равен числу. И это число может иметь вполне реальный смысл. В физике мы часто используем эту величину, когда вычисляем, например:

1. Работу переменной силы. Например, по значению работы, необходимой для подьема нефти по стволу, разработчики выбирают насос
2. Объем фигуры
3. Длину дуги
4. Давление жидкости на вертикальную пластину
5. Координаты центра тяжести плоской фигуры

Расчеты для различных заданий будем рассматривать в самой простой постановке в пакете компьютерной математики MathCAD и табличном процессоре Microsoft Excel.

Вычисление центра тяжести плоской фигуры

Из курса теоретической механики известно, что центр тяжести плоской фигуры, ограниченной осью абсцисс, функцией $f(x)$ и координатами $x=a$, $x=b$ (рис. 1.1) может быть вычислен по формулам

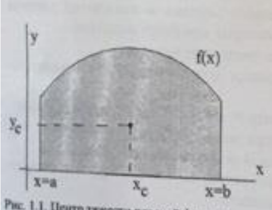


Рис. 1.1. Центр тяжести плоской фигуры

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b x\cdot f(x)dx,$$

$$y_c = \frac{1}{2\cdot S}\int_a^b f(x)^2 dx,\ где$$

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Задание 1. *Вычислить центр тяжести плоской фигуры (x_c, y_c), ограниченной кривой* $f(x) = 3\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, *осью абсцисс $y=0$ и прямыми $x=0$ и $x=2$.*

Решение. В пакете компьютерной математики на панели MathCad «Математический анализ» имеется команда для вычисления определенного интеграла. Значит, для решения задачи надо про-

сто набрать эти формулы и получить ответ. На рис. 1.2 приведено решение задачи в MathCad.

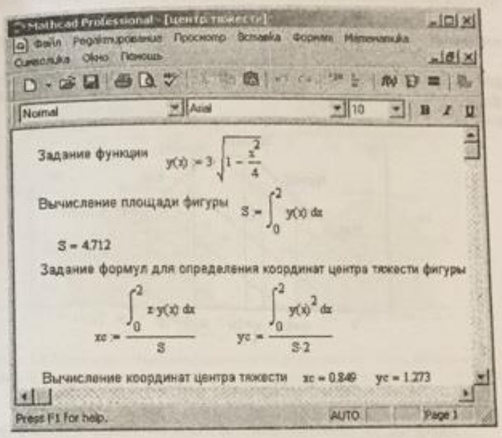


Рис. 1.2. Решение задания 1 в пакете MathCAD

Как получен результат? Из курса высшей математики известно, что определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная подынтегральной функции.

Однако, из курса высшей математики также известно, что далеко не для каждого интеграла существует первообразная среди элементарных функций. Как вычислить интеграл в этом случае? Рассмотрим некоторые методы численного интегрирования, позволяющие

находить приближенное значение определенного интеграла от любой непрерывной функции с практиче-ски достаточной точностью. Все эти методы основаны на геометрическом смысле определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$: <u>*величина определенного интеграла численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной частью графика y=f(x), осью у и линиями x=a, x=b*</u> (заштрихованная область рис. 1.3).

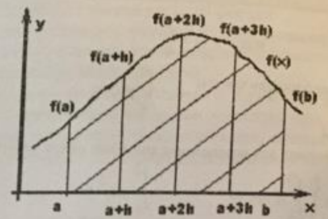


Рис. 1.3. Схема к приближенному вычислению интеграла

Большинство приближенных методов вычисления интеграла основаны на замене интеграла площадью фигуры - $\int_a^b f(x)dx = S$.

Однако, вычислить эту площадь точно также невозможно. Поэтому ее, пользуясь свойством аддитивности площади, ее заменяют суммой площадей отдельных ее частей. В зависимости от используемой формы отдельных частей фигуры: прямоугольник, трапеция - получают разные формулы для вычисления интеграла. Именно поэтому существует много формул, позволяющих численно вычислить интеграл: формула левых прямоугольников (рис. 1.4 А), формула правых прямоугольников рис. 1.4 Б), средних прямоугольников рис. 1.4 В), трапеций рис. 1.4 Г), Симпсона (формула парабол), Чебышева и другие.

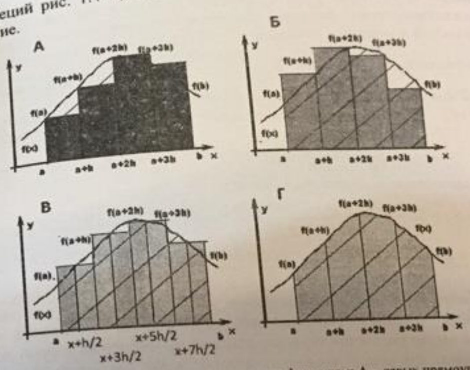


Рис. 1.4. Площади, которые вычисляются по формулам: А – левых прямоугольников, Б – правых прямоугольников, В – срединных прямоугольников, Г - трапеций

Получим **формулу трапеций**. Интервал интегрирования [a, b] разделим на несколько равных частей. Для примера на рис. 1.3 произведено деление промежутка интегрирования на четыре равных части. Проводим прямые до пересечения с графиком функции в точках $x=a+h$, $x=a+2h$, $x=a+3h$, где $h=\frac{b-a}{4}$. Выведем формулу для этого случая, а потом обобщим на произвольное количество частей деления. В рассматриваемом случае $\int_a^b f(x)dx = S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, здесь S_1 обозначает площадь под графиком при изменении аргумента от a до $a+h$, S_2 - от $a+h$ до $a+2h$, S_3 - от $a+2h$ до $a+3h$, S_4 - от $a+3h$ до b (рис. 1.4 Г). Считаем площадь каждой фигуры как площадь трапеции - площадь трапеции равняется произведению полусуммы оснований на высоту. В нашем случае все трапеции имеют высоту h, т.к. отрезок интегрирования делился на равные части. Основаниями первой фигуры – трапеции являются значения подынтегральной функции в точках a и $a+h$, т.е. $f(a)$, $f(a+h)$ и ее площадь вычисляется по формуле: $S_1 = \frac{f(a)+f(a+h)}{2}\cdot h$. Основанием второй фигуры являются значения функции в точках $a+h$ и $a+2h$, т.е. $f(a+h)$, $f(a+2h)$ и ее площадь вычисляется по формуле: $S_2 = \frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2}\cdot h$. Площади третьей и четвертой фигуры вычисляются аналогично. Значит,

$$S_1+S_2+S_3+S_4 \approx \frac{f(a)+f(a+h)}{2}h+\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2}h+\frac{f(2+2h)+f(a+3h)}{2}h++\frac{f(a+3h)+f(b)}{2}h=$$

Для более компактной записи можем у каждого слагаемого вынести за скобку значение h. Теперь видим, что второе слагаемое числителя первой дроби равняется первому слагаемому числителя второй дроби, второе слагаемое числителя второй дроби равняется первому слагаемому числителя третьей дроби, и т.д., т.е.

$$= h\cdot\left[\frac{f(a)}{2}+f(a+h)+f(a+2h)+f(a+3h)+\frac{f(b)}{2}\right]=$$

Еще короче можно записать это выражение, используя знак суммы:

$$= h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{3} f(a+ih)\right).$$

Итак, мы получили **формулу трапеций** для приближенного вычисления интеграла при делении отрезка интегрирования на 4 части. Ясно, что при числе деления отрезка равном n, в ней изменится только количество слагаемых в формуле, т.е. формула в общем случае имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\cdot\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right], \quad (1.1),$$

где $h = \frac{b-a}{n}$.

Вычисление приближенного значения интеграла свелось к вычислению суммы значений подынтегральной функции для разных значений аргумента.

Ясно, что при вычислении мы вычислили площадь с некоторой погрешностью (неточностью). Абсолютной погрешностью называют разность точного и приближенного значений. Относительной погрешностью является отношение абсолютной погрешности к точному значению интеграла.

Вычисление приближенного значения определенного интеграла по формуле трапеций просто реализовать в табличном процессоре Microsoft Excel, используя вычислительные приемы «автозаполнение», «копирование формул» и «автосуммирование».

Задание 2. *вычислить приближенное значение интеграла* $\int_1^2 \frac{1}{1+x^2}dx$ *с числом разбиений интервала интегрирования на 10 частей по формуле трапеций. Оценить погрешность вычисления.*

Решение. Вычисляем приближенное значение интеграла по формуле трапеций (1.1) при n=10 в Microsoft Excel. В первый столбец заносим значения аргумента x в точках разбиения интервала интегрирования, т.е. числа от единицы – нижнего предела интегрирования - до двух – верхнего предела интегрирования. Во втором столбце вычисляем значения подынтегральной функции в точках разбиения интервала интегрирования. Выполняя вычисления в каждом столбце таблицы (A, B), рационально использовать прием копирования формул (рис. 1.5). Приближенное значение интеграла получается суммированием значений подынтегральной функции за вычетом полусуммы значений функции на нижнем и верхнем пределах интегрирования с последующим умножением на величину $h = \frac{b-a}{n}$.

	A	B	C	D
1	x			
2		f(x)	h	
3	1	0,5		0,1
4	1,1	0,452489		
5	1,2	0,409836		
6	1,3	0,371747		
7	1,4	0,337838		
8	1,5	0,307692		
9	1,6	0,280899		
10	1,7	0,257069		
11	1,8	0,235849		
12	1,9	0,21692		
13	2	0,2		
		0,322034		

Рис. 1.5. Таблица Microsoft Excel с вычислением интеграла по формуле трапеций

Табличка с решением в Microsoft Excel в режиме отображения формул приведена на рис. 1.6.

	A	B	C	D
1	x	f(x)		
2	1	=1/(1+A2^2)	h	=(2-1)/10
3	1,1	=1/(1+A3^2)		
4	1,2	=1/(1+A4^2)		
5	1,3	=1/(1+A5^2)		
6	1,4	=1/(1+A6^2)		
7	1,5	=1/(1+A7^2)		
8	1,6	=1/(1+A8^2)		
9	1,7	=1/(1+A9^2)		
10	1,8	=1/(1+A10^2)		
11	1,9	=1/(1+A11^2)		
12	2	=1/(1+A12^2)		
13		=(СУММ(B2:B12)-B2/2-B12/2)*D1		

Рис. 1.6. Таблица с решением в режиме отображения формул

Формула трапеций для вычисления приближенного значения интеграла считается не очень точной. Более точной формулой вычисления приближенного значения интеграла является **формула Симпсона**[1], в

[1] **Тómас Сúмпсон** — английский математик

которой после деления интервала интегрирования на части площадь каждой составляющей фигуры вычисляется как площадь криволинейной трапеции. Выведем формулу Симпсона. Интервал интегрирования опять же делится на равные части, причем на четное число частей. Дуга линии функции $f(x)$, между значениями x_0 и x_2 заменяется дугой параболы, проходящей через точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ (рис. 1.7). Через три точки всегда можно провести единственную параболу. Аналогично поступаем с остальными точками разбиения интервала интегрирования. Теперь площади криволинейных трапеций заменяем не площадями трапеций, как при выводе формулы трапеций, а площадями параболических трапеций. Формула площади параболической трапеции определяется по формуле

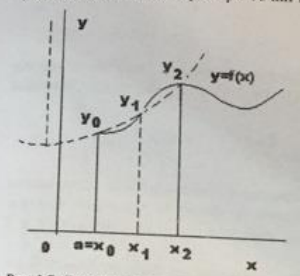


Рис. 1.7. Схема к приближенному вычислению интеграла по формуле Симпсона

$$S_{пар.трап.} = \frac{длина\ основания}{6}\cdot\left(y_{нач}+4\cdot y_{серед}+y_{кон}\right),$$

т.е. площадь параболической трапеции с основанием в точках x_0 и x_2 запишется $S_1 = \frac{x_2-x_0}{6}\cdot(y_0+4\cdot y_1+y_2)$. Т.к. отрезок интегрирования делился на равные части, то $x_2 - x_0 = 2\cdot h$. Тогда формула для вычисления площади параболической трапеции S_1 примет вид $S_1 = \frac{2\cdot h}{6}\cdot(y_0+4\cdot y_1+y_2) = \frac{h}{3}\cdot(y_0+4\cdot y_1+y_2)$.

Аналогично вычисляются площади параболических трапеций с основаниями x_2 и x_4, x_4 и x_6 и так далее до конца отрезка интегрирования. Величина интеграла равняется сумме площадей отдельных параболических трапеций, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\cdot[y_0 + 4\cdot y_1 + y_2 + y_2 + 4\cdot y_3 + y_4 + \ldots + y_{n-2} + 4\cdot y_{n-1} + y_n]$$

Приводя подобные члены в формуле, и учитывая, что $y_0=f(a)$ и $y_n=f(b)$, приходим к формуле Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\cdot[f(a) + 4\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + 4\cdot y_3 + 2\cdot y_4 + \ldots + 2\cdot y_{n-2} + 4\cdot y_{n-1} + f(b)]$$

В формуле Симпсона значения функции с нечетным числом h умножаются на 4, с четным – на 2. Значит, формулу Симпсона можно записать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left[f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(3 + (-1)^{k+1}\right)f(a+ih)\right] \quad (1.2)$$

Вычисление по этой формуле в Microsoft Excel выполняется аналогично вычислению интеграла по формуле трапеций. Некоторую сложность создает задание чередования коэффициентов 4 и 2 перед значениями функции.

Вычисления по формуле Симпсона не требуют большей затраты труда, чем вычисления по формуле трапеций, но приводят к более точным результатам при одном и том же числе разбиения интервала интегрирования. Вариант решения приведен на рис. 1.8 и 1.9.

Замечаем, что значения интеграла, полученные по разным формулам, несколько отличаются. В задании «берущийся» интеграл ($\int \frac{1}{x^2+1}dx = arctgx$), так что точность полученных результатов можно оценить.

	A	B	C	D
1	x	f(x		
2	1		h	0,1
		0,5	0	0,5
3	1,1	0,452488688	1	1,8099548
4	1,2	0,409836066	2	0,8196721
5	1,3	0,371747212	3	1,4869888
6	1,4	0,337837838	4	0,6756757
7	1,5	0,307692308	5	1,2307692
8	1,6	0,280898876	6	0,5617978
9	1,7	0,257069409	7	1,0282776
10	1,8	0,235849057	8	0,4716981
11	1,9	0,21691974	9	0,867679
12	2	0,2	10	0,2
13		0,322033919		0,3217504

Рис. 1.8. Таблица Microsoft Excel с вычислением интеграла по формуле Симпсона

	A	B	C	D
1	x	f(x		
2	1	=1/(1+A2^2)	h	=(2-1)/10
3	1,1	=1/(1+A3^2)	0	=B2
4	1,2	=1/(1+A4^2)	1	=B3*(3+(-1)^(C3+1))
5	1,3	=1/(1+A5^2)	2	=B4*(3+(-1)^(C4+1))
6	1,4	=1/(1+A6^2)	3	=B5*(3+(-1)^(C5+1))
7	1,5	=1/(1+A7^2)	4	=B6*(3+(-1)^(C6+1))
8	1,6	=1/(1+A8^2)	5	=B7*(3+(-1)^(C7+1))
9	1,7	=1/(1+A9^2)	6	=B8*(3+(-1)^(C8+1))
10	1,8	=1/(1+A10^2)	7	=B9*(3+(-1)^(C9+1))
11	1,9	=1/(1+A11^2)	8	=B10*(3+(-1)^(C10+1))
12	2	=1/(1+A12^2)	9	=B11*(3+(-1)^(C11+1))
13		=(СУММ(B2:B12)-B2/2-B12/2)*D1	10	=B12
				=СУММ(D2:D12)*D1/3

Рис. 1.9. Таблица с решением в режиме отображения формул по методу Симпсона

На рис. 1.10 - 1.11 приведены таблицы с вычислением точного значения интеграла с помощью первообразной.

	A	B
15	точное значение интеграла	0,321750554

Рис. 1.10. Таблица Microsoft Excel с вычислением точного значения интеграла

	A	B
15	точное значение интеграла	=ATAN(2)-ATAN(1)

Рис. 1.11. Таблица с вычислением точного значения интеграла в режиме отображения формул

Как видим, более точно интеграл вычислен по формуле Симпсона.

Абсолютная погрешность вычислений определяется как модуль разности приближенного значения и точного (рис. 1.12, 1.13).

	A	B
15	точное значение интеграла	0,321750554
16	погрешность по ф-ле трапеций	0,000283365
17	погрешность по ф-ле Симпсона	1,17861E-07

Рис. 1.12. Таблица с вычислением абсолютной погрешности приближенного вычисления интеграла в режиме отображения чисел

	A	B
15	точное значение интеграла	=ATAN(2)-ATAN(1)
16	погрешность по ф-ле трапеций	=ABS(B13-B15)
17	погрешность по ф-ле Симпсона	=ABS(B15-D13)

Рис. 1.13. Таблица с вычислением абсолютной погрешности приближенного вычисления интеграла в режиме отображения формул

Относительная погрешность вычисляется как отношение абсолютной погрешности к точному значению (рис. 1.14, 1.15).

относительная погрешеность по формуле трапеций	0,0008807
относительная погрешеность по формуле Симпсона	3,663E-07

Рис. 1.14. Таблица с вычислением относительной погрешности приближенного вычисления интеграла в режиме отображения чисел

относительная погрешеность по формуле трапеций	=B16/B15
относительная погрешеность по формуле Симпсона	=B17/B15

Рис. 1.15. Таблица с вычислением относительной погрешности приближенного вычисления интеграла в режиме отображения формул

В пакете MathCAD вычисление определенного интеграла выполняется с использованием расширенного оператора палитры «Матанализ». Вычисление интеграла $\int_1^2 \frac{1}{1+x^2}dx$ приведено на рис. 1.16.

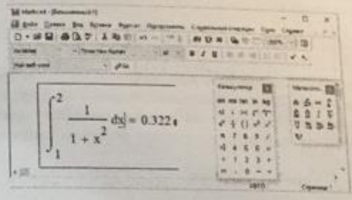


Рис. 1.16. Вычисление интеграла в пакете MathCAD

Вычисления в пакете Mathcad осуществляются с 12 знаками после запятой, но выводятся с тремя значащими цифрами. Для вычислений в рамках данного курса этого недостаточно. Настройка на отображение нужного количества знаков после запятой в MathCAD находится в пункте меню «Формат» команда Результат рис. 1.17.

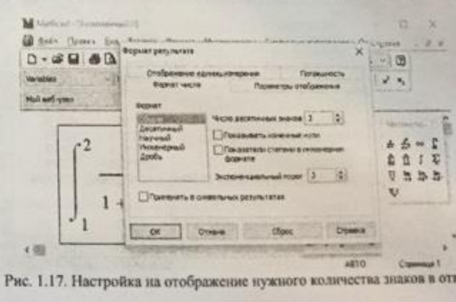


Рис. 1.17. Настройка на отображение нужного количества знаков в ответе

Сравнивая точное значение интеграла и полученное в пакете MathCAD, можем сделать вывод, что в пакете оно вычисляется достаточно точно.

Решение задания 1. Для вычисления центра тяжести нужно вычислить значения трех интегралов, входящих в формулы

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b x \cdot f(x)dx,\ y_c = \frac{1}{2 \cdot S}\int_a^b f(x)^2 dx,\ \text{где } S = \int_a^b f(x)dx.$$

Интегралы вычисляем приближенно по формуле трапеций. Решение в Microsoft Excel приведено на рис. 1.18, 1.19. На рис. 1.18 в силу громоздкости формул вычисления интеграла при полной их идентичности не выделены полностью формулы вычисления интегралов $\int_a^b x \cdot f(x)dx$ и $\int_0^2 f(x)^2 dx$.

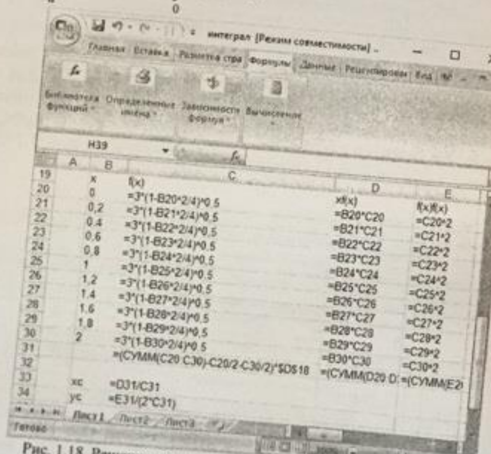


Рис. 1.18. Решение задания 1 в режиме отображения формул

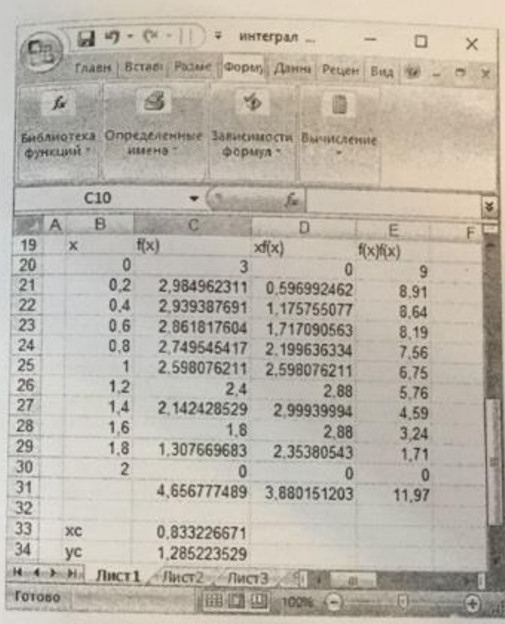


Рис. 1.19. Решение задания 1 в режиме отображения чисел

Результат вычислений для проверки правдоподобности расчета можно проиллюстрировать графически. На основании значений аргумента и функции, расположенных в столбцах B и C таблицы, строим диаграмму типа <u>точечная</u> (рис. 1.20). Результат построения приведен на рис. 1.21.

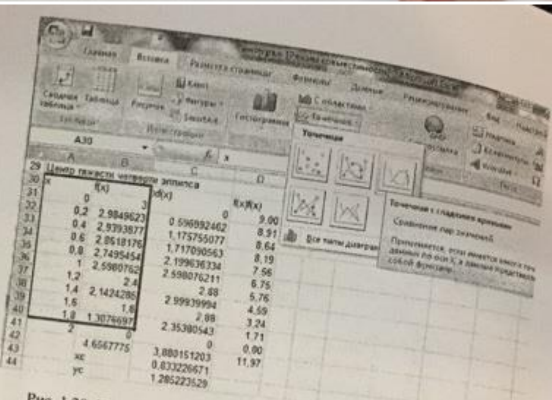


Рис. 1.20. Построение фигуры, центр тяжести которой определяется

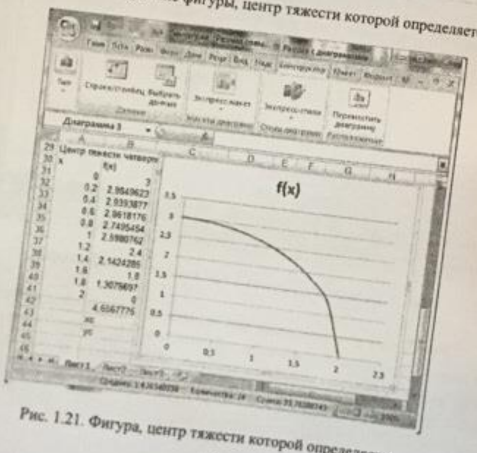


Рис. 1.21. Фигура, центр тяжести которой определяется

Теперь нужно нанести положение вычисленного центра тяжести. Программа Microsoft Excel позволяет на график наносить дополнительные точки. Для этого делаем активной диаграмму, вызываем вспомогательное меню, из которого выбираем команду «Выбрать данные» (рис. 1.22).

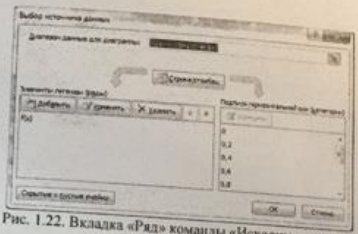


Рис. 1.22. Вкладка «Ряд» команды «Исходные данные»

В открывшемся окне выбираем пункт «Добавить» и в правые окна вписываются адреса ячеек, содержащих координаты точки – центра тяжести (рис. 1.23).

Рис. 1.23. Заполнение окна с адресом отображения точки

Точка отображается на графике (рис. 1.24).

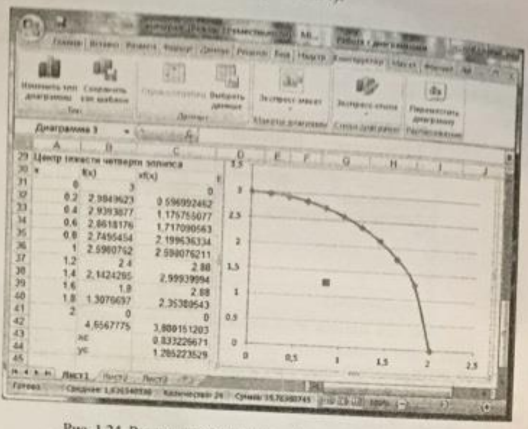


Рис. 1.24. Результат построения графика с центром тяжести

Решение в пакете MathCAD выполняется много проще (рис. 1.2).

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 1

Вычислить приближенное значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по формулам трапеций и Симпсона в Microsoft Excel (при числе разбиений промежутка интегрирования не менее 20). Оценить фактические абсолютную и относительную погрешности приближенных значений интеграла. Получить значение интеграла в пакете MathCAD.

Вариант 1. Задан интеграл $\int_{0.5}^{1.1}\cos 0.4x dx$	**Вариант 2.** Задан интеграл $\int_{0.27}^{0.94}\sin^3 x dx$

Вариант 3. Задан интеграл $\int_{0.35}^{1.17} arctgx dx$	**Вариант 4.** Задан интеграл $\int_{0.3}^{0.78} tg^2\frac{x}{3}dx$
Вариант 5. Задан интеграл $\int_{0.23}^{0.68} ctg^2 0.5x dx$	**Вариант 6.** Задан интеграл $\int_{1.04}^{2.39}\sin^2\frac{x}{2.91}dx$
Вариант 7. Задан интеграл $\int_{1.4}^{2.43} xe^{-x}dx$	**Вариант 8.** Задан интеграл $\int_{0}^{1}\frac{1}{4+x^2}dx$
Вариант 9. Задан интеграл $\int_{0.67}^{1.32} x^3 dx$	**Вариант 10.** Задан интеграл $\int_{1.3}^{3.5}\frac{1}{\sqrt{2+8x}}dx$
Вариант 11. Задан интеграл $\int_{2.4}^{4.8}\sqrt{x^2-1}dx$	**Вариант 12.** Задан интеграл $\int_{0}^{1.2} x\cdot\sin x dx$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 2

Вычислить центр тяжести плоской фигуры (x_c, y_c), ограниченной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и значениями $x=a$, $x=b$ по формулам

$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b x\cdot f(x)dx$, $y_c = \frac{1}{2\cdot S}\int_a^b f(x)^2 dx$, где $S = \int_a^b f(x)dx$

Вариант 1. $f(x)=\sqrt{x^3+0.47}-4\cdot\cos(2x)+2$, *a=1,1, b=2,98.*	**Вариант 2.** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, *a=-1,5, в=2,4.*
Вариант 3. $f(x)=e^x$, *a=-1,25, b=2,16.*	**Вариант 4.** $f(x)=\ln x$, *a=1,5, в=6,2.*

Вариант 5. $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, *a=1, b=2,5.*	**Вариант 6.** $f(x)=2\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$, *a=0, b=3*
Вариант 7 $f(x)=tg\frac{x}{3}$, *a=045, b=3,38.*	**Вариант 8.** $f(x)=\ln(x+1.72)$, *a=-021, b=5,62.*
Вариант 9. $f(x)=e^{x^2}$, a=0,12, b=1,39	**Вариант 10.** $f(x)=-e^{-x^2}$, *a=0, b=2,12*
Вариант 11. $f(x)=\ln^3 x$, *a=2,3, b=5,2*	**Вариант 12.** $f(x)=tgx$, *a=0,5, в=1,38.*

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

При вычислении приближенного значения интеграла отрезок интегрирования делили на 20 частей, что обеспечило высокую точность вычисления. Однако, как узнать с какой точностью будет вычислен неберущийся интеграл? Существуют формулы, позволяющие оценить точность приближенного вычисления интеграла. Точность приближенного значения интеграла по формуле трапеций задается формулой

$$\frac{(b-a)^3}{12\cdot n^2}\cdot\max|f''(x)|<0.001 \qquad (1.3)$$

Поэтому при заданной точности вычисления интеграла по этой формуле можно определить необходимое количество точек деления промежутка интегрирования *n*.

__Задание 3.__ *Вычислить интеграл* $\int_{1.2}^{2.6}\frac{dx}{\sqrt{0.6+x^2}}$ *по формулам трапеций и Симпсона с заданной точностью* $\varepsilon=10^{-3}$.

Решение в пакете Microsoft Excel. Для вычисления приближенного значения интеграла $\int_a^b f(x)dx$ необходимо определить необходимое

для достижения заданной точности значение количества точек, входящих в формулы трапеций

$\int_a^b f(x)dx \approx h\cdot\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih)\right]$, где $h=\frac{b-a}{n}$ и

Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\cdot[f(a)+4\cdot y_1+2\cdot y_2+4\cdot y_3+2\cdot y_4+\ldots+2\cdot y_{n-2}+4\cdot y_{n-1}+f(b)]$$

Метод трапеций. Для определения необходимой величины *n* воспользуемся этой формулой (1.3).

В рассматриваемом случае *a*=1,2; *b*=2,6; $f(x)=\frac{1}{\sqrt{0.6+x^2}}$.

Находим первую и вторую производные подынтегральной функции

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{0.6+x^2}^3}\cdot 2x=-\frac{x}{\sqrt{0.6+x^2}^3},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{\sqrt{0.6+x^2}^3}-x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{0.6+x^2}^5}\cdot 2x=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{0.6+x^2}^3}+\frac{3x^2}{\sqrt{0.6+x^2}^5}=$$

$=\frac{-0.6-x^2+3x^2}{\sqrt{0.6+x^2}^5}=\frac{-0.6+2x^2}{\sqrt{0.6+x^2}^5}$. Максимальное значение второй производной на промежутке интегрирования можно оценить как максимальное значение числителя дроби, т.е. при *x*=2.6 и минимальным значением знаменателя дроби, т.е. при *x*=1.6

$\max|f''(x)|<\frac{-0.6+2\cdot 2.6^2}{\sqrt{0.6+1.2^2}^5}$. Подставляя все величины в формулу для определения погрешности вычисления, имеем $\frac{(2.6-1.3)^3}{12\cdot n^2}\cdot\frac{-0.6+2\cdot 2.6^2}{\sqrt{0.6+1.2^2}^5}<0.001$. Из этого неравенства определим значения n $\frac{1.4^3}{12\cdot 0.001}\cdot\frac{-0.6+2\cdot 2.6^3}{\sqrt{0.6+1.2^2}^5}<n^2$, т.е. $n^2>497.0381375$, n>22,294. Для расчета принимаем n=24. Интеграл вычисляем, как в первом задании (рис. 1.25).

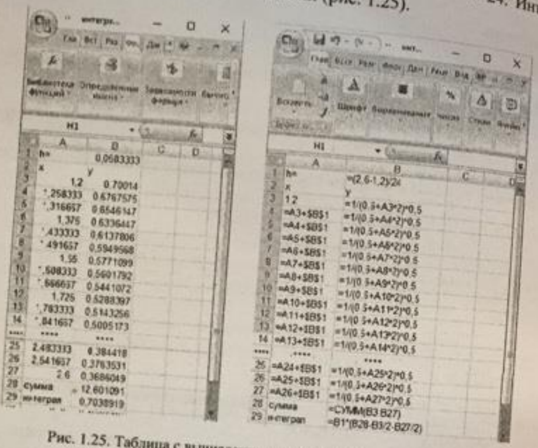


Рис. 1.25. Таблица с вычислением приближенного вычисления интеграла с заданной точностью по формуле трапеций

1. **Метод Симпсона**. Точность приближенного значения интеграла по формуле Симпсона задается формулой

$$\varepsilon \le \frac{(b-a)^5}{180\cdot n^4}\cdot \max\left(\left|f^{IV}(x)\right|\right) \qquad (1.4)$$

Для определения n, требуемого для достижения заданной точности, нужно оценить величину четвертой производной от подынтегральной функции. Выше вычислялась вторая производная, так что

третья производная будет производной от второй

$$f'''(x)=\left(\frac{-0.6+2x^2}{\sqrt{0.6+x^2}^5}\right)'=\left(\frac{2\cdot 2x}{\sqrt{0.6+x^2}^5}+\left(-0.6+2\cdot x^2\right)\cdot\frac{-5}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{0.6+x^2}^7}\right)$$

Упрощаем полученное выражение

$$f'''(x)=\frac{-1}{\sqrt{0.6+x^2}^7}\cdot\left[4x\cdot\left(-0.6+x^2\right)+10x\cdot\left(-0.6+2x^2\right)\right]=$$

$$=\frac{x\cdot\left(5.4-6x^2\right)}{\sqrt{0.6+x^2}^7}.$$ Затем вычислим четвертую производную, как производную от третьей производной

$$f^{IV}(x)=\frac{5.4-18\cdot x^2}{\sqrt{0.6+x^2}^7}+\frac{5.4\cdot x-6x^3}{\sqrt{0.6+x^2}^9}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot 2x.$$ Приводя подобные члены, получаем $f^{IV}(x)=\frac{3.24-33,48x^2+40,2x^4}{\sqrt{0.6+x^2}^9}$ Оценим максимальное значение полученной величины на промежутке изменения аргумента x от 1.2 до 2.6

$$\max\left(\left|f^{IV}(x)\right|\right)=\frac{3.24-33.48\cdot 2.6^2+40,2\cdot 2.6^4}{\sqrt{0.6+1.2^2}^9}=1130.$$ Получим необходимое значение n для достижения требуемой точности приближенного значения интеграла $0,001\le\frac{(2,6-1,2)^5}{180\cdot n^4}\cdot 1130$. Решаем неравенство относительно n $n^4\ge\frac{(2,6-1,2)^5}{180\cdot 0,001}\cdot 1130=7,623$. Выполняем вычисления с n=8 (рис. 1.26, 1.27).

	C	D	E	F
1		h=	0,175	
2	i	x	y	
3	0	1,2	0,70014	0,70014
4	1	1,375	0,633645	2,534579
5	2	1,55	0,57711	1,15422
6	3	1,725	0,52884	2,115359
7	4	1,9	0,48737	0,97474
8	5	2,075	0,451495	1,80598
9	6	2,25	0,420239	0,840477
10	7	2,425	0,392818	1,571273
11	8	2,6	0,368605	0,368605
12				12,06537
13				0,703813

Рис. 1.26. Таблица с вычислением интеграла с заданной точностью по формуле Симпсона (режим отображений чисел)

	C	D	E	F
1		h=	=(2,6-1,2)/8	
2	i	x	y	
3	0	1,2	=1/(0,6+D3^2)^0,5	=E3
4	1	=D3+$E$1	=1/(0,6+D4^2)^0,5	=E4*(3+(-1)^(C4+1))
5	2	=D4+$E$1	=1/(0,6+D5^2)^0,5	=E5*(3+(-1)^(C5+1))
6	3	=D5+$E$1	=1/(0,6+D6^2)^0,5	=E6*(3+(-1)^(C6+1))
7	4	=D6+$E$1	=1/(0,6+D7^2)^0,5	=E7*(3+(-1)^(C7+1))
8	5	=D7+$E$1	=1/(0,6+D8^2)^0,5	=E8*(3+(-1)^(C8+1))
9	6	=D8+$E$1	=1/(0,6+D9^2)^0,5	=E9*(3+(-1)^(C9+1))
10	7	=D9+$E$1	=1/(0,6+D10^2)^0,5	=E10*(3+(-1)^(C10+1))
11	8	=D10+$E$1	=1/(0,6+D11^2)^0,5	=E11
12				=СУММ(F3:F11)
13				=E1/3*F12

Рис. 1.27. Таблица с вычислением интеграла с заданной точностью по формуле Симпсона (режим отображений формул)

Как видим, значения интеграла с точностью три знака после запятой совпадают. Можно заметить, что данное решение достаточно громоздко.

Альтернативным является вычисление по правилу Рунге[2].

Правило Рунге — правило оценки погрешности численных методов, было предложено К. Рунге в начале 20 века.

Основная идея состоит в вычислении приближения выбранным методом с шагом h, а затем с шагом $h/2$, и дальнейшем рассмотрении разностей погрешностей для этих двух вычислений.

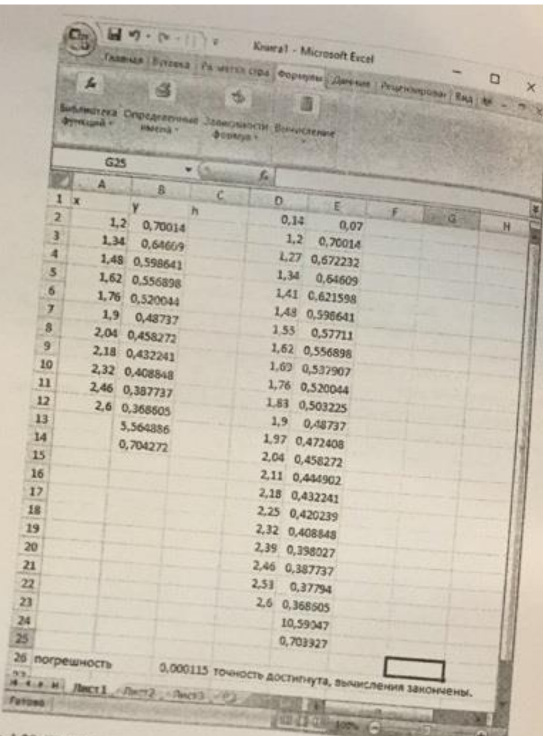
Применение правила Рунге

Интеграл вычисляется по выбранной формуле (прямоугольников, трапеций, парабол Симпсона) при числе шагов, равном n, а затем при числе шагов, равном $2n$. Погрешность вычисления значения интеграла при числе шагов, равном $2n$, определяется по формуле Рунге: Таким образом, интеграл вычисляется для последовательных значений числа шагов где n_0 — начальное число шагов. Процесс вычислений заканчивается, когда для очередного значения N будет выполнено условие где ε — заданная точность. Видно, что вычисления проще с использованием этого правила.

Формула трапеций

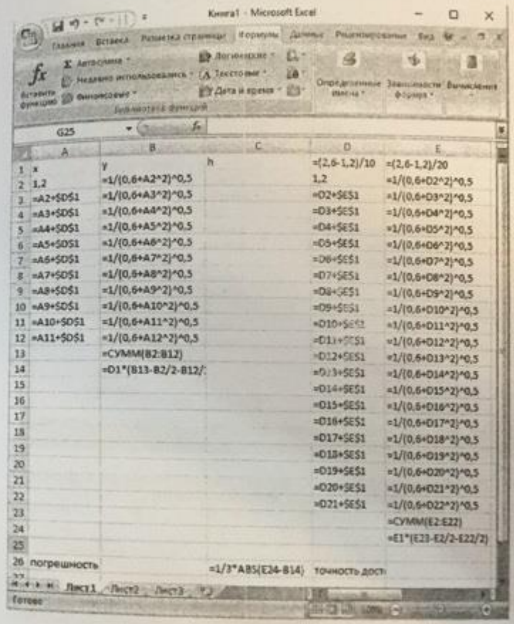
Решение. Принимаем $n=10$. На рис. 1.28 и 1.29 приведены решения в режимах отображения чисел и формул.

[2] Карл Давид Тольме Рунге (Carl David Tolmé Runge) (30 августа 1856 — 3 января 1927) — немецкий математик, физик и спектроскопист



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	h	0,14	0,07			
2	1,2	0,70014		1,2	0,70014			
3	1,34	0,64609		1,27	0,672232			
4	1,48	0,598641		1,34	0,64609			
5	1,62	0,556898		1,41	0,621598			
6	1,76	0,520044		1,48	0,598641			
7	1,9	0,48737		1,55	0,57711			
8	2,04	0,458272		1,62	0,556898			
9	2,18	0,432241		1,69	0,537907			
10	2,32	0,408848		1,76	0,520044			
11	2,46	0,387737		1,83	0,503225			
12	2,6	0,368605		1,9	0,48737			
13		5,564886		1,97	0,472408			
14		0,704272		2,04	0,458272			
15				2,11	0,444902			
16				2,18	0,432241			
17				2,25	0,420239			
18				2,32	0,408848			
19				2,39	0,398027			
20				2,46	0,387737			
21				2,53	0,37794			
22				2,6	0,368605			
23					10,59047			
24					0,703927			
25								
26	погрешность		0,000115 точность достигнута, вычисления закончены.					

Рис. 1.28. Таблица с вычислением интеграла с заданной точностью по формуле трапеция (режим отображений чисел)

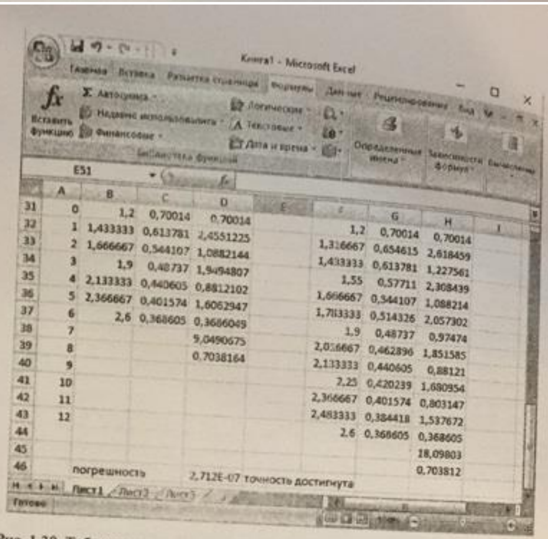


	A	B	C	D	E
1	x	y	h	=(2,6-1,2)/10	=(2,6-1,2)/20
2	1,2	=1/(0,6+A2^2)^0,5		1,2	=1/(0,6+D2^2)^0,5
3	=A2+$D$1	=1/(0,6+A3^2)^0,5		=D2+$E$1	=1/(0,6+D3^2)^0,5
4	=A3+$D$1	=1/(0,6+A4^2)^0,5		=D3+$E$1	=1/(0,6+D4^2)^0,5
5	=A4+$D$1	=1/(0,6+A5^2)^0,5		=D4+$E$1	=1/(0,6+D5^2)^0,5
6	=A5+$D$1	=1/(0,6+A6^2)^0,5		=D5+$E$1	=1/(0,6+D6^2)^0,5
7	=A6+$D$1	=1/(0,6+A7^2)^0,5		=D6+$E$1	=1/(0,6+D7^2)^0,5
8	=A7+$D$1	=1/(0,6+A8^2)^0,5		=D7+$E$1	=1/(0,6+D8^2)^0,5
9	=A8+$D$1	=1/(0,6+A9^2)^0,5		=D8+$E$1	=1/(0,6+D9^2)^0,5
10	=A9+$D$1	=1/(0,6+A10^2)^0,5		=D9+$E$1	=1/(0,6+D10^2)^0,5
11	=A10+$D$1	=1/(0,6+A11^2)^0,5		=D10+$E$1	=1/(0,6+D11^2)^0,5
12	=A11+$D$1	=1/(0,6+A12^2)^0,5		=D11+$E$1	=1/(0,6+D12^2)^0,5
13		=СУММ(B2:B12)		=D12+$E$1	=1/(0,6+D13^2)^0,5
14		=D1*(B13-B2/2-B12/		=D13+$E$1	=1/(0,6+D14^2)^0,5
15				=D14+$E$1	=1/(0,6+D15^2)^0,5
16				=D15+$E$1	=1/(0,6+D16^2)^0,5
17				=D16+$E$1	=1/(0,6+D17^2)^0,5
18				=D17+$E$1	=1/(0,6+D18^2)^0,5
19				=D18+$E$1	=1/(0,6+D19^2)^0,5
20				=D19+$E$1	=1/(0,6+D20^2)^0,5
21				=D20+$E$1	=1/(0,6+D21^2)^0,5
22				=D21+$E$1	=1/(0,6+D22^2)^0,5
23					=СУММ(E2:E22)
24					=E1*(E23-E2/2-E22/2)
25					
26	погрешность		=1/3*ABS(E24-B14)	точность дост	

Рис. 1.29. Таблица с вычислением интеграла с заданной точностью по формуле трапеция (режим отображений формул)

Формула Симпсона

Решение. Принимаем $n=6$. На рис. 1.30 и 1.31 приведены решения в режимах отображения чисел и формул.



	A	B	C	D	E	F	G	H
31	0	1,2	0,70014	0,70014				
32	1	1,433333	0,613781	2,4551225		1,2	0,70014	0,70014
33	2	1,666667	0,544107	1,0882144		1,316667	0,654615	2,618459
34	3	1,9	0,48737	1,9494807		1,433333	0,613781	1,227561
35	4	2,133333	0,440605	0,8812102		1,55	0,57711	2,308439
36	5	2,366667	0,401574	1,6062947		1,666667	0,544107	1,088214
37	6	2,6	0,368605	0,3686049		1,783333	0,514326	2,057302
38	7			9,0490675		1,9	0,48737	0,97474
39	8			0,7038164		2,016667	0,462896	1,851585
40	9					2,133333	0,440605	0,88121
41	10					2,25	0,420239	1,680954
42	11					2,366667	0,401574	0,803147
43	12					2,483333	0,384418	1,537672
44						2,6	0,368605	0,368605
45								18,09803
46		погрешность	2,712E-07 точность достигнута					0,703812

Рис. 1.30. Таблица с вычислением интеграла с заданной точностью по формуле Симпсона (режим отображений чисел)

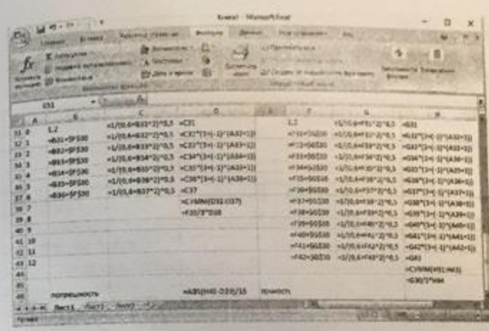


Рис. 1.31. Таблица с вычислением интеграла с заданной точностью по формуле Симпсона (режим отображений формул)

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 3

Задан интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. Вычислить его приближенное значение с точностью ε по формулам трапеций и Симпсона.

Вариант 1. Интеграл $\int\limits_{0,8}^{1,62} \frac{\lg(x^2+1)dx}{x}$ ε=10^{-3}	**Вариант 2.** Интеграл $\int\limits_{1,6}^{2,4} (x+1)\cdot\sin x dx$ ε=10^{-4}
Вариант 3. Интеграл $\int\limits_{0,6}^{1,41} \frac{\sin x}{x}dx$ ε=10^{-5}	**Вариант 4.** Интеграл $\int\limits_{0,36}^{1,21} \frac{\cos(x^2)}{x+1}dx$ ε=10^{-4}
Вариант 5. Интеграл $\int\limits_{0,6}^{1,41} \frac{\sin^2(x+0.5)}{x}dx$ ε=10^{-5}	**Вариант 6.** Интеграл $\int\limits_{0,36}^{1,21} \frac{\cos^2 x}{x+1}dx$ ε=10^{-4}

Вариант 7. Интеграл $\int_{1,6}^{3,21} \lg^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$ ε=10^{-3}	**Вариант 8.** Интеграл $\int_{0,24}^{1,02} (x+1)\cdot\cos^2 x dx$ ε=10^{-5}
Вариант 9. Интеграл $\int_{0,6}^{1,41} \sin\sqrt[3]{x}dx$ ε=10^{-3}	**Вариант 10.** Интеграл $\int_{0,52}^{1,19} tg\left(\frac{x^2}{3}\right)dx$ ε=10^{-5}
Вариант 11. Интеграл $\int_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$ ε=10^{-3}	**Вариант 12.** Интеграл $\int_{0,6}^{1,4} \frac{\cos x dx}{x+1}$ ε=10^{-5}

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОДЫ ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ, ИТЕРАЦИИ, НЬЮТОНА

Далеко не каждое уравнение может быть решено точно. Чаще задача об отыскании решения в конечном виде (в виде выражения с конечным числом алгебраических действий над некоторыми числами) неразрешима. Тогда обращаются к методам, позволяющим найти решение данного уравнения приближенно, с любой наперед заданной точностью. Приближенные методы применяются и в тех случаях, когда точные методы требуют сложных громоздких вычислений. Нелинейные уравнения, не имеющие методов точных решений, бывают разного типа:

- Алгебраическими ($x^5-x^3+6x-2=0$)
- Тригонометрическими ($4sin^2x+5cos(2,5x)-2=0$)
- Показательными ($2^{3x+5}+8^{x-3}-1=0$)
- Трансцендентными ($12^{sin3x}+xlnx-7=0$)
- Иррациональными ($\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}}=0$)

Всякое уравнение с одним неизвестным может быть записано в виде $f(x)=0$, где $f(x)$ - некоторая функция аргумента x. **Корнем уравнения называется такое значение $x=x_0$, при котором функция $f(x)$ обращается в нуль, т.е. $f(x_0)=0$.** Вещественный корень уравнения геометрически представляет абсциссу точки пересечения (или касания) графика функции $y=f(x)$ и оси Ox ($y=0$). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а ее значения на концах отрезка имеют разные знаки, то на данном отрезке найдется по крайней мере одна точка x_0, такая, что $f(x_0)=0$, т.е. на отрезке $[a, b]$ имеется по меньшей мере один корень уравнения $f(x)=0$. Геометрически это значит, что если график непрерывной функции расположен по разные стороны от оси Ox, то он пересекает ось, по крайней мере в одной точке $x=x_0$.

Вопрос определения приближенного значения корня реализуется в два шага:

1. отделить корень уравнения – найти такой интервал, внутри которого имеется корень данного уравнения, причем единственный на интервале;
2. определить с заданной точностью значение корня.

Отделение корней уравнения можно выполнить графически. Для этого необходимо построить график функции $y=f(x)$, по поведению которого можно судить о том, в каких интервалах находятся точки пересечения графика с осью Ox.

Для определения приближенного значения корня нелинейного уравнения существует ряд методов. Остановимся на трех из них: метод деления отрезка пополам, метод итерации, метод Ньютона.

Метод деления отрезка пополам (дихотомия)

Пусть известно, что на отрезке $[a, b]$ имеется корень уравнения $f(x)=0$. Это значит, что произведение значений функции на концах отрезка будет отрицательным, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$ (рис. 2.1).

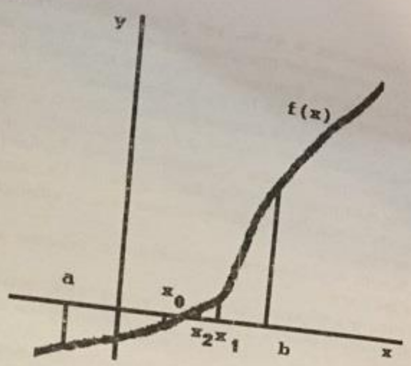


Рис. 2.1. Схема вычисления корня уравнения методом деления отрезка пополам

Если функция на этом отрезке монотонна, то на нем существует один корень. Делим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $x=\frac{a+b}{2}$. Корень попадает либо на левую половину отрезка, т.е. в отрезок $[a, x]$, либо на правую половину, т.е. в отрезок $[x,b]$. В зависимости от того, где очутился корень, в дальнейшем деление пополам производим либо отрезка $[a, x]$, либо $[x,b]$. Если $f(a)\cdot f(x)<0$, то корень находится на отрезке $[a, x]$, и далее для уточнения корня пополам делится этот отрезок. Если $f(x)\cdot f(b)<0$, то корень находится на отрезке $[x,b]$ *и* для вычисления корня нужно делить пополам этот отрезок. Повторяя эти действия до тех пор, пока длина отрезка, содержащего корень, не станет менее заданной точности, определяем значение корня с заданной точностью.

В соответствии с этими рассуждениями поиск решения в Microsoft Excel заключается в записи формул для уточнения границ отрезка для последующего деления его пополам и копирования формул до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

Задание 4. *Отделить корни уравнения* $3x^5-3x^4+5x^2-17x-10=0$ *и уточнить большее значение методом деления отрезка пополам с точностью* 10^{-3}.

Решение. <u>Первый шаг</u> - отделение корней. Строится график функции с помощью мастера диаграмм и делается вывод о наличии корней и отрезках, на которых они имеются (рис. 2.2.).

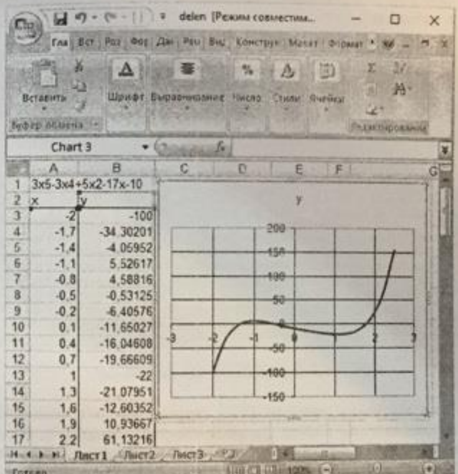


Рис. 2.2. Отделение корней

Вывод: уравнение имеет три корня: на промежутке $x\in[-2,-1]$, $x\in[-1, 0]$ и $x\in[1, 2]$.

<u>Второй шаг</u>: вычисление большего корня средствами Microsoft Excel, т.е. корня на промежутке от 1 до 2. Для этого ячейки соседних столбцов надписываем a, x, b, $f(a)$, $f(x)$, $f(b)$. Под ними записываем

начальные значения: для a - 1, для b - 2, для x $-\frac{a+b}{2}=1{,}5$. Далее записываем формулы для вычисления функции на левом конце промежутка, в точке x и на правом конце, формулы вычисления левого конца отрезка, содержащего корень, правого конца отрезка и центральной точки отрезка (рис. 2.3). Из-за громоздкости формул не показаны формулы в ячейках столбцов M, N, потому что они такие же как в столбце L.

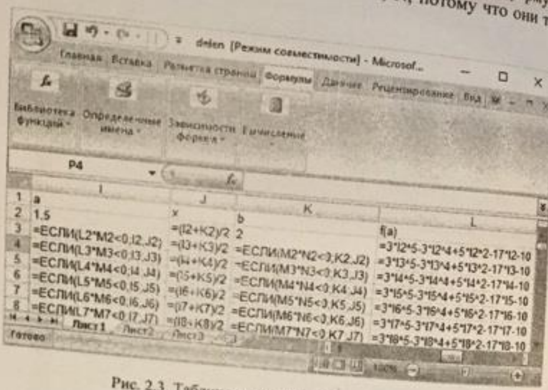
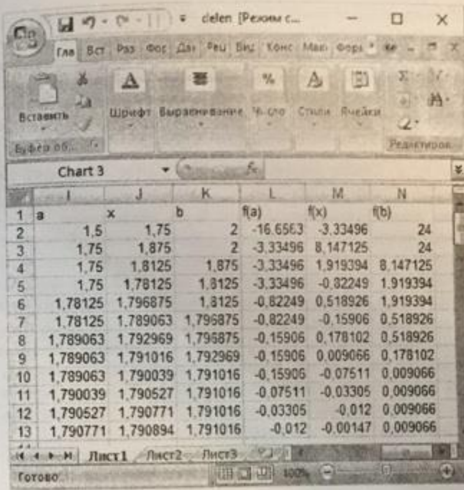


Рис. 2.3. Таблица в режиме отображения формул

Далее выделяем диапазон *I3:N3* (курсор мыши помещается в правый нижний угол ячейки для копирования набранных формул) и производится копирование до тех пор, пока в ячейках столбца *J* числа не будут разниться на величину заданной точности вычислений (рис. 2.4).

После этого можно записать ответ: приближенное значение корня с точностью 10^{-3} равняется 1,791.

Достоинством метода является простота алгоритма и высокая точность определения корня, а недостатком – медленная сходимость.



	I	J	K	L	M	N
1	a	x	b	f(a)	f(x)	f(b)
2	1,5	1,75	2	-16,6563	-3,33496	24
3	1,75	1,875	2	-3,33496	8,147125	24
4	1,75	1,8125	1,875	-3,33496	1,919394	8,147125
5	1,75	1,78125	1,8125	-3,33496	-0,82249	1,919394
6	1,78125	1,796875	1,8125	-0,82249	0,518926	1,919394
7	1,78125	1,789063	1,796875	-0,82249	-0,15906	0,518926
8	1,789063	1,792969	1,796875	-0,15906	0,178102	0,518926
9	1,789063	1,791016	1,792969	-0,15906	0,009066	0,178102
10	1,789063	1,790039	1,791016	-0,15906	-0,07511	0,009066
11	1,790039	1,790527	1,791016	-0,07511	-0,03305	0,009066
12	1,790527	1,790771	1,791016	-0,03305	-0,012	0,009066
13	1,790771	1,790894	1,791016	-0,012	-0,00147	0,009066

Рис. 2.4. Решение задачи в Microsoft Excel

Метод итерации

При приближенном решении математических задач широко применяются различные итерационные методы (от латинского слова «итерацио» - повторение). В каждом из таких методов некоторая единообразная вычислительная процедура повторяется вновь и вновь, причем каждый раз результат проведенного вычисления кладется в основу последующего вычисления. В благоприятных случаях это приводит к построению приближенного решения со все большей точностью. Итерационные методы называют еще методами последовательных приближений.

Уточнение корня можно получить по методу итераций (методу последовательных приближений). Для этого исходное уравнение представим в виде $x=\varphi(x)$, что всегда можно сделать и притом многими способами. Из промежутка, содержащего корень $[a, b]$, выбирается произвольное значение x_0, которое принимается за начальное приближенное значение корня. Последующие приближения $x_1, x_2, \dots x_n$ вычисляются по соотношениям $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, ..., $x_n=\varphi(x_{n-1})$. Общая рекуррентная формула (от латинского слова «рекуррентис» - возвращающийся) – формула, выражающая последующие члены последовательности через предыдущие. Повторяя эти вычисления, можно определить корень с заданной точностью. Теоретически возможно продолжать этот процесс бесконечно. Если он сходится (x_n имеет конечный предел при $n\to\infty$), то в пределе получается точное решение уравнения $x=\varphi(x)$. Этот процесс не всегда «сходится», т.е. позволяет вычислить корень. На практике сходимость обычно обнаруживается уже после нескольких итераций и вычисления прекращаются, когда x_n отличается от x_{n+1} меньше, заданная точность определения корня уравненя. Если процесс расходится, то это не значит, что решения нет: может быть, оно есть, но или уравнение $x=\varphi(x)$ или значение x_0 выбраны неудачно.

Условие сходимости метода итерации: на всем промежутке, содержащем корень должно выполняться условие $|\varphi'(x)|<1$.

Значит, алгоритм вычисления корня по методу итераций выглядит следующим образом:

1. выбирается начальное приближение корня, удовлетворяющее условию $a\le x_0\le b$, где $[a, b]$ – промежуток, содержащий корень;

2. определяется расчетное соотношение $x_n=\varphi(x_{n-1})$;

3.проверяется справедливость условия сходимости $|\varphi'(x)|<1$. При справедливости условия выполняется следующий пункт, при несправедливости – вычисления не выполняются;

4.выполняются вычисления по формулам $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, ..., $x_n=\varphi(x_{n-1})$. Вычисления прекращаются при справедливости неравенства $|x_n-x_{n-1}|\le\varepsilon$, где ε - заданная точность.

Задание 5. *Найти корень уравнения* $x^3-5\cdot x+1=0$ *методом итерации с точностью* 10^{-3}.

Решение: Первый шаг – отделение корней. Как правило, на промежутке $x\in[-2, 2]$ находятся корни алгебраических нелинейных уравнений. Строим график левой части уравнения на этом промежутке изменения аргумента (рис. 2.5).

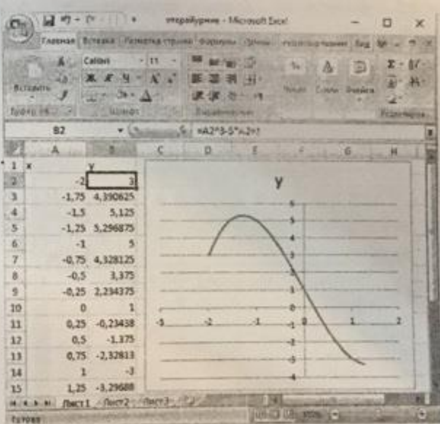
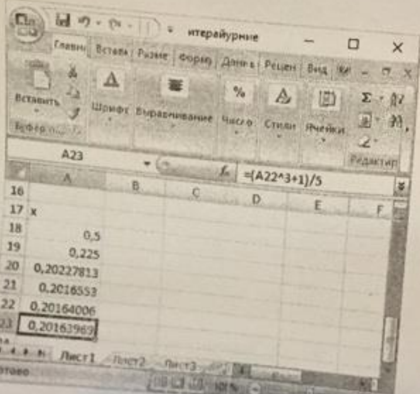


Рис. 2.5. Отделение корней уравнения

Вывод: уравнение имеет один корень на отрезке [0, 1]. Приводим уравнение к виду $x=\frac{1}{5}\cdot\left(x^3+1\right)$. Проверяем сходимость метода итерации. Производная правой части уравнения равняется $\frac{3}{5}\cdot x^2$ и ее максимальное значение $\max\left|\frac{3}{5}\cdot x^2\right|=\frac{3}{5}$, что меньше единицы, следовательно, процесс итераций будет сходиться. За нулевую итерацию принимаем середину отрезка, на котором определяется корень, т.е. x=0.5. Вычисления будем проводить по формуле $x_{n+1}=\frac{1}{5}\cdot\left(x_n^{\ 3}+1\right)$. Результаты приведены в таблице на рис. 2.6. В строке формул видна формула, по которой вычисляются следующие приближения.



	A	B	C	D	E	F
16						
17	x					
18	0,5					
19	0,225					
20	0,20227813					
21	0,2016553					
22	0,20164006					
23	0,20163969					

Рис. 2.6. Решение задачи в Microsoft Excel мето[illegible]ний

Недостатком метода итерации можно считать сложность обеспечения сходимости итерационного процесса.

Метод Ньютона (метод касательных)

Идея метода состоит в следующем: выбирается на отрезке, содержащем корень, значение x. Из точки $f(x)$ проводится касательная к функции в этой точке до пересечения ее с осью абсцисс. Точка пересечения касательной с осью абсцисс (обозначим ее x_1) принимается за первое приближение к корню. Вычисляется значение функции $f(x_1)$ и вновь проводится касательная к $f(x)$, но уже в точке x_1. Точка x_2 пересечения новой касательной с осью абсцисс принимается за второе приближение корня уравнения $f(x)=0$ (рис. 2.7). Признаком окончания вычислительного процесса является выполнение одного из условий $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ или $|f(x_n)| \le \varepsilon$. Вычисления проводятся по формуле

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$ где в знаменателе производная функции $f(x)$ в точке x_{n-1}.

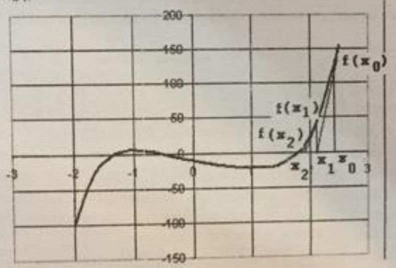


Рис. 2.7. Графическое содержание метода Ньютона

Алгоритм метода Ньютона:

1. выбор начального приближения корня x_0;

2. выполнение расчетов по формуле $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$;
3. признак окончания вычислительного процесса $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ или $|f(x_n)| \le \varepsilon$.

Задание 6. *Вычислить большее значение корня уравнения* $3x^5 - 3x^4 + 5x^2 - 17x - 10 = 0$ *методом Ньютона с точностью 10*$^{-3}$.

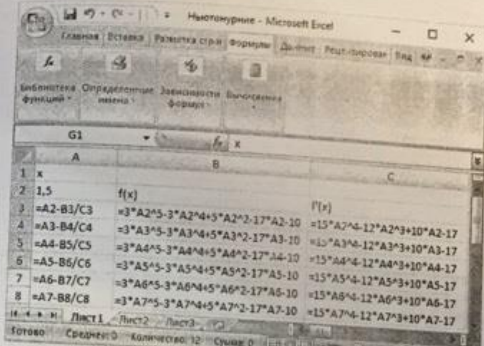
Решение. Уже знаем, что корень находится на промежутке от единицы до двух. Начальное приближение принимаем x=*1.5*.

Берем первую производную от левой части уравнения: $f'(x) = 15\cdot x^4 - 12x^3 + 10x - 17$. Надписываем ячейки таблицы Microsoft Excel первого столбца как «х». В ячейку следующей строки заносим первое приближение 1,5. В соседних столбцах набираем формулы вычисления функции $f(x)$ и $f'(x)$ в точке x. В ячейке столбца под значением x набирается формула Ньютона, содержащая ссылки на результаты вычислений в ячейках второго и третьего столбцов. Выделяем ячейки с формулами и копируем на диапазон до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность (рис. 2.8).

	A	B	C
1	x		
2	1,5	f(x)	f'(x)
3	1,998131	-16,65625	33,4375
4	1,836018	23,72583744	146,3542765
5	1,793549	4,142535572	97,54132139
6	1,79092	0,22849163	88,91999746
7	1,790911	0,000829147	86,28908861
8	1,790911	1,1042E-08	86,28728353

Рис. 2.8. Вычисление корня методом Ньютона

На рис. 2.9 представлена табличка с решением в режиме отображения формул.



	A	B	C
1	x		
2	1,5	f(x)	f'(x)
3	=A2-B3/C3	=3*A2^5-3*A2^4+5*A2^2-17*A2-10	=15*A2^4-12*A2^3+10*A2-17
4	=A3-B4/C4	=3*A3^5-3*A3^4+5*A3^2-17*A3-10	=15*A3^4-12*A3^3+10*A3-17
5	=A4-B5/C5	=3*A4^5-3*A4^4+5*A4^2-17*A4-10	=15*A4^4-12*A4^3+10*A4-17
6	=A5-B6/C6	=3*A5^5-3*A5^4+5*A5^2-17*A5-10	=15*A5^4-12*A5^3+10*A5-17
7	=A6-B7/C7	=3*A6^5-3*A6^4+5*A6^2-17*A6-10	=15*A6^4-12*A6^3+10*A6-17
8	=A7-B8/C8	=3*A7^5-3*A7^4+5*A7^2-17*A7-10	=15*A7^4-12*A7^3+10*A7-17

Рис. 2.9. Вычисление методом Ньютона – режим отображения формул

У метода Ньютона есть ограничение по применению: его нельзя реализовать, если функция $f(x)$ не имеет первой производной.

В Microsoft Excel имеется еще очень удобное средство для определения приближенного значения корня нелинейного уравнения. На ленте «Данные» есть кнопка «Анализ что если», которая содержит надстройку «Подбор параметра». Ее использование позволяет подобрать приближенное значение корня, причем это делает сама программа.

Распишем по шагам этот процесс. Сначала в ячейке записывается приближенное значение корня. В соседней ячейке вводится формула, по которой вычисляется значение функции $f(x)$ (рис. 2.10).

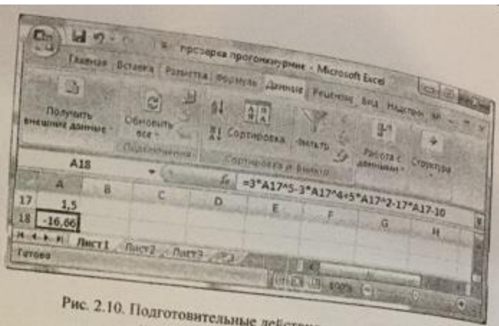


Рис. 2.10. Подготовительные действия к использованию надстройки «Подбор параметра»

При активной ячейке с формулой вычисления левой части уравнения (в данном случае А2), вызывается команда «Подбор параметра» (рис. 2.11).

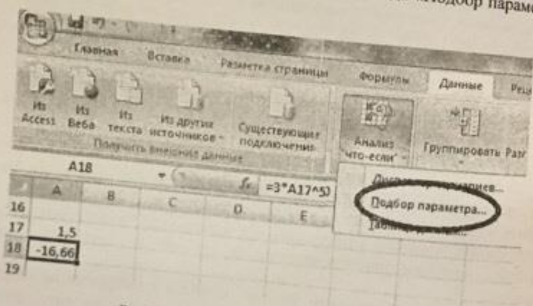


Рис. 2.11. Вызов команды «Подбор параметра»

Открывается окно, в котором необходимо установить три параметра (причем первый заносится программой автоматически при вызове команды «Подбор параметра») (рис. 2.12). Вторым пара-

метром является значение, которое должно быть достигнуто в активной ячейке таблицы (в ней записана формула вычисления левой части решаемого уравнения). Так как отыскивается корень, то значение второго параметра принимаем равным нулю (рис. 2.13).

Рис. 2.12. Диалоговое окно команды «Подбор параметра»

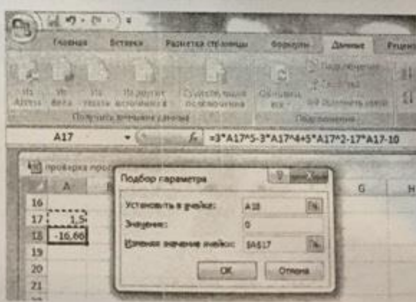


Рис. 2.13. Назначение параметров окна «Подбор параметра»

Третьим параметром является адрес ячейки, изменяя значение которой определяем корень, т.е. ячейки с значением x – А1 (рис. 2.14).

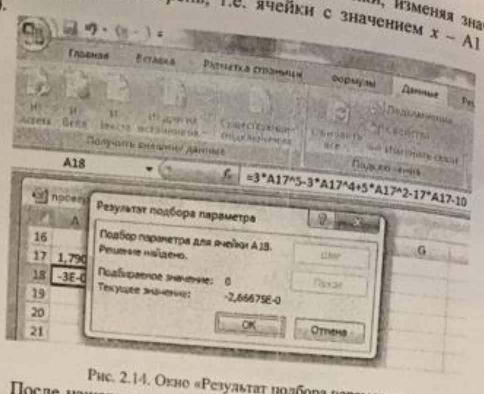


Рис. 2.14. Окно «Результат подбора параметра»

После нажатия кнопки «ОК» в ячейке А1 появляется подобранное приближенное значение корня (рис. 2.15).

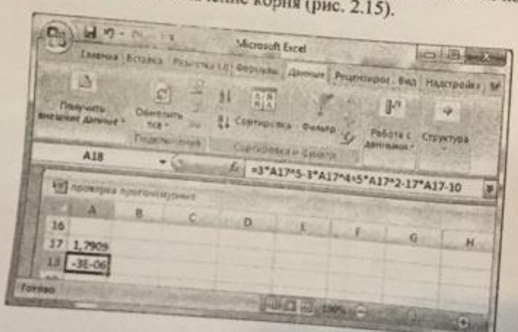


Рис. 2.15. Результат подбора параметра

В пакете MathCad имеется несколько функций для нахождения приближенного значения корня нелинейного уравнения.

Функция пакета "root"

Функция имеет четыре аргумента: функция, описывающая левую часть уравнения; аргумент; левый конец отрезка, содержащего корень уравнения; правый конец отрезка, содержащего корень. Решение приведено на рис. (2.16).

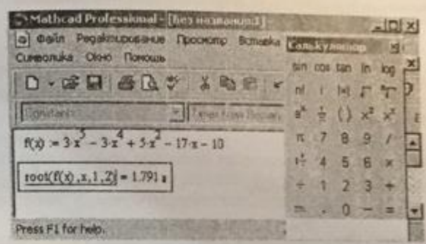


Рис. 2.16. Решение в пакете MathCAD

Функция пакета MathCad "Given – find"

Для нахождения корня нелинейного уравнения с помощью функции *find* вводится приближенное значение корня. Далее набирается служебное слово «given», далее решаемое уравнение, в котором левая и правая части уравнения разделяются «жирным знаком равенства» (логическое равенство) с палитры «Булева алгебра» (Boolean). Дальше идет оператор присваивания некоторой переменной результата работы функции. Решение приведено на рис. (2.17).

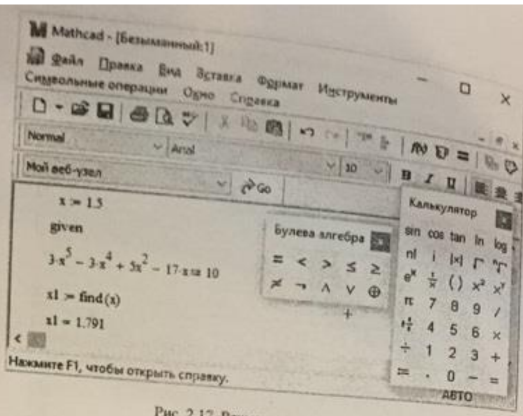


Рис. 2.17. Решение в пакете MathCAD

Значения корня, вычисленные по всем методам, совпадают.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЯ 4

Отделить корни нелинейного уравнения ***f(x)=0*** и найти приближенное значение корней с точностью 10^{-3} методами деления отрезка пополам, итерации, Ньютона в Microsoft Excel. Получить приближенное значение корней, используя надстройку Microsoft Excel «Подбор параметра». Получить решение в пакете MathCAD.

Вариант 1. $x^2 = \ln(x+1.48)$	**Вариант 2.** $3x+\cos x+1.27=0$
Вариант 3. $x^3-x^2+\sin x=0.42$	**Вариант 4.** $2\cdot x-\lg x=6.8$
Вариант 5. $2\cdot\sin(x-0{,}59)=1{,}5-x$	**Вариант 6.** $x+2.15\cdot\cos x=1{,}25$
Вариант 7. $x^3=0.5\ln(\frac{x}{3})+5{,}84$	**Вариант 8.** $3.9x-e^{-x}=2.63$

Вариант 9. $\sqrt{x+1}=\dfrac{1.085}{x}$	**Вариант 10.** $2-0.83x=\lg x$
Вариант 11. $x^2+\sin\dfrac{x}{0.82}=0.62$	**Вариант 12.** $x^3+0{,}2\cdot x^2+0{,}5\cdot x-1{,}2=0$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный в методических указаниях материал содержит теоретические сведения по приближенному вычислению определенных интегралов и определению корней нелинейных уравнений с заданной точностью.

В методических указаниях приведены подробные выполнения заданий 1-4 по курсу программные продукты в математическом моделировании. Указания содержат варианты заданий.

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Быкова О.Г.* Информатика. Приближенные методы вычислений: Методические указания к практическим и лабораторным работам. СПб, СПГГУ.- 2009.- 53 с.

2. *Быкова О.Г.* Информатика. Решение нелинейных и дифференциальных уравнений: Методические указания к практическим и лабораторным работам. СПб, СПГГИ.- 2009.- 70 с.

3. *Вержбицкий В.М.* Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения).- М.: Высшая школа, 2000.- 266 с.

4. *Вержбицкий В.М.* Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) М.: Высшая школа, 2001.- 382 с.

5. *Волков Е.А.* Численные методы: Учебное пособие. 4-е изд., стер.- СПб.: Издательство «Лань», 2007.- 256 с.