3}+\frac{\frac{7}{6}}{p+3}\xrightarrow[\bullet]{\bullet}$$

$$\xrightarrow[\bullet]{\bullet}-\frac{1}{3}\cdot\sigma(t)+\frac{7}{6}\cdot\sigma(t)\cdot e^{3t}+\frac{7}{6}\cdot\sigma(t)\cdot e^{-3t}=-\frac{1}{3}\cdot\sigma(t)+\frac{7}{3}\left(e^{3t}+e^{-3t}\right)\sigma(t)=$$

$$=-\frac{1}{3}\sigma(t)+\frac{7}{3}\cdot\operatorname{ch}3t\sigma(t),$$

$$Y(p)=\frac{7}{p^2-9}=\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{p^2-9}\xrightarrow[\bullet]{\bullet}\frac{7}{3}\cdot\operatorname{sh}3t\cdot\sigma(t).$$

Учитывая, что $1=1\cdot\sigma(t)$, запишем решение задачи Коши в виде

$$\begin{cases}x(t)=-\frac{1}{3}+\frac{7}{3}\cdot\operatorname{ch}3t\\ y(t)=\frac{7}{3}\cdot\operatorname{sh}3t\end{cases}.$$

б) Пусть

$$\begin{cases}x(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}X(p)\\ y(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}Y(p)\end{cases},$$

тогда по теореме дифференцирования оригинала

$$\begin{cases}x'(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}p\cdot X(p)-\frac{11}{16}\\ y'(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}p\cdot Y(p)-\frac{9}{16}\end{cases}.$$

Так как

$$1=1\cdot\sigma(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}\frac{1}{p},$$

то система операторных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} pX - \frac{11}{16} = 5X + Y + \frac{1}{p} \\ pY - \frac{9}{16} = -X + 3Y - \frac{2}{p} \end{cases}.$$

Получили систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений $X(p)$ и $Y(p)$:

$$\begin{cases} X(p-5) - Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{11}{16} \\ X + Y(p-3) = -\frac{2}{p} + \frac{9}{16} \end{cases}.$$

Найдем решение данной системы по формулам Крамера.

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-5 & -1 \\ 1 & p-3 \end{vmatrix} = p^2 - 8p + 16 = (p-4)^2$$

и вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{p} + \frac{11}{16} & -1 \\ -\frac{2}{p} + \frac{9}{16} & p-3 \end{vmatrix} = \frac{11p^2 - 8p - 80}{16p},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-5 & \frac{1}{p} + \frac{11}{16} \\ 1 & -\frac{2}{p} + \frac{9}{16} \end{vmatrix} = \frac{9p^2 - 88p + 144}{16p}.$$

Получим

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{11p^2 - 8p - 80}{16p(p-4)^2}, \quad Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{9p^2 - 88p + 144}{16p(p-4)^2}.$$

Частные решения $x(t)$ и $y(t)$ являются оригиналами для вычисленных изображений. Чтобы найти $x(t)$, разложим дробь $\frac{11p^2 - 8p - 80}{16p(p-4)^2}$ на сумму простейших:

$$\frac{11p^2 - 8p - 80}{16p(p-4)^2} = \frac{1}{16}\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p-4} + \frac{C}{(p-4)^2}\right).$$

Из этого равенства следует, что

$$11p^2 - 8p - 80 = A(p-4)^2 + Bp(p-4) + Cp.$$

Положим $p = 0$. Тогда $-80 = 16A$, откуда $A = -5$.

При $p = 4$: $64 = 4C$, значит $C = 16$.

Выпишем теперь коэффициенты при $p^2$: $11 = A + B$, откуда $B = 16$.

Таким образом,

$$X(p) = \frac{11p^2 - 8p - 80}{16p(p-4)^2} = \frac{1}{16}\left(\frac{-5}{p} + \frac{16}{p-4} + \frac{16}{(p-4)^2}\right) \xrightarrow{\bullet} $$

$$\xrightarrow[\bullet]{\bullet} -\frac{5}{16}\cdot\sigma(t)+\sigma(t)\cdot e^{4t}+t\sigma(t)\cdot e^{4t}.$$

Чтобы найти $y(t)$, разложим дробь $\dfrac{9p^2-88p+144}{16p(p-4)^2}$ на сумму простейших:

$$\frac{9p^2-88p+144}{16p(p-4)^2}=\frac{1}{16}\left(\frac{A}{p}+\frac{B}{p-4}+\frac{C}{(p-4)^2}\right).$$

Из этого равенства следует, что

$$9p^2-88p+144=A(p-4)^2+Bp(p-4)+Cp.$$

Положим $p=0$. Тогда $144=16A$, откуда $A=9$.

При $p=4$: $-64=4C$, значит $C=-16$.

Выпишем теперь коэффициенты при $p^2$: $9=A+B$, откуда $B=0$.

Таким образом,

$$Y(p)=\frac{9p^2-88p+144}{16p(p-4)^2}=\frac{1}{16}\left(\frac{9}{p}-\frac{16}{(p-4)^2}\right)\xrightarrow[\bullet]{\bullet}$$

$$\xrightarrow[\bullet]{\bullet}\frac{9}{16}\cdot\sigma(t)-t\sigma(t)\cdot e^{4t},$$

Учитывая, что $1=1\cdot\sigma(t)$, запишем решение задачи Коши в виде

$$\begin{cases} x(t)=-\dfrac{5}{16}+e^{4t}+t\cdot e^{4t} \\ y(t)=\dfrac{9}{16}-te^{4t} \end{cases}.$$

в) Пусть

$$\begin{cases} x(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}X(p) \\ y(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}Y(p) \end{cases},$$

тогда по теореме дифференцирования оригинала

$$\begin{cases} x'(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}p\cdot X(p)-\dfrac{1}{2} \\ y'(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}p\cdot Y(p)+\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Так как

$$1=1\cdot\sigma(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}\frac{1}{p},$$

$$t=t\cdot\sigma(t)\xleftarrow[\bullet]{\bullet}\frac{1}{p^2},$$

то система операторных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} pX-\dfrac{1}{2}=2X+Y+\dfrac{1}{p} \\ pY+\dfrac{1}{2}=-2X+\dfrac{1}{p^2} \end{cases}.$$

Получили систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений $X(p)$ и $Y(p)$:

$$\begin{cases} X(p-2) - Y = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2} \\ 2X + pY = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Найдем решение данной системы по формулам Крамера.

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & -1 \\ 2 & p \end{vmatrix} = p^2 - 2p + 2$$

и вспомогательные определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2} & -1 \\ \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{2} & p \end{vmatrix} = \frac{p^3 + p^2 + 2}{2p^2},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-2 & \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2} \\ 2 & \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{-p^3 - 2p - 4}{2p^2}.$$

Получим

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{p^3 + p^2 + 2}{2p^2\left(p^2 - 2p + 2\right)}, \quad Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-p^3 - 2p - 4}{2p^2\left(p^2 - 2p + 2\right)}.$$

Частные решения $x(t)$ и $y(t)$ являются оригиналами для вычисленных изображений.

Чтобы найти $x(t)$, разложим дробь $\dfrac{p^3 + p^2 + 2}{2p^2\left(p^2 - 2p + 2\right)}$ на сумму простейших:

$$\frac{p^3 + p^2 + 2}{2p^2\left(p^2 - 2p + 2\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp + D}{p^2 - 2p + 2}\right).$$

Из этого равенства следует, что

$$p^3 + p^2 + 2 = Ap\left(p^2 - 2p + 2\right) + B\left(p^2 - 2p + 2\right) + (Cp + D)p^2.$$

Положим $p = 0$. Тогда $2 = 2B$, откуда $B = 1$.

Выпишем коэффициенты при одинаковых степенях $p$.

$p^3$: $1 = A + C$;

$p^2$: $1 = -2A + B + D$;

$p$: $0 = 2A - 2B$.

Из полученной системы находим, что $A = 1$, $C = 0$, $D = 2$

Таким образом,

$$X(p) = \frac{p^3 + p^2 + 2}{2p^2\left(p^2 - 2p + 2\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^2 - 2p + 2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) + \frac{1}{(p-1)^2 + 1} \xrightarrow[\bullet]{\bullet}$$

$$\xrightarrow[\bullet]{\bullet} \frac{1}{2}\sigma(t) + \frac{1}{2}t\sigma(t) + e^t \sin t\sigma(t).$$

Чтобы найти $y(t)$, разложим дробь $\dfrac{-p^3-2p-4}{2p^2\left(p^2-2p+2\right)}$ на сумму простейших:

$$\frac{-p^3-2p-4}{2p^2\left(p^2-2p+2\right)}=-\frac{1}{2}\frac{p^3+2p+4}{p^2\left(p^2-2p+2\right)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2-2p+2}\right).$$

Из этого равенства следует, что

$$p^3+2p+4=Ap\left(p^2-2p+2\right)+B\left(p^2-2p+2\right)+(Cp+D)p^2.$$

Положим $p=0$. Тогда $4=2B$, откуда $B=2$.

Выпишем коэффициенты при одинаковых степенях $p$.

$p^3:\ 1=A+C$;

$p^2:\ 0=-2A+B+D$;

$p:\ 2=2A-2B$.

Из полученной системы находим, что $A=3$, $C=-2$, $D=4$

Таким образом,

$$Y(p)=-\frac{1}{2}\frac{p^3+2p+4}{p^2\left(p^2-2p+2\right)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{-2p+4}{p^2-2p+2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{p}+\frac{2}{p^2}\right)+\frac{p-2}{(p-1)^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{p}+\frac{2}{p^2}\right)+\frac{p-1}{(p-1)^2+1}-\frac{1}{(p-1)^2+1}\xrightarrow[\bullet]{\bullet}$$

$$\xrightarrow[\bullet]{\bullet}-\frac{3}{2}\sigma(t)-t\sigma(t)+e^t\cos t\sigma(t)-e^t\sin t\sigma(t).$$

Учитывая, что $1=1\cdot\sigma(t)$, запишем решение задачи Коши в виде

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}t+e^t\sin t \\ y(t)=-\dfrac{3}{2}-t+e^t\cos t-e^t\sin t \end{cases}.$$