

# РГЗ по теме "Дифференциальные уравнения"

## Задача 3.

### Задание:

По условию задачи, используя физические или геометрические законы, составить ДУ и задачу Коши; найти общее и частное решения; выполнить проверку частного решения; построить его график (если параметры задачи заданы в буквенном виде, для построения графика присвоить им какие-нибудь разумные значения); дать ответ на вопрос задачи.

### Пример решения задачи.

В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?

**Решение.** Пусть  $m(t)$  — количество соли в баке в момент времени  $t$ . Тогда концентрация соли  $k(t) = \frac{m(t)}{V}$ , где  $V$  — объем бака. За малый промежуток времени  $\Delta t$  в бак добавится  $v\Delta t$  л чистой воды ( $v$  — скорость подачи воды). За это же время бак потеряет такое же количество раствора, в котором будет  $k(t)v\Delta t$  кг соли. Таким образом, в момент времени  $t + \Delta t$  соли в баке будет

$$m(t + \Delta t) = m(t) - k(t)v\Delta t \Leftrightarrow m(t + \Delta t) - m(t) = -k(t)v\Delta t \Leftrightarrow \Delta m = -\frac{m(t)}{V}v\Delta t.$$

Разделив последнее соотношение на  $\Delta t$  и перейдя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$m'(t) = -\frac{m(t)}{V}v$$

— ДУ с разделяющимися переменными относительно функции  $m(t)$ . Решая его, получим

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m(t)}{V}v \Leftrightarrow \frac{dm}{m} = -\frac{v}{V}dt \Leftrightarrow \int \frac{dm}{m} = -\frac{v}{V} \int dt \Leftrightarrow \ln|m| = -\frac{v}{V}t + \ln C,$$

откуда:  $m = Ce^{-\frac{v}{V}t}$  — общее решение ДУ.

Выполним его проверку:

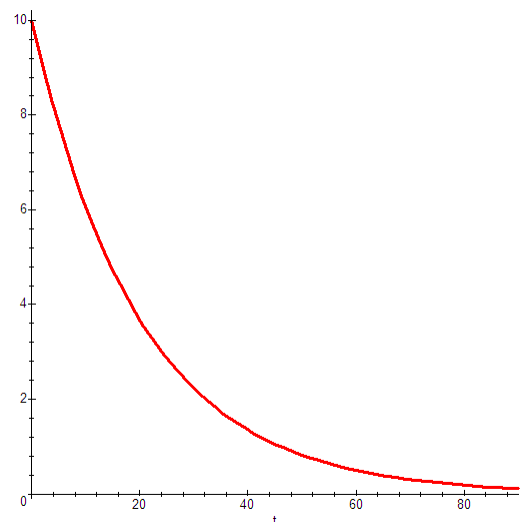
$$m' = -\frac{v}{V}Ce^{-\frac{v}{V}t} = -m \cdot \frac{v}{V}, \text{ ч.т.д.}$$

Учтем данные из условия задачи:  $V = 100$  л,  $v = 5$  л/мин, тогда  $m = Ce^{-\frac{1}{20}t}$ , где время измеряется в минутах.

Решим задачу Коши:  $m_0 = m(0) = 10$  кг  
 $\Rightarrow 10 = Ce^{-\frac{1}{20} \cdot 0} \Rightarrow C = 10.$

Таким образом, частное решение ДУ (решение задачи):  $m = 10e^{-\frac{1}{20}t}$ .

Через час в баке останется  $m(60) = 10e^{-3} \approx 0,498$  кг соли.



## Варианты.

46. Найти кривые, у которых радиус кривизны обратно пропорционален косинусу угла между касательной и осью абсцисс.
47. Найти форму равновесия однородной нерастяжимой нити (с закрепленными концами) под действием ее веса.
48. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянного тока, дающего напряжение  $V$ , сопротивления  $R$ , самоиндукции  $L$  и выключателя, который включается при  $t = 0$ . Найти зависимость силы тока от времени (при  $t > 0$ ).
49. В исследованном куске горной породы содержится 200 мг урана и 20 мг уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за  $4.5 \cdot 10^9$  лет и что при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. Определить возраст горной породы. Считать, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебречь наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом.

Примечание. Использовать закон радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент.

50. В производственном помещении работают 2 вентилятора, каждый из которых в минуту доставляет по  $60 \text{ м}^3$  чистого воздуха, содержащего 0,01% углекислоты. Объем помещения  $1600 \text{ м}^3$ , начальное содержание углекислоты составляет 0,2%. В помещении находится 120 приборов, в каждом из которых идет химическая реакция, в результате которой выпускается  $0,1 \text{ м}^3$  воздуха в минуту с 5% углекислоты. Определить наличие углекислоты в  $1 \text{ м}^3$  воздуха после двухчасовой работы.
51. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении 1:2.
52. В сосуд, содержащий 1 кг воды при температуре  $20^\circ$ , опущен алюминиевый предмет с массой 0,5 кг, удельной теплоемкостью 0,2 и температурой  $75^\circ$ . Через минуту вода нагрелась на  $2^\circ$ . Когда температура воды и предмета будет отличаться одна от другой на  $1^\circ$ ? Потерями тепла на нагревание сосуда и прочими пренебречь.

Примечание. Принять, что скорость остывания (или нагревания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

53. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?

Примечание. Использовать закон радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент.

54. Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 минут. За какое время вытечет вся вода?

Примечание. Принять, что жидкость из сосуда вытекает со скоростью, равной  $0,6\sqrt{2gh}$ , где  $g = 10 \text{ м/сек}^2$  — ускорение силы тяжести,  $h$  — высота уровня воды над отверстием.

55. На сколько увеличится длина  $L$  эластичного шнура под действием его веса  $P$ , если подвесить шнур за один конец, а к нижнему концу подвесить груз  $m$ .

Примечание. Использовать закон Гука.

56. Пуля входит в доску толщиной  $h$  со скоростью  $v_0$ , а вылетает из доски со скоростью  $v_1$ . Принимая, что сила сопротивления доски движению пули пропорциональна квадрату скорости движения, найти, сколько времени продолжалось движение пули через доску.
57. В цилиндрическом сосуде объемом  $V_0$  воздух адиабатически (т. е. без обмена тепла с окружающей средой) сжимается до объема  $V_1$ . Вычислить работу сжатия. Замечание.

Примечание. Использовать закон Пуассона:  $p = p_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^k$ , где  $k$  — постоянная для данного газа.

58. Ускорение локомотива прямо пропорционально силе тяги  $F$  и обратно пропорционально массе поезда  $m$ . Начальная скорость локомотива равна  $v_0$ , сила тяги  $F = b - kv$ , где  $v$  — скорость,  $b, k$  — постоянные величины. Найти силу тяги локомотива по истечении времени  $t$ .
59. Труба газопровода имеет диаметр 20 см и защищена изоляцией толщиной 10 см. Величина коэффициента изоляции теплопроводности  $k = 1,0001$ . Температура трубы  $30^\circ\text{C}$ , температура внешнего покрова  $-20^\circ\text{C}$ . Найти распределение температуры внутри изоляции.
60. За какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметра  $D$ , вытечет через круглое отверстие в дне чаши диаметром  $d$ ?

Примечание. Принять, что жидкость из сосуда вытекает со скоростью, равной  $0,6\sqrt{2gh}$ , где  $g = 10 \text{ м/сек}^2$  — ускорение силы тяжести,  $h$  — высота уровня воды над отверстием.

61. Найти кривые, касательные к которым в любой точке образуют равные углы с полярным радиусом и полярной осью.
62. Кусок металла с температурой  $20^\circ\text{C}$  помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от  $30^\circ\text{C}$  до  $250^\circ\text{C}$ . Найти температуру металла через час, если через 10 мин его температура составила  $60^\circ\text{C}$ .

Примечание. Принять, что скорость остывания (или нагревания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

63. В электрическую цепь последовательно включены источник тока, напряжение которого меняется по закону  $E = V \sin \omega t$ , сопротивление  $R$  и самоиндукция  $L$ . Найти силу тока в цепи.