

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА,
ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
И ЭЛЕМЕНТЫ АТОМНОЙ ФИЗИКИ

Сборник задач

1. МОДЕЛЬ АТОМА БОРА

В соответствии с постулатами Бора, электрон в атоме водорода может двигаться лишь по круговым орбитам (рис.1), для которых момент импульса $L = m_e v r$ удовлетворяет условию $m_e v r = n \hbar$, где m_e – масса электрона; r – радиус орбиты; v – линейная скорость движения электрона;

$\hbar = h / 2\pi = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; n – целое число, $n = 1, 2, 3, \dots$

Радиус орбиты с номером n

$$r_n = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2 / (m_e Z e^2), \quad (1.1)$$

где ϵ_0 – электрическая постоянная; Z – заряд ядра атома; e – заряд электрона. Энергия электрона зависит от n следующим образом:

$$E_n = -(m_e e^4 Z^2) / [2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2].$$

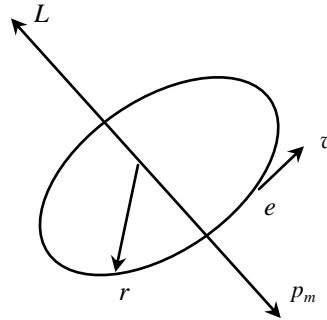


Рис.1

При переходе электрона с орбиты n_1 на орбиту n_2 ($n_1 > n_2$) излучается фотон, частота которого определяется обобщенной формулой Бальмера:

$$\nu_{n_2, n_1} = RZ^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right). \quad (1.2)$$

Здесь $R = m_e e^4 / [4\pi(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3] = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ – постоянная Ридберга. Длина волны излученного фотона находится из аналогичного соотношения для волнового числа

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{RZ^2}{c} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) = R'Z^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right),$$

где c – скорость света в вакууме; $R' = 1,09 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$.

Экспериментально наблюдаемые спектральные серии определяются числами n_2 : при $n_2 = 1$ – серия Лаймана, при $n_2 = 2$ – серия Бальмера, при $n_2 = 3$ – серия Пашена и т.д. Внутри серии линии отличаются числами n_1 .

Движущийся на атомной орбите электрон эквивалентен элементарному току, обладающему магнитным моментом p_m , пропорциональным орбитальному моменту импульса:

$$\vec{p}_m = e\vec{L}/2m_e .$$

При попадании атома во внешнее магнитное поле B , электрон начинает прецессировать вокруг направления магнитного поля с частотой

$$\omega_L = eB/2m_e ,$$

которая называется ларморовой частотой.

Пример 1. Определить для атома водорода радиус первой боровской орбиты, скорость движения электрона по этой орбите и частоту вращения электрона.

Решение. Кулоновская сила, действующая на электрон в атоме водорода, является центростремительной: $m_e v^2 / r = Ze^2 / (4\pi\epsilon_0 r^2)$. С другой стороны, в соответствии с постулатом Бора $m_e v r = n\hbar$. Решая совместно эти два уравнения и подставляя для атома водорода значения $Z = 1$ и $n = 1$, найдем радиус первой орбиты по формуле (1.1) и скорость $v_1 = \hbar / (m_e r_1)$. Частоту вращения вычислим из соотношения $f_1 = v_1 / (2\pi r_1)$. Подставляя числовые значения, получим $r_1 = 52,8$ пм, $v_1 = 2,19 \cdot 10^6$ м/с, $f_1 = 6,6 \cdot 10^{12}$ Гц.

Пример 2. Найти энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на второй.

Решение. В соответствии с формулой Бальмера (1.2), при переходе электрона с уровня n_1 на уровень n_2 испускается фотон частотой $\nu_{n_2, n_1} = R \left[1/(n_2^2) - 1/(n_1^2) \right]$. Энергия такого фотона $E = h\nu_{n_2, n_1}$. При $n_2 = 2$ и $n_1 = 3$ получим $E = 1,89$ эВ.

Пример 3. Используя теорию Бора, вычислить орбитальный магнитный момент электрона, движущегося по третьей орбите атома водорода.

Решение. Магнитный орбитальный момент электрона, движущегося по круговой орбите с линейной скоростью v (рис.1), $p_m = IS$, где $S = \pi r^2$ – площадь поверхности орбиты электрона; $I = e/T$ – эквивалентный ток, создаваемый движением электрона; T – период обращения электрона по орбите, $T = 2\pi r/v$. Соответственно имеем $p_m = evr/2$. Используя постулат Бора $m_e v r = n\hbar$, можем записать $p_m = en\hbar/2m_e$. При $n = 3$ магнитный момент $p_m = 2,8 \cdot 10^{-23} \text{ А}\cdot\text{м}^2$.

Пример 4. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 13,6 \text{ эВ}$. Найти первый потенциал возбуждения этого атома ϕ_1 .

Решение. Энергия ионизации соответствует переходу электрона из основного состояния $n = 1$ в состояние $n = \infty$, т.е. $E_i = e\phi_i = hR$. Возбуждение соответствует переходу невозбужденного атома из состояния $n = 1$ в состояние $n = 2$: $e\phi_1 = h\nu_{2,1} = hR(1/4 - 1) = 3E_i/4$. Тогда первый потенциал возбуждения $\phi_1 = 10,2 \text{ В}$.

Пример 5. Электрон выбит из атома водорода, находящегося в основном состоянии, фотоном с энергией $E = 17,7 \text{ эВ}$. Определить скорость электрона v за пределами атома.

Решение. Энергия фотона уходит на ионизацию атома и сообщение вырванному электрону кинетической энергии $E = E_i + m_e v^2/2$. Следовательно, $v = \sqrt{2(E - E_i)/m_e}$. Подставляя $E_i = 13,6 \text{ эВ}$, получим $v = 1,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$.

Задачи.

1. На какой из боровских орбит (первой или второй) электрон в соответствии с законами классической электродинамики ($I \sim \omega^2$, где I – интенсивность излучаемого света, ω – угловая скорость движения по орбите) излучал бы сильнее? Во сколько раз?

2. Как изменяется орбитальный механический момент электрона при переходе его из возбужденного состояния в основное с испусканием фотона с длиной волны $1,02 \cdot 10^{-7} \text{ м}$?

3. Определить орбитальный магнитный момент электрона, движущегося по второй орбите атома водорода.

4. Вычислить частоту ларморовой прецессии электронных оболочек атомов в магнитном поле Земли $B = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл.
5. Установить изменение орбитального магнитного момента электрона при переходе его с третьей боровской орбиты на первую.
6. Найти для иона He^+ радиус и скорость электрона на первой боровской орбите.
7. Вычислить длину волны, соответствующую переходу электрона в атоме водорода с шестой орбиты на вторую. К какой серии относится эта спектральная линия?
8. Вычислить частоту ларморовой прецессии электронных оболочек атомов в магнитном поле $B = 50$ Тл.
9. Каковы расстояние между частицами системы в основном состоянии и соответствующая энергия связи, если ядром системы служит протон, а вместо электрона движется мезон, имеющий тот же заряд, что и электрон, но массу в 207 раз большую?
10. Какие линии содержит спектр поглощения атомарного водорода в диапазоне длины волны от 94,5 до 130 нм?
11. У какого водородоподобного иона разность длины волны между основными линиями серий Бальмера и Лаймана равна 59,3 нм?
12. Найти квантовое число n , соответствующее возбужденному состоянию He^+ , если при переходе в основное состояние этот ион испустил последовательно два фотона с длиной волны 121,4 нм и 30,35 нм соответственно.
13. Какому элементу принадлежит водородоподобный спектр, длина волны линий которого в 4 раза короче, чем у атомарного водорода?
14. Линии какой длины волны возникнут при переходах атома водорода из состояния $n = 3$?
15. Определить, сколько линий серии Бальмера попадает в видимую часть спектра, если потенциал ионизации водородного атома равен 13,6 эВ?
16. В излучении звезды обнаружен водородоподобный спектр, длина волны которого в 9 раз меньше, чем у атомарного водорода. Какому элементу, принадлежит данный спектр?

17. Какую скорость приобретает первоначально покоившийся атом водорода при испускании фотона, соответствующего основной линии серии Бальмера?

18. Какая энергия требуется для полного отрыва электрона от однократно ионизированного атома гелия, если электрон находится в основном состоянии?

19. Фотон с энергией 15 эВ выбивает электрон из атома водорода, находящегося в основном состоянии. С какой скоростью движется электрон вдали от ядра?

20. Определить для иона He^+ потенциал ионизации, первый потенциал возбуждения и длину волны основной линии серии Лаймана.

21. Какую работу необходимо совершить, чтобы удалить электрон со второй боровской орбиты атома водорода за пределы притяжения его ядра?

22. Первый потенциал возбуждения атома водорода $\varphi_1 = 10,2$ эВ. При какой температуре T средняя кинетическая энергия атомов водорода равна энергии возбуждения?

23. Определить круговую частоту электрона на второй круговой боровской орбите иона He^+ .

24. Какая энергия требуется для полного отрыва электрона от однократно ионизированного атома гелия, если электрон находится в состоянии $n = 3$.

25. Вычислить частоту света, излучаемого атомом водорода при переходе электрона на уровень $n = 2$, если радиус орбиты электрона изменился в 9 раз.

2. ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ

Де Бройль сопоставил свободной частице, имеющей импульс p , монохроматическую волну с длиной волны

$$\lambda = h / p = 2\pi\hbar / p .$$

Пример 1. Найти длину волны де Бройля для пули массой 9 г, летящей со скоростью 100 м/с.

Решение. Длина волны де Бройля $\lambda = h/p = h/mv$. Подставляя числовые значения, получим $\lambda = 7,36 \cdot 10^{-32}$ м.

Пример 2. Кинетическая энергия протона в 4 раза меньше его энергии покоя. Вычислить дебройлевскую длину волны протона.

Решение. Длина волны де Бройля $\lambda = h/p$. Так как по условию задачи кинетическая энергия протона $E_k = E_0/4$ сравнима с его энергией покоя E_0 , то импульс p и кинетическая энергия E_k связаны релятивистским соотношением $p = (1/c)\sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}$, где c – скорость света в вакууме. Тогда $p = 3E_0/4c$ и длина волны $\lambda = 4hc/(3E_0) = 1,77 \cdot 10^{-15}$ м.

Задачи.

1. При какой скорости электрона его дебройлевская длина волны будет равна 500 нм; 0,1 нм?

2. Какой кинетической энергией должен обладать электрон, чтобы дебройлевская длина волны была равна его комптоновской длине волны?

3. Какой должна быть кинетическая энергия протона, чтобы дебройлевская длина волны совпадала с его комптоновской длиной волны?

4. При каком значении скорости дебройлевская длина волны частицы равна ее комптоновской длине волны?

5. Кинетическая энергия электрона в 3 раза меньше его энергии покоя. Определить дебройлевскую длину волны электрона.

6. Масса движущегося электрона в 2 раза больше его массы покоя. Вычислить дебройлевскую длину волны электрона.

7. Чему равна дебройлевская длина волны протона, движущегося со скоростью $0,6c$, где c – скорость света в вакууме?

8. Вычислить дебройлевскую длину волны электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 511 кВ.

9. Какова дебройлевская длина волны протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 120 кВ.

10. Определить дебройлевскую длину волны теплового нейтрона, обладающего энергией, равной средней энергии теплового движения при температуре 300 К?

11. Средняя кинетическая энергия электрона в невозбужденном атоме водорода равна 13,6 эВ. Вычислить дебройлевскую длину волны электрона.

12. Кинетическая энергия нейтрона равна его энергии покоя. Определить дебройлевскую длину волны нейтрона.

13. Найти дебройлевскую длину волны молекулы водорода, соответствующую их наиболее вероятной скорости при комнатной температуре.

14. Вычислить дебройлевскую длину волны молекул CO_2 , соответствующую их средней скорости при комнатной температуре.

15. Найти дебройлевскую длину волны молекулы азота, соответствующую их наиболее вероятной скорости при температуре 77 К.

16. Найти дебройлевскую длину волны молекулы кислорода, соответствующую их средней скорости при температуре -70°C .

17. Какова дебройлевская длина волны молекулы воды, соответствующая их средней скорости при комнатной температуре.

18. Вычислить дебройлевскую длину волны электрона с кинетической энергией 100 эВ.

19. Определить дебройлевскую длину волны протона, имеющего кинетическую энергию 200 эВ.

20. Вычислить дебройлевскую длину волны атома урана, имеющего кинетическую энергию 100 эВ.

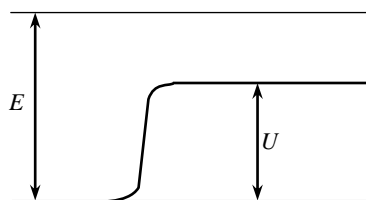


Рис.2

21. Частица движется слева направо в одномерном потенциальном поле (рис.2). Левее барьера высотой $U = 15$ эВ полная энергия частицы 20 эВ. Как изменится дебройлевская длина волны частицы при переходе через барьер?

22. Частица движется справа налево в одномерном потенциальном поле (рис.2). Правее барьера высотой $U = 15$ эВ кинетическая энергия частицы 5 эВ. Вычислить дебройлевскую длину волны частицы после перехода через барьер.

23. Какую энергию необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась со 100 до 50 пм?

24. Как нужно изменить энергию нейтрона, чтобы его дебройлевская длина волны увеличилась с 50 до 100 пм?

25. Как изменится дебройлевская длина волны частицы, если ее кинетическая энергия уменьшится в 3 раза?

3. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Соотношение неопределенностей для координаты и проекции импульса p_x на ось x

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

где Δx и Δp_x – неопределенность координаты и проекции импульса частицы соответственно; \hbar – постоянная Планка, $\hbar = h/2\pi$.

Соотношение неопределенностей для энергии E и времени t имеет вид

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar.$$

Пример 1. Масса движущегося электрона в 3 раза больше его массы покоя. Чему равна минимальная неопределенность координаты электрона?

Решение. Учитывая, что $p = mv$, где m – масса, v – скорость частицы, получим из соотношения неопределенности для координаты и проекции импульса $\Delta x \geq \hbar / (m \Delta v_x)$. Поскольку неопределенность скорости Δv_x , как и сама скорость, не может превышать скорость света c в вакууме, то $\Delta x_{\min} = \hbar / mc$. Согласно условию $m = 3m_0$. Тогда $\Delta x_{\min} = \hbar / 3m_0 c = 1,28 \cdot 10^{-13}$ м.

Пример 2. Среднее время жизни возбужденных состояний атома 10 нс. Вычислить естественную ширину спектральной линии

($\lambda = 0,7$ мкм), соответствующую переходу между возбужденными уровнями атома.

Решение. При переходе электрона из одного стационарного состояния в другое излучается (или поглощается) энергия $hc/\lambda = E_n - E_k$, где E_n и E_k – энергии соответственно n и k состояний атома. Отсюда следует, что неопределенность $\Delta\lambda$ длины волны излучения связана с неопределенностью энергии уровней ΔE_n и ΔE_k атома соотношением $hc\Delta\lambda/\lambda^2 = \Delta E_n + \Delta E_k$. Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени $\Delta E\Delta t \geq \hbar$, где Δt – неопределенность момента времени перехода атома из одного стационарного состояния в другое. Поскольку Δt не превышает среднего времени жизни возбужденного состояния атома τ , то минимальная неопределенность энергии возбужденных уровней $\Delta E_{\min} = \hbar/\tau$. Минимальная неопределенность длины волны излучения (естественная ширина спектральной линии)

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_k} \right).$$

Если одно из состояний, например k , между которыми совершается переход, является основным, то $\Delta\lambda_{\min} = \lambda^2/(2\pi c\tau_n)$, так как для основного состояния $\tau_k = \infty$. Для возбужденных состояний с одинаковым временем жизни $\tau_n = \tau_k = \tau$ имеем $\Delta\lambda_{\min} = \lambda^2/(\pi c\tau)$. Подставляя числовые данные, получим $\Delta\lambda_{\min} = 5,2 \cdot 10^{-14}$ м.

Задачи.

1. Среднее расстояние электрона от ядра в невозбужденном атоме водорода 52,9 пм. Вычислить минимальную неопределенность скорости электрона.

2. Используя соотношение неопределенностей, показать, что в ядре не могут находиться электроны. Линейные размеры ядра принять равными $5,8 \cdot 10^{-15}$ м.

3. Чему равна неопределенность координаты покоящегося электрона?

4. Вычислить неопределенность координаты покоящегося протона.

5. Кинетическая энергия протона равна его энергии покоя. Чему равна при этом минимальная неопределенность координаты протона?

6. Масса движущегося электрона в 2 раза больше его массы покоя. Вычислить минимальную неопределенность координаты электрона.

7. Чему равна минимальная неопределенность координаты фотона, соответствующего видимому излучению с длиной волны 0,55 мкм.

8. Среднее время жизни эта-мезона $2,4 \cdot 10^{-19}$ с, а его энергия покоя 549 МэВ. Вычислить минимальную неопределенность массы частицы.

9. Среднее время жизни возбужденного состояния атома 12 нс. Вычислить минимальную неопределенность длины волны $\lambda = 0,12$ мкм излучения при переходе атома в основное состояние.

10. Естественная ширина спектральной линии с длиной волны $\lambda = 0,55$ мкм, соответствующей переходу атома в основное состояние, равна 0,01 пм. Определить среднее время жизни возбужденного состояния атома.

11. Ширина следа электрона с кинетической энергией 1,5 кэВ на фотопластинке, полученного с помощью камеры Вильсона, $\Delta x = 1$ мкм. Можно ли по данному следу обнаружить отклонение в движении электрона от законов классической механики?

12. Электронный пучок ускоряется в электронно-лучевой трубке разностью потенциалов $U = 1$ кВ. Известно, что неопределенность скорости составляет 0,1 % от ее числового значения. Определить неопределенность координаты электрона. Являются ли электроны в данных условиях квантовой или классической частицей?

13. Установить отношение неопределенностей скорости электрона, если его координата установлена с точностью до 10^{-5} м, и пылинки массой $m = 10^{-12}$ кг, если ее координата установлена с той же точностью.

14. Электронный пучок ускоряется разностью потенциалов $U = 200$ В. Определить, можно ли одновременно измерить траекторию электрона с точностью до 100 пм (с точностью порядка диаметра атома) и его скорость с точностью до 10 %.

15. Электрон движется в атоме водорода по первой борвской орбите. Принимая, что допускаемая неопределенность скорости составляет 10 % от ее числового значения, найти неопределенность координаты электрона. Применимо ли в данном случае для электрона понятие траектории?

16. Используя соотношение неопределенностей в форме $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$, оценить минимально возможную полную энергию электрона в атоме водорода. Неопределенность координаты принять равной радиусу атома.

17. Какова размытость энергетического уровня в атоме водорода для основного и возбужденного (время его жизни 10^{-8} с) состояний?

18. Длина волны излучаемого атомом фотона $\lambda = 0,6$ мкм. Принимая время жизни возбужденного состояния $\Delta t = 10^{-8}$ с, определить отношение естественной ширины энергетического уровня, на который был возбужден электрон, к энергии, излученной атомом.

19. Считая, что электрон находится внутри атома диаметром 0,3 нм, вычислить неопределенность энергии данного электрона в электрон-вольтах.

20. При движении вдоль оси x скорость частицы оказывается определенной с точностью $\Delta v_x = 1$ см/с. Оценить неопределенность координаты Δx для электрона, для броуновской частицы массой $m = 10^{-13}$ г и для дробинки массой $m = 0,1$ г.

21. Электрон с кинетической энергией $E = 4$ эВ локализован в области размером $L = 1$ мкм. Оценить относительную неопределенность его скорости.

22. С какими наименьшими ошибками можно определить скорость электрона, протона и шарика массой 1 мг, если координаты частиц и центра шарика установлены с неопределенностью 1 мкм.

23. Свободный электрон в момент времени $t = 0$ локализован в области $\Delta x_0 = 0,1$ нм. Оценить ширину области локализации этого электрона спустя 1 с.

24. След пучка электронов на экране электронно-лучевой трубки имеет диаметр $d = 0,5$ мм. Расстояние от электронной пушки до экрана $L = 20$ см, ускоряющее напряжение $U = 10$ кВ. Какова неопределенность координаты электрона на экране?

25. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области размером $L = 0,20$ нм.

4. ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ МЕХАНИКУ. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Поведение частицы в микромире описывается волновой функцией ψ , которая в общем случае является комплексной величиной. Квадрат модуля этой функции определяет вероятность того, что частица находится в бесконечно малом объеме dV вблизи рассматриваемой точки с координатами x, y, z :

$$dw = |\psi(x)|^2 dV = \psi^*(x)\psi(x)dV,$$

где ψ^* – комплексно-сопряженная величина. Вероятность найти частицу в конечном объеме V

$$W = \int dw = \int_V |\psi|^2 dV.$$

Волновая функция однозначна, непрерывна, ограничена и на бесконечности стремится к нулю. Так как вероятность найти частицу во всем пространстве равна единице, то имеет место условие нормировки

$$\int_V |\psi|^2 dV = 1, \quad (4.1)$$

где интегрирование ведется по всему пространству.

Каждой физической величине q , характеризующей состояние частицы с волновой функцией ψ , ставится в соответствие оператор \hat{q} такой, что среднее значение

$$\langle q \rangle = \int_V \psi^* \hat{q} \psi dV.$$

Оператор координаты \hat{x} (и оператор любой функции, зависящей только от координат) совпадает с самой координатой x (функцией). Действие оператора импульса $\hat{p} = -i\hbar d/dx = -i\hbar\nabla$ (здесь i – мнимая единица) сводится к дифференцированию. Действие оператора полной энергии

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U$$

на волновую функцию дает энергию частицы E .

Волновая функция удовлетворяет временному уравнению Шредингера – аналогу второго закона Ньютона

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

где m – масса частицы; U – функция координат и времени, градиент которой, взятый с обратным знаком, равен силе, действующей на частицу.

Если U не зависит явно от времени, то она имеет смысл потенциальной энергии. В этом случае волновая функция может быть представлена в виде произведения двух сомножителей, один из которых зависит только от координат, а второй – от времени:

$$\psi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z)\exp(-iEt/\hbar),$$

где E – полная энергия частицы.

Временное уравнение Шредингера (4.1) при этом переходит в стационарное

$$\nabla^2\varphi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\varphi = 0.$$

Решение уравнения Шредингера означает отыскание собственных функций ψ_i (индексом i нумеруем собственные функции) оператора \hat{H} и их собственных значений E_i . Если движение частицы ограничено в пространстве, то решения уравнения существуют лишь для дискретных значений энергии E . При отсутствии пространственных ограничений уравнение имеет решения для любых значений E .

Пусть $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_i, \dots, \psi_n$ есть набор собственных функций частицы. В каждом из этих состояний ψ_i физическая величина q имеет определенное значение q_i . Однако частица может находиться и в состоянии $\psi = \sum_{i=1}^n C_i \psi_i$, где C_i – не зависящие от координат числа.

Число слагаемых в сумме равно числу различных собственных функций. Величина q в этом состоянии не имеет определенного значения – при измерениях будет получаться одно из значений q_i . Вероятность получить результат q_i равна $|C_i|^2$, сумма всех таких вероятностей равна единице: $\sum_{i=1}^n |C_i|^2 = 1$. Зная вероятность различных значений q , можно найти среднее значение этой величины в состоянии ψ :

$$\langle q \rangle = \sum_{i=1}^n |C_i|^2 q_i. \quad (4.2)$$

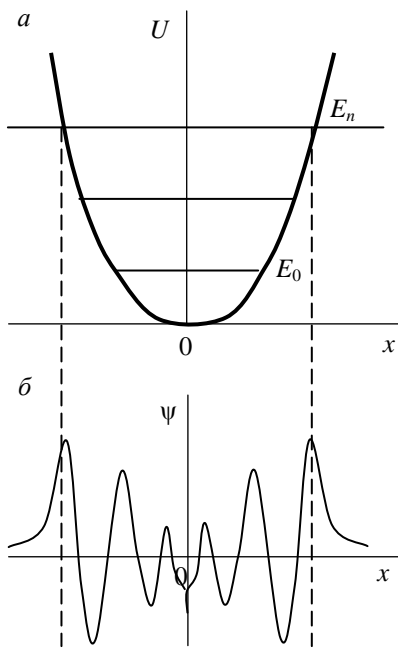


Рис.3

Так выражается в квантовой механике принцип суперпозиции.

Пример 1. Записать уравнение Шредингера для гармонического осциллятора.

Решение. Гармоническим осциллятором называют частицу, совершающую одномерное движение под действием квазиупругой силы $F = -kx$. Потенциальная энергия такой частицы (рис.3, а) $U = kx^2/2$. Собственная частота классического гармонического осциллятора $\omega = \sqrt{k/m}$, где m – масса частицы. Выразив k через m и ω , получим $U = m\omega^2 x^2/2$. В одномерном

случае $\nabla^2 \psi = d^2 \psi / dx^2$. Поэтому уравнение Шредингера для осциллятора имеет вид

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \psi = 0.$$

Можно показать, что собственные значения этого уравнения суть $E_n = \hbar \omega_{\text{кол}} (n + 1/2)$, где $\omega_{\text{кол}}$ – собственная частота колебаний. Энергия при $n = 0$ называется энергией нулевых колебаний. Как видно на рис.3, спектр собственных энергий эквидистантный, т.е. расстояния между соседними уровнями не зависят от n . Волновая функция основного состояния (рис.3, б)

$$\psi_0 = \sqrt{\alpha/\pi} \exp(-\alpha x^2/2),$$

где $\alpha = m\omega/\hbar$.

В отличие от классического случая существует конечная вероятность обнаружения частицы за пределами дозволенной области, показанной на рис.3 штриховыми линиями.

Пример 2. Волновая функция основного состояния атома водорода имеет вид $\psi = A \exp(-r/a)$, где a – константа (радиус Бора). Найти следующие величины: 1) значение константы A ; 2) плотность вероятности нахождения электрона на расстоянии r от ядра; 3) наиболее вероятное расстояние $r_{\text{вер}}$ электрона от ядра; 4) среднее расстояние $\langle r \rangle$ электрона от ядра; 5) вероятность того, что электрон находится на расстоянии от ядра, превышающем ηa , где $\eta = \text{const}$.

Решение. 1. Значение константы A найдем из условия нормировки (4.1). Отметим, что волновая функция сферически симметрична, т.е. не зависит от углов. Поэтому элементарный объем $dV = 4\pi r^2 dr$. Подставляя выражения для объема и волновой функции в условие нормировки, получим

$$\int_0^{\infty} A^2 e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = 4\pi A^2 \int_0^{\infty} r^2 e^{-2r/a} dr = 1,$$

где интеграл

$$\int_0^{\infty} r^2 e^{-2r/a} dr = \frac{2!}{(2/a)^3} = \frac{a^3}{4}.$$

Тогда $4\pi A^2 a^3 / 4 = 1$ и $A = 1/\sqrt{\pi a^3}$.

2. Вероятность найти электрон в интервале расстояний от ядра от r до $r + dr$ $dW = |\psi|^2 dV = 4\pi A^2 r^2 e^{-2r/a} dr$. Плотность вероятности нахождения электрона на расстоянии r от ядра

$$w = \frac{dW}{dr} = 4\pi A^2 r^2 e^{-2r/a} = \frac{4}{a^3} r^2 e^{-2r/a}.$$

3. Наиболее вероятное расстояние электрона от ядра $r_{\text{вер}}$ соответствует максимуму функции $w(r)$: $\frac{dw}{dr} = 0$. Беря производную, получим

$$\frac{8r_{\text{вер}}}{a^3} e^{-2r_{\text{вер}}/a} \left(1 - \frac{r_{\text{вер}}}{a}\right) = 0.$$

Отсюда $r_{\text{вер}} = a$.

4. Среднее расстояние между электроном и ядром $\langle r \rangle = \int_0^{\infty} r |\psi|^2 dV$.

Подставив выражение для объема и волновой функции, получим

$$\langle r \rangle = \int_0^{\infty} r \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = \frac{4}{a^3} \int_0^{\infty} r^3 e^{-2r/a} dr.$$

Интегрируя по частям

$$\int x^n e^{bx} dx = (1/b)x^n e^{bx} - (n/b) \int x^{n-1} e^{bx} dx,$$

найдем среднее расстояние электрона от ядра $\langle r \rangle = 3a/2$.

5. Используем полученное значение константы A , чтобы вычислить вероятность того, что электрон расположен от ядра на расстоянии, большем чем ηa :

$$W = \int dW = \int_{\eta a}^{\infty} \frac{4}{a^3} r^2 e^{-2r/a} dr = \frac{4}{a^3} \int_{\eta a}^{\infty} r^2 e^{-2r/a} dr.$$

Беря интеграл, получим $W = e^{-2\eta}(1 + 2\eta + 2\eta^2)$.

Пример 3. Волновая функция, описывающая состояние частицы в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, имеет вид $\psi(x) = A \sin(kx)$. Определить вид собственной волновой функции $\psi_n(x)$ и коэффициент A , исходя из условия нормировки.

Решение. Так как стенки ямы бесконечно высоки (рис.4), то за пределами потенциальной ямы частица оказаться не может и волновая функция $\psi(x < 0) = 0$ и $\psi(x > L) = 0$.

Внутри ямы волновая функция $\psi(0 < x < L) \neq 0$. В силу непрерывности волновой функции на границах должны выполняться соотношения $\psi(0) = \psi(L) = 0$. Подставим выражение для волновой функции $\psi(L) = A \sin(kL) = 0$. Это возможно в том случае, если аргумент синуса $kL = n\pi$. Отсюда $k = n\pi/L$, и собственные волновые функции $\psi_n(x) = A \sin(n\pi x/L)$.

Запишем условие нормировки $\int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = 1$. Подставляя

собственные волновые функции, получим

$$\int_0^L A^2 \sin^2(n\pi x/L) dx = A^2 L/2 = 1.$$

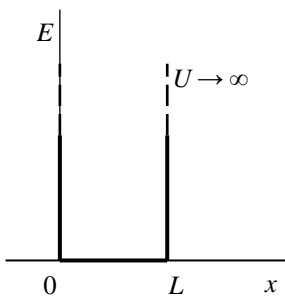


Рис.4

Отсюда $A = \sqrt{2/L}$.

Пример 4. Состояние частицы, находящейся в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме шириной L , задано волновой функцией $\psi(x) = (\sqrt{30}/\sqrt{L^5})x(L-x)$. Обладает

ли частица в этом состоянии определенной энергией? В случае отрицательного ответа сформулировать об-

щее выражение для вероятности найти при измерении энергию частицы E равной энергии собственного состояния (с номером n) $E_n = (\pi\hbar n)^2 / (2mL^2)$ и для средней энергии частицы $\langle E \rangle$.

Решение. Так как эта функция не является собственной функцией уравнения Шредингера для частицы в яме, то частица не имеет определенной энергии в этом состоянии. Это состояние является суперпозицией нескольких собственных состояний $\psi = \sum_n C_n \varphi_n$. Вероятность получить при измерении энергию частицы, равную E_n ,

$$P_n = |C_n|^2 = \left[\int_0^L \varphi_n^* \psi dx \right]^2.$$

Используя собственные функции $\varphi_n = \sqrt{2/L} \sin(n\pi x / L)$, получим

$$P_n = \left(2\sqrt{15} / L^3 \right) \int_0^L \sin(n\pi x / L) x(L-x) dx.$$

Среднюю энергию частицы найдем как взвешенное среднее

$$\langle E \rangle = \sum_{i=1}^n E_i |C_i|^2.$$

Задачи.

1. Записать уравнение Шредингера для свободной частицы.
2. Записать уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода.
3. Волновая функция, описывающая некоторую частицу, может быть представлена как произведение координатной функции ψ и временного множителя, т.е. имеет вид $\Psi(x, t) = \psi(x) \exp(-iEt/\hbar)$. Показать, что плотность вероятности нахождения частицы определяется только координатной ψ -функцией.
4. Найти среднее значение потенциальной энергии электрона для волновой функции основного состояния водородного атома, имеющей вид $\psi = A \exp(-r/a)$, где a – боровский радиус.

5*. Определить среднее значение модуля кулоновской силы, действующей на электрон.

6*. Каков средний электростатический потенциал, создаваемый электроном в центре атома водорода?

7*. Вычислить вероятность того, что электрон в этом состоянии находится от ядра на расстоянии, превышающем $2a$; $5a$ и $10a$.

8*. Рассчитать вероятность того, что электрон в этом состоянии находится от ядра на расстоянии $a < r < 2a$.

9*. Каково наиболее вероятное расстояние частицы от центра?

10*. Найти среднее расстояние частицы от центра.

11. Рассматривая математический маятник массой $m = 100$ г и длиной $L = 0,5$ м в виде гармонического осциллятора, определить классическую амплитуду A маятника, соответствующую энергии нулевых колебаний этого маятника, находящегося в поле тяготения Земли.

12. Волновая функция основного состояния гармонического осциллятора имеет вид $\psi_0 = \sqrt{\alpha/\pi} \exp(-\alpha x^2/2)$, где $\alpha = m\omega/\hbar$. Найти среднее значение координаты x .

13. Вычислить среднее значение импульса для этого состояния (см. задачу 12).

14. Установить среднее значение потенциальной энергии этого состояния (см. задачу 12).

15. Найти среднюю энергию (в электрон-вольтах) электромагнитного колебания при температуре 3000 К для длины волны λ , равной 500, 50, 5 и 0,5 мкм. Сравнить найденные значения с величиной kT .

16. Показать, что в основном состоянии гармонического осциллятора $\Delta p \Delta x = \hbar/2$, где Δp и Δx – среднеквадратические отклонения импульса и координаты от их средних. Учесть, что $\langle \Delta x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ и $\langle \Delta p^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$.

17. Волновая функция некоторой частицы имеет вид $\psi = A \exp(-r^2/2a^2)$, где r – расстояние от частицы до силового центра; a – константа. Найти наиболее вероятное расстояние частицы от центра.

* Задачи 5-10 решить для волновой функции того же вида.

18. Вычислить среднее значение координаты $\langle x \rangle$ для частицы, описанной в задаче 17.

19. Частица в момент времени $t = 0$ находится в состоянии $\psi = A \exp(-x^2/a^2 + ikx)$, где A и a – некоторые положительные постоянные. Каково среднее значение проекции импульса $\langle p_x \rangle$?

20. Найти нормировочный коэффициент A и область, в которой частица (см. задачу 19) локализована.

21. Определить энергию электрона атома водорода в состоянии, для которого волновая функция имеет вид $\psi(r) = A(1 + ar)\exp(-ar)$, где A , a и α – некоторые постоянные.

22. Известно, что нормированная собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, имеет вид $\varphi_n(x) = \sqrt{2/L} \sin(\pi nx/L)$, где L – ширина ямы. Установить среднее значение координаты x электрона.

23. Состояние частицы, находящейся в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме шириной L , задано волновой функцией $\psi(x) = Ax(L - x)$. Найти нормировочный коэффициент A .

24. Состояние частицы, находящейся в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме шириной L , задано волновой функцией $\psi(x) = (\sqrt{30}/\sqrt{L^5})x(L - x)$. Какова вероятность того, что при измерении энергия частицы окажется равной E_1 ? Чему равна вероятность получить при измерении отличное от E_1 значение энергии частицы?

25. Волновая функция основного состояния частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме имеет вид $\varphi_1(x) = \sqrt{2/L} \sin(\pi x/L)$, где L – ширина ямы. Доказать, что $\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta p^2 \rangle \cong \hbar^2$. Учесть, что $\langle \Delta x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ и $\langle \Delta p^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$.

5. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЯМА И ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР

Решение уравнения Шредингера для частицы в прямоугольной бесконечно глубокой потенциальной яме (рис.4) шириной L дает для энергии лишь дискретные значения

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2},$$

где число n нумерует возможные значения энергии, $n = 1, 2, 3, \dots$ – целое число. При этом волновая функция

$$\psi_n(x) = \sqrt{2/L} \sin(n\pi x/L). \quad (5.1)$$

Расстояние между уровнями с номерами n и $n + 1$ зависит от n :

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \hbar^2 \pi^2 (2n+1) / (2mL^2).$$

Рассмотрим движение частицы с энергией E в поле потенциального барьера бесконечной ширины (рис.5) и высоты U_0 . Если $E < U_0$, то в стационарном режиме отражается вся энергия падающей волны, однако под ступенькой ($x > 0$) волновая функция не равна нулю, а экспоненциально затухает с ростом координаты x . Это соответствует наличию коэффициента преломления

$$n = \lambda_1 / \lambda_2 = k_2 / k_1,$$

где $k_1^2 = 2mE/\hbar^2$ и $k_2^2 = 2m(E - U_0)/\hbar^2$ – волновые числа, соответствующие движению частицы в областях I и II.

Если $U_0 < E$, то частица частично отражается, а частично проходит через барьер. Поэтому можно ввести коэффициенты отражения (R) и прохождения (D). Коэффициент отражения барьера

$$R = [(k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)]^2. \quad (5.2)$$

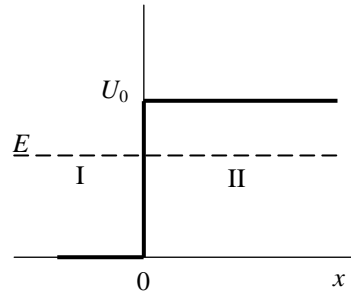


Рис.5

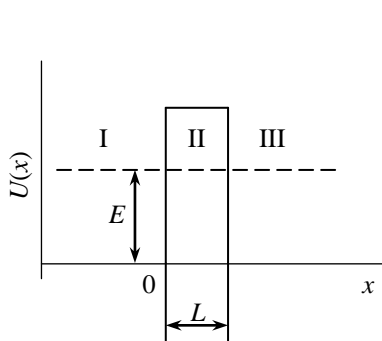


Рис.6

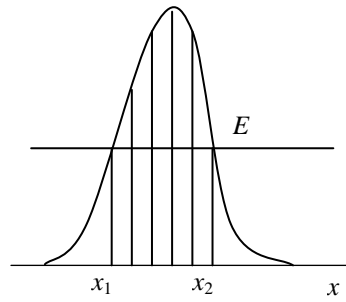


Рис.7

Коэффициент прохождения барьера равен отношению доли прошедшей волны к падающей:

$$D = 4k_1k_2 / (k_1 + k_2)^2.$$

Для коэффициентов отражения и прохождения выполняется соотношение $R + D = 1$. В классическом случае (для $E > U_0$) всегда $D = 1$ и $R = 0$.

Если квантовая частица массой m , двигаясь в области I с энергией E , встречает на своем пути потенциальный барьер (рис.6) шириной L и высотой U_0 , то она может отразиться и остаться в области I. Однако существует конечная вероятность того, что она окажется в области III, даже если $E < U_0$. Этот эффект называется туннельным эффектом. В области II происходит затухание волновой функции.

Вероятность прохождения частицы через барьер – коэффициент прозрачности потенциального барьера

$$D = D_0 \exp\left[-\frac{2L}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}\right],$$

где m и E – масса и энергия частицы, падающей на барьер; U_0 – высота барьера; L – ширина барьера; D_0 – коэффициент, определяемый природой барьера и обычно слабо отличающийся от единицы, $D_0 \approx 1$.

Если барьер имеет произвольную форму (рис.7), то его можно разбить на ряд прямоугольных барьеров. Суммарное действие таких барьеров приводит к формуле

$$D = D_0 \exp \left[- \left(\frac{2}{\hbar} \right) \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U - E)} dx \right].$$

Пределы интегрирования определяют из условия $U(x) = E$.

Пример 1. Электрон находится в потенциальной яме шириной L . Найти вероятность того, что электрон, находящийся в возбужденном состоянии ($n = 2$), будет обнаружен в средней трети ямы.

Решение. Вероятность найти частицу в интервале $x_1 < x < x_2$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx,$$

где $\psi_n(x)$ – нормированная собственная волновая функция, для прямоугольной ямы вычисляется по формуле (5.2).

Учитывая, что $n = 2$, получим $W = (2/L) \int_{x_1}^{x_2} \sin^2(2\pi x/L) dx$. По

условию $x_1 = L/3$ и $x_2 = 2L/3$. Проведем замену $\sin^2(2\pi x/L) = [1 - \cos(4\pi x/L)]/2$ и разобьем интеграл на два:

$$\begin{aligned} W &= \frac{2}{L} \int_{L/3}^{2L/3} \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \left\{ \int_{L/3}^{2L/3} dx - \int_{L/3}^{2L/3} \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right) dx \right\} = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi} \left(\sin \frac{8\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

После вычислений получим $W = 0,195$.

Пример 2. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной L на втором энергетическом

уровне. В каких точках ямы плотность вероятности обнаружения частицы совпадает с классической плотностью вероятности?

Решение. Волновая функция, описывающая состояние частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной L , имеет вид $\psi_n(x) = \sqrt{2/L} \sin(\pi n x/L)$, где n – номер энергетического уровня, $n = 1, 2, \dots$; x – координата частицы в яме, $0 \leq x \leq L$. Согласно физическому смыслу волновой функции, плотность вероятности w обнаружения частицы в точке с координатой x равна $|\psi|^2$. Если частица находится на втором энергетическом уровне ($n = 2$), то $w_2 = (2/L) \sin^2(2\pi x/L)$. Следуя принципу соответствия Бора, выражение для классической плотности вероятности получим при $n \rightarrow \infty$ в виде $w_\infty = 1/L$. Приравнявая, получим $\sin^2(2\pi x/L) = 1/2$. Решение этого уравнения $x = (k \pm 1/4)L/2$, где k принимает значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В пределах ямы таких точек четыре, их координаты $L/8; 3L/8; 5L/8; 7L/8$.

Пример 3. Электрон с энергией $E = 4,9$ эВ движется в положительном направлении оси x и падает на потенциальный барьер высотой $U_0 = 5$ эВ и шириной L . При какой ширине барьера вероятность W прохождения электрона через барьер будет равна $0,2$?

Решение. Вероятность прохождения W частицы через барьер по смыслу есть его коэффициент прозрачности D . Поэтому $W = D \approx \exp\left[-(2L/\hbar)\sqrt{2m_e(U_0 - E)}\right]$. Для удобства вычислений логарифмируем: $\ln W = -(2L/\hbar)\sqrt{2m_e(U_0 - E)}$. Поменяем знаки правой и левой частей и найдем

$$L = \frac{\hbar \ln(1/W)}{2\sqrt{2m_e(U_0 - E)}} = 4,95 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Пример 4. Поток электронов, каждый из которых имеет энергию $E = 100$ эВ, падает на барьер бесконечной ширины высотой $U_0 < E$. Определить высоту потенциального барьера U_0 , если известно, что 4 % падающих на барьер электронов отражаются.

Решение. Коэффициент отражения барьера $R = [(k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)]^2$. Так как координата электрона точно не известна, то в соответствии с принципом неопределенностей Гейзенберга точно известен импульс

электрона и соответственно его кинетическая энергия. В левой области $k_1 = (1/\hbar)\sqrt{2m_e E}$, в правой области кинетическая энергия равна $E - U_0$ и $k_2 = (1/\hbar)\sqrt{2m_e(E - U_0)}$. Подставив эти данные в выражение (5.2) и разделив на $\sqrt{2m_e E}$, получим

$$R = \left[1 - \sqrt{1 - U_0/E}\right]^2 / \left[1 + \sqrt{1 + U_0/E}\right]^2.$$

После преобразований запишем $\sqrt{1 - U_0/E} = (1 - \sqrt{R})/(1 + \sqrt{R})$ и вычислим $U_0 = \left[1 - \left(1 - \sqrt{R}/1 + \sqrt{R}\right)^2\right]E = 55,6$ эВ.

Задачи.

1. Альфа-частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме. Определить ширину ямы, если минимальная энергия частицы 6 МэВ.

2. Электрон находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной 0,1 нм. Вычислить длину волны излучения при переходе электрона со второго энергетического уровня на первый.

3. Протон находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной 0,01 пм. Найти длину волны излучения при переходе протона с третьего энергетического уровня на второй.

4. Атом водорода находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной 0,1 м. Вычислить разность энергий соседних уровней, соответствующих средней энергии теплового движения атома при температуре 300 К.

5. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной L в основном состоянии. В каких точках ямы плотность вероятности обнаружения частицы совпадает с классической плотностью вероятности?

6. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной L в основном состоянии. Определить отношение плотности вероятности обнаружения частицы в центре ямы к классической плотности вероятности.

7. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной L в первом возбужденном состоянии. В каких точках ямы плотность вероятности обнаружения частицы максимальна, а в каких минимальна?

8. Вычислить среднее значение импульса в основном состоянии электрона в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками.

9. Рассчитать среднее значение квадрата импульса электрона в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками.

10. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной L на втором энергетическом уровне. Определить вероятность обнаружения частицы в пределах от 0 до $L/3$.

11. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной L в основном состоянии. Найти отношение вероятностей нахождения частицы в пределах от 0 до $L/4$ для первого и второго энергетических уровней.

12. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной L в основном состоянии. Найти отношение вероятностей нахождения частицы в пределах от 0 до $L/3$ и от $L/3$ до $2L/3$.

13. Оценить разность ΔE_n двух соседних уровней энергии при $n \gg 1$ для молекулы газа, находящегося в сосуде. Масса молекулы $m = 10^{-26}$ кг, ширина сосуда $L = 10$ см (считать сосуд бесконечно глубокой потенциальной ямой). Сравнить ΔE_n со средней кинетической энергией молекул при комнатной температуре 300 К.

14. Оценить разность ΔE_n двух соседних уровней энергии при $n \gg 1$ для электрона, локализованного в атоме с линейными размерами $L \approx 10^{-10}$ м (атом считать бесконечно глубокой потенциальной ямой).

15. Для электрона с энергией $E = 1$ эВ оценить эффективную глубину его проникновения под барьер высоты $U_0 = 5$ эВ.

16. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $L = 0,1$ нм. Рассчитать разность энергий $U_0 - E$ (в электрон-вольтах), при которой вероятность прохождения электрона сквозь барьер равна 0,5.

17. Протон с энергией 5 эВ движется вдоль оси x , встречая на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой $U_0 = 10$ эВ и шириной $L = 0,1$ нм. Определить вероятность прохождения протоном этого барьера. Во сколько раз следует сузить барьер, чтобы вероятность прохождения его протоном была такой же, как для электрона в тех же условиях.

18. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $L = 0,1$ нм. Для электрона разность $U_0 - E = 5$ эВ. Во сколько раз изменится коэффициент прозрачности D потенциального барьера, если разность $U_0 - E$ вырастет в 4 раза?

19. Частица с энергией $E = 10$ эВ движется вдоль оси x , встречая на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой $U_0 = 5$ эВ. Найти коэффициент преломления n на границе потенциального барьера.

20. Электрон с длиной волны де Бройля $\lambda_1 = 100$ пм, двигаясь вдоль оси x , встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой $U_0 = 100$ эВ. Определить длину волны де Бройля после прохождения барьера.

21. Частица с энергией $E = 50$ эВ, двигаясь в положительном направлении оси x , встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой $U_0 = 20$ эВ. Какова вероятность отражения частицы от этого барьера?

22. Частица массой $m = 10^{-19}$ кг, двигаясь вдоль оси x со скоростью $v = 20$ м/с, встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой $U_0 = 100$ эВ. Вычислить коэффициент отражения R на границе потенциального барьера.

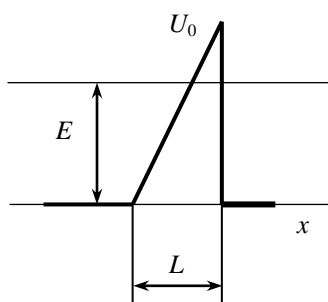


Рис.8

23. Электрон с энергией E движется в положительном направлении оси x , встречая на своем пути барьер, ширина которого L и высота U_0 . Найти вероятность прохождения, если барьер имеет форму, показанную на рис.8.

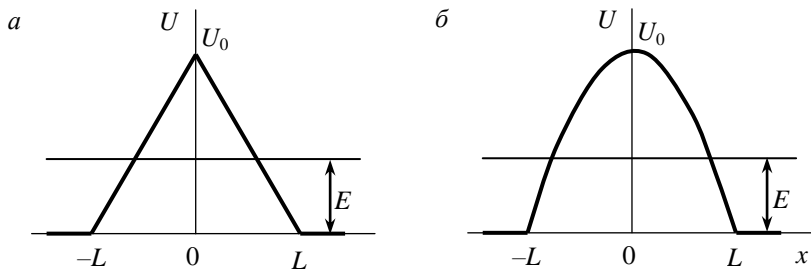


Рис.9

24. Найти вероятность прохождения протона с энергией E сквозь потенциальный барьер, показанный на рис.9, *a*.

25. Какова вероятность прохождения частицы с массой m и энергией E сквозь потенциальный барьер (рис.9, *б*), где $U(x) = U_0(1 - x^2/L^2)$?

6. СТРОЕНИЕ АТОМА

Решение уравнения Шредингера для электрона в кулоновской яме ядра показывает, что электрон в атоме может иметь энергию

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2},$$

где m_e – масса электрона; Z – атомный номер; $n = 1, 2, 3 \dots$ – главное квантовое число.

Наиболее вероятное расстояние электрона от ядра в состоянии n

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e Z e^2} n^2.$$

При $n = 1$ и $Z = 1$ это расстояние совпадает с радиусом первой борховской орбиты.

Модуль момента импульса электрона в атоме

$$|L_\ell| = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1)}, \quad (6.1)$$

где $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1 \dots$ называется орбитальным квантовым числом.

Проекция момента импульса на любую ось (например, z) тоже может принимать лишь определенные значения

$$L_{\ell z} = m_\ell \hbar,$$

где $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$ называется магнитным квантовым числом.

Магнитное квантовое число определяет также проекцию магнитного момента, создаваемого движением электрона вокруг ядра:

$$\mu_{\ell z} = -\mu_B m_\ell.$$

Модуль магнитного момента электрона

$$|\mu_\ell| = \mu_B \sqrt{\ell(\ell+1)},$$

где $\mu_B = e\hbar/2m_e = 0,927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл – магнетон Бора. Отношение модулей орбитальных магнитного и механического моментов называется гиромагнитным отношением:

$$|\mu_\ell|/|L_\ell| = \mu_{\ell z}/L_{\ell z} = \mu_B/\hbar = e/(2m_e).$$

Электрон обладает также собственным механическим моментом импульса

$$|L_s| = \hbar\sqrt{s(s+1)},$$

где $s = 1/2$ – спиновое квантовое число.

Соответствующий ему магнитный момент также квантован

$$|\mu_s| = 2\mu_B\sqrt{s(s+1)}.$$

Проекции спинового момента импульса и магнитного момента на направление z внешнего магнитного поля соответственно

$$L_{sz} = \hbar m_s \quad \text{и} \quad \mu_{sz} = 2\mu_B m_s,$$

где m_s – спиновое квантовое число, $m_s = \pm 1/2$.

Гиромагнитное отношение для спиновых магнитного и механического моментов оказывается в 2 раза больше, чем для орбитальных моментов:

$$\begin{aligned} |\mu_s|/|L_s| &= \mu_{sz}/L_{sz} = \\ &= 2\mu_B/\hbar = e/m_e. \end{aligned}$$

Орбитальный (L_ℓ) и спиновый (L_s) моменты импульса электрона складываются и дают полный момент импульса электрона J (рис.10), который квантуется так же:

$$|J| = \hbar\sqrt{J(J+1)}, \quad (6.2)$$

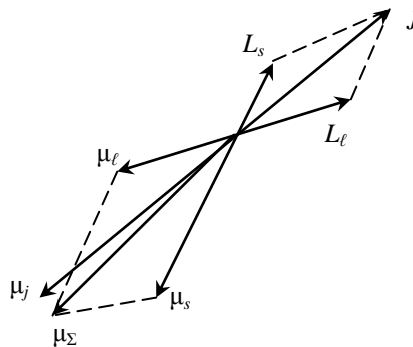


Рис.10

где $J = |\ell \pm s| = |\ell \pm 1/2|$ – внутреннее квантовое число. Проекция полного момента на направление внешнего магнитного поля

$$J_z = \hbar m_j,$$

где m_j может принимать $2J + 1$ значение от $-J$ до J . Для описания состояния электрона в атоме используют четыре квантовых числа: n , ℓ , m_ℓ и m_s или n , ℓ , j , m_j . Обычно для орбитального квантового числа ℓ используют следующие обозначения:

ℓ	0	1	2	3	4
Состояние электрона	s	p	d	f	g

При втором способе описания термов обозначение состояния электрона s , p , d , f , ... дополняют значением квантового числа (справа внизу) и мультиплетности терма $2s + 1$ (слева сверху). Например 3p_0 означает, что $\ell = 1$, $s = 1$, $j = 0$.

Из-за разных гиромагнитных отношений для спинового и орбитального моментов суммарный магнитный момент оказывается не параллельным суммарному механическому моменту. Поэтому вводится специальный коэффициент g_L – фактор Ланде, который есть, в сущности, коэффициент пропорциональности между j и μ_j :

$$\mu_j = -g_L \mu_B j;$$

$$g_L = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - \ell(\ell+1)}{2j(j+1)}. \quad (6.3)$$

Чтобы описать структуру сложного атома, надо знать состояния всех его электронов. В легких и средних атомах орбитальные моменты отдельных электронов складываются в суммарный орбитальный момент

$$L = L_{\ell_1} + L_{\ell_2} + L_{\ell_3} + \dots = \sum_i L_{\ell_i},$$

а спиновые – в суммарный спиновый

$$S = \sum_i L_{si}$$

и полный момент

$$J = L + S. \quad (6.4)$$

В тяжелых атомах полный момент равен сумме полных моментов отдельных электронов:

$$J = \sum_i J_i,$$

где $J_i = L_{li} + L_{si}$.

Магнитный момент атома

$$|\mu_J| = g_L \sqrt{J(J+1)} \mu_B.$$

Состояния атомов обозначаются так же, как состояния отдельных электронов, но используют прописные буквы. Например, 3P_0 означает, что $L = 1$, $S = 1$, $J = 0$.

Порядок заполнения энергетических уровней в атоме определяется эмпирическими правилами Клечковского. Первое правило Клечковского: сначала будут заполняться уровни с наименьшей суммой квантовых чисел $n + \ell$. Второе правило Клечковского: если два уровня имеют одинаковую сумму квантовых чисел $n + \ell$, то первым будет заполняться уровень с меньшим n .

Электроны подчиняются принципу Паули: каждый энергетический уровень может быть заселен не более чем двумя электронами с противоположными спинами. Энергии некоторых состояний могут совпадать, т.е. может иметь место вырождение. В этом случае электроны заселяют состояния таким образом, чтобы спин S атома был максимален и при этом по возможности максимальным было значение L . Таково правило Гунда.

При попадании атома во внешнее магнитное поле B с полем взаимодействуют как орбитальный, так и спиновый магнитные моменты электронов. Кроме того, эти моменты взаимодействуют между собой (спин-орбитальное взаимодействие). В случае слабого поля взаимодействие магнитных моментов с внешним полем меньше, чем

спин-орбитальное взаимодействие, и атом приобретает дополнительную энергию

$$\Delta E = -(\mu B) = g_{\text{л}} \mu_{\text{В}} m_J B,$$

которая зависит от квантового числа m_J , т.е. снимается вырождение по m_J .

В сильном магнитном поле спин-орбитальным взаимодействием можно пренебречь, связь между L и S разрывается, и они проецируются на направление поля независимо друг от друга. В этом случае

$$\Delta E = \mu_{\text{В}} B (m_L + 2m_S).$$

Пример 1. Каково максимальное число электронов, находящихся в состояниях, описываемых данным главным квантовым числом n ?

Решение. Каждому квантовому числу n соответствует n различных значений орбитального квантового числа ℓ : $\ell = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. В свою очередь каждому значению ℓ соответствуют $2\ell + 1$ значения магнитного квантового числа: $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$. На каждом уровне m_ℓ могут быть два электрона со спиновыми квантовыми числами $m_s = \pm 1/2$. Полное количество электронов на оболочке n

$$N = \sum_{\ell=0}^{n-1} 2(2\ell + 1) = 2n^2.$$

Пример 2. Электрон в атоме находится в d -состоянии. Определить орбитальный момент импульса электрона и максимальное значение проекции момента импульса на направление внешнего магнитного поля.

Решение. Электрон в d -состоянии описывается орбитальным квантовым числом $\ell = 2$. Модуль орбитального момента при этом согласно формуле (6.3) $|L_\ell| = \hbar\sqrt{6}$. Проекция момента импульса на направление внешнего магнитного поля может принимать значения $L_{\ell z} = \hbar m_\ell$, соответствующие различным значениям магнитного квантового числа m_ℓ : $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2$. Максимальная проекция орбитального момента соответствует максимальному значению $m_\ell = 2$: $L_{\ell z} = 2\hbar$.

Пример 3. Найти максимально возможный полный механический момент и соответствующее спектральное обозначение терма атома натрия, валентный электрон которого имеет главное квантовое число $n = 4$.

Решение. Атом натрия имеет один электрон на внешней оболочке и спин этого электрона равен $1/2$. Поэтому мультиплетность $2S + 1 = 2$. Механический момент максимален, если максимально орбитальное квантовое число. Главное квантовое число $n = 4$, ему соответствует максимальное значение $L = 3$. Тогда внутреннее квантовое число согласно формуле (6.4) $J = 3 + 1/2 = 7/2$. Обозначение соответствующего терма ${}^2F_{7/2}$. Максимально возможный механический момент по (6.2) $|J| = \hbar\sqrt{J(J+1)} = \hbar\sqrt{7 \cdot 9/(2 \cdot 2)} = \hbar\sqrt{63}/2$.

Пример 4. Найти полное расщепление терма ${}^2D_{3/2}$ в магнитном поле $B = 2$ Тл, считая его слабым (случай 1) и сильным (случай 2) полем.

Решение. Состояние ${}^2D_{3/2}$ означает, что $J = 3/2$, $L = 2$, $S = 1/2$. Фактор Ланде определим по формуле

$$g_L = 1 + \frac{(3/2) \cdot (5/2) + (1/2) \cdot (3/2) - 2 \cdot 3}{2 \cdot (3/2) \cdot (5/2)} = \frac{4}{5}.$$

Случай 1. Дополнительная энергия этого состояния в слабом магнитном поле $\Delta E = \frac{4}{5} \frac{e\hbar B}{2m_e} m_J$. Квантовое число m_J может принимать $2J + 1$ значений от $-J$ до J . Полное расщепление соответствует разности энергий уровней с $m_J = -3/2$ и $m_J = 3/2$

$$\Delta \varepsilon = 2\Delta E = 2 \frac{4}{5} \frac{e\hbar B}{2m_e} \frac{3}{2}.$$

Подставляя численные данные, получим $\Delta \varepsilon = 276,9 \cdot 10^{-6}$ эВ.

Случай 2. Энергетический сдвиг в сильном магнитном поле $\Delta E = \mu_B B(m_L + 2m_S)$. Квантовые числа m_L и m_S могут иметь значения от -2 до 2 и от $-1/2$ до $1/2$ соответственно. Сумма $m_L + 2m_S$ будет иметь максимальное значение 3 и минимальное значение -3 .

Максимальное расщепление $\Delta\varepsilon = 2\Delta E = 2 \frac{e\hbar B}{2m_e} 3$. Подставляя числовые значения, получим $\Delta\varepsilon = 692,3 \cdot 10^{-6}$ эВ.

Задачи.

1. Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число $n = 3$. Определить число электронов на этой оболочке, которые имеют одинаковые квантовые числа: а) $m_s = -1/2$; б) $m_\ell = 0$; в) $m_\ell = -1, m_s = 1/2$.

2. Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число $n = 4$. Установить число электронов на этой оболочке, имеющих одинаковые квантовые числа: а) $m_\ell = -3$; б) $m_s = 1/2, m_\ell = 2$; в) $m_s = -1/2, m_\ell = 1$.

3. Сколько электронов в атоме могут иметь одинаковые квантовые числа в случаях: а) n, ℓ, m_ℓ, m_s ; б) n, ℓ, m_ℓ .

4. Валентный электрон атома Na находится в состоянии с $n = 3$, имея при этом максимально возможный полный механический момент. Каков его магнитный момент в этом состоянии?

5. Во сколько раз орбитальный момент импульса L_ℓ электрона, находящегося в f -состоянии, больше, чем электрона в p -состоянии?

6. Электрон в атоме водорода находится в состоянии $1s$. Поглотив фотон с энергией $E = 12,1$ эВ, он перешел в возбужденное состояние с максимально возможным орбитальным квантовым числом. Как изменился момент импульса ΔL_ℓ орбитального движения электрона?

7. Определить суммарное максимальное число s -, p -, d -, f - и g -электронов, которые могут находиться на N - и O -оболочках атома.

8. Найти кратность вырождения состояний $^2p, ^3d$ и 4f с максимально возможными полными механическими моментами.

9. Написать электронную формулу элемента № 79 и объяснить порядок заполнения уровней.

10. Написать электронную формулу элемента № 47 и объяснить порядок заполнения уровней.

11. У какого элемента заполнены K -, L - и M -оболочки и $4s$ -подоболочка, а также наполовину заполнена $4p$ -подоболочка?

12. Найти с помощью правила Гунда полный механический момент атомов в основном состоянии, если их незаполненная подболочка содержит три и семь d -электронов.

13. Найти с помощью правила Гунда полный механический момент атомов в основном состоянии, если их незаполненная подболочка содержит три и четыре p -электронов.

14. Определить спиновый механический момент атома в состоянии D_2 , если максимальное значение проекции магнитного момента в этом состоянии $4\mu_B$.

15. Вычислить с помощью правила Гунда магнитный момент основного состояния атома, незамкнутая подболочка которого заполнена ровно наполовину пятью электронами.

16. Возбужденный атом имеет электронную конфигурацию $1s^2 2s^2 2p 3d$ и находится при этом в состоянии с максимально возможным полным механическим моментом. Каков магнитный момент атома в этом состоянии?

17. Найти полный механический момент атома в состоянии с $S = 3/2$ и $L = 2$, если известно, что магнитный момент его равен нулю.

18. Установить возможные значения полных механических моментов атомов, находящихся в состояниях 4P и 5D .

19. Какие значения квантового числа J может иметь атом в состоянии с квантовыми числами S и L , равными соответственно 2 и 3; 3 и 3; $5/2$ и 2?

20. На сколько подуровней расщепятся в слабом магнитном поле терм 3P_0 , $^2F_{5/2}$, $^4D_{1/2}$? Составить схему уровней.

21. Атом находится в слабом магнитном поле с индукцией $B = 0,25$ Тл. Найти полную величину расщепления в электрон-вольтах термов 1P и 3F_4 . Составить схему уровней.

22. Атом находится в слабом магнитном поле с индукцией $B = 1,0$ Тл. Какова полная величина расщепления в электрон-вольтах термов 1S и $^2D_{5/2}$. Составить схему уровней.

23. Определить максимальную энергию ΔE магнитного взаимодействия атома, находящегося в состоянии 1D с магнитным полем, индукция которого $B = 1$ Тл (слабое поле) и $B = 50$ Тл (сильное поле). Составить схемы уровней.

24. Атом находится в сильном магнитном поле с индукцией $B = 5$ Тл. Рассчитать полную величину расщепления в электрон-вольтах термов 1P и 3F_4 . Составить схему уровней.

25. Написать спектральное обозначение терма, кратность вырождения которого равна семи, а квантовые числа L и S связаны соотношением $L = 3S$.

7. РЕНТГЕНОВСКИЕ СПЕКТРЫ АТОМОВ

Экспериментально строение атомов изучают, исследуя спектры испускания и поглощения атомами электромагнитного излучения. Переходам валентных электронов соответствует оптический диапазон излучения, а при переходах электронов на внутренних оболочках возникает характеристическое рентгеновское излучение. Схема переходов приведена на [рис.11](#). Частоту и длину волны соответствующего излучения можно определить, используя закон Мозли:

$$\nu = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right); \quad (7.1)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R'(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right), \quad (7.2)$$

где Z – порядковый номер элемента в системе Менделеева; R и R' – постоянные Ридберга для частоты и волнового числа, $R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, $R' = 1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$; n_1 – главное квантовое число уровня, с которого уходит электрон; n_2 – главное квантовое число уровня, на который переходит электрон; σ – постоянная экранирования, учитывающая экранировку внутренними электронами кулоновского взаимодействия ядра и рассматриваемого электрона.

При переходах атома из одного состояния ($J_{\text{нач}}$) в другое ($J_{\text{кон}}$) с поглощением или испусканием электромагнитного излучения допустимы только такие переходы, при которых выполняются следующие соотношения, называемые правилами отбора:

$$\Delta j = 0; \pm 1; \Delta m_j = 0; \pm 1; \Delta \ell = \pm 1; \Delta m_\ell = 0; \pm 1; \Delta m_s = 0;$$

$\Delta J = \pm 1; 0$ при $J_{\text{нач}} \neq 0$ и $J_{\text{кон}} \neq 0$;

$\Delta J = \pm 1$ при $J_{\text{нач}} = 0$ или

$J_{\text{кон}} = 0; \Delta m_J = \pm 1; 0;$

$\Delta S = 0; \Delta m_S = 0;$

$\Delta L = \pm 1; 0$ при $L_{\text{нач}} \neq 0$ и $L_{\text{кон}} \neq 0$;

$\Delta L = \pm 1$ при $L_{\text{нач}} = 0$ или

$L_{\text{кон}} = 0; \Delta m_L = \pm 1; 0.$

В магнитном поле B вследствие снятия вырождения уровни расщепляются. Величина расщепления соответствующих спектральных линий в слабом поле

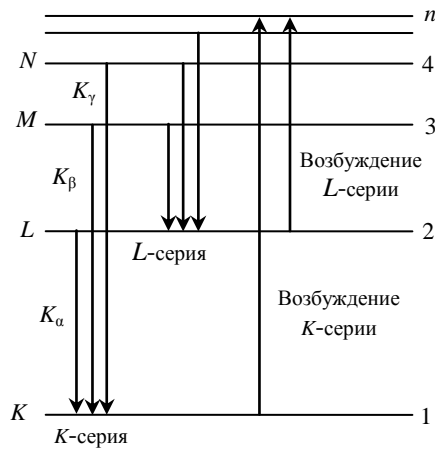


Рис.11

$$\Delta\omega = (m_{J1}g_{J1} - m_{J2}g_{J2})\mu_B B / \hbar,$$

где m_{J1} , g_{J1} и m_{J2} , g_{J2} – квантовые числа и факторы Ланде соответствующих энергетических уровней.

При излучении вдоль магнитного поля зеемановские компоненты, обусловленные переходами $m_{J1} \rightarrow m_{J2}$, отсутствуют.

При наличии большого количества атомов и при $T \neq 0$ в каждый момент времени часть атомов будет находиться в возбужденных состояниях. Доля атомов, имеющих в термодинамическом равновесии энергию E , при температуре T определяется распределением Больцмана

$$N = (g/g_0)\exp[-(E - E_0)/kT],$$

где g и g_0 – кратность вырождения возбужденного и основного состояний; E_0 – энергия основного состояния.

Пример 1. Длина волны линии L_α вольфрама равна 0,148 нм. Найти постоянную экранирования.

Решение. Используем закон Мозли (7.2). С учетом того, что $Z = 74$ – порядковый номер вольфрама, $n_1 = 3$ для L_α -линии, $n_2 = 2$ – номер уровня, на который переходит электрон, для L -серии, $\sigma = 7,4$.

Пример 2. Определить энергию фотона K_α -линии рентгеновского спектра, излучаемого вольфрамом при бомбардировке его быстрыми электронами.

Решение. K_α -линия возникает при переходе электрона с L - на K -слой. Частота этой линии определяется по закону Мозли (7.1). В нашем случае $n_1 = 2$, $n_2 = 1$ и $\sigma = 1$, $Z = 74$. Отсюда энергия фотона $E_{K_\alpha} = h\nu = 54,4$ кэВ.

Пример 3. Найти зеемановское расщепление спектральной линии ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^2P_{1/2}$. Указать число компонентов в расщепленной линии.

Решение. Состояние ${}^2D_{3/2}$ означает, что $J = 3/2$, $L = 2$, $S = 1/2$. Фактор Ланде для этого состояния

$$g_{J1} = 1 + \frac{(3/2) \cdot (5/2) + (1/2) \cdot (3/2) - 2 \cdot 3}{2 \cdot (3/2) \cdot (5/2)} = \frac{4}{5}.$$

Дополнительная энергия этого состояния в магнитном поле

$$\Delta E_1 = \frac{4}{5} \frac{e\hbar B}{2m_e} m_{J1}.$$

Аналогично для состояния ${}^2P_{1/2}$ получим $J = 1/2$, $L = 1$, $S = 1/2$. Фактор Ланде и дополнительная энергия соответственно

$$g_{J2} = 1 + \frac{(3/4) + (3/4) - 2}{(3/2)} = \frac{2}{3}; \quad \Delta E_2 = \frac{2}{3} \frac{e\hbar B}{2m_e} m_{J2}.$$

Возможны переходы с изменением квантового числа m_J на 0, 1 и -1 . Рассматривая эти варианты, получим, что возможны расщепления

$$\Delta\omega = \left\{ \pm \frac{13}{15}, \pm \frac{11}{15}, \pm \frac{1}{15} \right\} \frac{eB}{2m_e}.$$

Пример 4. Атомарный литий с концентрацией $n = 3,6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ находится при температуре $T = 1500$ К. При этом мощность излучения резонансной линии $\lambda = 671$ нм ($2P \rightarrow 2S$) в расчете на единицу объема газа $P = 0,3$ Вт/см³. Найти среднее время жизни атомов лития в состоянии резонансного возбуждения.

Решение. Среднее время жизни атомов определяется вероятностью перехода атома из резонансного состояния в основное: $\tau = 1/w$. Вероятность перехода есть отношение среднего количества излучающих (переходящих) атомов к общему числу атомов в резонансном состоянии: $w = \langle N_{2P, \text{изл}} \rangle / N_{2P}$. В резонансном состоянии находится $N_{2P} = (g_{2P}/g_{2S}) N_{2S} \exp(-(E_{2P} - E_{2S})/kT)$ атомов. Здесь $g_{2S} = 2$ и $g_{2P} = 6$ – кратность вырождения основного и резонансного уровней соответственно. Так как и $h\nu = hc/\lambda$, мощность излучения складывается из количества испущенных в единицу времени фотонов $\langle N_{2P, \text{изл}} \rangle = P/h\nu$. Таким образом, среднее время жизни атомов

$$\tau = 1/w = \frac{g_{2P}}{g_{2S}} \frac{hc}{P\lambda} n \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right).$$

Подставляя числовые данные, получим $\tau = 65$ нс.

Задачи.

1. Установить, какие из следующих переходов запрещены правилами отбора: а) ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^2P_{1/2}$; б) ${}^3P_1 \rightarrow {}^2S_{1/2}$; в) ${}^3F_3 \rightarrow {}^3P_2$; г) ${}^4F_{1/2} \rightarrow {}^4D_{5/2}$.

2. Установить, какие из следующих переходов запрещены правилами отбора: а) ${}^2S_{1/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$; б) ${}^2S_{1/2} \rightarrow {}^2D_{3/2}$; в) ${}^2D_{5/2} \rightarrow {}^2P_{1/2}$; г) ${}^2F_{7/2} \rightarrow {}^2D_{3/2}$.

3. Какую наименьшую разность потенциалов нужно приложить к рентгеновской трубке с вольфрамовым анодом, чтобы в спектре характеристического рентгеновского излучения были все линии K -серии?

4. Вычислить с помощью закона Мозли разность энергий связи K - и L -электронов ванадия.

5. Сколько элементов содержится в ряду между теми, у которых длина волны K_α -линии равна 250 и 179 пм?

6. У какого легкого элемента в спектре поглощения разность частот K - и L -краев поглощения рентгеновских лучей $\Delta\omega = 6,85 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$?

7. У некоторого легкого атома длина волны K_α - и K_β -линий соответственно 275 и 251 пм. Что это за атом?

8. В атоме молибдена электрон переходит с M - на L -слой. Определить длину волны и энергию рентгеновского излучения. Постоянная $\sigma = 5,6$.

9. В атоме циркония электрон переходит с M - на K -слой. Определить длину волны и энергию рентгеновского излучения. Постоянная $\sigma = 1$.

10. Длина волны, соответствующей K_{α} -линии рентгеновского излучения, $\lambda = 7,5 \cdot 10^{-2}$ нм. Определить элемент, из которого сделан антикатод. Постоянная $\sigma = 1$.

11. К рентгеновской трубке с серебряным антикатодом приложено напряжение, достаточное для возбуждения всей K -серии. Определить суммарную энергию двух квантов, соответствующих α - и β -линиям этой серии. Постоянная $\sigma = 1$.

12. При переходе электрона в атоме меди с M -слоя на L -слой испускаются лучи с длиной волны 1,2 нм. Вычислить постоянную экранирования в формуле Мозли.

13. Длина волны K_{α} -линии характеристического рентгеновского излучения равна 0,194 нм. Из какого материала сделан антикатод?

14. При исследовании характеристического спектра некоторого элемента было найдено, что длина волны K_{α} -линии равна 76 пм. Какой это элемент?

15. Определить порядковый номер элемента в периодической системе, если граничная частота K -серии составляет $5,55 \cdot 10^{18}$ Гц. Принять $\sigma = 1$.

16. Вычислить энергию фотона, соответствующего линии K_{α} в характеристическом спектре марганца.

17. Рассчитать постоянную экранирования для L -серии рентгеновского излучения, если при переходе электрона в атоме вольфрама с M - на L -оболочку длина волны испущенного фотона 140 пм.

18. Какую наименьшую разность потенциалов надо приложить к рентгеновской трубке, антикатод которой покрыт ванадием, чтобы в спектре рентгеновского излучения появились все линии K -серии ванадия? Граница K -серии ванадия $\lambda = 226$ пм.

19. Спектральная линия, обусловленная переходом ${}^3D_1 \rightarrow {}^3P_0$, испытывает расщепление в слабом магнитном поле. При наблюдении перпендикулярно к направлению магнитного поля интервал ме-

жду соседними компонентами зеемановской структуры линии $\Delta\omega = 1,32 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$. Найти индукцию B магнитного поля в месте нахождения источника.

20. Определить спектральный символ синглетного терма атома, если при расщеплении этого терма в слабом магнитном поле с индукцией $B = 0,3 \text{ Тл}$ полная ширина 104 мкЭВ .

21. Длина волны дуплета желтой линии натрия (${}^2P \rightarrow {}^2S$) $589,59$ и $589,00 \text{ нм}$. Найти отношение интервалов между соседними подуровнями зеемановского расщепления термов ${}^2P_{3/2}$ и ${}^2P_{1/2}$ в слабом магнитном поле.

22. Известно, что спектральная линия с $\lambda = 612 \text{ нм}$ атома обусловлена переходом между синглетными термами. Вычислить интервал $\Delta\lambda$ между крайними компонентами этой линии в магнитном поле с индукцией $B = 1,0 \text{ Тл}$.

23. Какая относительная часть атомов водорода находится в состоянии с главным квантовым числом $n = 2$ при $T = 3000 \text{ К}$?

24. Определить отношение числа атомов газообразного натрия в состоянии $3P$ к числу атомов в основном состоянии $3S$ при температуре $T = 2400 \text{ К}$. Известно, что переходу $3P \rightarrow 3S$ соответствует спектральная линия с $\lambda = 589 \text{ нм}$.

25. Разреженные пары ртути, атомы которой практически все находятся в основном состоянии, осветили светом с $\lambda = 253,65 \text{ нм}$, соответствующей резонансной линии ртути. Оказалось, что мощность испускания данной линии парами ртути $P = 35 \text{ мВт}$. Найти число атомов в состоянии резонансного возбуждения, среднее время жизни которого $\tau = 0,15 \text{ мкс}$.

8. СПЕКТРЫ МОЛЕКУЛ

При сближении двух атомов между ними начинают действовать как силы отталкивания, так и силы притяжения. Силы отталкивания более короткодействующие, т.е. изменяются с изменением расстояния между атомами быстрее, чем силы притяжения. Это приводит к тому, что на некотором расстоянии r_0 обе силы уравниваются друг друга, а потенциальная энергия U принимает наименьшее

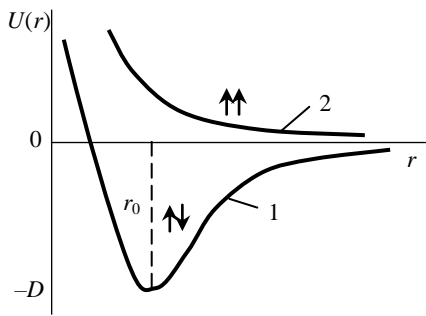


Рис.12

значение $U_{\min} = -D$ (рис.12, кривая 1). Такая ситуация соответствует образованию молекулы с энергией связи D и возможна только при антипараллельных спинах. При параллельных спинах (рис.12, кривая 2) потенциальная энергия всюду положительна, что говорит об отсутствии выигрыша в энергии при образовании молекулы.

Если пренебречь энергией поступательного движения центра инерции молекулы и энергией ядер атомов в молекуле, то можно считать, что энергия молекулы складывается из трех составляющих: энергии движения электронов в атомах молекулы, энергии колебательного движения ядер атомов, составляющих молекулу, и энергии вращательного движения молекулы как целого вокруг некоторой оси.

Колебания двухатомной молекулы можно представить как гармонический осциллятор. Колебательная энергия двухатомной молекулы

$$E_n = \hbar\omega_{\text{кол}}(n + 1/2),$$

где n – колебательное квантовое число, $n = 0, 1, 2, \dots$; $\omega_{\text{кол}}$ – собственная частота колебаний молекулы.

При переходах между колебательными уровнями выполняются правила отбора $\Delta n = \pm 1$. Энергия нулевых колебаний $E_0 = \hbar\omega_{\text{кол}}/2$.

Жесткость молекулы

$$k = \frac{\alpha^2 m c^2}{\hbar^2} m^2 c^2 \alpha^2 = \left(\frac{\alpha^2 m c^2}{\hbar} \sqrt{m} \right)^2,$$

где m – масса электрона; $\alpha = 1/137$ – постоянная тонкой структуры; $\hbar = h/2\pi$, h – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме.

Собственная частота колебаний

$$\omega_{\text{кол}} = \sqrt{k/\mu} = \frac{\alpha^2 m c^2}{\hbar} \sqrt{m/\mu},$$

где μ – приведенная масса молекулы AB , $1/\mu = 1/\mu_A + 1/\mu_B$; μ_A и μ_B – масса атомов A и B соответственно.

Если молекул много, то количество молекул, имеющих колебательную энергию E_i , определяется распределением Больцмана:

$$N_i = N_0 \exp(-E_i/kT).$$

С увеличением амплитуды колебаний проявляется отклонение колебаний от гармоничности. Энергия колебаний ангармонического осциллятора

$$E_v = \hbar\omega [(v + 1/2) - \gamma(v + 1/2)^2],$$

где v – колебательное квантовое число, $v = 0, 1, 2, \dots$; γ – коэффициент ангармоничности.

Правил отбора для v нет. Ангармонизм может привести к разрушению (диссоциации) молекулы. Максимальное колебательное квантовое число

$$v_{\text{max}} = 1/(2\gamma) - 1.$$

Энергия вращательного движения квантована:

$$E_J = J(J+1)\hbar^2/2I,$$

где I – момент инерции молекулы, $I \approx \mu r_0^2$; r_0 – расстояние между атомами молекулы; μ – приведенная масса молекулы; J – вращательное квантовое число, $J = 0, 1, 2, \dots$

Расстояние между вращательными уровнями растет по мере увеличения квантового числа J :

$$\Delta E = E_J - E_{J-1} = (\hbar^2/2I)[J(J+1) - J(J-1)] = 2J\hbar^2/2I.$$

Величина

$$\hbar/2I = B$$

называется вращательной постоянной. Вращательные уровни вырождены, т.е. несколько уровней имеют одинаковые энергии. Степень вырождения $g = 2J + 1$.

Характерная частота вращательного движения

$$\omega_{\text{вр}} = \frac{\hbar}{2I} \approx \frac{\hbar}{2\mu r_0^2} \approx \frac{\hbar}{2\mu} \frac{m^2 c^2 \alpha^2}{\hbar^2}.$$

Соотношение между характерными частотами электронов в атомах, образующих молекулу, колебаниями атомов друг относительно друга и вращательной энергией молекулы имеет вид

$$\omega_{\text{эл}} : \omega_{\text{кол}} : \omega_{\text{вр}} = 1 : \sqrt{m/\mu} : m/\mu.$$

Фотон с частотой ω_0 , попадая на атом, может испытать неупругое рассеяние – комбинационное рассеяние света. Если фотон отдает молекуле часть своей энергии (стоксова линия, красный спутник), то частота рассеянного света уменьшается: $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$. Если фотон отбирает энергию от молекулы (антистоксова линия, фиолетовый спутник), то частота рассеянного света увеличивается: $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$.

Пример 1. В основном колебательном состоянии молекулы CO собственная частота колебаний $\omega_{\text{кол}} = 4,09 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$, а равновесное расстояние между ядрами $r_0 = 0,112 \text{ нм}$. Найти число вращательных уровней, заключенных между основным и первым возбужденным колебательными уровнями, а также отношение энергии $\Delta E_{\text{кол}}$, необходимой для перевода молекулы на первый возбужденный колебательный уровень, к энергии $\Delta E_{\text{вр}}$, необходимой для перевода молекулы на первый возбужденный вращательный уровень.

Решение. Колебательный спектр является эквидистантным, т.е. расстояние между энергетическими уровнями одинаково: $\Delta E_{\text{кол}} = \hbar\omega_{\text{кол}}$. Подставляя числовые значения, получим $\Delta E_{\text{кол}} = 0,27 \text{ эВ}$.

Расстояние между вращательными уровнями растет по мере увеличения квантового числа J : $\Delta E_{\text{вр}} = E_J - E_{J-1} = \hbar^2 J/I$. Найдем момент инерции молекулы CO. Для этого определим приведенную массу молекулы: $1/\mu = 1/A(\text{C}) + 1/A(\text{O})$, где A – атомный вес. Отсюда $\mu = [A(\text{C})A(\text{O})]/[A(\text{C}) + A(\text{O})]$. Момент инерции молекулы $I = r_0^2 A(\text{C})A(\text{O})/[A(\text{C}) + A(\text{O})]$. Характерная энергия вращательного движения для молекулы CO $\hbar^2/I = 0,48 \cdot 10^{-3}$ эВ. Расстояние между вращательными энергетическими уровнями

$$\Delta E_{\text{вр}} = J \hbar^2/I = J \hbar^2 [A(\text{C}) + A(\text{O})]/A(\text{C})A(\text{O})r_0^2.$$

Чтобы найти число вращательных уровней, заключенных между основным и первым возбужденным колебательными уровнями, сложим энергетические зазоры вращательного спектра от уровня с квантовым числом $J = 1$ до уровня с квантовым числом x и приравняем сумму энергетическому зазору колебательного спектра: $\hbar^2(1 + 2 + 3 + \dots + x)/I = \Delta E_{\text{кол}}$. Решая это уравнение относительно x и подставляя числовые значения, получим $x = 32$.

Отношение энергии $\Delta E_{\text{кол}}$, необходимой для перевода молекулы на первый возбужденный колебательный уровень, к энергии $\Delta E_{\text{вр}}$, необходимой для перевода молекулы на вращательный уровень с $J = 1$, $\Delta E_{\text{кол}}/\Delta E_{\text{вр}} = 0,27/(0,48 \cdot 10^{-3}) = 553$.

Пример 2. Собственная угловая частота ω колебаний молекулы HCl $5,63 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$, коэффициент ангармоничности $\gamma = 0,0201$. Определить максимальную колебательную энергию E_{max} и энергию диссоциации E_d .

Решение. Максимальную колебательную энергию найдем, используя максимальное колебательное квантовое число $v_{\text{max}} = 1/(2\gamma) - 1$. Тогда

$$E_{\text{max}} = \hbar\omega \left[(1/2\gamma - 1 + 1/2) - \gamma(1/2\gamma - 1 + 1/2)^2 \right].$$

Пренебрегая $\gamma/4$ по сравнению с $1/(4\gamma)$, получим $E_{\text{max}} = \hbar\omega/4\gamma = 7,38 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4,61 \text{ эВ}$.

Энергия диссоциации есть энергия, которую необходимо затратить, чтобы отделить атомы в молекуле друг от друга и удалить

их без сообщения кинетической энергии на расстояние, на котором взаимодействие атомов пренебрежимо мало. Эта энергия соответствует переходу с нулевого колебательного уровня на самый высокий, соответствующий v_{\max} . Тогда

$$E_d = E_{\max} - E_0 = \hbar\omega/4\gamma - \hbar\omega/2 = (1-2\gamma)\hbar\omega/4\gamma = E_{\max}(1-2\gamma).$$

Подставляя числовые значения, получим $E_d = 4,43$ эВ.

Пример 3. Найти отношение интенсивностей фиолетового и красного спутников в колебательном спектре комбинационного рассеяния света на молекулах Cl_2 при температуре 300 К.

Решение. Интенсивность излучения с энергетического уровня пропорциональна среднему количеству молекул, имеющих соответствующую энергию: $I_{\phi}/I_{\text{кр}} = N_{\phi}/N_{\text{кр}}$. Для среднего количества молекул с энергией E_i запишем выражение $N_i = N_0 \exp(-E_i/kT)$. Для фиолетового и красного спутников, имеющих частоту $\omega + \Delta\omega$ и $\omega_0 - \Delta\omega$ соответственно, где $\Delta\omega$ – изменение частоты падающего излучения ω_0 , вызванное поглощением (излучением) кванта колебаний, получим

$$\frac{I_{\phi}}{I_{\text{кр}}} = \frac{N_0 \exp[-\hbar(\omega_0 + \Delta\omega)/kT]}{N_0 \exp[-\hbar(\omega_0 - \Delta\omega)/kT]} = \exp(-2\hbar\Delta\omega/kT).$$

Поскольку газ находился в невозбужденном состоянии, то частота колебаний молекул была равна частоте нулевых колебаний, т.е. $\omega_{\text{кол}}/2$, и $\Delta\omega = \omega_{\text{кол}}/2$. Поэтому $I_{\phi}/I_{\text{кр}} = \exp(-\hbar\omega_{\text{кол}}/kT)$. Частоту колебаний $\omega_{\text{кол}}$ найдем из выражения $\omega_{\text{кол}} = \alpha^2 m c^2 \sqrt{m/\mu}/\hbar$, где m – масса электрона; μ – приведенная масса молекулы; $\alpha = 1/137$ – постоянная тонкой структуры. Подставляя числовые значения, для собственных колебаний молекулы хлора получим $\omega_{\text{кол}} = 1,064 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$. Теперь легко найти искомое отношение: $I_{\phi}/I_{\text{кр}} = 0,067$.

Задачи.

1. Газ, состоящий из молекул CN, находится в термодинамическом равновесии при температуре $T = 400$ К. Собственная частота колебаний молекулы CN $\omega_{\text{кол}} = 3,90 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$. Определить отношение

числа N_{i+1} молекул, находящихся на $(i + 1)$ -м колебательном уровне, к числу N_i молекул, находящихся на i -м колебательном уровне.

2. Расстояние между ядрами молекулы HCl $r_0 = 0,127$ нм. Найти угловую скорость вращения ω , молекулы, находящейся на первом возбужденном вращательном уровне.

3. Расстояние между линиями вращательной полосы молекулы CN $\Delta\omega = 7,19 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$. Вычислить равновесное расстояние r_0 между молекулами.

4. Первый потенциал возбуждения электронной оболочки молекулы CO равен 6,0. В основном электронном состоянии молекулы собственная частота колебаний $\omega_{\text{кол}} = 4,09 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$. Каково число колебательных уровней, заключенных между основным и первым возбужденным электронными уровнями?

5. Первый потенциал возбуждения электронной оболочки молекулы CO равен 6,0. В основном электронном состоянии молекулы собственная частота колебаний $\omega_{\text{кол}} = 4,09 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$. Найти отношение энергии $\Delta E_{\text{эл}}$, необходимой для перевода молекулы на первый возбужденный электронный уровень, к энергии $\Delta E_{\text{кол}}$, необходимой для перевода молекулы на первый возбужденный колебательный уровень.

6. Определить отношение энергий, которые необходимо затратить для возбуждения двухатомной молекулы H_2 на первый колебательный и первый вращательный уровни. Расстояние между ядрами молекулы $r_0 = 0,741 \cdot 10^{-10}$ м.

7. Вычислить отношение энергий, которые необходимо затратить, для возбуждения молекулы йода I_2 на первый колебательный и первый вращательный уровни. Межъядерное расстояние $r_0 = 2,7 \cdot 10^{-10}$ м, длина волны, соответствующая частоте собственных колебаний, $\lambda = 215$ см.

8. Каково отношение энергий, которые необходимо затратить для возбуждения двухатомной молекулы HI на первый колебательный и первый вращательный уровни? Расстояние между ядрами молекулы $r_0 = 1,604 \cdot 10^{-10}$ м.

9. Для молекулы HCl найти вращательные квантовые числа двух соседних уровней, разность энергий которых $7,86 \cdot 10^{-3}$ эВ. Расстояние между ядрами молекулы $r_0 = 1,275 \cdot 10^{-10}$ м.

10. При комбинационном рассеянии линии ртути с $\lambda = 365$ нм молекулами кислорода наблюдается спутник с $\lambda = 387$ нм. Определить частоту собственных колебаний молекулы кислорода.

11. Вычислить собственную частоту колебаний $\omega_{\text{кол}}$ и коэффициент квазиупругой силы k молекулы S_2 , если в колебательном спектре комбинационного рассеяния света длина волны красного и фиолетового спутников 346,6 и 330,0 нм соответственно.

12. Какова длина волны красного и фиолетового спутников в колебательном спектре комбинационного рассеяния молекул F_2 , если длина волны падающего света $\lambda_0 = 404,7$ нм?

13. Интервал между соседними вращательными линиями вблизи середины колебательно-вращательной полосы испускания молекул HCl $\Delta\omega = 0,79 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$. Вычислить расстояние между ядрами.

14. Определить угловую скорость вращения молекулы S_2 , находящейся на первом возбужденном вращательном уровне.

15. Найти механический момент молекулы кислорода, вращательная энергия которой $E_{\text{вр}} = 2,16$ мэВ.

16. Двухатомная молекула с моментом инерции $I = 1,16 \cdot 10^{-39} \text{ г}\cdot\text{см}^2$ находится в состоянии с вращательной энергией $E_{\text{вр}} = 1,8$ мэВ. Найти частоту ω фотона, принадлежащего чисто вращательному спектру, который может испустить данная молекула при переходе из этого состояния.

17. Установить момент инерции и расстояние между ядрами молекулы CH_4 , если интервалы между соседними линиями чисто вращательного спектра этих молекул $\Delta\omega = 5,47 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$.

18. Оценить, сколько линий содержит чисто вращательный спектр молекулы CO , момент инерции которых $I = 1,44 \cdot 10^{-39} \text{ г}\cdot\text{см}^2$.

19. Найти для молекулы HF число вращательных уровней, расположенных между нулевым и первым возбужденным колебательными уровнями, считая вращательные состояния не зависящими от колебательных.

20. Длина волны двух соседних спектральных линий в чисто вращательном спектре молекулы HCl соответственно 117 и 156 мкм. Вычислить вращательную постоянную для молекулы HCl .

21. Будет ли излучение с $\lambda = 3$ мкм возбуждать вращательные и колебательные уровни молекулы HF, находящейся в основном состоянии?

22. Каково межъядерное расстояние в молекуле CH₄, если интервалы между соседними линиями чисто вращательного спектра испускания данной молекулы $\Delta\nu = 29$ см⁻¹.

23. Определить угловую скорость вращения молекулы O₂, находящейся на втором возбужденном вращательном уровне.

24. Вычислить энергию диссоциации молекулы CO, если ее собственная частота колебаний $\omega_{\text{кол}} = 4,08 \cdot 10^{14}$ с⁻¹ и коэффициент ангармоничности $\gamma = 5,83 \cdot 10^{-3}$.

25. Молекула NO переходит из низшего возбужденного состояния в основное. Определить длину волны испущенного при этом фотона, если собственная частота $\omega_{\text{кол}} = 3,59 \cdot 10^{14}$ с⁻¹ и коэффициент ангармоничности $\gamma = 8,73 \cdot 10^{-3}$.

9. СТАТИСТИКА КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ. ЭЛЕКТРОНЫ В МЕТАЛЛЕ

Квантовые частицы в зависимости от спина s делятся на бозоны (целый спин, $s = 1, 2, \dots$, фотоны, фононы) и фермионы (полуцелый спин, $s = 1/2, 3/2, \dots$, электроны). Для бозонов справедлив закон распределения Бозе – Эйнштейна: вероятность заполнения уровня с энергией E

$$f(E) = \frac{1}{\exp[(E - E_F)/kT] - 1},$$

где k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура; E_F – уровень Ферми, т.е. энергетический уровень, вероятность заполнения которого равна 0,5.

Для фермионов справедлив закон распределения Ферми – Дирака:

$$f(E) = \frac{1}{\exp[(E - E_F)/kT] + 1}.$$

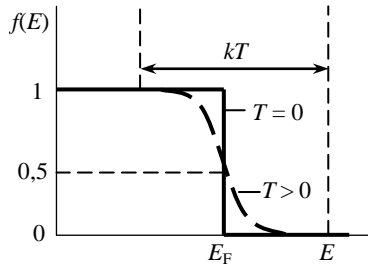


Рис.13

При $T = 0$ К функция Ферми обладает следующими свойствами: $f(E) = 1$, если $E < E_F$ и $f(E) = 0$, если $E > E_F$. (рис.13). Если $\exp[(E - E_F)/kT] \gg 1$, то единицей в знаменателе можно пренебречь, и оба распределения переходят в так называемое распределение Максвелла – Больцмана:

$$f(E) = A \exp(-E/kT).$$

Температура, ниже которой квантовые эффекты становятся существенными, называется температурой вырождения T_v .

Типичным представителем фермионов является совокупность электронов проводимости в металле. Энергия Ферми не зависит от объема металла, а определяется только концентрацией свободных электронов. При $T = 0$ К положение уровня Ферми в металле

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_n} (3\pi^2 n)^{2/3},$$

где m_n – масса электрона в металле («эффективная» масса); n – концентрация электронов.

Интервал между соседними уровнями энергии свободных электронов в металле

$$\delta E = \frac{(2\pi\hbar)^3}{4\pi V (2m_n)^{3/2} \sqrt{E}}.$$

Распределение свободных электронов по энергиям в металле определяется не только вероятностью заполнения уровней $f(E)$, но и числом состояний, приходящихся на единичный интервал энергии в единице объема, т.е. плотностью состояний $N(E)$:

$$dn(E) = N(E) f(E) dE, \quad (9.1)$$

где dn – число электронов, приходящихся на энергетический интервал от E до $E + dE$,

$$N(E) = 4\pi \left(2m_n / \hbar^2\right)^{3/2} \sqrt{E}. \quad (9.2)$$

При $T \neq 0$ К

$$dn(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{E} dE}{\exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right) + 1}.$$

Вблизи $T = 0$ К

$$dn(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E} dE.$$

Общую концентрацию электронов в металле можно найти интегрированием по всем заполненным состояниям:

$$n = \int_0^{E_F} N(E) f(E) dE = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2} E_F^{3/2}. \quad (9.3)$$

Электронный газ в металлах является вырожденным, т.е. подчиняется статистике Ферми – Дирака, вплоть до температур около 10^4 К. Вследствие этого в процессе электропроводности могут принимать участие не все свободные электроны, а только небольшая их часть, имеющая энергию, близкую к энергии Ферми. Ускоряясь электрическим полем E на длине свободного пробега, эти электроны приобретают добавочную скорость направленного движения:

$$v_F = \tau_F eE / m_n = eEl_F / (m_n u_F),$$

где τ_F – время свободного пробега; l_F – длина свободного пробега; u_F – тепловая скорость быстрых электронов, обладающих энергией, близкой к E_F . С учетом этого удельная электрическая проводимость металла

$$\gamma = \frac{e^2 n l_F}{m_n u_F} = \frac{e^2 n^{2/3} l_F}{h} \left(\frac{8\pi}{3} \right)^{1/3}.$$

В большинстве случаев можно считать, что эффективная масса электронов в металле равна массе свободного электрона: $m_n = m_e$.

Пример 1. Считая, что квантовые свойства «свободных» электронов проводимости в металле становятся существенными в том случае, когда их дебройлевская длина волны становится сравнимой с постоянной решетки a , получить оценку температуры вырождения электронного газа в кристалле с концентрацией атомов n .

Решение. Длина волны де Бройля $\lambda = 2\pi\hbar/p$. Учитывая тепловую энергию kT и связь импульса с энергией в виде $p = \sqrt{2m_e E} = \sqrt{2m_e kT}$, получим $\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{2m_e kT}$. Считая $\lambda \cong a$, имеем $T_b = 2\pi^2\hbar^2/(m_e k a^2)$. Учитывая, что постоянная кристаллической решетки a и концентрация n электронов в простом металле связаны соотношением $a \sim (V/N)^{1/3} \sim n^{-1/3}$ (здесь N – количество атомов в образце объемом V), окончательно имеем $T_b \cong 2\pi^2\hbar^2 n^{2/3}/(m_e k)$.

Пример 2. Найти среднюю энергию свободных электронов в металле при $T \approx 0$ К.

Решение. При $T \approx 0$ К уровень Ферми характеризует максимальную энергию электронов в металле. Распределение электронов по энергиям дается выражением (9.1). В соответствии с распределением Ферми – Дирака (рис.13) при $E < E_F$ функция $f(E) = 1$, а при $E > E_F$ функция $f(E) = 0$. Для определения средней энергии электронов необходимо суммарную энергию всех электронов, находящихся в единице объема, разделить на их концентрацию n :

$$\langle E \rangle = \frac{1}{n} \int_0^{E_F} E dn(E) = \frac{1}{n} \int_0^{E_F} EN(E) f(E) dE = \frac{1}{n} \int_0^{E_F} EN(E) dE.$$

Учитывая, (9.2) и (9.3), имеем

$$\langle E \rangle = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{\hbar^2}{2m_n} \right)^{3/2} \frac{1}{E_F^{3/2}} \int_0^{E_F} E 4\pi \left(\frac{2m_n}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} dE = \frac{3}{2E_F^{3/2}} \int_0^{E_F} E \sqrt{E} dE = \frac{3E_F}{5}.$$

Пример 3. Рассчитать положение уровня Ферми и среднее энергетическое расстояние между разрешенными энергетическими уровнями зоны проводимости в 1 см^3 серебра при температуре вблизи абсолютного нуля, полагая, что число свободных электронов равно количеству атомов серебра. Плотность серебра $\rho = 10,49 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Решение. Концентрация свободных электронов равна концентрации атомов

$$n = \frac{N_A m}{AV} = \frac{N_A \rho}{A},$$

где N_A – число Авогадро; A – атомная (или молекулярная) масса; m – масса образца; V – объем образца; ρ – плотность материала.

Тогда энергия Ферми

$$E_F = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N_A \rho}{\pi A} \right)^{2/3}.$$

Подставляя числовые значения величин, получим $E_F = 8,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 5,5 \text{ эВ}$. Среднее энергетическое расстояние между разрешенными уровнями $\delta E = E_F/N$, где N – число уровней, заполненных электронами.

Концентрация электронов связана с энергией Ферми выражением (9.3). Все уровни, лежащие ниже уровня Ферми, практически полностью заполнены электронами, причем, согласно принципу Паули, на каждом уровне находятся два электрона. Поэтому

$$\delta E = \frac{E_F}{nV/2} = \frac{3E_F}{V4\pi \left(\frac{2m_n}{h^2} \right)^{3/2} E_F^{3/2}} = \frac{3h^3}{4\pi V (2m_n)^{3/2} \sqrt{E_F}} = 0,188 \cdot 10^{-21} \text{ эВ}.$$

Пример 4. Вычислить длину свободного пробега электронов в меди при $T = 300 \text{ К}$, если ее удельное сопротивление при этой температуре равно $0,017 \text{ мкОм}\cdot\text{м}$.

Решение. Удельное сопротивление металлов связано с длиной свободного пробега электронов l_F соотношением

$$\rho = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} \frac{h}{e^2 n^{2/3} l_F},$$

концентрацию свободных электронов в меди можно выразить в виде $n = mN_A / (VA)$, где m/V – плотность кристалла. В данном случае $m/V = 8,92 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Тогда $n = 8,45 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, а длина свободного пробега $l_F = (3/8\pi)^{1/3} h / e^2 n^{2/3} \rho$. Подставляя числовые данные, получим $l_F = 3,89 \cdot 10^{-8} \text{ м}$.

Пример 5. Определить время, в течение которого электрон пройдет расстояние $L = 1 \text{ км}$ по медному проводу; если удельное сопротивление меди $0,017 \text{ мкОм}\cdot\text{м}$, а разность потенциалов на концах проводника $U = 220 \text{ В}$. За какое время электрон пролетит это же расстояние, двигаясь без соударений, при той же разности потенциалов? Каково время передачи сигнала?

Решение. Из закона Ома следует, что удельная проводимость $\gamma = env/E$, где n – концентрация электронов; v – средняя скорость дрейфа электронов; E – напряженность электрического поля. Отсюда $v = E/(en) = U/(enL)$. Используя значение концентрации, полученное в примере 4, получим $v = 9,6 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$. Время дрейфа электрона по проводу $t = L/v = 10^6 \text{ с}$. При отсутствии столкновений с узлами кристаллической решетки электрон движется равноускоренно (с ускорением a) и время пролета $t_{\text{пр}} = \sqrt{2L/a} = \sqrt{2L^2 m / eU}$. Передача энергии вдоль проводов линии осуществляется электромагнитным полем, распространяющимся со скоростью света c . Полагая, что средой, окружающей провод, является воздух, вычислим время передачи сигнала $t_c = L/c = 3,33 \cdot 10^{-6} \text{ с}$.

Задачи.

1. Атомарный газообразный водород находится в равновесном состоянии при $T = 6 \cdot 10^3 \text{ К}$. Пользуясь распределением Больцмана, найти отношение числа атомов, находящихся в состоянии с квантовым числом $n = 2$, к их числу в основном состоянии ($n = 1$). Кратность вырождения состояния $g_n = 2n^2$.

2. Атомарный газообразный водород находится в равновесном состоянии при $T = 6 \cdot 10^3 \text{ К}$. Пользуясь распределением Больц-

мана, определить отношение числа атомов, находящихся в состоянии с квантовым числом $n = 3$, к их числу в состоянии $n = 2$. Кратность вырождения состояния $g_n = 2n^2$.

3. Так называемая «холодная плазма» характеризуется температурой $T = 10^4$ К и концентрацией частиц $n = 10^{18} \text{ м}^{-3}$. Оценить температуру вырождения протонной составляющей водородной плазмы. Классической или квантовой статистикой описывается состояние частиц в этой плазме?

4. Какому условию должна удовлетворять концентрация n заряженных частиц в плазме, для того чтобы последняя могла считаться идеальным газом? Удовлетворяет ли условию идеальности так называемая «горячая плазма» ($T \approx 10^7$ К, $n \approx 10^{21} \text{ м}^{-3}$)?

5. Какова температура вырождения электронного газа в меди?

6. Оценить температуру вырождения для электронного газа с $n = 10^{18} \text{ м}^{-3}$.

7. Найти вероятность заполнения электронами энергетического уровня в металле, расположенного на $10kT$ выше уровня Ферми.

8. Определить, как и во сколько раз изменится вероятность заполнения электронами в металле энергетического уровня, расположенного на 0,1 эВ выше уровня Ферми, если температуру металла повысить с 300 до 1000 К.

9. При какой температуре вероятность нахождения электрона с энергией $E = 0,5$ эВ выше уровня Ферми в металле равна 1 %?

10. Вычислить минимальную длину волны де Бройля для свободных электронов в медном проводнике, где энергия Ферми составляет 7 эВ.

11. Энергия Ферми в кристалле серебра 5,5 эВ. Найти максимальную и среднюю скорость электронов проводимости при $T \cong 0$ К. При расчете принять эффективную массу электронов равной массе свободного электрона.

12. Рассчитать максимальную и среднюю скорость теплового движения свободных электронов в металле при $T \cong 0$ К, если концентрация электронов $8,5 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$.

13. Положению уровня Ферми для алюминия при $T \cong 0$ К соответствует энергия 11,7 эВ. Каково число свободных электронов,

приходящихся на один атом? Эффективную массу электронов проводимости принять равной массе свободного электрона.

14. Какая часть электронов проводимости в металле при $T \cong 0$ К имеет кинетическую энергию, большую $E_F/2$?

15. Как изменится интервал между соседними уровнями энергии свободных электронов в металле, если объем кристалла уменьшить в 10 раз?

16. Вычислить удельное сопротивление проводника, имеющего плотность 970 кг/м^3 и молекулярную массу $0,023 \text{ кг/моль}$, если известно, что средняя скорость дрейфа электронов в электрическом поле напряженностью $0,1 \text{ В/м}$ $v = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$, а на каждый атом кристаллической решетки приходится один электрон.

17. В металлическом проводнике (площадь поперечного сечения 10^{-2} мм^2 , сопротивление 10 Ом) концентрация свободных электронов $8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Определить среднюю скорость дрейфа электронов при напряжении $0,1 \text{ В}$.

18. К медной проволоке длиной 6 м и диаметром $0,56 \text{ мм}$ приложено напряжение $0,1 \text{ В}$. Сколько электронов пройдет через поперечное сечение проводника за 10 с , если удельное сопротивление меди $0,017 \text{ мкОм}\cdot\text{м}$?

19. Какова концентрация свободных электронов в металле при температуре $T = 0 \text{ К}$. Энергию Ферми принять равной 1 эВ .

20. Электроны в металле находятся при температуре $T = 0 \text{ К}$. Найти относительное число $\Delta N/N$ свободных электронов, кинетическая энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на 2% .

21. Удельная проводимость металла $6 \cdot 10^3 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$. Вычислить среднюю длину свободного пробега электронов в металле, если концентрация свободных электронов $n = 10^{23} \text{ м}^{-3}$. Средняя скорость хаотического движения электронов $u = 10^6 \text{ м/с}$.

22. Во сколько раз изменится электропроводность металла при повышении температуры от 300 до 310 К ? Каков характер этого изменения?

23. Найти сумму средних чисел заполнения свободными электронами в металле уровней с энергией большей и меньшей энергии Ферми на $\Delta\varepsilon$.

24. Объем металла равен 1 см^3 . Вычислить интервал (в электрон-вольтах) между соседними уровнями энергии свободных электронов для энергии E , равной 0,1; 1; 3 и 5 эВ.

25. Полагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, определить среднюю кинетическую энергию свободных электронов при абсолютном нуле. Какая часть свободных электронов в металле имеет при абсолютном нуле кинетическую энергию, превышающую среднюю энергию?

10. ФОНОНЫ И ТЕПЛОЕМКОСТЬ

Теплоемкость твердых тел определяется энергией тепловых колебаний частиц, находящихся в узлах кристаллической решетки. В классической теории эти частицы рассматриваются как независимые частицы, колеблющиеся с одинаковой частотой. Это приводит к независимости молярной теплоемкости от температуры и природы вещества (правило Дюлонга и Пти):

$$C_V = 3R \approx 25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), \quad (10.1)$$

где R – универсальная газовая постоянная.

Однако экспериментально эта зависимость не подтверждается. Качественное и количественное согласие с экспериментом достигается, если рассматривать кристалл в виде N атомов, упруго связанных друг с другом и обладающих $3N$ степенями свободы. Тогда в кристалле могут существовать $3N$ типов простейших коллективных колебаний – мод с энергиями $\varepsilon_i = (n_i + 1/2)\hbar\omega$, где $n_i = 0, 1, 2, \dots, 3N$. Средняя энергия такого осциллятора

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}.$$

Каждой моде можно сопоставить квазичастицу – фонон, обладающую соответствующей энергией $\varepsilon_i = h\nu = \hbar\omega$ и квазиимпульсом $p = \hbar k = \hbar\omega/v_{\text{зв}}$, где $v_{\text{зв}}$ – скорость звука в кристалле. В случае,

когда скорости поперечных (v_{\perp}) и продольных (v_{\parallel}) волн не равны, используют среднюю скорость. Фононы подчиняются статистике Максвелла – Больцмана.

Число фононов с частотами от ν до $\nu + d\nu$

$$dN = \frac{12\pi\nu^2 d\nu}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]} \frac{1}{v_{3B}^3}.$$

Среднее число фононов с энергией ε_i в кристалле

$$\langle N_i \rangle = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}.$$

Энергия кристаллической решетки объемом V

$$E = \frac{3}{2} \frac{\hbar V}{\pi^2 v_{3B}^3} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{h\omega/kT} - 1},$$

где ω_{\max} – максимальная (дебаевская) частота колебаний,

$$\omega_D = v_{3B} \sqrt[3]{6\pi^2 n}; \quad (10.2)$$

n – количество частиц в единице объема (концентрация), для простых кубических решеток $n = 1/a^3$; a – постоянная решетки.

Характеристическая температура Дебая

$$\theta_D = \hbar\omega_D/k. \quad (10.3)$$

Молярная изохорная теплоемкость кристаллической решетки

$$C_V = dE/dT.$$

При температурах $T \ll \theta_D$

$$C_V = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3. \quad (10.4)$$

При температурах $T \gg \theta_D$ $C_V = 3Nk$, где k – постоянная Больцмана. Если $N = N_A$ (здесь N_A – число Авогадро) $C_V = 3R$.

Пример 1. Молярная изохорная теплоемкость аргона при температуре 4 К равна 0,174 Дж/(моль·К). Определить значение молярной изохорной теплоемкости аргона при температуре 2 К.

Решение. Согласно теории Дебая, теплоемкость кристаллической решетки при низких температурах $T \ll \theta_D$ (квантовая область), пропорциональна кубу термодинамической температуры: $C_V = (12\pi^4 R/5)(T/\theta_D)^3$. При высоких температурах $T \gg \theta_D$ (классическая область) теплоемкость кристаллической решетки описывается законом Дюлонга и Пти (10.1). Поскольку при $T_1 = 4$ К теплоемкость аргона $C_1 = 0,174$ Дж/(моль·К) много меньше, чем 25 Дж/(моль·К), выполняется закон Дебая (10.4), согласно которому $C_1 = (12\pi^4 R/5)(T_1/\theta_D)^3$ и $C_2 = (12\pi^4 R/5)(T_2/\theta_D)^3$. Отсюда $C_2/C_1 = (T_2/T_1)^3$ или $C_2 = C_1(T_2/T_1)^3$. Подставляя числовые данные, получим $C_2 = 0,022$ Дж/(моль·К).

Пример 2. Дебаевская температура кристалла равна 150 К. Определить максимальную частоту колебаний кристаллической решетки. Сколько фононов такой частоты возбуждается в среднем в кристалле при температуре 300 К?

Решение. Дебаевская температура $\theta_D = hv_{\max}/k$, где v_{\max} – максимальная частота колебаний кристаллической решетки; \hbar – постоянная Планка; k – постоянная Больцмана. Тогда $v_{\max} = k\theta_D/\hbar$. Подставляя числовые значения, получим $v_{\max} = 3,12 \cdot 10^{12}$ Гц. Среднее число фононов с энергией ε_i :

$$\langle N_i \rangle = [\exp(\varepsilon_i/kT) - 1]^{-1},$$

где T – термодинамическая температура кристалла.

Энергия фонона, соответствующая частоте колебаний v_{\max} ,

$$\varepsilon_i = hv_{\max} = k\theta_D.$$

Теперь можно вычислить $\langle N_i \rangle = [\exp(\theta_D/T) - 1]^{-1} = 1,54$.

Пример 3. Одинаковые массы свинца ^{207}Pb и кремния ^{28}Si охлаждаются при помощи жидкого гелия (температура кипения при

нормальном давлении 4,2 К) от температуры $T_1 = 20$ К до $T_2 = 4,2$ К. Оценить отношение масс жидкого гелия, необходимых для охлаждения свинца и кремния, если известно, что $\theta_D(\text{Pb}) = 95$ К, $\theta_D(\text{Si}) = 645$ К.

Решение. Так как начальная температура много меньше температуры Дебая обоих веществ, то справедливо низкотемпературное приближение. В этой области температур энергии хватает только на возбуждение акустических фононов. Поэтому в выражении для энергии кристалла верхний предел в интеграле можно заменить на бесконечность. Тогда

$$E = \frac{3}{2} \frac{k^4 T^4}{\hbar^3 \pi^2 v_{\text{зв}}^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2 k^4}{10 \hbar^3 v_{\text{зв}}^3} T^4,$$

Теплота, отбираемая при охлаждении у тел,

$$\Delta Q = \frac{\pi^2 k^4}{10 \hbar^3 v_{\text{зв}}^3} (T_1^4 - T_2^4) \approx \frac{\pi^2 k^4}{10 \hbar^3 v_{\text{зв}}^3} T_1^4. \quad (10.5)$$

С учетом выражений (10.2) и (10.3) запишем (10.5) в виде

$$\Delta Q = \frac{3\pi^4 N}{5} \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 kT.$$

Так как масса кристалла $M = NA$, где A – атомная масса, то

$$\frac{m_{\text{Pb}}}{m_{\text{Si}}} = \left(\frac{A_{\text{Si}}}{A_{\text{Pb}}} \right) \left(\frac{\theta_D(\text{Si})}{\theta_D(\text{Pb})} \right)^3.$$

Подставляя числовые значения, получим $m_{\text{Pb}}/m_{\text{Si}} \approx 42$.

Задачи.

1. Вычислить молярные теплоемкости алмаза и цезия при температуре 200 К. Температура Дебая для алмаза и цезия соответственно равна 1860 и 38 К.

2. Определить удельную теплоемкость рубидия при температуре 3 и 300 К. Температура Дебая для рубидия 56 К.

3. Молярная теплоемкость селена при температуре 5 К равна 0,333 Дж/(моль·К). Какова дебаевская температура селена?

4. Удельная теплоемкость молибдена при температуре 25 К равна 3,47 Дж/(кг·К). Установить дебаевскую температуру молибдена.

5. Найти количество теплоты, необходимое для нагревания 50 г железа от 10 до 20 К. Температура Дебая для железа 470 К.

6. Какое количество теплоты необходимо для нагревания 1 моль никеля от 5 до 15 К? Температура Дебая для никеля 450 К.

7. Определить энергию нулевых колебаний U_0 охлажденного до затвердевания 1 моль аргона ($\theta_D = 92$ К).

8. Вычислить энергию нулевых колебаний, приходящуюся на 1 г меди с дебаевской температурой $\theta_D = 330$ К.

9. Найти для кристалла с $\theta_D = 150$ К отношение среднего числа фононов с энергией в 2 раза меньшей максимальной к среднему числу фононов с максимальной энергией при температуре 300 К.

10. Определить энергию E фонона в электрон-вольтах, который может возбуждаться в кристалле NaCl с температурой Дебая $\theta_D = 320$ К. Фотон какой длины волны обладал бы такой же энергией?

11. При давлении $p = 1013 \cdot 10^2$ Па аргон затвердевает при $T = 84$ К, $\theta_D(\text{Ar}) = 92$ К. Экспериментально установлено, что при $T_1 = 4$ К молярная теплоемкость аргона $C_1 = 0,174$ Дж/(моль·К). Определить молярную теплоемкость C_2 при $T_2 = 2$ К.

12. Атомная масса серебра $A_{\text{Ag}} = 107,9$; плотность $\rho = 10,5$ г/см³. Оценить максимальное значение p_{max} импульса фонона в серебре.

13. Какое число фононов максимальной частоты возбуждается в среднем при температуре $T = 400$ К в кристалле, дебаевская температура которого $\theta_D = 200$ К?

14. Определить θ_D для Ве, если концентрация $n = 1,23 \cdot 10^{29}$ м⁻³, $v_{\perp} = 8830$ м/с и $v_{\parallel} = 12550$ м/с.

15. Вычислить θ_D для Ag, если концентрация $n = 0,586 \cdot 10^{29}$ м⁻³, $v_{\perp} = 1590$ м/с и $v_{\parallel} = 3600$ м/с.

16. Рассчитать θ_D для Pb, если концентрация $n = 0,328 \cdot 10^{29}$ м⁻³, $v_{\perp} = 700$ м/с и $v_{\parallel} = 2160$ м/с.

17. Определить температуру Дебая для Al, если $v_{\perp} = 3130$ м/с и $v_{\parallel} = 6400$ м/с.

18. Приняв для Ag $\theta_D = 208$ К, установить максимальное значение энергии фонона и среднее количество фононов с этой энергией при $T = 300$ К.

19. В кристалле NaCl при температуре $T = 10$ К теплоемкость единицы объема $C_V = 830 \cdot 10^{-4}$ Дж/(м³·К). Оценить скорость звука в кристалле и его температуру Дебая θ_D . Постоянная решетки NaCl $a = 0,3$ нм.

20. Какова средняя скорость распространения акустических колебаний в алюминии, дебаевская температура которого $\theta_D = 396$ К?

21. Найти максимальную частоту ω_{\max} собственных колебаний в железе, если при $T = 20$ К его удельная теплоемкость $C_V = 2,7$ мДж/(кг·К) и $T \ll \theta_D$.

22. Можно ли считать температуры 20 и 30 К низкими для кристалла, теплоемкость которого при этих температурах 0,226 и 0,760 Дж/(моль·К)?

23. При нагревании кристалла меди массой $m = 25$ г от $T_1 = 10$ К до $T_2 = 20$ К ему было сообщено количество тепла $Q = 0,80$ Дж. Найти θ_D для меди, если $\theta_D \gg T_1$ и T_2 .

24. Оценить энергию нулевых колебаний 1 моль алюминия, если межатомное расстояние $a = 0,3$ нм и скорость распространения акустических колебаний $v_{\text{зв}} = 4$ км/с.

25. Каковы максимальные энергия и импульс фонона в меди? $\theta_D(\text{Cu}) = 330$ К.

11. ПОЛУПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ

Неметаллы отличаются от проводников наличием зоны запрещенных энергий E_g для электронов. Структуры энергетических зон собственного полупроводника приведены на [рис.14](#). Состояния, лежащие выше запрещенной зоны, называются зоной проводимости и при $T = 0$ К пусты. Состояния, лежащие ниже запрещенной зоны, называются валентной зоной и при $T = 0$ К полностью заполнены.

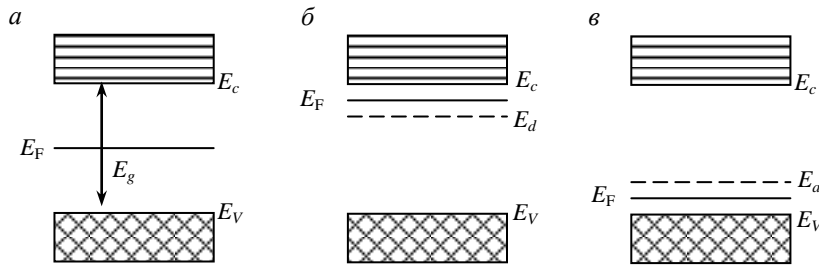


Рис.14

Распределение электронов по энергиям в общем случае подчиняется статистике Ферми – Дирака. Однако при комнатных температурах энергии электронов и дырок значительно отличаются от энергии Ферми $E - E_F > 3kT$, поэтому единицей в знаменателе функции распределения можно пренебречь и перейти к статистике Максвелла – Больцмана. Таким образом, электронный газ в полупроводнике не вырожден, но при этом продолжает действовать принцип Паули.

При $T > 0$ К существует конечная вероятность перехода электрона из валентной зоны в зону проводимости, появляются свободные электроны и дырки в зонах. Однако идет и обратный процесс – возврат электронов из зоны проводимости в валентную зону и исчезновение пары электрон-дырка. Этот процесс называется рекомбинацией. В результате устанавливается динамическое равновесие. Равновесная концентрация собственных свободных носителей заряда в кристалле с шириной запрещенной зоны E_g при температуре T

$$n_i = p_i = \sqrt{N_c N_v} \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right) = \frac{2}{\hbar^3} \left(\frac{kT}{2\pi}\right)^{3/2} (m_n m_p)^{3/4} \exp[-E_g / (2kT)].$$

Здесь N_c и N_v – эффективная плотность энергетических состояний в зоне проводимости и в валентной зоне соответственно

$$N_c = 2[m_n kT / (2\pi\hbar^2)]^{3/2}; \quad N_v = 2[m_p kT / (2\pi\hbar^2)]^{3/2}; \quad (11.1)$$

m_n и m_p – эффективная масса электронов и дырок соответственно; 2 – коэффициент, учитывающий, что на энергетическом уровне могут находиться два электрона.

Положение уровня Ферми в собственном полупроводнике зависит от температуры. При $T = 0$ К уровень Ферми расположен посередине запрещенной зоны (рис.14, а), а с ростом температуры смещается:

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_v}{N_c}. \quad (11.2)$$

Подставляя в это выражение соотношение (11.1), получим

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_p}{m_n}.$$

При введении примесей (легировании) в запрещенной зоне возникают примесные энергетические уровни, которые в зависимости от типа примеси располагаются либо вблизи дна зоны проводимости E_c (донорные уровни), либо вблизи потолка валентной зоны E_v (акцепторные уровни) как это показано на рис.14, б и в соответственно. Примеси также могут поставлять свободные носители заряда.

В случае донорных полупроводников концентрация примесных электронов n_d определяется количеством ионизированных доноров и эффективным числом состояний в зоне проводимости N_c :

$$n_d = \sqrt{N_c N_d} \exp[-(E_c - E_d)/(2kT)].$$

В случае акцепторных полупроводников концентрация примесных дырок определяется количеством ионизированных акцепторов и эффективным числом состояний в валентной зоне N_v :

$$n_a = \sqrt{N_v N_a} \exp[-(E_a - E_v)/(2kT)].$$

Равновесная полная концентрация свободных электронов

$$n = N_c \exp[-(E_c - E_F)/(kT)],$$

а полная концентрация дырок в валентной зоне

$$p = N_v \exp[-(E_F - E_v)/(kT)].$$

Положение уровня Ферми E_F в полупроводнике зависит как от температуры, так и от концентрации примесей. Для полупроводника n -типа с концентрацией доноров N_d и для полупроводника p -типа с концентрацией акцепторов N_a соответственно

$$E_F = \frac{E_c + E_d}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_d}{N_c}; \quad E_F = \frac{E_v + E_a}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_a}{N_v}.$$

Обычно положение уровней в полупроводнике отсчитывается от потолка валентной зоны E_v (или от дна зоны проводимости E_c).

При изменении степени легирования изменяется и положение уровня Ферми и концентрация свободных носителей заряда в зонах. В случае невырожденного полупроводника увеличение концентрации одного типа свободных носителей (например, электронов), приводит к увеличению скорости рекомбинации и соответствующему уменьшению концентрации второго типа свободных носителей (дырок). Поэтому при термодинамическом равновесии справедлив закон «действующих масс»:

$$np = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right) N_v \exp\left(\frac{E_v - E_F}{kT}\right) = n_i^2.$$

Экспериментально ширину запрещенной зоны полупроводника и концентрацию примесей определяют по измерениям электропроводности и спектров поглощения. Электропроводность кристалла

$$\gamma = en\mu_n + ep\mu_p,$$

где μ_n и μ_p – подвижность электронов и дырок соответственно.

Зависимость собственной проводимости от температуры имеет вид

$$\gamma = \gamma_0 \exp[-E_g/(2kT)].$$

При освещении кристалла светом поглощение начинается только тогда, когда энергия кванта света равна или больше ширины запрещенной зоны

$$\hbar\omega = 2\pi\hbar c/\lambda \geq E_g.$$

Поэтому в спектрах поглощения наблюдается пороговая длина волны $\lambda_{\text{пор}}$, соответствующая краю собственного поглощения.

Тип основных носителей заряда и их подвижность обычно определяют с помощью эффекта Холла. Если поместить кристалл толщиной d в поперечное магнитное поле B и пропустить по кристаллу ток I возникнет разность потенциалов

$$U_H = R_H IB/d,$$

где R_H – постоянная Холла, для полупроводников со структурой алмаза или сфалерита, обладающих носителями одного вида (n или p), $R_H = 1/en$.

Знак U_H позволяет определить тип преобладающих носителей заряда.

Пример 1. Найти положение уровня Ферми в собственном полупроводнике из германия при 300 К, если известно, что ширина его запрещенной зоны $E_g = 0,665$ эВ, а эффективная масса плотности состояний для дырок и электронов $m_v = 0,388m_e$ и $m_c = 0,55m_e$, где m_e – масса электрона.

Решение. Положение уровня Ферми в собственном полупроводнике определяется выражением (11.2). Эффективную плотность состояний для электронов в зоне проводимости и для дырок в валентной зоне вычислим по формуле (11.1). В данном случае $N_v = 6,04 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$ и $N_c = 1,02 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Таким образом, $E_F - E_v = E_g / 2 + kT \ln(N_v / N_c)$. Подставляя числовые данные, получим $E_F - E_v = 0,326$ эВ.

Пример 2. Вычислить для температуры $T = 40$ К концентрацию дырок и удельное сопротивление кремния, легированного бором до концентрации $N_a = 10^{22} \text{ м}^{-3}$, если эффективная масса плотности состояний $m_v = 0,56m_e$, положение энергетического уровня бора $E_a = E_v + 0,045$ эВ, а подвижность дырок $\mu_p = 0,928 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

Решение. Оценим энергию теплового возбуждения при температуре 40 К $kT = 8,625 \cdot 10^{-5} \cdot 40 \text{ эВ} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$. Эта величина много меньше энергии активации акцептора $\Delta E_a = E_a - E_v = 0,045 \text{ эВ} \gg 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$. Поэтому концентрация собственных носителей (дырок) пренебрежимо мала и концентрация дырок определяется только примесями: $p = n_a = \sqrt{N_v N_a} \exp[-\Delta E_a / (2kT)]$. Подставляя числовые значения в формулу (11.2) получим эффективную плотность состояний для дырок валентной зоны $N_v = 5,1 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$. Тогда концентрация дырок $p = 1,05 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$. Удельное сопротивление материала $\rho = 1 / (e \mu_p p)$. Окончательно получим $\rho = 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

Пример 3. Прямоугольный образец полупроводника n -типа с размерами $a = 50 \text{ мм}$, $b = 5 \text{ мм}$, $d = 1 \text{ мм}$ помещен в магнитное поле с индукцией $B = 0,5 \text{ Тл}$. Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости образца. Под действием напряжения $U_a = 0,42 \text{ В}$, приложенного вдоль образца, по нему протекает ток $I = 20 \text{ мА}$. Согласно измерениям ЭДС Холла $U_H = 6,25 \text{ мВ}$. Найти удельную проводимость, подвижность и концентрацию носителей заряда для этого полупроводника, полагая, что электропроводность обусловлена носителями только одного знака.

Решение. Удельное сопротивление полупроводника $\rho = U_a b d / (I a)$. Подставив числовые значения, вычислим $\rho = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Тогда удельная проводимость $\gamma = 1 / \rho = 480 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}$. Коэффициент Холла $R_H = U_H d / (I B) = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 / \text{Кл}$. Концентрация электронов $n = 1 / (e R_H) = 10^{22} \text{ м}^{-3}$. Из выражения $\gamma = e n \mu_n$ следует, что подвижность электронов $\mu_n = \gamma R_H = 0,3 \text{ м}^2 / (\text{В} \cdot \text{с})$.

Задачи.

1. Как изменится положение уровня Ферми относительно потолка валентной зоны в беспримесном полупроводнике, если E_g уменьшится в 2 раза?

2. Во сколько раз энергия Ферми электронов в беспримесном полупроводнике при T_2 отличается от энергии Ферми электронов при T_1 , если ширина запрещенной зоны увеличилась на $0,5 E_g$?

3. Определить уровень Ферми в собственном полупроводнике при комнатной температуре, если ширина запрещенной зоны

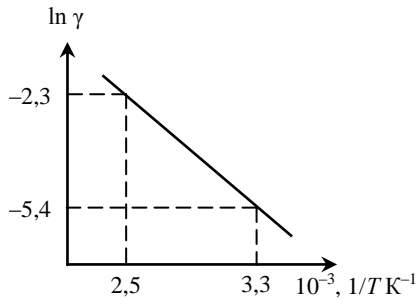


Рис.15

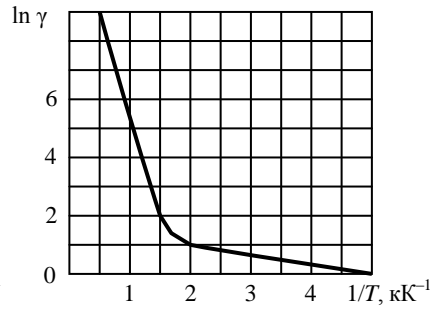


Рис.16

$E_g = 1,12$ эВ. За нулевой уровень отсчета энергии электронов принять уровень потолка валентной зоны. Эффективная масса дырок в 2 раза больше эффективной массы электронов.

4. Вычислить E_g германия, пользуясь данными рис.15. Размерность $[\gamma] = (\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$.

5. Собственный полупроводник имеет при некоторой температуре удельное сопротивление $\rho = 0,48$ Ом·м. Определить концентрацию собственных носителей заряда, если подвижность электронов в германии $0,36 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, а подвижность дырок $0,16 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

6. Каков уровень Ферми при комнатной температуре в собственном полупроводнике, если ширина запрещенной зоны $E_g = 0,7$ эВ? За нулевой уровень отсчета энергии электронов принять уровень дна зоны проводимости. Эффективная масса дырок в 3 раза больше эффективной массы электронов.

7. Найти минимальную энергию образования пары электрон-дырка в беспримесном полупроводнике, проводимость которого возрастает в 5 раз при увеличении температуры от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К.

8. Ширина запрещенной зоны германия $E_g = 0,72$ эВ. Во сколько раз увеличивается его удельная проводимость, если образец нагревают от 0 до 17°C .

9. Определить ширину запрещенной зоны полупроводника. Зависимость логарифма проводимости от обратной температуры представлена на рис.16. Размерность $[\gamma] = (\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$.

10. Вычислить концентрацию собственных носителей в GaAs при $T = 300$ К, если ширина запрещенной зоны $E_g = 1,424$ эВ, а эффективные массы электронов и дырок $m_n = 0,067m_e$ и $m_p = 0,48m_e$, m_e – масса электрона.

11. Определить собственную проводимость в кремнии при $T = 300$ К, если $E_g = 1,424$ эВ, $m_n = 0,067m_e$ и $m_p = 0,48m_e$, а $\mu_n = 0,13$ м²/(В·с) и $\mu_p = 0,05$ м²/(В·с).

12. Найти энергию активации донорных уровней полупроводника. График зависимости $\ln \eta$ от $1/T$ показан на рис.16.

13. Какова примесная электропроводность алмаза, содержащего бор с концентрацией $2 \cdot 10^{21}$ м⁻³ и мышьяк с концентрацией $1 \cdot 10^{21}$ м⁻³? Подвижность электронов и дырок для алмаза соответственно 0,18 и 0,12 м²/(В·с).

14. Определить примесную электропроводность кремния, содержащего бор с концентрацией $2 \cdot 10^{22}$ м⁻³ и сурьму с концентрацией $3 \cdot 10^{21}$ м⁻³. Подвижность электронов и дырок для кремния соответственно 0,13 и 0,05 м²/(В·с).

15. Вычислить сдвиг $\Delta \lambda$ края собственного поглощения германия при изменении температуры от $T_1 = 77$ К до $T_2 = 273$ К. Зависимость ширины запрещенной зоны германия от температуры имеет вид $E_g = 0,782 - 3,9 \cdot 10^{-4}T$ эВ.

16. На рис.17 показан спектр собственного поглощения антимонида индия для двух различных температур. Найдите ширину запрещенной зоны при указанных температурах.

17. При изменении температуры $T_1 = 100$ К до $T_2 = 300$ К край собственного поглощения сдвинулся на $\Delta \lambda = 0,195$ мкм. Найти температурный коэффициент ширины запрещенной зоны материала, если при T_1 $E_g = 0,743$ эВ.

18. Вычислить минимальную длину световой волны, для которой GaAs, имеющий $E_g = 1,43$ эВ при температуре 300 К, является

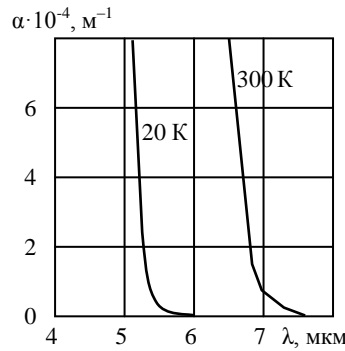


Рис.17

оптически прозрачным. Как изменяется ширина запрещенной зоны с понижением температуры?

19. Какова удельная проводимость кремния n -типа, если постоянная Холла для него $R_H = -2,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$, а подвижность электронов $0,13 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$?

20. Найти постоянную Холла кристалла кремния p -типа, если концентрация примесей $2 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$, а подвижность дырок $0,05 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

21. При измерении эффекта Холла пластинку из полупроводника p -типа шириной $d = 10 \text{ мм}$ и длиной $L = 50 \text{ мм}$ поместили в магнитное поле с индукцией $B = 0,5 \text{ Тл}$. К концам пластинки приложили разность потенциалов $U = 10 \text{ В}$. Холловская разность потенциалов $U_H = 50 \text{ мВ}$, а удельное сопротивление $\rho = 2,5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$. Какова концентрация дырок?

22. При измерении эффекта Холла пластинку из полупроводника p -типа шириной $d = 10 \text{ мм}$ и длиной $L = 50 \text{ мм}$ поместили в магнитное поле с индукцией $B = 0,5 \text{ Тл}$. К концам пластинки приложили разность потенциалов $U = 10 \text{ В}$. Холловская разность потенциалов $U_H = 50 \text{ мВ}$. Найти подвижность дырок.

23. При измерении эффекта Холла в магнитном поле с индукцией $B = 0,5 \text{ Тл}$ поперечная напряженность электрического поля в чистом беспримесном германии оказалась в 10 раз меньше продольной напряженности электрического поля. Вычислить разность подвижностей электронов проводимости и дырок в данном полупроводнике.

24. В некотором полупроводнике, у которого подвижность электронов проводимости в 2 раза больше подвижности дырок, эффект Холла не наблюдался. Найти отношение концентраций дырок и электронов проводимости в этом полупроводнике.

25. Удельная проводимость кремния с примесями $\gamma = 112 (\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$. Определить подвижность дырок и их концентрацию, если постоянная Холла $R_H = 3,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$. Принять, что полупроводник обладает дырочной проводимостью.

12. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Контакт двух проводников и термоэлектрические эффекты. Электроны в металле не могут самопроизвольно покинуть объем кристалла, т.е. находятся в потенциальной яме. Для выхода электрона из этой ямы необходимо затратить энергию, равную работе выхода A (рис.18, *a*). При соприкосновении двух металлов с разными работами выхода A_1 и A_2 , электроны с более высоких уровней металла 1 будут переходить на более низкие уровни металла 2. В итоге металл 1 зарядится положительно, а металл 2 – отрицательно. Описанный процесс будет происходить до установления равновесия, которое характеризуется выравниванием уровней Ферми в обоих металлах (рис.18, *б*). Потенциальная энергия электронов, лежащих вне металлов в непосредственной близости к их поверхности (точки A и B), будет различной, т.е. между точками A и B устанавливается внешняя контактная разность потенциалов

$$\Delta\varphi' = (A_2 - A_1)/e,$$

где e – заряд электрона.

Экспериментально установлены два закона:

- Контактная разность потенциалов зависит лишь от химического состава и температуры соприкасающихся металлов.

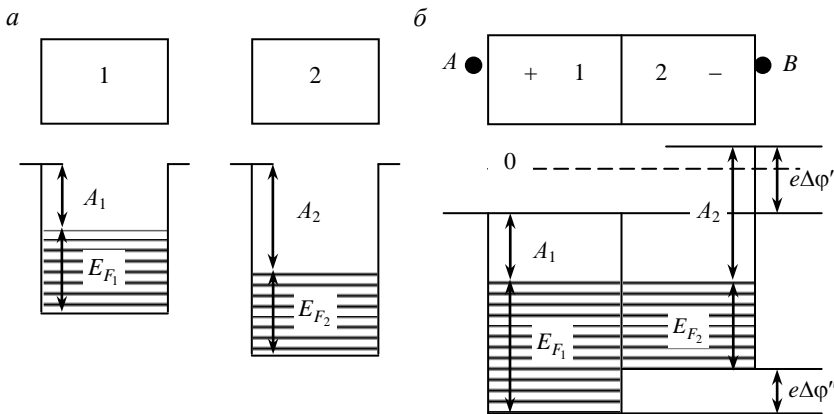


Рис.18

- Контактная разность потенциалов последовательно соединенных различных проводников, находящихся при одинаковой температуре, определяется только крайними проводниками.

В двойном электрическом слое (толщиной около 10^{-10} м) в приконтактной области наблюдается также внутренняя контактная разность потенциалов

$$\Delta\varphi^n = (E_{F_2} - E_{F_1})/e.$$

Зависимость внутренней контактной разности потенциалов от температуры обуславливает появление термоэлектрических эффектов.

Эффект Зеебека. В проводнике, изготовленном из металла A , при наличии разности температур на его концах возникает разность потенциалов. Ее значение, отнесенное к этой разности температур, называют абсолютной удельной термоЭДС α_a^A . В замкнутой цепи, состоящей из последовательно соединенных нескольких различных проводников, если температура контактов не одинакова, возникает электрический ток, называемый термоэлектрическим. ЭДС, вызывающая появление тока, для многих пар металлов приблизительно прямо пропорциональна разности температур (T_r и T_x) горячего и холодного спаев соответственно:

$$\varepsilon = \alpha(T_r - T_x),$$

где α – коэффициент пропорциональности, называемый относительной дифференциальной, или удельной термоЭДС, $\alpha = (k/e) \ln(n_1/n_2)$; k – постоянная Больцмана; e – заряд электрона; n_1 и n_2 – концентрации электронов в первом и втором металлах соответственно.

Можно доказать, что в термопарном контуре удельная термоЭДС α представляет собой разность абсолютных термоЭДС (α_a^A и α_a^B) проводников A и B , составляющих контур:

$$\alpha = \alpha_a^A - \alpha_a^B.$$

Эффект Пельтье. При прохождении через контакт двух различных проводников (или полупроводников) электрического тока помимо теплоты Джоуля – Ленца выделяется или поглощается (в зависи-

мости от направления тока) дополнительная теплота: это явление называется эффектом Пельтье, который обратен эффекту Зеебека. Количество выделившегося (поглощенного) в спае тепла пропорционально заряду q , прошедшему через спай, т.е.

$$Q_{AB} = P_{AB}q = P_{AB}It,$$

где P_{AB} – коэффициент Пельтье (последовательность AB указывает на направление тока); I – сила тока; t – время его пропускания.

Из законов термодинамики вытекает, что коэффициент Пельтье и удельная термоЭДС связаны соотношением

$$P_{AB} = \alpha T. \quad (12.1)$$

Контакт металл – полупроводник. Свойства контакта металл – полупроводник зависят от соотношения работ выхода из полупроводника A и из металла A_M и от типа электропроводности полупроводника.

Энергетические диаграммы для контакта металла с полупроводником n -типа при $A_M > A$ до и после приведения в контакт показаны соответственно на рис.19, *a* и *б*. Поскольку $A_M > A$, электроны из полупроводника будут переходить в металл, вследствие чего произойдет обеднение приконтактного слоя полупроводника электронами и он зарядится положительно, а металл – отрицательно. Так образуется

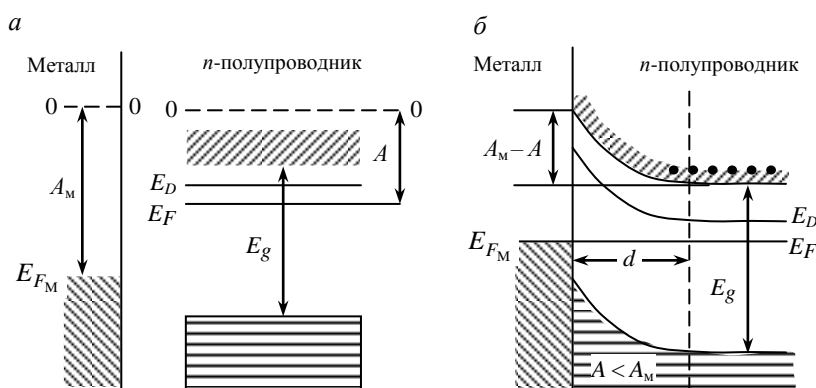


Рис.19

двойной электрический слой (толщиной $d \approx 10^{-7}$ м), причем напряженность электрического поля препятствует дальнейшему выходу электронов из полупроводника. Такой слой называют запирающим, а потенциальный барьер называют барьером Шоттки.

Энергетические диаграммы для случаев $A_M < A$ (полупроводник n -типа), $A_M > A$ (полупроводник p -типа) и $A_M < A$ (полупроводник p -типа) показаны на рис.20. Запирающий слой возникает при контакте полупроводника n -типа с меньшей работой выхода, чем у металла, и у полупроводника p -типа – с большей работой выхода, чем у металла. При этом для запирающего слоя на границе металла с полупроводником n -типа ($A_M > A$) пропускным является направление тока из металла в полупроводник, а для запирающего слоя на границе металла с полупроводником p -типа ($A_M < A$) – из полупроводника в металл. Зависимость плотности тока от приложенного напряжения, т.е. вольт-амперную характеристику (ВАХ) барьера Шоттки, можно записать в виде

$$j = j_0 \{ \exp[eU/(kT) - 1] \},$$

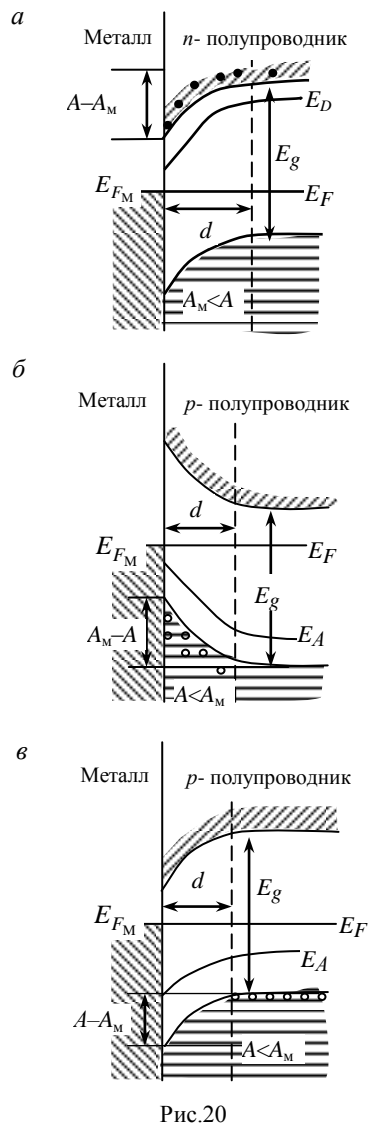


Рис.20

где j – плотность тока через p - n -переход; j_0 – плотность тока насыщения; U – приложенное к p - n -переходу внешнее электрическое напряжение, которое при прямом включении барьера считается положительным, а при обратном – отрицательным; k – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура.

Контакт электронного и дырочного полупроводников (p - n -переход). Если в пределах одного твердого тела сформировать области, имеющие по одну сторону от условной (металлургической) границы p -тип электропроводности, а по другую – n -тип, то электроны из n -области будут диффундировать в p -область, а дырки – в обратном направлении. В результате у контакта образуется двойной электрический слой (толщиной $d \cong 10^{-6} \div 10^{-7}$ м), электрическое поле которого имеет порядок $E \cong 10^6$ В/м, направлено из n -области в p -область и препятствует дальнейшей диффузии электронов и дырок. Равновесие на-

ступает при выравнивании уровней Ферми обеих областей (рис.21).

Высота потенциального барьера p - n -перехода, определяется первоначальной разностью положений уровней Ферми:

$$e\phi = kT \ln(p_p n_n / n_i^2), \quad (12.2)$$

где p_p и n_n – равновесные концентрации основных носителей заряда в p - и n -областях; n_i – собственная концентрация носителей заряда; ϕ – контактная разность потенциалов.

При обычных температурах носители заряда не способны преодолеть этот потенциальный барьер и p - n -переход

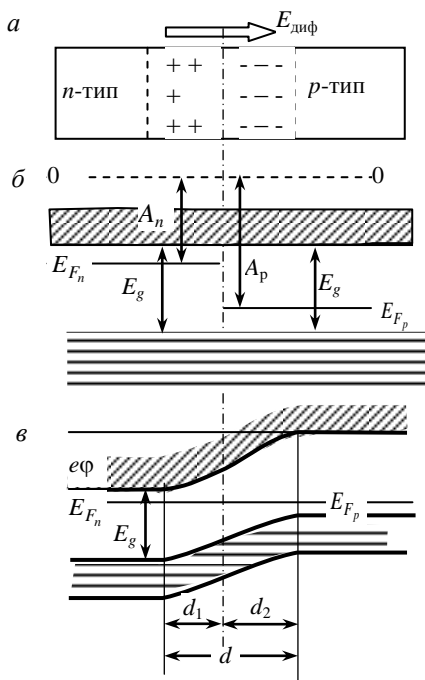


Рис.21

обладает односторонней проводимостью. При комнатной температуре все атомы примеси обычно ионизованы, а концентрация основных носителей заряда мала. Поэтому можно считать, что $p_p = N_a$, а $n_n = N_d$, где N_a и N_d – концентрации акцепторной и донорной примесей в соответствующих областях. Определять параметры p - n -перехода можно с учетом соотношения «действующих масс»:

$$n_n p_n = n_i^2 \text{ и } p_p n_p = n_i^2, \quad (12.3)$$

где p_n и n_p – концентрации неосновных носителей заряда, т.е. дырок в n -области и электронов в p -области.

Толщина d p - n -перехода

$$d = \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0(N_a + N_d)}{eN_a N_d}}(\varphi - U),$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость полупроводника; ε_0 – электрическая постоянная; e – заряд электрона; φ – контактная разность потенциалов p - n -перехода; U – приложенное к p - n -переходу внешнее электрическое напряжение.

При прямом включении (прямом смещении) p - n -перехода это напряжение считается положительным, а при обратном включении (обратном смещении) – отрицательным.

Переход p - n можно рассматривать как плоский конденсатор, с емкостью

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d,$$

где S – площадь p - n -перехода. Это барьерная емкость.

Вольт-амперная характеристика p - n -перехода

$$j = j_0 \{ \exp[eU/(kT)] - 1 \}, \quad (12.4)$$

где j – плотность тока через p - n -переход; j_0 – плотность тока насыщения; U – приложенное к p - n -переходу внешнее электрическое напряжение; k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура.

Плотность обратного тока насыщения j_0 определяется неосновными носителями, и ее можно оценить по выражению

$$j_0 = e[(D_p p_n / L_p) + (D_n p_p / L_n)], \quad (12.5)$$

где D_p и D_n – коэффициенты диффузии для дырок и электронов; L_p и L_n – диффузионная длина неосновных носителей заряда: дырок и электронов соответственно.

Коэффициенты диффузии можно найти из соотношения Эйнштейна:

$$D_p = \mu_p kT / e; \quad D_n = \mu_n kT / e, \quad (12.6)$$

а диффузионная длина зависит от времени жизни неосновных носителей τ_p для дырок и τ_n для электронов:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p}; \quad L_n = \sqrt{D_n \tau_n}.$$

Пример 1. Определить напряженность электрического поля, возникающего в зазоре между пластинами плоского конденсатора, одна из которых изготовлена из алюминия, а другая – из платины. Пластины соединены между собой медным проводом, ширина зазора $d = 5$ мм. Работа выхода электронов из алюминия, меди и платины составляет соответственно 4,25; 4,4 и 5,32 эВ. Как изменится напряженность поля, если алюминиевую и медную пластины соединить проводом из платины?

Решение. Разность потенциалов на концах разнородной цепи, состоящей из последовательно соединенных проводников, определяется различием в работах выхода электронов из крайних проводников и не зависит от количества и состава промежуточных звеньев. Поэтому $E_1 = (A_{Pt} - A_{Al}) / ed = 214$ В/м. Во втором случае $E_2 = (A_{Cu} - A_{Al}) / ed = 30$ В/м.

Пример 2. Удельная термоЭДС контакта двух проводников $\alpha = 10$ мкВ/К. Через контакт пропускают ток силой $I = 1$ А. Каково должно быть сопротивление R контакта, чтобы в результате прояв-

ления эффекта Пельтье можно было наблюдать охлаждение контакта при комнатной температуре T ?

Решение. Коэффициент Пельтье найдем по формуле (12.1) и учтем, что выделяемое на контакте за время t тепло Джоуля – Ленца должно быть по абсолютной величине меньше тепла Пельтье, поглощаемого на том же контакте при надлежащем направлении тока за то же время, т.е. $I^2Rt < \alpha It$, откуда находим, что $R < \alpha T / I$. Приняв комнатную температуру равной 293 К, получим $R < 2,93 \cdot 10^{-3}$ Ом.

Пример 3. В германиевом p - n -переходе удельная проводимость p -области $\gamma_p = 10^4$ См/м, а удельная проводимость n -области $\gamma_n = 100$ См/м. Подвижность электронов μ_n и дырок μ_p в германии соответственно 0,39 и 0,19 м²/(В·с). Получить выражение, связывающее контактную разность потенциалов с отношением концентраций основных и неосновных носителей заряда в полупроводнике и найти по нему контактную разность потенциалов в переходе при температуре $T = 300$ К. Собственная концентрация носителей заряда при этой температуре в германии $n_i = 2,5 \cdot 10^{19}$ м⁻³.

Решение. Для p -области удельная проводимость γ_p определяется основными носителями заряда, т.е. дырками. Поэтому $\gamma_p = e p_p \mu_p$, где p_p и μ_p – концентрация и подвижность дырок в p -области. Соответственно $p_p = \gamma_p / e \mu_p = 3,29 \cdot 10^{23}$ м⁻³. Аналогично для n -области $n_n = \gamma_n / e \mu_n = 1,6 \cdot 10^{21}$ м⁻³. Из закона «действующих масс» (12.3) получим $n_i^2 / n_n = p_n$. Используя выражение для потенциального барьера p - n -перехода (12.2), вычислим $\varphi = (kT / e) \ln(p_p / p_n) = 0,35$ В.

Пример 4. Используя данные и результаты примера 3, найти плотность обратного тока насыщения, отношение дырочной составляющей обратного тока насыщения к электронной (диффузионная длина для электронов и дырок $L_n = L_p = 1$ мм) и напряжение, при котором плотность прямого тока $j = 100$ кА/м².

Решение. Концентрации неосновных носителей: дырок в n -области и электронов в p -области – согласно закону «действующих масс» (12.3) $p_n = 3,91 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$, $n_p = 1,9 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}$.

В выражение для плотности тока насыщения (12.5) подставим коэффициенты диффузии, определяемые из соотношения Эйнштейна (12.6). Тогда

$$j_0 = (kT\mu_p p_n / L_p) + (kT\mu_n p_p / L_n). \quad (12.7)$$

После вычислений получим $j_0 = 0,31 \text{ А/м}^2$.

В формуле (12.7) первое слагаемое, очевидно, представляет собой плотность тока j_p , связанного с движением дырок в n -области, а второе – плотность тока j_n , связанного с движением электронов в p -области, поэтому $j_p / j_n = (\mu_p p_n L_n) / (\mu_n p_p L_p) = 100$.

Искомое напряжение определим из выражения (12.4). Логарифмированием найдем, что $eU/(kT) = 12,7$ и, следовательно, $U = 0,328 \text{ В}$.

Задачи.

1. Какова внутренняя контактная разность потенциалов, возникающая при соприкосновении двух металлов с концентрациями свободных электронов $5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ и 10^{29} м^{-3} ?

2. Ток в цепи, состоящей из термопары сопротивлением 5 Ом и гальванометра сопротивлением 8 Ом, равен 0,5 мА в случае, когда спай термопары помещен в сосуд с кипящей водой. Вычислить удельную термоЭДС термопары при температуре окружающей среды 20 °С.

3. Один спай термопары помещен в печь с температурой 200 °С, второй находится при комнатной температуре (20 °С). Измеряемое значение термоЭДС 1,8 мВ. Какой станет термоЭДС, если второй спай поместить в сосуд с тающим льдом? с кипящей водой?

4. Контакт металл – полупроводник с барьером Шоттки, имеющий обратный ток насыщения $I_0 = 10 \text{ мкА}$, соединен последовательно с источником напряжения $U_{\text{ист}} = 10 \text{ В}$ и резистором сопротивлением $R = 1 \text{ кОм}$. Найти прямой ток, прямое напряжение и сопротивление контакта при комнатной температуре.

5. Обратный ток насыщения германиевого $p-n$ -перехода, измеренный при обратном напряжении 5 В, равен 1 мкА. Через этот $p-n$ -переход при его прямом включении течет ток 0,1 А. Определить прямое и обратное сопротивления $p-n$ -перехода при комнатной температуре $T = 293$ К.

6. Обратный ток насыщения кремниевого $p-n$ -перехода, измеренный при обратном напряжении 5 В, равен 10^{-8} А. Через этот $p-n$ -переход при его прямом включении течет ток 0,1 А. Каковы прямое и обратное сопротивления $p-n$ -перехода при $T = 293$ К?

7. При разности температур 100 К на концах первой металлической проволоки A появилась разность потенциалов 1,4 мВ, а на концах проволоки B в аналогичных условиях – разность потенциалов 0,6 мВ. Какими будут показания вольтметра, включенного в термодинамический контур из этих проволок, если горячий спай термопары находится при температуре 400 °С, а холодный – при комнатной температуре?

8. Оценить значение коэффициента Пельтье при комнатной температуре для контакта двух металлов, в которых концентрации свободных электронов отличаются на 10 %.

9. Во сколько раз эффективней происходит охлаждение за счет эффекта Пельтье на контакте Pt-Ni, чем на контакте Pt-Cu при комнатной температуре и токе 1 А? Сопротивление каждого из контактов 1 мОм.

10. В замкнутую цепь, состоящую из медного, алюминиевого и платинового проводников между медным и алюминиевым проводниками включен милливольтметр. Температура контакта Cu-Al 20 °С, Al-Pt +200 °С, Pt-Cu +100 °С. Абсолютные удельные термоЭДС для Cu, Al и Pt соответственно +1,8; -1,3 и -5,1 мкВ/К. Каковы показания милливольтметра?

11. При изменении обратного напряжения от 0,1 до 1 В на контакте Шоттки, изготовленном с использованием донорного полупроводника и металла, емкость контакта уменьшилась в 2 раза. Работа выхода из металла равна 4,4 эВ. Найти работу выхода из полупроводника.

12. Обратный ток насыщения контакта металл – полупроводник с барьером Шоттки равен 2 мкА. Контакт последовательно

соединен с резистором и источником постоянного напряжения 0,2 В. Определить сопротивление резистора, если падение напряжения на нем 0,1 В. Контакт находится при температуре 300 К.

13. Металл, работа выхода из которого равна 4,3 эВ, образует контакт с донорным полупроводником, работа выхода из которого равна 4,1 эВ. Какова толщина двойного электрического слоя, возникающего на контакте? Концентрация примеси в полупроводнике $N_d = 10^{22} \text{ м}^{-3}$, а его относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 12$.

14. Акцепторный полупроводник с работой выхода 4,5 эВ и металл с работой выхода 4,2 эВ образуют контакт. Найти удельную емкость контакта при приложении к нему обратного напряжения 0,5 В. Концентрация примеси в полупроводнике $N_a = 10^{22} \text{ м}^{-3}$, а его относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 10$.

15. В германиевом p - n -переходе концентрация донорной примеси в n -области в 1000 раз больше, чем концентрация акцепторной примеси в p -области. При этом на каждые 108 атомов германия приходится один атом акцепторной примеси. Определить контактную разность потенциалов этого p - n -перехода при температуре 300 К. Общая концентрация собственных атомов германия $4,4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, а концентрация ионизированных атомов германия при данной температуре $2,5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

16. Удельное сопротивление p -области германиевого p - n -перехода 2 Ом·см, а удельное сопротивление n -области 1 Ом·см. Вычислить высоту потенциального барьера p - n -перехода при температуре 300 К.

17. В структуре с кремниевым p - n -переходом удельное сопротивление p -области и n -области 10^{-4} и 10^{-2} Ом·м соответственно. Вычислить контактную разность потенциалов при температуре 300 К, если подвижность дырок и электронов соответственно 0,05 и 0,14 $\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, а собственная концентрация в данных условиях $1,38 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$.

18. Концентрации доноров и акцепторов в n - и p -областях резкого p - n -перехода соответственно $5 \cdot 10^{16}$ и 10^{17} см^{-3} . Определить контактную разность потенциалов и плотность обратного тока насыщения при комнатной температуре. Считать, что коэффициент

ты диффузии для неосновных электронов и дырок соответственно 100 и 50 см²/с, а диффузионная длина электронов и дырок одинакова и составляет 0,8 см. Собственная концентрация носителей заряда 10¹³ см⁻³.

19. Резкий *p-n*-переход сформирован из материала *p*-типа с удельным сопротивлением при температуре 300 К 1,3 мОм·м и из материала *n*-типа с удельным сопротивлением 4,6 мОм·м. Время жизни неосновных носителей заряда в материалах *p*- и *n*-типов 100 и 150 нс соответственно, площадь *p-n*-перехода 1 мм². Вычислить обратный ток насыщения в предположении, что протяженность *p*- и *n*-областей много больше диффузионной длины. Подвижность дырок и электронов соответственно 0,048 и 0,135 м²/(В·с), собственная концентрация 6,5 · 10¹⁶ м⁻³.

20. Ток, проходящий через *p-n*-переход при большом обратном напряжении и $T = 300$ К, равен 0,2 мкА. Найти ток через *p-n*-переход при прямом напряжении 0,1 В.

21. Каково прямое напряжение на *p-n*-переходе при токе 1 мА, если обратный ток насыщения при комнатной температуре равен 1 нА?

22. При прямом напряжении 0,1 В на *p-n*-переходе и температуре 20 °С через него проходит некоторый ток. Каким должно быть напряжение, чтобы ток увеличился в 2 раза?

23. В равновесном состоянии высота потенциального барьера германиевого *p-n*-перехода 0,2 эВ, концентрация акцепторных примесей в *p*-области 3 · 10¹⁴ см⁻³, что много меньше концентрации донорных примесей в *n*-области. Рассчитать барьерную емкость *p-n*-перехода при обратном напряжении 0,1 В. Площадь *p-n*-перехода 1 мм², относительная диэлектрическая проницаемость германия 16.

24. Барьерная емкость *p-n*-перехода 25 пФ при обратном напряжении 5 В. Как она изменится при увеличении обратного напряжения до 7 В?

25. Ток насыщения *p-n*-перехода при комнатной температуре 0,01 мкА. Каково его сопротивление при близком к нулю напряжении в этих условиях?

13. СТРОЕНИЕ АТОМНЫХ ЯДЕР

Ядро обозначается тем же символом, что и нейтральный атом ${}^A_Z X$, где X – символ химического элемента; Z – зарядовое число (атомный номер); A – массовое число (число нуклонов в ядре). Радиус ядра

$$R = R_0 A^{1/3},$$

где R_0 – коэффициент пропорциональности, который можно считать для всех ядер постоянным, $R_0 = 1,4 \cdot 10^{-15}$ м. Число нейтронов в ядре $N = A - Z$.

Пример 1. Определить плотность ядерного вещества в ядре с массовым числом A .

Решение. Плотность выражается числом нуклонов в 1 см^3 : $N = A/V$, где объем ядра $V = 4\pi R^3/3$. Радиус связан с массовым числом соотношением $R = R_0 A^{1/3}$. Тогда

$$N = \frac{A}{4\pi R_0^3/3} = \frac{3}{4\pi R_0^3}.$$

Подставляя числовые данные, получим $N = 8,7 \cdot 10^{37} \text{ см}^{-3}$.

Пример 2. Ядро нептуния ${}^{234}_{93}\text{Np}$ захватило электрон из K -оболочки атома (K -захват) и испустило α -частицу. Ядро какого элемента получилось?

Решение. При K -захвате ядро захватывает электрон из ближайшей к ядру электронной оболочки (K -оболочки) атома. В результате этого протон в ядре превращается в нейтрон (одновременно из ядра выбрасывается нейтрино, однако для решения данной задачи это не существенно). Общее число нуклонов в ядре не изменяется, а зарядовое число уменьшится на единицу. Поэтому промежуточное ядро будет иметь зарядовое число $93 - 1 = 92$; массовое число остается прежним и равным 234. По таблице Менделеева промежуточным ядром является изотоп урана ${}^{234}_{92}\text{U}$. Промежуточное ядро испустило α -частицу. Так как α -частица содержит два протона и два нейтрона, то промежуточное ядро при

акте испускания α -частицы уменьшит зарядовое число на две единицы и массовое число на четыре единицы. Таким образом, конечное ядро будет иметь $Z = 90$ и $A = 230$, что соответствует изотопу тория ${}_{90}^{230}\text{Th}$.

Задачи.

1. Какую часть массы нейтрального атома плутония составляет масса его электронной оболочки?

2. Укажите сколько нуклонов, протонов и нейтронов содержат следующие ядра: ${}_{2}^3\text{He}$; ${}_{5}^{10}\text{B}$; ${}_{11}^{23}\text{Na}$; ${}_{26}^{54}\text{Fe}$; ${}_{47}^{104}\text{Ag}$; ${}_{92}^{238}\text{U}$.

3. Найти число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов магния: ${}_{12}^{24}\text{Mg}$; ${}_{12}^{25}\text{Mg}$; ${}_{12}^{26}\text{Mg}$.

4. Определить атомные номера, массовые числа и химические символы зеркальных ядер, которые получаются, если в ядрах ${}_{4}^7\text{Be}$, ${}_{2}^3\text{He}$ и ${}_{8}^{15}\text{O}$ протоны заменить нейтронами, а нейтроны – протонами. Привести символическую запись получившихся ядер.

5. Определить диаметры ядер ${}_{3}^8\text{Li}$, ${}_{13}^{27}\text{Al}$, ${}_{29}^{64}\text{Cu}$, ${}_{50}^{125}\text{Sn}$.

6. Во сколько раз объем ядра изотопа плутония ${}_{94}^{243}\text{Pu}$ больше объема ядра изотопа бериллия ${}_{4}^9\text{Be}$?

7. Во сколько раз радиус ядра бора ${}_{5}^8\text{B}$ меньше радиуса ядра никеля ${}_{28}^{64}\text{Ni}$?

8. Оценить, какую часть от объема кобальта составляет объем его ядра. Плотность кобальта $4,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

9. Определить концентрацию нуклонов в ядре.

10. Используя соотношение $Z = A/2$, которое справедливо для многих легких ядер, найти среднюю объемную плотность заряда ядра.

11. Ядро радия ${}_{88}^{226}\text{Ra}$ выбросило α -частицу. Найти массовое число A и зарядовое число Z вновь образовавшегося ядра.

12. Ядро азота ${}^{14}_7\text{N}$ захватило α -частицу и испустило протон. Найти массовое число A и зарядовое число Z вновь образовавшегося ядра.

13. Ядро цинка ${}^{65}_{30}\text{Zn}$ захватило электрон из K -оболочки атома (K -захват). Найти массовое число A и зарядовое число Z вновь образовавшегося ядра.

14. Ядро ${}^7_4\text{Be}$ захватило электрон с K -оболочки атома. Какое ядро образовалось в результате K -захвата?

15. Ядро изотопа кобальта ${}^{60}_{27}\text{Co}$ выбросило отрицательно заряженную β -частицу. В какое ядро превратилось ядро кобальта?

16. Сколько α - и β -частиц выбрасывается при превращении ядра урана ${}^{233}_{92}\text{U}$ в ядро висмута ${}^{209}_{83}\text{Bi}$?

17. Вследствие радиоактивного распада ${}^{238}_{92}\text{U}$ превращается в ${}^{206}_{82}\text{Pb}$. Сколько α - и β -превращений он при этом испытывает?

18. В какое ядро превратилось ядро изотопа фосфора ${}^{30}_{15}\text{P}$, выбросив положительно заряженную бета-частицу?

19. Определить порядковый номер и массовое число изотопа, который получится из тория ${}^{232}_{90}\text{Th}$ после трех α - и двух β -превращений.

20. В ядре изотопа углерода ${}^{14}_6\text{C}$ один из нейтронов превратился в протон (β -распад). Какое ядро получилось в результате такого превращения?

21. Два ядра гелия ${}^4_2\text{He}$ слились в одно ядро, и при этом был выброшен протон. Ядро какого элемента образовалось в результате такого превращения?

22. В ядре атома изотопа кремния ${}^{27}_{14}\text{Si}$ один из протонов превратился в нейтрон (β^+ -распад). Какое ядро получилось в результате такого превращения?

23. Ядро цинка ${}_{30}^{62}\text{Zn}$ захватило электрон из K -оболочки атома (K -захват) и спустя некоторое время испустило позитрон. Какое ядро получилось в результате таких превращений?

24. Ядро плутония ${}_{94}^{238}\text{Pu}$ испытало шесть последовательных α -распадов. Написать цепочку ядерных превращений с указанием химических символов, массовых и зарядовых чисел промежуточных ядер и конечного ядра.

25. В результате нескольких α - и β -распадов радиоактивный атом ${}_{90}^{232}\text{Th}$ превратился в атом ${}_{83}^{212}\text{Bi}$. Сколько произошло α -распадов? β -распадов?

14. РАДИОАКТИВНОСТЬ

Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 \exp(-\lambda t), \quad (14.1)$$

где N_0 – начальное число радиоактивных ядер в момент времени $t = 0$; N – число не распавшихся радиоактивных ядер в момент времени t ; λ – постоянная распада.

Время, за которое распадается половина первоначального количества ядер, называется периодом полураспада

$$T = \ln 2 / \lambda = 0,693 / \lambda .$$

Среднее время жизни радиоактивного ядра $\tau = 1/\lambda$.

Число распадов ядер вещества в единицу времени (активность вещества)

$$A = -dN/dt = \lambda N = \lambda N_0 \exp(-\lambda t) = A_0 \exp(-\lambda t). \quad (14.2)$$

Удельной активностью вещества называют активность, отнесенную к единице массы вещества.

Пример 1. Сколько атомов распадается в 1 г трития ${}^3_1\text{H}$ за среднее время жизни этого изотопа.

Решение. Среднее время жизни радиоактивного изотопа – величина, обратная постоянной распада, $\tau = 1/\lambda$. По условию $t = \tau$. Подставляя это значение в закон радиоактивного распада (14.1), получим $N = N_0/e$, где e – основание натурального логарифма. Число атомов, распавшихся за время $t = \tau$, $N' = N_0 - N = N_0(1 - 1/e)$. Найдем число атомов N_0 , содержащихся в массе $m = 1$ г изотопа ${}^3_1\text{H}$: $N_0 = mN_A / M$, где $M = 3 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса изотопа ${}^3_1\text{H}$; N_A – число Авогадро. Тогда $N' = mN_A / M(1 - 1/e)$. Подставляя числовые значения, получим $N' = 1,27 \cdot 10^{23}$.

Пример 2. Определить начальную активность A_0 радиоактивного магния ${}^{27}\text{Mg}$ массой $m = 0,2$ мкг, а также активность A по истечении времени $t = 1$ ч. Предполагается, что все атомы изотопа радиоактивны.

Решение. Начальная активность изотопа $A_0 = \lambda N_0$, где λ – постоянная радиоактивного распада; N_0 – количество атомов изотопа в начальный момент времени. Если учесть, что $\lambda = \ln 2/T$ и $N_0 = mN_A/M$, то начальная активность $A_0 = (mN_A/MT)\ln 2$. Подставляя числовые значения, получим $A_0 = 5,15 \cdot 10^{-12}$ Бк. Со временем активность уменьшается по закону (14.2). Заменяя постоянную распада λ ее выражением, получим $A = A_0 \exp(-t \ln 2/T) = A_0 [\exp(\ln 2)]^{-t/T} = A_0 2^{-t/T} = 8,05 \cdot 10^{10}$ Бк.

Задачи.

1. Какая часть атомов радиоактивного вещества остается нераспавшейся по истечении времени, равного утроенному среднему времени жизни атома?

2. Какая часть атомов радиоактивного вещества распадается за время, равное трем периодам полураспада T ?

3. Какая доля радиоактивных ядер кобальта распадется за месяц, если период полураспада кобальта 71,3 сут?

4. Среднее время жизни атомов радиоактивного вещества $\tau = 1$ с. Определить вероятность того, что ядро распадется за время t , равное 1; 10 и 0,1 с.

5. Чтобы определить возраст t древней ткани, была определена концентрация в ней атомов радиоуглерода ^{14}C . Она оказалась соответствующей 9,2 распадам в минуту на 1 г углерода. Концентрация ^{14}C в живых растениях соответствует 14 распадам в минуту на 1 г углерода. Период полураспада ^{14}C равен 5730 лет. Исходя из этих данных, оценить t .

6. В настоящее время в природном уране содержится $k_8 = 99,28\%$ ^{238}U и $k_5 = 0,72\%$ ^{235}U . Каким было соотношение между ^{238}U и ^{235}U в момент образования Земли, если ее возраст равен $4 \cdot 10^6$ лет? Периоды полураспада ^{238}U и ^{235}U соответственно $T_8 = 4,51 \cdot 10^9$ лет и $T_5 = 0,713 \cdot 10^9$ лет. Считать, что в период образования Земли в природе не было более короткоживущих изотопов урана.

7. Определить возраст древних деревянных предметов, если удельная активность изотопа ^{14}C у них составляет $\eta = 3/5$ удельной активности этого же изотопа в только что срубленных деревьях. Период полураспада ^{14}C равен 5730 лет.

8. В урановой руде отношение числа ядер ^{238}U к числу ядер ^{206}Pb $\eta = 2,8$. Оценить возраст руды, считая, что весь свинец ^{206}Pb является конечным продуктом распада уранового ряда. Период полураспада ^{238}U равен $4,5 \cdot 10^9$ лет.

9. В кровь человека ввели небольшое количество раствора, содержащего ^{24}Na с активностью $A = 2,0 \cdot 10^3$ Бк. Активность 1 см³ крови через $t = 5,0$ ч оказалась $A' = 0,267$ Бк/см³. Период полураспада данного радиоизотопа $T = 15$ ч. Найти объем крови человека.

10. За какое время распадается 87,5 % атомов $^{45}_{20}\text{Ca}$?

11. Какая доля первоначального количества радиоактивного изотопа распадается за время жизни этого изотопа?

12. Найти период полураспада радиоактивного препарата, если за сутки его активность уменьшается в 3 раза.

13. Каков период полураспада изотопа, если за сутки распадается в среднем следующее количество атомов: а) 900 из 1000; б) 750 из 1000; в) один из 1000?

14. Период полураспада радиоактивного йода-131 восемь суток. За какое время количество атомов уменьшится в 1000 раз?
15. В образцах урановой руды всегда содержится некоторое количество атомов тория-234, образовавшихся в результате α -распада урана-238 (период полураспада $T_U = 4,5 \cdot 10^9$ лет). Торий также радиоактивен (период полураспада $T_{Th} = 24$ сут). Сколько атомов тория содержится в урановой руде, в которой находится 0,5 г урана-238?
16. Период полураспада радиоактивного изотопа один год. Какова средняя продолжительность жизни этого изотопа?
17. Определить период полураспада радиоактивного полония ^{210}Po , если 1 г этого изотопа образует в год $89,5 \text{ см}^3$ гелия при нормальных условиях.
18. На сколько процентов снизится активность иридия ^{92}Ir через месяц?
19. Какая доля радиоактивных ядер кобальта, период полураспада которых 71,3 сут, распадется за месяц?
20. Сколько β -частиц испускает за один час 1,0 мкг ^{24}Na , период полураспада которого $T = 15$ ч?
21. При изучении β -распада ^{23}Mg в момент времени $t = 0$ был включен счетчик. К моменту времени $t = 2,0$ с он зарегистрировал N_1 частиц, а к моменту времени $t_2 = 3t_1$ в 2,66 раз больше. Найти среднее время жизни данных ядер.
22. Активность некоторого изотопа уменьшается в 2,5 раза за семь суток. Найти его период полураспада.
23. В начальный момент времени активность радиоизотопа 10,8 Бк. Какова будет его активность по истечении половины периода полураспада?
24. Найти постоянную распада и среднее время жизни радиоактивного ^{55}Co , если его активность уменьшается на 4,0 % за 1 ч.
25. Вычислить удельную активность ^{24}Na и ^{235}U , период полураспада которых равен 15 ч и $7,1 \cdot 10^8$ лет.

15. ЭЛЕМЕНТЫ ДОЗИМЕТРИИ ИЗЛУЧЕНИЙ

Закон поглощения гамма-излучения веществом имеет вид

$$I = I_0 \exp(-\mu x), \quad (15.1)$$

где I_0 – интенсивность гамма-излучения на входе в поглощающий слой; I – интенсивность гамма-излучения после прохождения поглощающего слоя вещества толщиной x ; μ – линейный коэффициент поглощения, зависящий от природы вещества и от энергии гамма-фотона (рис.22). Слой половинного ослабления называется слоем, толщина $x_{1/2}$ которого такова, что интенсивность проходящих через него γ -лучей уменьшается в 2 раза: $x_{1/2} = (\ln 2) / \mu = 0,693 / \mu$.

Дозой излучения (поглощенной дозой излучения) называют отношение энергии ионизирующего излучения, переданной облучаемому веществу, к массе этого вещества: $D = \Delta W / m$. Мощностью дозы излучения (поглощенной дозы) называется

отношение дозы излучения ко времени Δt , в течение которого происходило поглощение: $\dot{D} = \Delta D / \Delta t$.

Экспозиционная доза фотонного излучения – это величина, равная отношению суммы электрических зарядов ΔQ всех ионов одного знака, созданных электронами, освобожденными в облученном воздухе при условии полного использования ионизирующей способности электронов, к массе m этого воздуха: $X = \Delta Q / \Delta m$. Мощностью экспозиционной дозы излучения называется физическая величина, равная

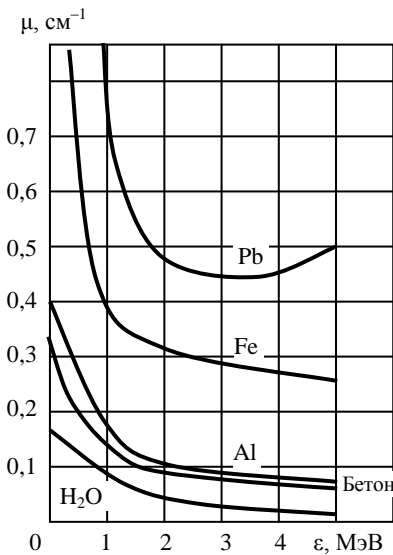


Рис.22

отношению экспозиционной дозы фотонного излучения к интервалу времени Δt , за которое получена эта доза: $\dot{X} = X / \Delta t$.

Вероятность протекания того или иного типа взаимодействия между падающим на мишень излучением и мишенью оценивается с помощью так называемого сечения взаимодействия (измеряется в барнах, 1 барн = 10^{-28} м²):

$$\sigma = nd\Delta N / N, \quad (15.2)$$

где ΔN – количество вступивших во взаимодействие падающих частиц; N – количество частиц, попавших на мишень; n – плотность ядер мишени; d – толщина мишени.

Выход реакции определяется долей падающих частиц, вступивших во взаимодействие: $w = \Delta N / N = \sigma n / S$, где S – площадь мишени.

Пример 1. На поверхность воды падает гамма-излучение с длиной волны 0,414 пм. На какой глубине интенсивность излучения уменьшится в 2 раза?

Решение. Решим уравнение (15.1) относительно x и получим $x = (1/\mu) \ln(I_0/I)$. Вычислим энергию гамма-фотонов: $\varepsilon = hc/\lambda = 4,8 \cdot 10^{-13}$ Дж = 3 МэВ. По графику зависимости μ от ε (рис.22) найдем $\mu = 0,04$ см⁻¹. Тогда $x = 17,3$ см.

Пример 2. Для регистрации медленных нейтронов широко используют счетчики, наполненные газообразным ³He. Счетчик представляет собой цилиндр диаметра $D = 25$ мм, наполненный газом при давлении 10 атм и температуре 300 К. В счетчике происходит реакция ³He(n, p)³H, сечение которой для регистрируемых нейтронов $\sigma = 5400$ барн. Рассчитать долю регистрируемых нейтронов, предполагая, что нейтроны в счетчике движутся вдоль его диаметра.

Решение. Пусть на 1 см² поверхности счетчика падает N нейтронов, из которых при прохождении слоя dx вступают в реакцию (т.е. регистрируются) $N\sigma ndx$, где n – концентрация атомов ³He в счетчике. При прохождении расстояния dx изменение потока нейтронов $dN = -N\sigma ndx$. Интегрируя это соотношение, получим

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\sigma n \int_0^D dx \text{ или } N = N_0 \exp(-\sigma n D).$$

Именно такое число нейтронов пойдет через счетчик, не зарегистрировавшись. Значит, зарегистрированная часть нейтронов $\eta = (N_0 - N) / N_0 = 1 - \exp(-\sigma n D)$. Так как $n = 2,7 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$, то $\sigma n D = 3,63$ и $\eta = 0,974$. Эта оценка показывает, что эффективность рассматриваемого счетчика близка к 100 %.

Задачи.

1. Космическое излучение на уровне моря на экваторе в объеме воздуха $V = 1 \text{ см}^3$ образует в среднем 24 пары ионов за время $t_1 = 10 \text{ с}$. Определить экспозиционную дозу X , получаемую человеком за время $t_2 = 1 \text{ год}$.

2. Какая доля всех молекул воздуха при нормальных условиях ионизируется рентгеновским излучением при экспозиционной дозе $X = 1000 \text{ Р}$?

3. Определить мощность экспозиционной дозы космического излучения на уровне моря на экваторе, если в 1 см^3 воздуха образуется в среднем 24 пары ионов за время 10 с.

4. Воздух при нормальных условиях облучается γ -излучением. Определить энергию W , поглощаемую воздухом массой 5 г при экспозиционной дозе излучения $X = 258 \text{ мкКл/кг}$. Считать, что в одном акте поглощается энергия 6,8 эВ.

5. Под действием космических лучей в объеме воздуха $V = 1 \text{ см}^3$ на уровне моря образуется в среднем 120 пар ионов за промежуток времени $\Delta t = 1 \text{ мин}$. Определить экспозиционную дозу излучения, полученную человеком за одни сутки.

6. Эффективная вместимость ионизационной камеры карманного дозиметра $V = 1 \text{ см}^3$, емкость $C = 2 \text{ пФ}$. Камера содержит воздух при нормальных условиях. Дозиметр был заряжен до потенциала $\phi_1 = 150 \text{ В}$. Под действием излучения потенциал понизился до $\phi_2 = 110 \text{ В}$. Определить экспозиционную дозу X излучения.

7. Определить дозу облучения D , полученную за время $\Delta t = 30 \text{ мин}$ человеком массой 80 кг, если энергия падающего излу-

чения $\varepsilon_\gamma = 2$ МэВ, а поток частиц 10^3 с^{-1} . Считать, что все падающее излучение поглощается человеком.

8. Сколько слоев половинного ослабления требуется, чтобы уменьшить интенсивность узкого пучка γ -излучения в 100 раз?

9. Интенсивность узкого пучка γ -лучей после прохождения через слой свинца толщиной 4 см уменьшилась в 8 раз. Вычислить энергию γ -квантов и толщину слоя половинного ослабления.

10. Узкий пучок γ -лучей ($\varepsilon_\gamma = 2,4$ МэВ) проходит через бетонную плиту толщиной $x = 1$ м. Какой толщины плита чугуна дает такое же ослабление данного пучка γ -лучей?

11. Какова толщина слоя половинного поглощения свинца для гамма-лучей, длина волны которых равна $0,115$ нм.

12. Чему равна энергия γ -фотонов, если при прохождении через слой железа толщиной 3 см интенсивность излучения ослабляется в 3 раза.

13. Во сколько раз изменится интенсивность γ -излучения ($\varepsilon_\gamma = 2$ МэВ) при прохождении экрана, состоящего из двух плит, свинцовой ($d_1 = 2$ см) и алюминиевой ($d_2 = 5$ см)?

14. Рассчитать толщину защитного слоя свинца, который ослабляет интенсивность излучения γ -фотонов с энергией 2 МэВ в 5 раз.

15. На какую глубину нужно погрузить в воду источник узкого пучка γ -излучения ($\varepsilon_\gamma = 1,6$ МэВ), чтобы интенсивность пучка, вышедшего из воды, была уменьшена в 1000 раз?

16. Через свинец проходит узкий пучок γ -излучения. При каком значении энергии γ -фотонов толщина слоя половинного ослабления $x_{1/2}$ будет максимальной? Определить максимальную толщину слоя половинного ослабления для свинца.

17. Чугунная плита уменьшает интенсивность пучка γ -излучения ($\varepsilon_\gamma = 2,8$ МэВ) в 10 раз. Во сколько раз уменьшит интенсивность этого пучка такая же свинцовая плита?

18. Определить для бетона толщину слоя половинного ослабления узкого пучка γ -излучения с энергией фотонов $\varepsilon_\gamma = 0,6$ МэВ.

19. Вычислить толщину слоя половинного ослабления $x_{1/2}$ параллельного пучка γ -излучения для воды, если линейный коэффициент ослабления $\mu = 0,047 \text{ см}^{-1}$.

20. Из реактора выходит поток нейтронов $j = 10^{14} \text{ с}^{-1} \text{ см}^{-2}$ и попадает на пластину толщиной 1 см, вызывая реакцию в мишени. Поперечное сечение реакции $\sigma = 10^{-27} \text{ см}^2$, плотность ядер мишени $n = 10^{22} \text{ см}^{-3}$. Какова скорость протекания реакции, т.е. количество актов взаимодействия, происходящих на единице поверхности мишени в единицу времени?

21. Узкий пучок тепловых нейтронов проходит через железную пластинку толщиной 0,5 см. Сечение поглощения для Fe $\sigma = 2,5$ барн. Определить относительную долю нейтронов, выбывающих из пучка в результате поглощения.

22. Узкий пучок нейтронов проходит через пластинку из железа, для которого сечение рассеяния $\sigma = 11$ барн. Определить относительную долю нейтронов, выбывающих из пучка в результате рассеяния, если толщина пластины $d = 0,5$ см.

23. Узкий пучок нейтронов ослабляется в 360 раз при прохождении пластинки кадмия толщиной $d = 0,5$ мм. Каково сечение взаимодействия нейтронов с ядрами Cd?

24. Во сколько раз уменьшится интенсивность узкого пучка тепловых нейтронов после прохождения слоя тяжелой воды толщиной $d = 5,0$ см? Сечение взаимодействия ядер дейтерия и кислорода соответственно $\sigma_1 = 7,0$ барн и $\sigma_2 = 4,2$ барн.

25. Золотую фольгу массой $m = 0,2$ г облучали в течение 6 ч потоком тепловых нейтронов, падающих по нормали к поверхности. Через 12 ч после окончания облучения оказалось, что активность фольги $A = 1,9 \cdot 10^7$ Бк. Найти плотность потока нейтронов, если сечение образования ядра радиоизотопа $\sigma = 96$ барн, а период полураспада $T = 2,7$ сут.

16. ДЕФЕКТ МАСС И ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ АТОМНЫХ ЯДЕР. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

Дефект масс ядра

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}} = Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m_{\text{а}},$$

где m_{H} , m_p , m_n , $m_{\text{а}}$ и $m_{\text{я}}$ – масса атома водорода, протона, нейтрона, атома и ядра соответственно; Z и A – зарядовое и массовое числа.

Энергия связи ядра

$$E_{\text{св}} = c^2 \Delta m. \quad (16.1)$$

Удельная энергия связи – энергия связи, приходящаяся на один нуклон:

$$\varepsilon_{\text{св}} = E_{\text{св}}/A.$$

Энергия ядерной реакции

$$Q = c^2 (m_1 + m_2 - \sum m'_i) = c^2 \Delta m, \quad (16.2)$$

где m_1 и m_2 – массы покоя частиц, вступающих в реакцию; $\sum m'_i$ – сумма масс покоя частиц, образовавшихся в результате реакции; Δm – дефект массы реакции.

Пример 1. Вычислить дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ядра $^{16}_8\text{O}$.

Решение. Для ядра $^{16}_8\text{O}$ $Z = 8$ и $A = 16$. Дефект массы ядра $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}$. Из справочных таблиц находим $m_p = 1,00783$ а.е.м.; $m_n = 1,00867$ а.е.м.; $m_{^{16}_8\text{O}} = 15,99492$ а.е.м. Подставляя числовые данные, получим $\Delta m = 0,13708$ а.е.м. Энергия связи определяется по формуле (16.1). Если дефект массы выражать в атомных единицах массы, а энергию связи – в мегаэлектрон-вольтах, то формула принимает вид $E_{\text{св}} = 931 \Delta m$. Подставляя числовые значения, получим $E_{\text{св}} = 128$ МэВ. Удельная энергия связи $\varepsilon_{\text{св}} = E_{\text{св}}/A = 8$ МэВ.

Пример 2. Вычислить энергию ядерной реакции ${}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^8_4\text{Be}$. Выделяется или поглощается энергия при этой реакции?

Решение. При вычислении энергии ядерной реакции по формуле (16.2) можно использовать вместо масс ядер массы соответствующих атомов. Из справочных данных находим $m_{{}^4_2\text{He}} = 4,00260$ а.е.м.; $m_p = 1,00783$ а.е.м.; $m_{{}^7_3\text{Li}} = 7,01601$ а.е.м. Дефект массы реакции $\Delta m = 2m_{{}^4_2\text{He}} - m_p - m_{{}^7_3\text{Li}} = -0,01864$ а.е.м. Тогда $Q = -17,3$ МэВ. Отрицательный знак говорит о том, что энергия в результате реакции поглощается.

Пример 3. Найти энергию реакции ${}^9_4\text{Be} + {}^1_1\text{H} = {}^4_2\text{He} + {}^6_3\text{Li}$, если известно, что кинетическая энергия протона 5,45 МэВ, ядра гелия 4 МэВ и что ядро гелия вылетело под углом 90° к направлению движения протона. Ядро-мишень ${}^9_4\text{Be}$ неподвижно.

Решение. Энергия реакции есть разность между суммой кинетических энергий ядер-продуктов реакции и кинетической энергии налетающего ядра: $Q = T_{\text{Li}} + T_{\text{He}} + T_{\text{H}}$. В этом выражении неизвестна кинетическая энергия лития. Для ее определения воспользуемся законом сохранения импульса $p_{\text{H}} = p_{\text{He}} + p_{\text{Li}}$. Векторы p_{H} и p_{He} по условию взаимно перпендикулярны и, следовательно, вместе с вектором p_{Li} образуют прямоугольный треугольник. Поэтому $p_{\text{Li}}^2 = p_{\text{He}}^2 + p_{\text{H}}^2$. Выразим импульсы ядер через их кинетические энергии. Так как кинетические энергии ядер, по условию много меньше энергий покоя этих ядер, то можно воспользоваться классической формулой $p^2 = 2mT$. После преобразований получим $m_{\text{Li}}T_{\text{Li}} = m_{\text{He}}T_{\text{He}} + m_{\text{H}}T_{\text{H}}$, откуда $T_{\text{Li}} = 3,58$ МэВ и $Q = 2,13$ МэВ.

Задачи.

1. Оценить разность масс Δm атома водорода в состояниях 2P и 1S.
2. Воспользовавшись таблицей масс изотопов, определить энергию связи (в мегаэлектронвольтах) на один нуклон для ядер ${}^4_2\text{He}$; ${}^{20}_10\text{Ne}$; ${}^{207}_{82}\text{Pb}$ и ${}^{235}_{92}\text{U}$.

3. Вычислить дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи дейтерия.
4. Каковы дефект массы, энергия связи и удельная энергия связи α -частицы?
5. Вычислить дефект массы, энергию связи и удельную энергию связи ${}_{5}^{11}\text{B}$; ${}_{20}^{48}\text{Ca}$; ${}_{92}^{238}\text{U}$ и ${}_{6}^{12}\text{C}$.
6. Определить минимальную энергию (в мегаэлектронвольтах), необходимую для разделения ядра ${}^{12}\text{C}$ на три α -частицы.
7. Какую энергию нужно затратить для отрыва нейтрона от ${}_{11}^{23}\text{Na}$?
8. Найти энергию связи ядер ${}_{1}^3\text{H}$ и ${}_{2}^3\text{He}$. Какое из этих ядер наиболее устойчиво?
9. Сравнить удельную энергию связи ядер ${}_{3}^7\text{Li}$ и ${}_{13}^{27}\text{Al}$. Какое из этих ядер наиболее устойчиво?
10. Какое количество термоядерной энергии содержится в 1 л обычной воды?
11. Определить энергию, освобождающуюся в водородной бомбе при синтезе 1 кг гелия.
12. В процессе термоядерного синтеза $5 \cdot 10^4$ кг водорода превращаются в 49644 кг гелия. Сколько энергии выделяется при этом?
13. При обстреле ядер фтора ${}_{9}^{19}\text{F}$ протонами образуется кислород ${}_{8}^{16}\text{O}$. Сколько энергии освобождается при этой реакции и какие еще ядра образуются?
14. При использовании дейтерия, содержащегося в 1 л обычной воды, в реакции термоядерного синтеза выделяется столько же энергии, сколько получается при сжигании 350 л бензина. Подсчитать эту энергию.
15. Какую массу воды, взятой при $t = 0$ °С, можно довести до кипения, используя энергию термоядерного синтеза гелия из дейтерия и трития, если КПД преобразования энергии 10 %? Масса синтезированного гелия 1 г.

16. Определить энергию, выделяющуюся в акте синтеза дейтерия $p + n \rightarrow {}^2\text{H}$.

17. При делении одного ядра ${}^{235}_{92}\text{U}$ на два осколка выделяется около 200 МэВ энергии. Какое количество энергии освобождается при «сжигании» в ядерном реакторе 11 г этого изотопа? Какое количество каменного угля надо сжечь для получения такого же количества энергии?

18. Вычислить энергию ядерной реакции ${}_0^1n + {}_5^{10}\text{B} \rightarrow {}_3^7\text{Li} + {}_2^4\text{He}$ и выяснить, выделяется или поглощается энергия в реакции.

19. Определить энергию ядерной реакции ${}_2^4\text{He} + {}_7^{14}\text{N} \rightarrow {}_8^{17}\text{O} + {}_1^1p$, а также выяснить, выделяется или поглощается энергия в этой реакции.

20. При бомбардировке алюминия ${}_{13}^{27}\text{Al}$ α -частицами образуется фосфор ${}_{15}^{30}\text{P}$. Записать эту реакцию и подсчитать выделенную энергию.

21. Определить максимальную кинетическую энергию электрона, испускаемого при распаде нейтрона.

22. Найти минимальную энергию и частоту гамма-кванта, способного «разбить» ядро дейтерия на протон и нейтрон.

23. Какую минимальную кинетическую энергию должна иметь α -частица для осуществления ядерной реакции ${}_3^7\text{Li} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_5^{10}\text{B} + {}_0^1n$?

24. В результате взаимодействия ядер дейтерия и трития образуется ядро гелия и нейтрон: ${}_1^2\text{H} + {}_1^3\text{H} \rightarrow {}_2^4\text{He} + {}_0^1n$. Какую часть выделяющейся энергии уносит с собой нейтрон? Кинетической энергией дейтерия и трития до реакции можно пренебречь.

25. Мишень ${}_3^7\text{Li}$ подвергают бомбардировке нейтронами. Какова кинетическая энергия этих нейтронов, если в направлении движения нейтронов вылетают α -частицы с кинетической энергией 3,0 МэВ? Энергией испускаемых γ -квантов можно пренебречь.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Основные физические постоянные

Физическая величина	Численное значение
Скорость света в вакууме	$c = 2,9979250(10) \cdot 10^8$ м/с
Гравитационная постоянная	$G = 6,672 \cdot 10^{-11}$ м ³ /(кг·с ²)
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Стандартный молярный объем газа	$V_m = 22,41$ л/моль
Постоянная Больцмана	$k = 1,3807 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Молярная газовая постоянная	$R = 8,314$ Дж/(К·моль)
Элементарный заряд	$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона	$m_e = 0,911 \cdot 10^{-30}$ кг
Удельный заряд электрона	$e/m_e = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Масса протона	$m_p = 1,672 \cdot 10^{-27}$ кг
Удельный заряд протона	$e/m_p = 0,959 \cdot 10^8$ Кл/кг
Постоянная Планка	$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $\hbar = h/2\pi = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·с = $0,659 \cdot 10^{-15}$ эВ·с
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² ·К ⁴)
Постоянная закона смещения Вина	$b = 0,29$ см·К
Постоянная Ридберга	$R = 3,29 \cdot 10^{15}$ с ⁻¹ ; $R' = 1,10 \cdot 10^7$ м ⁻¹
Первый боровский радиус	$a = 0,529 \cdot 10^{-10}$ м
Энергия связи электрона в Н ₂	$E = 13,56$ эВ
Классический радиус электрона	$r = 2,82 \cdot 10^{-15}$ м
Магнетон Бора	$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Ядерный магнетон	$\mu_N = 5,05 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл
Магнитный момент протона	$\mu_p = 2,7928 \mu_N$
Магнитный момент нейтрона	$\mu_n = -1,913 \mu_N$
Атомная единица массы	1 а.е.м. = $1,660 \cdot 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф·м ⁻¹ ; $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м; $\mu_0/(4\pi) = 10^{-7}$ Гн/м

Физические параметры чистых металлов ($t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$)

Металл	Плотность, Mг/м^3	Температура плавления, $^{\circ}\text{C}$	Температурный коэффициент линейного расширения α , $10^6\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$	Удельное сопротивление, $\text{мкОм}\cdot\text{м}$	Температурный коэффициент удельного сопротивления α , $10^6\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$	Работа выхода, эВ	Абсолютная удельная термоЭДС, $\text{мкВ}\cdot\text{K}^{-1}$	Период решетки, нм
Алюминий	2,7	660	21,0	0,027	4,1	4,25	-1,3	0,404
Вольфрам	19,3	3400	4,4	0,055	5,0	4,54	+2,0	0,316
Железо	7,87	1540	10,7	0,097	6,3	4,31	+16,6	0,286
Золото	19,3	1063	14,0	0,023	3,9	4,30	+1,5	0,407
Медь	8,92	1083	16,6	0,017	4,3	4,40	+1,8	0,361
Молибден	10,2	2620	5,3	0,050	4,3	1,30	+6,3	0,314
Натрий	0,97	98	72,0	0,042	5,5	2,35	-8,7	0,428
Никель	8,96	1453	13,2	0,068	6,7	4,50	-19,3	0,352
Олово*	7,29	232	23,0	0,113	4,5	4,38	-1,1	$a = 0,583$ $c = 0,318$
Платина	21,45	1770	9,5	0,098	3,9	5,32	-5,1	0,392
Свинец	11,34	327	28,3	0,190	4,2	4,00	-1,2	0,494
Серебро	10,49	961	18,6	0,015	4,1	4,30	+1,5	0,408
Тантал	16,6	3000	6,6	0,124	3,8	4,12	-2,5	0,330
Хром	7,19	1900	6,2	0,130	2,4	4,58	+18,0	0,288
Цинк*	7,14	419	30,0	0,059	4,1	4,25	+1,5	$a = 0,266$ $c = 0,494$

* Гексагональная структура.

Плотность некоторых веществ

Твердые вещества	ρ , г/см ³	Жидкости	ρ , г/см ³	Газы*	ρ , кг/м ³
Алмаз	3,5	Бензол	0,88	Азот	1,25
Графит	1,6	Вода	1,00	Аммиак	0,77
Кадмий	8,65	Керосин	0,80	Водород	0,09
Кобальт	8,9	Ртуть	13,6	Воздух	1,293
Лед	0,916	Спирт	0,79	Кислород	1,43
Титан	4,5	Тяжелая вода	1,10	Метан	0,72
Уран	19,0			Углекислый газ	1,98
				Хлор	3,21

* При нормальных условиях.

Константы двухатомных молекул

Молекула	Межъядерное расстояние d , 10 ⁻⁸ см	Частота колебаний ω , 10 ¹⁴ с ⁻¹	Молекула	Межъядерное расстояние d , 10 ⁻⁸ см	Частота колебаний ω , 10 ¹⁴ с ⁻¹
H ₂	0,741	8,279	HF	0,917	7,796
N ₂	1,094	4,445	HCl	1,275	5,632
O ₂	1,207	2,977	HBr	1,413	4,991
F ₂	1,282	2,147	HI	1,604	4,350
S ₂	1,889	1,367	CO	1,128	4,088
Cl ₂	1,988	1,064	NO	1,150	3,590
Br ₂	2,283	0,609	OH	0,971	7,035
I ₂	2,666	0,404			

Физические параметры полупроводников ($T = 300 \text{ K}$)

Полупроводник	Период решетки	Плотность, Mг/м^3	Температура плавления, $^{\circ}\text{C}$	Температурный коэффициент линейного расширения $\alpha \cdot 10^6, \text{K}^{-1}$	Ширина запрещенной зоны E_g , эВ	dE_g/dT , эВ/К	Подвижность μ , $\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$		Низкочастотная диэлектрическая проницаемость
							электронов	дырок	
Ge	0,565	5,43	937	5,8	0,66	0,39	0,39	0,19	16,0
Si	0,542	2,33	1451	2,3	1,12	0,28	0,14	0,05	12,5
GaAs	0,565	5,32	1238	5,4	1,43	0,40	0,95	0,045	13,1
InSb	0,648	5,78	525	4,9	0,18	0,30	7,8	0,075	17,7
GaSb	0,610	5,65	710	6,1	0,72	0,36	0,4	0,14	15,7
InAs	0,606	5,67	942	4,7	0,36	0,35	3,3	0,046	14,6
GaP	0,545	4,07	1467	4,7	2,26	0,47	0,019	0,012	11,1
ZnS	0,541	4,09	1020**	–	3,67	0,53	–	–	5,2
ZnS*	$a = 0,382$ $c = 0,626$	4,10	1780	6,2	3,74	0,38	0,014	0,0005	5,2
GaN*	$a = 0,319$ $c = 0,518$	6,11	1700	5,7	3,40	0,39	0,03	–	12,2

* Структура вюрцита.

** Температура фазового перехода.

Масса некоторых изотопов и нейтральных атомов

Элемент	Изотоп	Масса, а.е.м.	Элемент	Изотоп	Масса, а.е.м.
Водород	${}^1_1\text{H}$	1,00783	Алюминий	${}^{27}_{12}\text{Al}$	26,98135
	${}^2_1\text{H}$	2,01410	Фосфор	${}^{33}_{15}\text{P}$	32,97174
	${}^3_1\text{H}$	3,01605	Сера	${}^{33}_{16}\text{S}$	32,97146
Гелий	${}^3_2\text{He}$	3,01605	Кремний	${}^{26}_{17}\text{Si}$	26,81535
	${}^4_2\text{He}$	4,00260	Медь	${}^{64}_{19}\text{Cu}$	63,5400
Литий	${}^7_3\text{Li}$	7,01601	Кальций	${}^{48}_{20}\text{Ca}$	47,95236
Бериллий	${}^7_4\text{Be}$	7,01169	Железо	${}^{56}_{26}\text{Fe}$	55,94700
Бор	${}^{10}_5\text{B}$	10,01294	Серебро	${}^{108}_{47}\text{Ag}$	107,869
	${}^{11}_5\text{B}$	11,00931	Барий	${}^{137}_{56}\text{Ba}$	136,9058
Азот	${}^{14}_7\text{N}$	14,00307	Вольфрам	${}^{184}_{74}\text{W}$	183,8500
Кислород	${}^{16}_8\text{O}$	15,99492	Радий	${}^{226}_{88}\text{Ra}$	226,0254
	${}^{17}_8\text{O}$	16,99913	Торий	${}^{232}_{90}\text{Th}$	232,038
Неон	${}^{20}_{10}\text{Ne}$	19,99244	Свинец	${}^{207}_{92}\text{Pb}$	206,9759
Магний	${}^{24}_{12}\text{Mg}$	23,98504	Уран	${}^{238}_{92}\text{U}$	238,0508
	${}^{27}_{12}\text{Mg}$	26,98436			

Период полураспада и энергия некоторых радиоактивных изотопов

Z	Сим-вол	A	$T_{1/2}$	W, МэВ			Z	Сим-вол	A	$T_{1/2}$	W, МэВ		
				β^-	β^+	γ					β^-	β^+	γ
1	H	3	12,3 г	0,018			39	Y	90	64 ч		2,27	
6	C	14	5730 г	0,158			47	Ag	111	7,5 сут		1,05	0,34
7	N	13	10 мин		1,19		51	Sb	124	60 сут		2,3	0,60
8	O	15	124 с		1,73							0,62	1,69
11	Na	22	2,6 г		0,54	1,274						0,2	2,09
		24	15 ч	1,39		1,368; 2,753	53	I	131	8,08 сут		0,61	0,364
15	P	32	14,3 сут	1,71								0,33	0,639
16	S	35	87 сут	0,167			54	Xe	133	5,3 сут		0,34	0,081
17	Cl	36	$3 \cdot 10^5$ г	0,71			55	Cs	137	30 г		0,52	0,662
		38	38 мин	4,8		2,2; 1,6	58	Ce	144	284 сут		0,32	0,134...
19	K	42	12,4 ч	3,55		1,52						0,18	
20	Ca	45	164 сут	0,254			61	Pm	147	2,5 г		0,22	
21	Sc	46	84 сут	0,36		1,12; 0,89	69	Tm	170	125 сут		0,97	0,084
24	Cr	51	27,8 сут			0,32						0,88	
23	V	48	16,1 сут		0,69	1,3; 0,99	74	W	185	74 сут		0,43	0,125
25	Mn	52	5,7 сут		0,575	1,434	77	Ir	192	74 сут		0,67	0,316
		54	314 сут			0,938						0,54	0,468

Окончание таблицы

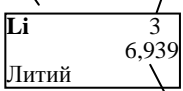
Z	Сим-вол	A	$T_{1/2}$	W, МэВ			Z	Сим-вол	A	$T_{1/2}$	W, МэВ		
				β^-	β^+	γ					β^-	β^+	γ
26	Fe	59	45 сут	0,46		0,744					0,24		
				0,27		0,835	79	Au	198	2,7 сут		0,96	0,412
27	Co	60	5,26 г	0,31		1,29	84	Po	210	138,4 сут	5,31		0,80
29	Cu	64	12,8 ч	0,57	0,66	1,10	86	Rn	222	3,83 сут	5,49		0,51
30	Zn	65	246 сут		0,326	1,333; 1,173	88	Ra	226	1601 г	4,78		0,186
33	As	76	26,8 сут	2,97							4,60		
				2,41		1,34	90	Th	232	$1,41 \cdot 10^{10}$ г	4,01		0,059
				1,76		1,12	91	Pa	231	$3,25 \cdot 10^4$ г	5,05		0,36
		77	38,8 сут	0,68		0,559			233	27,4 сут		0,26	0,42
35	Br	82	35,5 ч	0,44		0,657						0,15	
						0,52; 0,25	92	U	234	$2,5 \cdot 10^5$ г	4,77		0,12
						1,47; 1,31					4,72		0,05
						1,04; 0,83			235	$7,1 \cdot 10^8$ г	4,35		0,18
						0,70					4,56		0,14
						0,61; 0,55			238	$4,5 \cdot 10^9$ г	4,19		0,048
36	Kr	85	10,6 г	0,67		0,51	93	Np	239	23 сут	0,72...		0,33

Периодическая система химических

Период	Ряд	Группы				
		I	II	III	IV	V
I	1	H 1 1,00797 Водород				
II	2	Li 3 6,939 Литий	Be 4 9,0122 Бериллий	B 5 10,811 Бор	C 6 12,01115 Углерод	N 7 14,0067 Азот
III	3	Na 11 22,9898 Натрий	Mg 12 24,305 Магний	Al 13 26,9815 Алюминий	Si 14 28,086 Кремний	P 15 30,9738 Фосфор
IV	4	K 19 39,102 Калий	Ca 20 40,08 Кальций	21 Sc 44,956 Скандий	22 Ti 47,90 Титан	23 V 50,942 Ванадий
	5	29 Cu 63,546 Медь	30 Zn 65,37 Цинк	Ga 31 69,72 Галлий	Ge 15 75,59 Германий	As 33 74,9216 Мышьяк
V	6	Rb 37 85,47 Рубидий	Sr 38 87,62 Стронций	39 Y 88,905 Иттрий	40 Zr 91,22 Цирконий	41 Nb 92,906 Ниобий
	7	47 Ag 107,868 Серебро	48 Cd 112,40 Кадмий	In 49 114,82 Индий	Sn 50 118,69 Олово	Sb 51 121,75 Сурьма
VI	8	Cs 55 132,905 Цезий	Ba 56 137,34 Барий	57 La* 138,91 Лантан	72 Hf 178,49 Гафний	73 Ta 180,948 Тантал
	9	79 Au 196,967 Золото	80 Hg 200,59 Ртуть	Tl 81 204,37 Таллий	Pb 82 207,19 Свинец	Bi 83 208,980 Висмут
VII	10	Fr 87 [223] Франций	Ra 88 [226] Радий	89 Ac** [227] Актиний	104 Rf [261] Резерфордий	105 Db [262] Дубний

*	58 Ce 140,12 Церий	59 Pr 140,907 Празеодим	60 Nd 144,24 Неодим	61 Pm [147] Прометий	62 Sm 150,35 Самарий	63 Eu 151,96 Европий	64 Gd 157,25 Гадолиний
**	90 Th 232,038 Торий	91 Pa [231] Протактиний	92 U 238,03 Уран	93 Np [237] Нептуний	94 Pu [244] Плутоний	95 Am [243] Америций	96 Cm [247] Кюрий

элементов Д.И.Менделеева

элементов					
VI	VII		VIII		
		He 2 4,0026 Гелий	Обозначение элемента Атомный номер 		
O 8 15,9994 Кислород	F 9 18,9984 Фтор	Ne 10 20,173 Неон			
S 16 32,064 Сера	Cl 17 35,453 Хлор	Ar 18 39,948 Аргон			
24 Cr 51,996 Хром	25 Mn 54,9380 Марганец	26 Fe 55,847 Железо	27 Co 58,9330 Кобальт	28 Ni 58,71 Никель	
Se 34 78,96 Селен	Br 35 79,904 Бром	Kr 36 83,80 Криптон			
42 Mo 95,94 Молибден	43 Tc [99] Технеций	44 Ru 101,97 Рутений	45 Rh 102,905 Родий	46 Pd 106,4 Палладий	
Te 52 127,60 Теллур	I 53 126,9044 Йод	Xe 54 131,30 Ксенон			
74 W 183,85 Вольфрам	75 Re 186,2 Рений	76 Os 190,2 Осмий	77 Ir 192,2 Иридий	78 Pt 195,09 Платина	
Po 84 [210] Полоний	At 85 [210] Астат	Rn 86 [222] Радон			
106 Sg [263] Сиборгий	107 Bh [262] Борий	108 Hs [265] Хассий	109 Mt [266] Мейтнерий		

65 Tb 158,924 Тербий	66 Dy 162,50 Диспрозий	67 Ho 144,24 Гольмий	68 Er [147] Эрбий	69 Tm 150,35 Тулий	70 Yb 151,96 Иттербий	71 Lu 157,25 Лютеций
97 Bk [247] Берклий	98 Cf [252] Калифорний	99 Es [254] Эйнштейний	100 Fm [257] Фермий	101 Md [257] Менделеевий	102 No [255] Нобелий	103 Lr [256] Лоуренсий

Некоторые математические формулы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \sin \alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha};$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta; \quad \cos \alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta; \quad \sin(\alpha/2) = \sqrt{(1 - \cos \alpha)/2};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; \quad \cos(\alpha/2) = \sqrt{(1 + \cos \alpha)/2};$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin[(\alpha + \beta)/2] \cos[(\alpha - \beta)/2]; \quad \exp(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha;$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos[(\alpha + \beta)/2] \sin[(\alpha - \beta)/2];$$

$$\sin \alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/(2i);$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos[(\alpha + \beta)/2] \cos[(\alpha - \beta)/2];$$

$$\cos \alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2;$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin[(\alpha + \beta)/2] \sin[(\alpha - \beta)/2];$$

$$\int x^n dx = (x^{n+1})/(n+1) + C, \quad n \neq -1; \quad \int dx/x = \ln x + C;$$

$$\int a^x dx = a^x / \ln a + C; \quad \text{если } a = e, \text{ то } \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \sqrt{\pi}/2, & n = 1/2, \\ 1, & n = 1, \\ 2, & n = 2; \end{cases} \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-x^2} dx = \begin{cases} \sqrt{\pi}/2, & n = 0, \\ 1/2, & n = 1, \\ \sqrt{\pi}/4, & n = 2, \\ 1/2, & n = 3; \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 2,31, & n=1/2, \\ \pi^2/6, & n=1, \\ 2,405, & n=2, \\ \pi^4/15, & n=3, \\ 24,9, & n=4; \end{cases} \quad \int_0^{\alpha} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 0,225, & \alpha=1, \\ 1,18, & \alpha=2, \\ 2,56, & \alpha=3, \\ 4,91, & \alpha=5, \\ 6,43, & \alpha=10; \end{cases}$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx; \quad \int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right);$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1).$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Модель атома Бора	3
2. Волны де Бройля.....	7
3. Соотношение неопределенностей Гейзенберга	10
4. Введение в квантовую механику. Уравнение Шредингера	13
5. Потенциальная яма и потенциальный барьер	22
6. Строение атома	30
7. Рентгеновские спектры атомов	38
8. Спектры молекул.....	43
9. Статистика квантовых частиц. Электроны в металле	51
10. Фононы и теплоемкость.....	59
11. Полупроводники и диэлектрики	64
12. Контактные явления	73
13. Строение атомных ядер.....	85
14. Радиоактивность	88
15. Элементы дозиметрии излучений	92
16. Дефект масс и энергия связи атомных ядер. Ядерные реакции.....	97
17. Приложения	101