

## 1. СОСТАВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ

**Задание.** Найти опорные реакции и реакции промежуточных шарниров составной конструкции, которая испытывает действие внешней нагрузки (рис. 1.1).

**Пример.** Дано  $P_1 = 4 \text{ кН}$ ,  $P_2 = 12 \text{ кН}$ ,  $q = 3 \text{ кН/м}$ ,  $M = 36 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Найти реакции заделки  $A$  и шарниров  $C$ ,  $B$  и  $D$ . Геометрические размеры указаны в метрах.

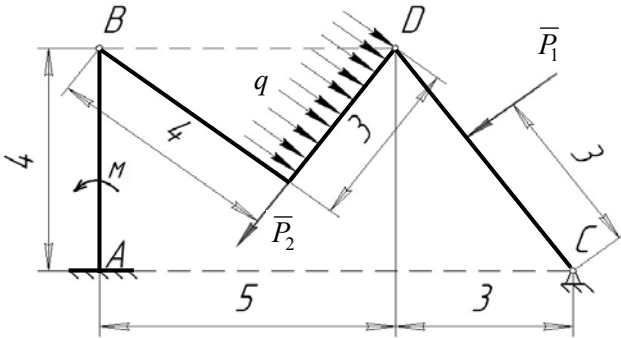


Рис. 1.1

**Решение.** Рассматриваемая задача является статически неопределимой, так как число неизвестных реакций в опорах  $A$  и  $C$  – 5, а число уравнений равновесия произвольной плоской системы сил – 3. Для решения задачи разобьём составную конструкцию на отдельные тела:  $AB$ ,  $BD$  и  $DC$  (рис. 1.1.1). К каждому из тел приложены задаваемые (активные) силы и реакции связей.

Так как направления составляющих реакций заранее не известны, покажем их направленными произвольно для каждой части конструкции. Истинные направления реакций определяются по знаку ответа: знак плюс укажет на то, что истинные их направления соответствуют показанным на рисунке. Общее количество неизвестных реакций в задаче – 13 ( $\bar{x}_A, \bar{y}_A, M_A, \bar{x}_{B_1}, \bar{x}_{B_2}, \bar{y}_{B_1}, \bar{y}_{B_2}, \bar{x}_{D_1}, \bar{x}_{D_2}, \bar{y}_{D_1}, \bar{y}_{D_2}, \bar{x}_C, \bar{y}_C$ ).

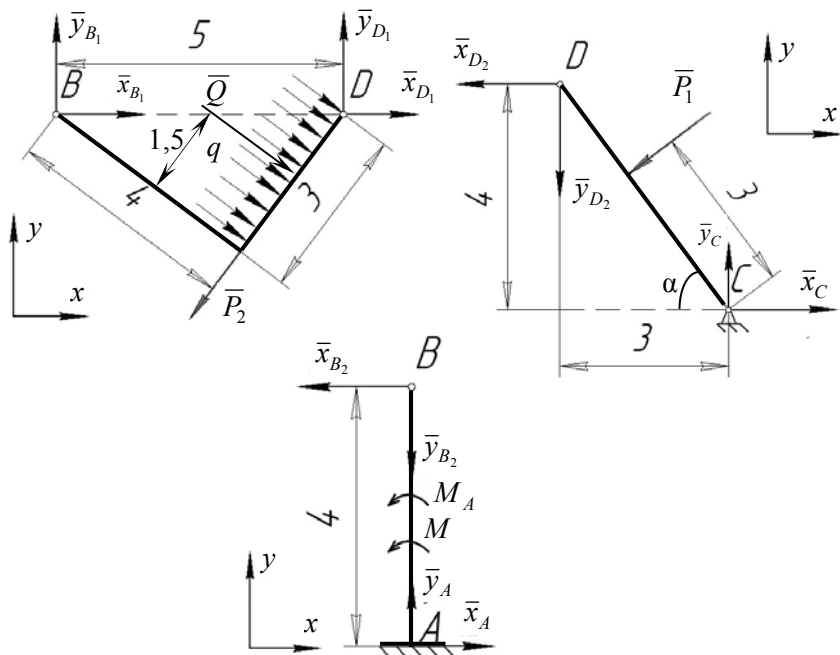


Рис. 1.1.1

Для каждого из трёх тел может быть составлено три независимых уравнения равновесия, что даст в совокупности девять уравнений. Для того, чтобы получить недостающие четыре уравнения рассмотрим силы, приложенные в точках  $B$  и  $D$ . Из закона о равенстве действия и противодействия вытекает, что геометрическая сумма этих сил должна быть равна нулю. Следовательно, сумма проекций на любую ось всех сил, приложенных в точках  $B$  и  $D$ , должна быть равна нулю. Эти уравнения дополняют уравнения равновесия системы до 13 уравнений.

Рассмотрим сначала систему уравновешенных сил, приложенных к телу  $DC$  (рис. 1.1.1):

$$\sum_{i=1}^n X_i = -x_{D_2} + x_C - P_1 \sin \alpha = 0; \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = -y_{D_2} + y_C - P_1 \cos \alpha = 0; \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = y_{D_2} \cdot 3 + x_{D_2} \cdot 4 + P_1 \cdot 3 = 0. \quad (1.3)$$

Уравнения равновесия сил, приложенных к телу  $BD$ :

$$\sum_{i=1}^n X_i = x_{B_1} + x_{D_1} - P_2 \cos \alpha + Q \sin \alpha = 0; \quad (1.4)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = y_{B_1} + y_{D_1} - P_2 \sin \alpha - Q \cos \alpha = 0; \quad (1.5)$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = y_{D_1} \cdot 5 - P_2 \cdot 4 - Q \cdot 1,5 = 0. \quad (1.6)$$

Здесь  $Q = 3q = 3 \cdot 3 = 9$  кН.

Уравнения равновесия сил, приложенных к телу  $AB$ :

$$\sum_{i=1}^n X_i = -x_{B_2} + x_A = 0; \quad (1.7)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = -y_{B_2} + y_A = 0; \quad (1.8)$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = M + M_A + x_{B_2} \cdot 4 = 0. \quad (1.9)$$

Уравнения, вытекающие из аксиомы о равенстве действия и противодействия:

$$\sum_{i=1}^n X_{B_i} = x_{B_1} - x_{B_2} = 0; \quad (1.10)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = y_{B_1} - y_{B_2} = 0; \quad (1.11)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = x_{D_1} - x_{D_2} = 0; \quad (1.12)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = y_{D_1} - y_{D_2} = 0. \quad (1.13)$$

Решая последовательно уравнения (1.6), (1.5), (1.11), (1.13), (1.2), (1.3), (1.1), (1.12), (1.4), (1.10), (1.7)-(1.9) получим числовые значения искомых величин:

$$y_{D_1} = \frac{P_2 \cdot 4 + Q \cdot 1,5}{5} = \frac{12 \cdot 4 + 9 \cdot 1,5}{5} = 12,3 \text{ кН};$$

$$y_{B_1} = -y_{D_1} + P_2 \sin \alpha + Q \cos \alpha = -12,3 + 12 \cdot \frac{4}{5} + 9 \cdot \frac{3}{5} = 2,7 \text{ кН};$$

$$y_{B_2} = y_{B_1} = 2,7 \text{ кН};$$

$$y_{D_2} = y_{D_1} = 12,3 \text{ кН};$$

$$y_C = y_{D_2} + P_1 \cos \alpha = 12,3 + 4 \cdot \frac{3}{5} = 14,7 \text{ кН};$$

$$x_{D_2} = -\frac{3}{4} \cdot (y_{D_2} + P_1) = -\frac{3}{4} \cdot (12,3 + 4) = -12,23 \text{ кН};$$

$$x_C = x_{D_2} + P_1 \sin \alpha = -12,23 + 4 \cdot \frac{4}{5} = -9,03 \text{ кН};$$

$$x_{D_1} = x_{D_2} = -12,23 \text{ кН};$$

$$x_{B_1} = -x_{D_1} + P_2 \cos \alpha - Q \sin \alpha = 12,23 + 12 \cdot \frac{3}{5} - 9 \cdot \frac{4}{5} = 12,23 \text{ кН};$$

$$x_{B_2} = x_{B_1} = 12,23 \text{ кН};$$

$$x_A = x_{B_2} = 12,23 \text{ кН};$$

$$y_A = y_{B_2} = 2,7 \text{ кН};$$

$$M_A = -M - x_{B_2} \cdot 4 = -36 - 12,23 \cdot 4 = -84,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Результаты вычислений приведём в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Момент в заделке $M_A$ , кН·м	Реакции, кН							
	$x_A$	$y_A$	$x_{B_1}$ , $x_{B_2}$	$y_{B_1}$ , $y_{B_2}$	$x_{D_1}$ , $x_{D_2}$	$y_{D_1}$ , $y_{D_2}$	$x_C$	$y_C$
-84,9	12,23	2,7	12,23	2,7	-12,23	12,3	-9,03	14,7

Для проверки полученных результатов следует убедиться в том, что соблюдаются уравнения равновесия сил, приложенных ко всей конструкции (рис. 1.1.2):

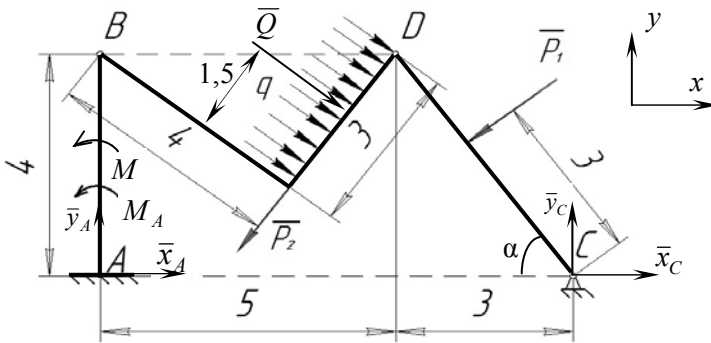


Рис. 1.1.2

$$\sum_{i=1}^n X_i = x_A - P_2 \cos \alpha + Q \sin \alpha + x_C - P_1 \sin \alpha =$$

$$= 12,23 - 12 \cdot \frac{3}{5} + 9 \cdot \frac{4}{5} + (-9,03) - 4 \cdot \frac{4}{5} = 12,23 - 12,23 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = y_A - P_2 \sin \alpha - Q \cos \alpha + y_C - P_1 \cos \alpha =$$

$$= 2,7 - 12 \cdot \frac{4}{5} - 9 \cdot \frac{3}{5} + 14,7 - 4 \cdot \frac{3}{5} = 17,4 - 17,4 = 0;$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n M_D(\bar{F}_i) &= M_A + M - P_1 \cdot 2 + Q \cdot 1,5 + x_A \cdot 4 - y_A \cdot 5 + y_C \cdot 3 + x_C \cdot 4 = \\
&= -84,9 + 36 - 4 \cdot 2 + 9 \cdot 1,5 + 12,23 \cdot 4 - 2,7 \cdot 5 + 14,7 \cdot 3 + (-9,03) \cdot 4 = \\
&= 142,52 - 142,52 = 0.
\end{aligned}$$

На рис. 1.2-1.6 приведены схемы составных конструкций, а в табл. 1.2. – исходные данные для выполнения задания по вариантам.

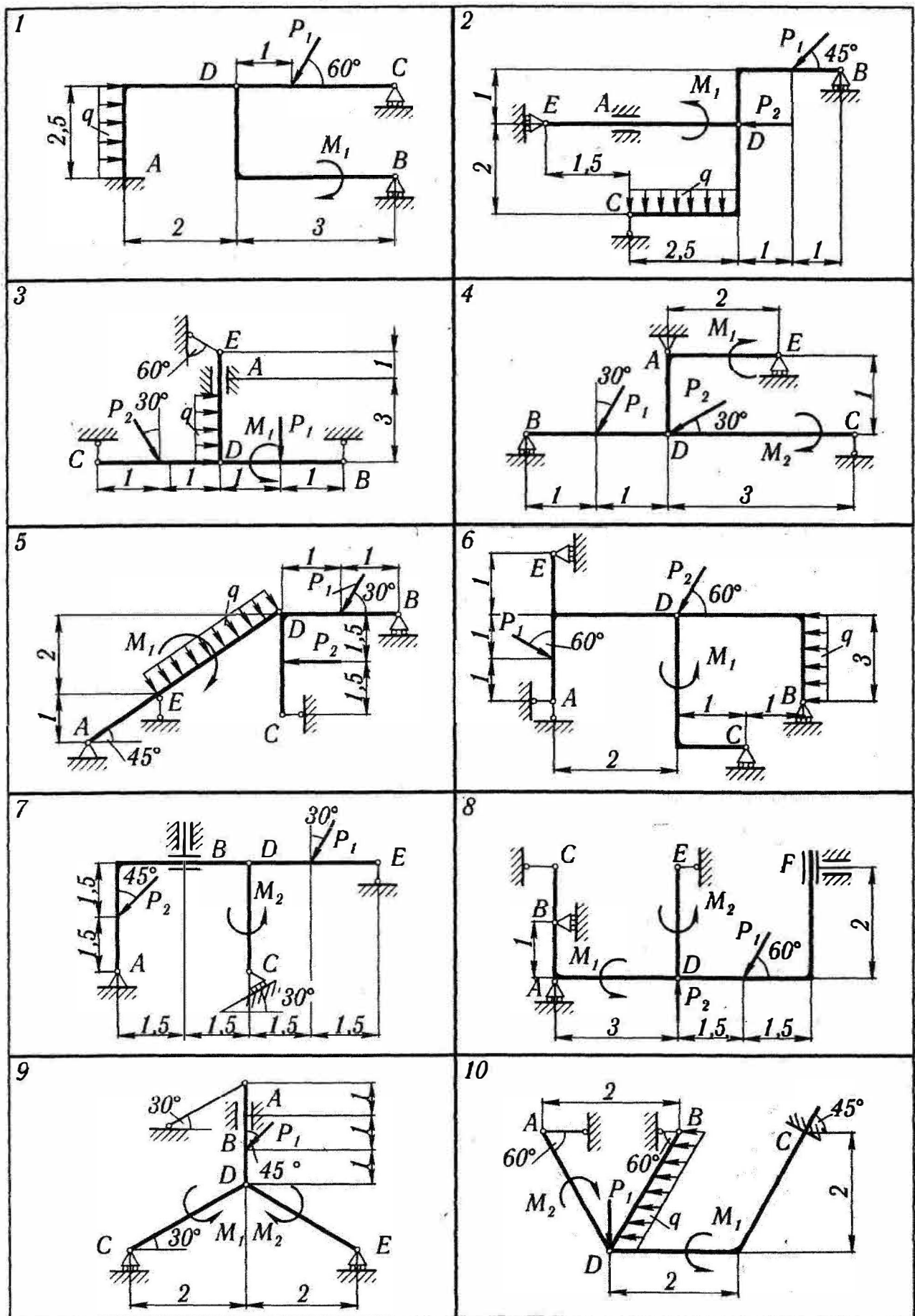


Рис. 1.2

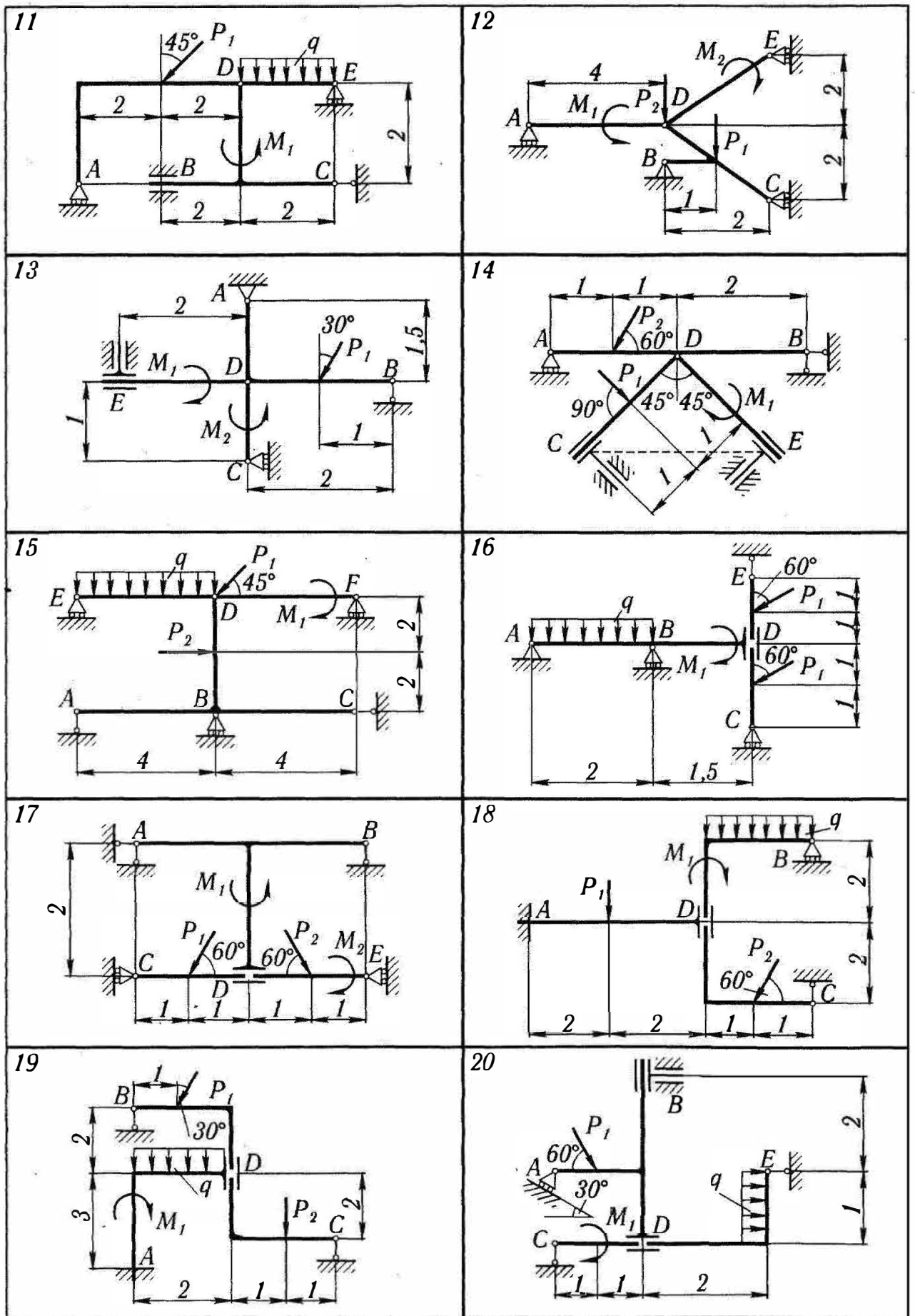


Рис. 1.3



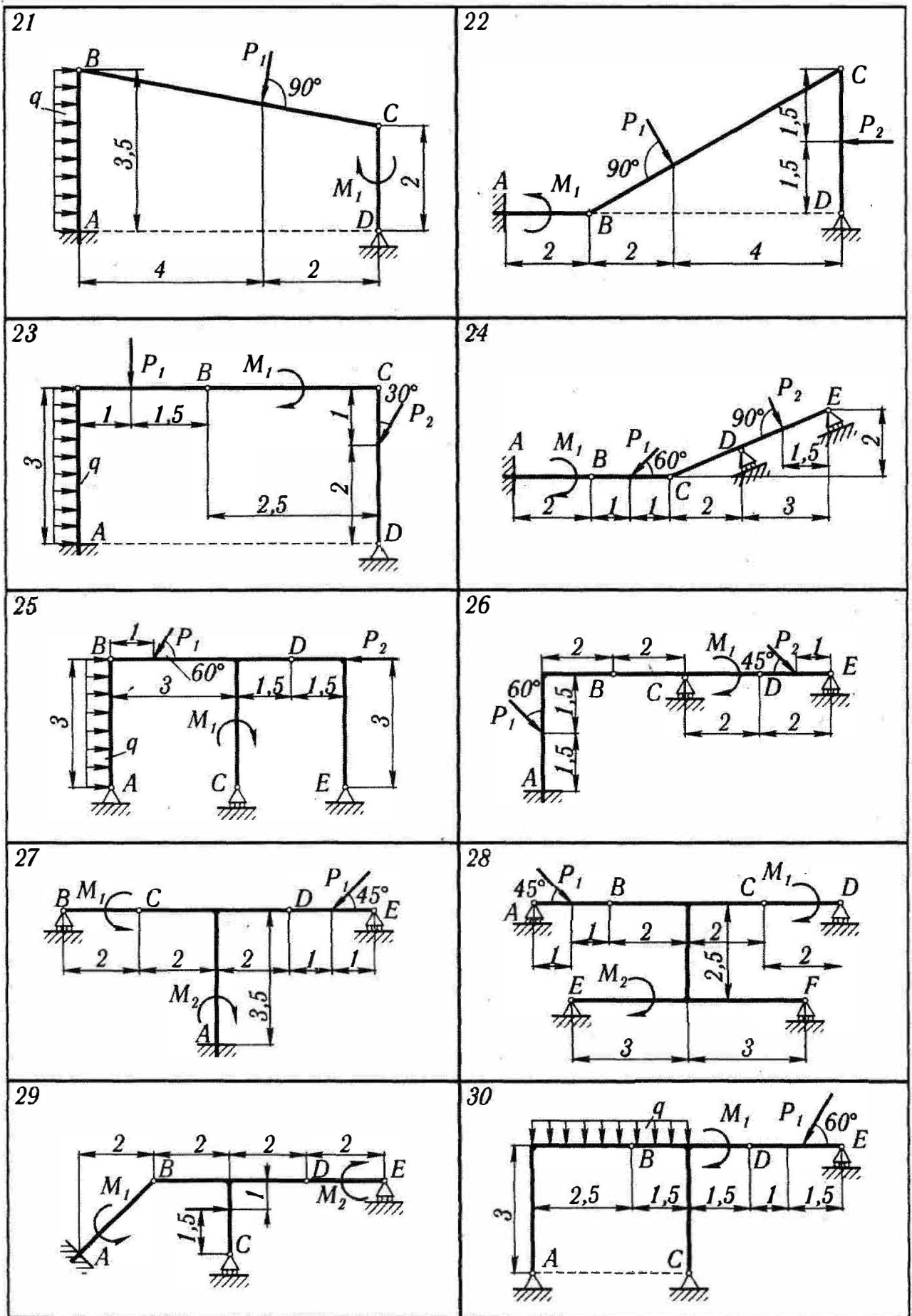
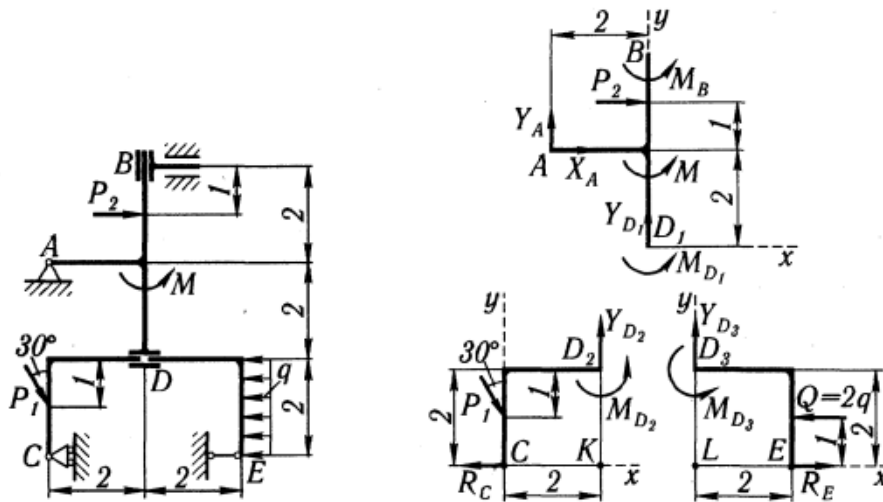


Рис. 1.4

Таблица 1.2

Номер варианта	$P_1$	$P_2$	$M_1$	$M_2$	$q$	Номер варианта	$P_1$	$P_2$	$M_1$	$M_2$	$q$
1	6,0	—	25,0	—	0,8	16	13,0	—	26,0	—	0,9
2	11,0	8,0	34,0	—	1,0	17	7,0	7,0	23,0	34,0	—
3	9,0	12,0	20,0	—	1,0	18	9,0	9,0	29,0	—	1,3
4	10,0	14,0	30,0	20,0	—	19	12,0	7,0	33,0	—	1,2
5	8,0	15,0	22,0	—	1,1	20	11,0	—	38,0	—	1,5
6	10,0	17,0	28,0	—	1,0	21	6,0	—	25,0	—	0,8
7	16,0	10,0	—	30,0	—	22	11,0	8,0	34,0	—	—
8	13,0	12,0	25,0	34,0	—	23	9,0	12,0	20,0	—	1,0
9	11,0	—	29,0	37,0	—	24	10,0	14,0	30,0	—	—
10	12,0	—	34,0	35,0	1,4	25	8,0	15,0	22,0	—	1,1
11	8,0	—	28,0	—	1,0	26	10,0	17,0	28,0	—	—
12	12,0	14,0	36,0	28,0	—	27	16,0	—	36,0	3,0	—
13	15,0	—	30,0	21,0	—	28	13,0	—	25,0	34,0	—
14	10,0	16,0	35,0	—	—	29	11,0	—	29,0	37,0	—
15	12,0	8,0	32,0	—	1,2	30	12,0	—	34,0	—	1,4

Примечание: при использовании скользящего соединительного элемента создаются реакции  $Y_{D1}, Y_{D2}, Y_{D3}, M_{D1}, M_{D2}, M_{D3}$



Общее количество неизвестных реакций в задаче — 11 ( $X_A, Y_A, M_B, Y_{D1}, Y_{D2}, Y_{D3}, M_{D1}, M_{D2}, M_{D3}, R_C, R_E$ ).