Министерство образования и науки Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна»

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания 3 и 4
для студентов-заочников 1-го курса

Методические указания и контрольные задания 3 и 4 для студентов заочной сокращенной формы обучения РИНПО

по направлениям:

26200062 - Технология изделий легкой промышленности по профилю «Технология швейных изделий»

262200.62 - Конструирование изделий легкой промышленности по профилю «Конструирование швейных изделий»

100800.62 - Товароведение

Составители
Г. П. Мещерякова
Е.В. Наумова

Санкт-Петербург

2014

УТВЕРЖДЕНО

на заседании методической комиссии

Регионального института непрерывного обучения

протокол № 1 от 14. 09. 2012

Рецензент

Н. В. Дробатун

Оригинал подготовлен составителями и издан в авторской редакции

Подписано в печать_11.10.12. Формат 60х84 1/16.

Усл. печ. л. 1,7_. Тираж _100_. Заказ 281/12

Электронный адрес: http://alt-rinpo.sutd.ru/

Отпечатано в типографии СПГУТД.

191028, Санкт - Петербург, ул. Моховая, 26

При выполнении контрольной работы на титульном листе указывается:

Фамилия, имя, отчество;

номер студенческого билета;

название дисциплины, номер контрольной работы, номер варианта.

Номер варианта соответствует последней цифре номера студенческого билета.

Перечень контрольных заданий по методичке кафедры математики
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА N 3 (методичка к/р 3,4)

Нечетный год поступления N 1(1 -10), 2(1 – 10), 3(1 – 10), 4(1 – 10).

Четный год поступления N 1(11 -20), 2(11 – 20), 3(11 – 20), 4(11 – 20).

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА N 4 (методичка к/р 3,4)

Нечетный год поступления N 1 (1 -10), 2 (1 - 10), 3 (1 - 10), 4 (1 - 10), 5(1 - 10).

Четный год поступления N 1 (11 -20), 2 (11 - 20), 3 (11 - 20), 4 (11 - 20), 5(11 - 20).

Контрольная работа № 3

Неопределенный интеграл

1. Определение и свойства неопределенного интеграла

Литература. [1], гл. X, §1-3, упр. 2, 5, 7, 9, 11, 14, 16, 17, 25, 41, 46, 49, 58, 60, 66.

2.Основные методы интегрирования

Литература. [1], гл. X, §4, упр. 27, 28, 33, 37, 47, 51, 65, 72, 83, 89, 91, 94, 100, 101; §6, упр. 127-131, 134, 135, 138, 140, 143, 145.

Пример 1. $\int f(x)dx = \int (6-\sqrt{x})dx$.

Решение. Используем теорему: интеграл от разности функций равен разности интегралов.

$$\int (6-\sqrt{x})dx = \int 6dx - \int \sqrt{x}dx = 6\int dx - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + C = 6x - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Пример 2. Вычислить $\int f(x)dx = \int \sin 2x dx$.

Решение. Сравним наш интеграл с табличным

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

У нас $f(x)=\sin 2x$, формально интеграл не табличный. Используем теорему о линейной замене переменной:

если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

В интеграле $ax+b=2x$, т.е. $a = 2$, следовательно

$$\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2}+C$$

.

Проверим полученный результат дифференцированием

$$\left(-\frac{\cos 2x}{2}+C\right)' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x)\cdot 2+0 = \sin 2x.$$

Интеграл взят правильно.

Пример 3. $\int f(x)dx = \int \sin^2 x\cos x dx$, т.е. $f(x)=\sin^2 x\cos x$.

Решение. Так как $(\sin x)' = \cos x$, то используем теорему о «замене типа подведение под знак дифференциала»

$$\int F(g(x))g`(x)dx = \int F(g(x))dg(x) = \int F(t)dt \text{, где } t = g(x)$$

У нас $\sin x = t$. Тогда $dt = d\sin x = \cos x dx$

$$\int \sin^2 x\cos x dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3}+C = \frac{(\sin x)^3}{3}+C$$

Пример 4. $\int f(x)dx = \int \frac{x^2}{x^3+7}dx$, т.е. $f(x)=\frac{x^2}{x^3+7}$.

Решение. Так как $(x^3+7)' = 3x^2$, то то используем теорему о «замене типа подведение под знак дифференциала», $x^3+7=t$. Тогда $dt = d(x^3+7) = 3x^2dx$. Домножим в числителе на 3, при этом надо и знаменатель умножить на 3.

$$\int \frac{x^2}{x^3+7}dx = \int \frac{3x^2dx}{3(x^3+7)} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln t + C = \frac{1}{3}\ln(x^3+7)+C.$$

Проверим дифференцированием

$$(\ln(x^3+7))' = \frac{1}{x^3+7}\cdot(3x^2+0) = \frac{3x^2}{x^3+7}.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{e^{arctg\,(x)}}{1+x^2}dx$.

Решение. Так как $(\arg tg(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, то используем теорему о «замене типа подведение под знак дифференциала» *argtgx* = *t*, тогда dt = d(arctg(x)) = $\frac{1}{1+x^2}dx$ и $e^{\text{arctg } x}$ = e^t

Подставляя в исходный интеграл, имеем $\int \frac{e^{arctg\,(x)}}{1+x^2}dx = \int e^t dt = e^t + C =$ $\mathrm{e}^{\mathrm{arctg}\,x}$ + C.

Пример 6. Найти $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 dx$.

Решение. Здесь уместна замена t = cos x, т.к. dt = - sin x dx, и $\sin^3$x dx = $\sin^2$x sinx dx. Поэтому

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int (1-\cos^2) \cdot \cos^2 x \cdot (\sin x \cdot dx) = -\int (1-t^2) \cdot t^2 \cdot dt = \int (t^4 - t^2) \cdot dt =$$
$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Пример 7. Найти $\int x \sin(x) dx$.

Решение. Используем метод интегрирования по частям

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Так как производная от *x* равна 1, то возьмем *u* = x. Используем формулу, приведя схему записи удобную при использовании метода интегрирования по частям.

$$\int x\sin(x)dx = \begin{vmatrix} \mathrm{u = x} & \mathrm{dv = \sin x dx} \\ \mathrm{du = dx} & \mathrm{v = -\cos x} \end{vmatrix} = -x\ \cos x + \int \cos(x)dx = -x\ \cos x + \sin x + \mathrm{C}.$$

Пример 8. Найти $\int \frac{x+1}{x(x-1)}dx$.

Решение. Используем метод разложения на простейшие. Знаменатель имеет два различных действительных корня, разложим подинтегральную функцию на простейшие слагаемые

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x-A}{x(x-1)}$$

Приравняем числители и учтем, что коэффициенты при одинаковых степенях *x*, стоящие слева и справа должны совпадать

$$x+1 = (A+B)x - A \Rightarrow A = -1,\ \ A+B = 1 \Rightarrow B = 2$$

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}$$

Следовательно

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)}dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} \right) dx = -\ln|x| + 2\ln|x-1| + C$$

Определенный интеграл

1. Определение, свойства и вычисление определенного интеграла

Литература.[1], гл.XI, § 1-5, 6 (пример можно пропустить), упр. 8, 10, 11, 13, 16-21, 23, 24.

Пример. Вычислить $\int_0^2 (x^2 - x + \sqrt{x})dx$.

Решение. Так как интеграл от суммы функций равен сумме интегралов, то

$$\int_0^2 (x^2 - x + \sqrt{x})dx = \int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 x dx + \int_0^2 \sqrt{x} dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + \frac{2}{3}\cdot 2^{3/2}\right) - 0$$

2. Геометрические приложения определенного интеграла

Литература. [1], гл.XII, §1, упр. 1, 3, 5-11; §2, упр. 13, 14, 17, 18; §3, упр. 38-41, 43, 47; §4, 5, упр. 20-23, 25, 32; §6, упр. 49, 51, 53, 56.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{5}{x}$ и $x + y = 6$.

Решение. Построим в системе координат xOy эти линии. Найдем точки пересечения этих линий

$$\frac{5}{x} = 6 - x \;\Rightarrow\; x^2 - 6x + 5 = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_1 = 5 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 1 \end{cases},$$

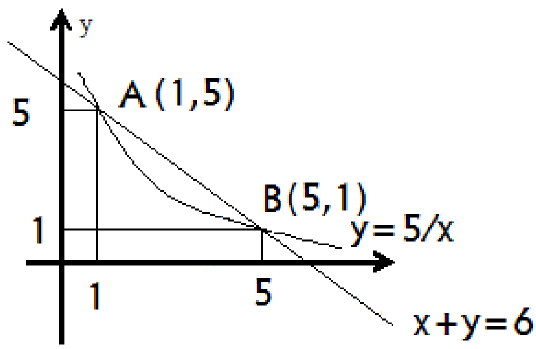

Рис.1.

Обозначим эти точки через A и B. Итак, A(1; 5), B(5; 1). Искомая площадь S равна разности площадей фигур, ограниченных линиями $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$, $y = 6 - x$ (обозначим эту площадь через S_1) и линиями $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$, $y = \frac{5}{x}$ (эту площадь обозначим через S_2). Таким образом

$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx$$

Площадь S_2 может быть вычислена с применением определенного интеграла

$$S_1=\int_1^5\frac{5}{x}dx=5\int_1^5\frac{dx}{x}=5\ln x\Big|_1^5=5(\ln 5-\ln 1)=5\ln 5\ \text{ед}^2.$$

Площадь S_1 можно, конечно, вычислить как сумму площадей прямоугольного треугольника и прямоугольника, но удобнее все-таки вычислить S_1 как интеграл

$$S_1=\int_1^5(6-x)dx=\int_1^5 6dx-\int_1^5 xdx=6x\Big|_1^5-\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^5=6(5-1)-\frac{1}{2}(5^2-1^2)=24-12=12\ \text{ед}^2\ .$$

Теперь можно вычислить и искомую площадь

S = S_1 – S_2 = 12 – 5 ln5

Ответ: S =12 – 5 ln5 *ед*^{2}.

Пример 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной прямой $y=x$ и параболой $y=\sqrt[3]{x}$.

Решение. Найдем точки пересечения линий. Для этого решим уравнение $x=\sqrt[3]{x}$. Получим $x_1=0,\ \ x_2=1$.

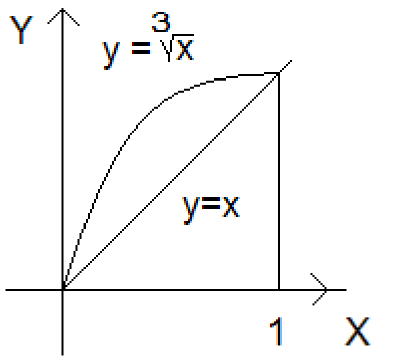

Рис. 2.

Объем тела может быть вычислен по формуле $V=V_1-V_2=\pi\int_a^b f_1^2(x)dx-\pi\int_a^b f_2^2(x)dx$, где

$f_1(x)=\sqrt[3]{x}$, $f_2(x)=x$.

$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^1(\sqrt[3]{x})^2dx-\pi\int_0^1 x^2dx=\pi\frac{x^{5/3}}{5/3}\Bigg|_0^1-\pi\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\pi\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)=\pi\frac{4}{15}\ .$$

Ответ: $V=\pi\dfrac{4}{15}$.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия
[2, гл. XIII, § 2, 3, упр. 1-8].

2. Уравнение с разделенными и разделяющимися переменными
[2, гл. XIII, § 4, упр. 9-16].

Пример 1. Найти общее решение уравнения $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0.$

Решение. Сначала определим вид дифференциального уравнения. Данное уравнение не является уравнением с разделенными переменными, так как коэффициенты при dx и dy зависят каждый от двух переменных. Но, разделив обе части уравнения на произведение $\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}$ (считая, что $1-x^2 \neq 0,\ 1-y^2 \neq 0$), приведем его к виду

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0$$

это уравнение с разделенными переменными.

Находим общее решение

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = C$$

или

$$-\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = C .$$

Умножив обе части на (-1), включим знак “-“ в постоянную *C*. Решение примет вид

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C .$$

Таким образом, нами получено общее решение заданного уравнения.

3. Однородные уравнения первого порядка
[2, гл. XIII, § 5, упр. 39-46].

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{x+3y}{2x}. \qquad (1)$$

Решение. Определим вид этого уравнения. Это – однородное уравнение, поскольку его правая часть есть $f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Поделив почленно правую часть на $2x$, получим

$$y' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{y}{x}$$

Делаем подстановку $\frac{y}{x} = u(x)$ или $y = ux$. Тогда $y' = u'x + u$ и уравнение примет вид

$$u(x)\,.\,u'x + u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u \qquad (2)$$

Разделяем переменные

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}u, \quad \frac{du}{1+u} = \frac{dx}{2x}$$

и интегрируем

$$\int \frac{du}{1+u} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|1+u| = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln C$$

или после потенцирования

$$1 + u = Cx^{\frac{1}{2}}.$$

Нами получено общее решение уравнения (2).

Чтобы найти общее решение уравнения (1), вернемся к старой переменной y. Подставим $\frac{y}{x} = u$, тогда будем иметь

$$1 + \frac{y}{x} = Cx^{\frac{1}{2}} \quad \text{или} \quad y = Cx^{\frac{3}{2}} - x.$$

4. Линейные уравнения первого порядка

[2, гл. XIII, § 7, упр. 57-65].

Пример 3. Найти общее решение уравнения первого порядка

$$y' - \frac{2}{x}y = x$$

Решение. Определим вид этого уравнения. Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$ называется линейным. Полагаем $y = u \cdot v$; $y' = u'v + v'u$ и подставляем это в данное уравнение

$$u'v + v'u - \frac{2}{x}uv = x$$

Группируем члены

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = x$$

и полагаем

$$v' - \frac{2}{x}v = 0 \qquad (3)$$

Остается

$$u'v = x. \qquad (4)$$

Находим сначала v из (3)

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v; \quad \frac{dv}{v} = \frac{2}{x}dx; \quad \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|v| = 2\ln|x|; \quad v = x^2$$

Заметим, что v не содержит никаких произвольных постоянных.

Подставляем v в (4) и получаем

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}; \quad du = \frac{dx}{x}; \quad u = \int \frac{dx}{x} + C;$$

$$u = \ln|x| + C.$$

Окончательно получаем искомое общее решение
$y = vu = (\ln|x| + C)x^2$.

5. Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия.
[2, гл. XIII, § 16, 17, упр. 118-124].

6.Линейные однородные уравнения второго порядка

[2, гл.XШ, § 20,21, упр. 129-137].

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Решение. Ищем решение уравнения в виде $y = e^{kx}$, тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ и, подставляя в исходное уравнение получим $k^2 e^{kx} - 4ke^{kx} + 3e^{kx} = 0$. Так как $e^{kx} \neq 0$, то на него можно сократить и мы получим $k^2 - 4k + 3 = 0$.

Находим его корни

$$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1;$$

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 1.$$

Корни характеристического уравнения вещественные, различные, значит, общее решение дифференциального уравнения имеет вид
$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$

или

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x.$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения
$y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение (см. пример 9)
$k^2 - 4k + 4 = 0$.

Решаем его
$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$.
Корни характеристического уравнения вещественные равные. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$y=(c_1+c_2x)e^{kx}$
или
$y=e^{2x}(c_1+c_2x).$
Пример 6. Найти общее решение уравнения
$y''-4y'+13y=0.$
Решение. Составляем характеристическое уравнение (см. пример 9)
$k^2-4k+13=0;$
$k_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm3i=\alpha\pm i\beta.$
Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, значит, общее решение дифференциального уравнения имеет вид
$y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$
или
$y=e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x).$

7. Линейные, неоднородные уравнения второго порядка

[2, гл.ХШ, § 23,24, упр. 148-157].

Пример 7. Найти общее решение уравнения

$y''-2y=xe^{-x}.$

Решение. Находим сначала общее решение соответствующего однородного уравнения
$y''-2y=0.$

Характеристическое уравнение $k^2-2=0.$ Его корни $k_{1,2}=\pm\sqrt{2}.$

Общее решение однородного уравнения

$\mathrm{Y}=c_1e^{\sqrt{2}x}+c_2e^{-\sqrt{2}x}.$

Теперь следует найти частное решение $\overline{y}$ неоднородного уравнения. Правая часть $f(x)=xe^{-x}$, значит $\overline{y}$ ищем в форме $\overline{y}=(Ax+B)e^{-x}$, т.к. $k=-1$ не является корнем характеристического уравнения.

Требуется найти неизвестные коэффициенты А и В. Для определения А и В дифференцируем дважды $\overline{y}$

$\overline{y'}=Ae^{-x}-(Ax+B)e^{-x}$, $\overline{y}$

$\overline{y''}=-2Ae^{-x}+(Ax+B)e^{-x}$

и подставляем это в данное неоднородное уравнение:
$-2Ae^{-x}+(Ax+B)e^{-x}-2(Ax+B)e^{-x}\equiv xe^{-x}.$

Так как $e^{-x}\neq0,$ то сократив e^{-x}, получим тождественное равенство двух полиномов

$-2A-Ax-B\equiv x\Rightarrow -Ax+(-B-2A)\equiv x.$

Значения А и В найдем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях

при x : $-A = 1 \Rightarrow A = -1$;

при x^0: $-2A - B = 0 \Rightarrow B = -2A = 2$.

Подставляем найденные А и В в $\overline{y}$

$\overline{y} = (x+2)e^{-x} = -(x-2)e^{-x}$.

Общее решение неоднородного уравнения
$y = \mathrm{Y} + \overline{y} = c_1 e^{x\sqrt{2}} + c_2 e^{-x\sqrt{2}} - (x-2)e^{-x}$.

Пример 8. Найти общее решение уравнения
$y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение
$y'' + y' - 2y = 0$.

Решаем его

$$k^2 + k - 2 = 0;\quad k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2};\quad k_1 = 1;\quad k_2 = -2;$$

$\mathrm{Y} = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$.

Правая часть данного неоднородного уравнения
$f(x) = 8\sin 2x$.

Следовательно, частное решение $\overline{y}$ разыскиваем в виде
$\overline{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$,

т.к. $k = 2$ не является решением характеристического уравнения.

Дифференцируем и подставляем это решение в неоднородное уравнение
$\overline{y'} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$;

$\overline{y''} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$;

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2B\sin 2x - 2A\cos 2x \equiv 8\sin 2x.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в левой и правой частях тождества
при $\sin 2x$: $\quad -4B - 2A - 2B = 8$;

при $\cos 2x$: $\quad -4A + 2B - 2A = 0$.

Из этой системы находим А и В

$$-6B-2A=8;\quad 3B+A=-4;\quad B=3A;\quad A=-\frac{2}{5};$$

$$-6A+2B=0;\quad 3A-B=0;\quad B=-\frac{6}{5};$$

$$\bar{y}=-\frac{2}{5}\cos 2x-\frac{6}{5}\sin 2x.$$

Общее решение

$$y=\mathrm{Y}+\bar{y}=c_1e^x+c_2e^{-2x}-\frac{2}{5}(\cos 2x+3\sin 2x).$$

Пример 9. Найти частное решение уравнения $y''+4y=\sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=1$.

Решение. Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, необходимо получить сначала общее решение данного неоднородного уравнения. Находим его (см. пример 8)

$$k^2+4=0,\quad k_{1,2}=\pm 2i,\quad \mathrm{Y}=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x;$$

$$\bar{y}=A\sin x+B\cos x,\quad \overline{y'}=A\cos x-B\sin x;$$

$$\overline{y''}=-A\sin x-B\cos x.$$

Подставляем $\bar{y}$ в уравнение

$$-A\sin x-B\cos x+4A\sin x+4B\cos x=\sin x;$$

$$-A+4A=1,\quad 3A=1,\quad A=\frac{1}{3};$$

$$-B+4B=0,\quad 3B=0,\quad B=0;$$

$$\bar{y}=\frac{1}{3}\sin x.$$

Искомое частное решение будем находить из общего. Общее решение неоднородного уравнения

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{3}\sin x;$$

$$y'=-2c_1\sin 2x+2c_2\cos 2x+\frac{1}{3}\cos x.$$

Подставляем начальные условия. При $x=0$ имеем

$$1=c_1,\quad 1=2c_2+\frac{1}{3};\quad c_2=\frac{1}{3}.$$

Найденные постоянные подставляем в общее решение неоднородного уравнения

$$y=\cos 2x+\frac{1}{3}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin x$$

\- искомое частное решение.

Контрольная работа № 3. Задания.

1. Найти неопределенные и определенный интегралы. В двух первых примерах (п. а) и б) проверить результаты дифференцированием.

№	а	б	в	г
1.1	$\int \sin(2x)dx$	$\int e^x\sqrt{(1+e^x)}dx$	$\int xe^{3x}dx$	$\int_0^2 \sqrt{1+4x}dx$
1.2	$\int \cos(2x)dx$	$\int \frac{xdx}{(x^2+4)^3}$	$\int x\ln(2x)dx$	$\int_0^1 3^{x+1}dx;$
1.3	$\int \frac{1}{2x+3}dx$	$\int e^{\sin x}\cos xdx$	$\int xarctgxdx$	$\int_1^2 \sqrt[3]{2+x}dx$
1.4	$\int \sqrt{1+x}dx$	$\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$	$\int x\sin 2xdx$	$\int_1^2 \sqrt[3]{5-x}dx$
1.5	$\int \sqrt[4]{2x+1}dx$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tgx+1)};$	$\int x\cos 3xdx;$	$\int_0^3 e^{2-3x}dx$
1.6	$\int \frac{1}{\sin^2(3x-2)}dx$	$\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx$	$\int xe^{-x}dx$	$\int_0^2 \sqrt{2x+5}dx$
1.7	$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}dx$	$\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$	$\int (2x+1)arctgxdx$	$\int_0^2 \sqrt{2x+5}dx$
1.8	$\int \sqrt{2x+1}dx$	$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$	$\int (3x+5)\ln xdx$	$\int_1^3 \frac{1}{2x-1}dx$
1.9	$\int e^{1-2x}dx$	$\int \cos x\cdot 3^{\sin x}dx$	$\int x\sin(4x)dx$	$\int_2^3 (1-2x)dx$
1.10	$\int \cos(1-x)dx$	$\int x\sqrt{x^2+1}dx$	$\int x\cos(2x)dx$	$\int_{-2}^2 (x^4+3)dx$
1.11	$\int \sqrt[4]{1-2x}dx$	$\int \frac{dx}{x(2\ln x+3)}$	$\int x\ln(x^2+1)dx$	$\int_0^3 \frac{1}{x+2}dx$
1.12	$\int e^{2x+3}dx$	$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$\int (2x-1)e^{3x}dx$	$\int_0^1 \sqrt{4x-1}dx$
1.13	$\int (1-3x)^3dx$	$\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$	$\int (2x-1)\cos xdx$	$\int_{-2}^2 (x^3-2)dx$

1.14	$\int \sin(3x-1)dx$	$\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$	$\int (4x+3)\cdot \sin xdx$	$\int_0^3 e^{2x-1}dx;$
1.15	$\int (2x-3)^4 dx$	$\int \frac{(\sqrt[3]{4+\ln x})dx}{x}$	$\int (x-1)arctgxdx$	$\int_0^1 2^{x-1}dx;$
1.16	$\int \sin(2-5x)dx$	$\int e^{\cos 2x}\sin 2xdx$	$\int (x-2)e^{-x}dx$	$\int_{-2}^0 \sqrt{1-3x}dx$
1.17	$\int \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}dx$	$\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$	$\int (x+2)\sin 5xdx$	$\int_{-1}^2 (1-4x^3)dx;$
1.18	$\int 2^{1-x}dx$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{tgx}}$	$\int (x-1)\ln xdx$	$\int_2^5 (x^3+2x)dx$
1.19	$\int \frac{1}{\cos^2(3x-2)}dx$	$\int \frac{\sqrt{ctgx}}{\sin^2 x}dx$	$\int (1-x)arctgxdx$	$\int_{-1}^2 (4x^2-1)dx;$
1.20	$\int \frac{1}{3-4x}dx$	$\int \frac{dx}{x(2\ln x+3)}$	$\int x\cdot\cos(2x+1)dx$	$\int_2^5 (x^3-x)dx$

2. Геометрические приложения определенного интеграла

2.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=3x+7$.

2.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+1$ и прямой $y=5$.

2.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=1-3x^2$ и прямой $y=-2$.

2.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=3-x^2$ и прямой $y=-1$.

2.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sin x$, $x\in[0,\pi]$ и прямой $y=\frac{1}{2}$.

2.6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sin x$, $x\in[0,\pi]$ и прямой $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\cos x$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ и прямой $y=\frac{1}{2}$.

2.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\cos x$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ и прямой $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2.9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=e^{2x}$, осью OX и прямыми $x=-1,\ x=2$.

2.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=\sin^2 x, 0\le x\le \pi$.

2.11. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}.$

2.12. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной полуэллипсом $y = 3\sqrt{1-x^2}$.

2.13. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{2}{1+x}$ и прямыми $x = 1,\ x = 4$.

2.14. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$ и кубической параболой $y = \frac{x^3}{8}$.

2.15. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

2.16. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

2.17. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = 2\sqrt{x}.$

2.18. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной полуэллипсом $y = 3\sqrt{4-x^2}$.

2.19. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{1}{1+2x}$ и прямыми $x = 3,\ x = 5$.

2.20. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{3}$ и кубической параболой $y = \frac{x^3}{9}$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

3. 1 $y' - \frac{y}{x+3} = x + 3.$

3.2. $y' + y = \left(1 + \frac{3}{x}\right)e^{-x}.$

3.3. $y' + ytgx = \frac{3\cos x}{\sin^2 3x}.$

3.4. $y' - \frac{y}{x+2} = 3(x+2).$

3.11. $xy' - y = 3x^2 - 3$

3.12. $y' = \frac{y}{x+2} + 9.$

3.13. $3xy' = 3y + \frac{x}{1+x^2}.$

3.14. $3xy' - 3y = 2x^3 + 1.$

3.5. $y' + 3y = \left(3 + \frac{2}{x}\right)e^{-x}.$

3.6. $y' + 3ytg3x = \frac{2\cos 3x}{\sin^2 2x}.$

3.7. $y' - \frac{y}{x+2} = 5(x+2).$

3.8. $y' + 5y = \left(5 + \frac{2}{x}\right)e^{-5x}.$

3.9. $y' + 5ytg5x = \frac{2\cos 5x}{\sin^2 2x}.$

3.10. $y' - \frac{y}{x+5} = 3(x+5).$

3.15. $y' = \frac{y}{x-1} + 4(x^2 - 1).$

3.16. $2xy' = 2y + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

3.17. $5xy' - 5y = 2x + 1.$

3.18. $5y' = \frac{5y}{x} + 4x^2 - 4.$

3.19. $2xy' = 2y + x\cos x.$

3.20. $3xy' = 3y + 5x^3.$

4. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее начальным условиям

4.1. $y'' + 49y = 0;\quad y_0 = 7;\quad y_0' = 35$ при $x_0 = \frac{\pi}{14}.$

4.2. $y'' + 25y = 0;\quad y_0 = -7;\quad y_0' = 175$ при $x_0 = \frac{\pi}{5}.$

4.3. $y'' + 81y = 0;\quad y_0 = 9;\quad y_0' = 18$ при $x_0 = \frac{\pi}{18}.$

4.4. $y'' + 4y = 0;\quad y_0 = -9;\quad y_0' = 36$ при $x_0 = \frac{\pi}{2}.$

4.5. $y'' + y = 0;\quad y_0 = 1;\quad y_0' = 3$ при $x_0 = \frac{\pi}{2}.$

4.6. $y'' + 9y = 0;\quad y_0 = -1;\quad y_0' = 9$ при $x_0 = \frac{\pi}{3}.$

4.7. $y'' + 9y = 0;\quad y_0 = 3;\quad y_0' = 6$ при $x_0 = \frac{\pi}{6}.$

4.8. $y'' + 4y = 0;\quad y_0 = -3;\quad y_0' = 12$ при $x_0 = \frac{\pi}{2}.$

4.9. $y'' + 25y = 0;\quad y_0 = 5;\quad y_0' = 15$ при $x_0 = \frac{\pi}{10}.$

4.10. $y'' + 9y = 0;\quad y_0 = -5;\quad y_0' = 45$ при $x_0 = \frac{\pi}{3}.$

4.11. $y'' + 3y' + 2y = 0;\quad y\big|_{x=0} = 1;\quad y'\big|_{x=0} = -1.$

4.12. $y'' + 2y' = 0;\quad y\big|_{x=0} = 1;\quad y'\big|_{x=0} = 0.$

4.13. $y'' + \pi^2 y = 0;\quad y\big|_{x=1} = 2;\quad y'\big|_{x=1} = \pi.$

4.14. $y'' + 16y = 0;\quad y_0 = 4;\quad y_0' = 28$ при $x_0 = \frac{\pi}{8}.$

4.15. $y'' + 49y = 0;\quad y_0 = -4;\quad y_0' = 196$ при $x_0 = \frac{\pi}{7}.$

4.16. $y'' + 25y = 0;\quad y_0 = 5;\quad y_0' = 30$ при $x_0 = \frac{\pi}{10}.$

4.17. $y''+36y=0;\quad y_0=-5;\quad y_0'=180$ при $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

4.18. $y''+64y=0;\quad y_0=8;\quad y_0'=24$ при $x_0=\dfrac{\pi}{16}$.

4.19. $y''+9y=0;\quad y_0=-8;\quad y_0'=72$ при $x_0=\dfrac{\pi}{3}$.

4.20. $y''+81y=0;\quad y_0=9;\quad y_0'=63$ при $x_0=\dfrac{\pi}{18}$.

Контрольная работа №4

Ряды

1. Основные определения

[2, гл. XVI, § 1, 2, упр. 1-5].

2. Признаки сходимости рядов с положительными членами

[2, гл. XVI, § 3 - 6, упр. 6-18].

Пример. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+...+\frac{n!}{n^n}+...$$

Решение. Для этого ряда $U_n=\dfrac{n!}{n^n}$. Используем признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами (напомним, что $n!=1\cdot 2...n$, те. 2!=1·2, 3!=1·2·3 и т.д.)

$$U_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Найдем отношение $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{1\cdot 2\,...\,n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\,...\,n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Зная, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=e,$ вычислим

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1.$$

Так как $q<1$, то ряд сходится.

3. Знакочередующиеся ряды. Знакопеременные ряды

[2, гл. XVI, § 7,8, упр. 20-26].

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+...+(-1)^n\frac{1}{\ln n}+...\quad,\ U_n=\frac{1}{\ln n}$$

По теореме Лейбница ряд сходится, если выполнены два условия:

1) $U_n > U_{n+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$.

Проверим, выполнены ли эти условия для нашего ряда

$$U_n = \frac{1}{\ln n}; \quad U_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+1)};$$

$$\ln n < \ln(n+1) \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Первое условие выполнено.

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Второе условие выполнено, следовательно, ряд сходится условно.

Проверим, есть ли абсолютная сходимость, т.е. сходится ли ряд.

$$\sum_{n=2}^{\infty} |U_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{1}{\ln n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + ... + \frac{1}{\ln n} + ...$$

Используем признак сравнения сходимости рядов с положительными членами и сравним наш ряд с гармоническим рядом $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + ...$, который расходится.

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ тоже расходится и, следовательно, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ абсолютно не сходится, а сходится только условно.

4. Функциональные ряды

[2, гл. XVI, § 9 - 12].

5. Степенные ряды

[2, гл. XVI, § 13, упр. 30, 31, 35-37].

Пример. Определить интервал сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + ... + \frac{1}{n+1}x^n + ... \quad .$$

Решение. Коэффициенты ряда $a_n = \frac{1}{1+n}$; $a_{n+1} = \frac{1}{n+2}$. Ищем радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Исследуем отдельно точки $x = \pm 1$.

1) $x = 1$. В этой точке ряд равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{1+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1} + ... \quad .$$

Используем интегральный признак сходимости. Заменим $n \to x$. Тогда

$$U(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \int_1^{\infty} U(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)\Big|_1^{\infty} = \ln(\infty) - \ln 2 = \infty,$$

ряд расходится.

2) $x = -1$. В этой точке ряд равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + (-1)^n \frac{1}{1+n} + ... \quad ,$$

т.е. ряд знакочередующийся. По теореме Лейбница он сходится, действительно, здесь $U_n = \frac{1}{1+n}; \quad U_{n+1} = \frac{1}{1+(1+n)} = \frac{1}{2+n}.$

1) $\frac{1}{1+n} > \frac{1}{2+n}$, т.е. $U_n > U_{n+1}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Ряд сходится. Интервал сходимости $-1 \le x < 1$ или $x \in [-1,1)$.

6. Ряды Тейлора и Маклорена

[2, гл. XVI, § 16, 17, 19, 20, упр. 50, 51, 54-57.

Теория вероятностей.

1. Теория соединений

Теория соединений или комбинаторика рассматривает различные наборы множества элементов, выбранных из некоторого исходного набора множества этих элементов. Эти наборы составляются по определенным правилам и называются соединениями. Природа элементов, входящих во множество может быть любой, например, какие-то предметы, или люди, или числа и т.п. Нас, прежде всего, будет интересовать вопрос: сколько различных соединений можно составить? Рассмотрим самое простое соединение. Пусть исходное множество элементов разбито на k групп (наборов), содержащих n_1 , n_2 , ... , n_k элементов, т.е. первый набор n_1 элементов, второй n_2 элементов и т.д. Чтобы составить соединение из каждого набора следует взять один элемент. Сколько различных соединений можно составить? Очевидно каждый элемент первого набора может встретиться в соединении с каждым элементом второго набора и таких пар будет $n_1 n_2$. Каждая такая пара может встретиться с каждым элементом третьего набора, т.е. разных троек уже будет $n_1 n_2 n_3$. Если обозначить за N число всех возможных соединений по одному элементу из каждого из k наборов, то получим

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots n_k .$$

Пример 1. В некотором городе телефонные номера состоят из буквы и пяти цифр. Буква может быть только А, В или Г. Первая цифра бывает 2, 3 , 4 или 5, а остальные цифры могут быть любые. Сколько телефонов может быть установлено в этом городе?

Решение. Первый набор состоит из трех букв, т.е. $n_1 = 3$, второй - из четырех цифр, $n_2 = 4$. Следующие четыре набора содержат по 10 цифр, т.е. $n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 10$. Тогда всего различных номеров может быть $N = 3\times4\times10\times10\times10\times10 = 120\ 000$.

В частном случае, если все k наборов содержат одинаковое количество элементов, скажем по n, то

$$N = n^k$$

Пример 2. Бросают две игральных кости. Сколько различных пар чисел может выпасть? (Нужно учесть, что 1 на первой кости и 2 на второй или 2 на первой и 1 на второй - это разные пары, т.е. разные соединения).

Решение. Так как у игральной кости, имеющей форму кубика, шесть граней, то n = 6, поэтому $N = 6^2 = 36$.

Отметим, что такие соединения могут получаться и в том случае когда имеется один набор из n элементов, из которого берут элемент, записывают его характеристику и возвращают в набор, после чего выбирают следующий элемент. В этом случае один и тот же элемент как бы выбирается из нового, но такого же как предыдущий, набора.

Теперь представим себе, что взятый один раз элемент обратно в набор не возвращается. Тогда второй элемент выбирается уже из набора, содержащего n - 1 элемент, третий из набора, содержащего n - 2 элемента и т.д. Это уже новый вид соединения, называемый *размещением из n элементов по k элементов*. Число размещений обозначается буквой А с двумя индексами

$N = A_n^k$ и читается " *а из эн по ка*"

Каждое размещение отличается от другого или входящими элементами или их порядком. Например, из трех элементов *a, b, c* можно составить 6 размещений по 2 элемента *ab, ac, bc, ba, ca, cb*

Число различных размещений определяется формулой

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \mathrm{n}\cdot(\mathrm{n}-1)\cdot(\mathrm{n}-2)\ \ldots\ (\mathrm{n}-\mathrm{k}+1)\ .$$

Пример 3. В группе из 20 человек проводиться собрание. Сколькими способами можно избрать председателя, его заместителя и секретаря?

Решение. Очевидно, что важно не только кого изберут, но и на какие должности. Поэтому одно соединение от другого может отличаться или составом или порядком, т.е. это размещения, поэтому

$$A_{20}^{3} = 20\times19\times18 = 6840$$

Если составлять размещения из всех n элементов, то очевидно они будут отличаться только порядком. Такие соединения называются *перестановками из n элементов.* Число перестановок обозначается P_n ("пэ из эн") и, очевидно получается из A_n^k при k = n, т.е.

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ \ldots\ (n-n+1) = 1\times2\times3\times\ldots\times n! = n!$$ ("эн факториал").

Пример 4. На трех карточках написаны цифры 1, 2, 3. Сколько различных трехзначных чисел можно составить переставляя местами эти карточки?

Решение. Очевидно, это число перестановок из трех, т.е.

$P_3 = 3! = 1\times2\times3 = 6.$

Теперь рассмотрим соединения, которые называются *сочетаниями из n элементов по k элементов.* Это такие соединения, содержащие k элементов, взятых из данного множества из n элементов, которые отличаются только самими элементами (порядок роли не играет). Например, n = 3 : *a, b, c* , k = 2 тогда можно составить три сочетания *ab, ac, bc.* (*ab* и *ba* - это разные размещения, но одно и то же сочетание). Число сочетаний обозначается буквой С. Очевидно, что для того чтобы составить все размещения нужно составить все возможные сочетания и в каждом произвести все возможные перестановки:

$$A_n^k = C_n^k P_k,$$

где C_n^k - число сочетаний из n элементов по k элементов (“цэ из эн по ка”). Тогда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k}.$$

Пример 5. На том же собрании 20 человек, где избирали председателя, заместителя и секретаря, нужно выбрать делегацию на конференцию в составе трех человек.

Решение. В этом случае порядок роли не играет, поэтому это не размещения, а сочетания и мы имеем

$$C_{20}^3 = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{1\cdot 2\cdot 3} = 1140.$$

Приведенные формулы числа размещений и числа сочетаний удобны для решения задач с конкретными числами n и k. Если задача решается в общем виде, то лучше пользоваться более компактными записями через факториалы, очень удобно ввести два определения

$0!=1$ и $C_n^o = 1.$

2. Событие и вероятность

[3. Введение, ч.1, гл.1, § 1 – 6].

Пример 1. В ящике 5 белых и 4 черных шара. Наудачу вынимают три. Какова вероятность, что среди них два белых и один черный шар?

Решение. Число всех возможных исходов - это число сочетаний из 9 по 3. Поэтому

$$n = C_9^3 = \frac{9\times 8\times 7}{1\times 2\times 3} = 84.$$

Число вариантов выбора 2 белых из 4 белых - это число сочетаний из 4 по 2, то есть

$$C_4^2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6,$$

и так как каждая пара может выпасть с любым из 4 черных шаров, то число благоприятных исходов равно произведению

m = 6·4 = 24.

Тогда вероятность события “из ящика взяли 2 белых и 1 черный шар”

$$P = \frac{m}{n} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}.$$

Пример 2. На 10 карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0. Наудачу выбирают три карточки и раскладывают их в порядке появления. Какова вероятность, что получится число 120?

Решение. Поскольку в этом примере важен порядок цифр, то число всех возможных исходов

$$n = A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720.$$

Благоприятный исход только один, поэтому искомая вероятность

$$P = \frac{1}{720}.$$

3. Теоремы сложения и умножения вероятностей и следствия из них

[3. Ч.1, гл.2 - 4 полностью, гл.5, § 1].

Пример 1. Два охотника стреляют по одной мишени и имеют вероятности попадания 0,7 и 0,8 соответственно. Оба сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что

а) в мишени ровно две пробоины,

б) в мишени хотя бы одна пробоина,

в) в мишени ровно одна пробоина?

Решение. Введем обозначения: событие A - попал первый охотник, $\overline{A}$ - первый охотник промахнулся, B - попал второй охотник, $\overline{B}$ - второй охотник промахнулся, C - в мишени ровно две пробоины, D - в мишени хотя бы одна пробоина, Е - в мишени ровно одна пробоина.

Событие C состоит в том, что произошло и A, и B одновременно, то есть произошло произведение событий AB , т.е. C = AB. Событие D состоит в том, что произошло хотя бы одно из событий A или B, то есть сумма событий A + B , т.е. D = A + B, и, наконец, событие E состоит в том, что A произошло а B нет или B произошло а A нет, E = A$\overline{B}$ + $\overline{A}$B. Учитывая, что A и B независимые события (вероятность попадания одного из охотников не зависит от того попал другой или нет)

P ($\overline{A}$) = 1 - P(A) = 0,3 и P ($\overline{B}$) = 1 - P(B) = 0,2.

Следовательно

P(C) = 0,7×0,8 = 0,56 ,

P(D) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,7х0,8 = 0,94 ,

P(E) = P(A)P($\overline{B}$) + P($\overline{A}$)P(B) = 0,7х0,2 + 0,3х0,8 = 0,38.

Пример 2. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25 %, а вторая – 35 %, третья – 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2 %.

а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный?

в) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой машиной?

Решение. а) Обозначим за H_1 событие – болт сделан на первой машине, за H_2 событие – болт сделан на второй машине, за H_3 событие – болт сделан на третьей машине. Тогда: $P(H_1) = 0,25$ – вероятность того, что болт сделан на первой машине. Соответственно $P(H_2) = 0,35$ и $P(H_3) = 0,40$.

Пусть событие A – болт бракован, тогда $P(A|H_1) = 0,05$ – вероятность, что брак выпущен первой машиной, соответственно $P(A|H_2) = 0,04$, а $P(A|H_3) = 0,02$.

$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + P(H_3)\cdot P(A|H_3) = 0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,40 \cdot 0,02 + 0,0125 + 0,014 + 0,008 = 0,0345$.

Б) $P(H_1|A)$ – вероятность того, что дефектный болт произведен первой машиной

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,0125}{0,0345} = 0,3624 .$$

Пример 3. Что вероятнее выиграть у равносильного противника: а) три партии из четырех или пять из восьми; б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми, если ничьих не бывает?

Решение. Для равносильных противников вероятность выигрыша (проигрыша) одинакова, то есть $p = q = \frac{1}{2}$.

а) Вероятность выигрыша *m* партий из *n* $P_n^{(m)}$ задается формулой

$$P_n^{(m)} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

В первом случае $n=4$, $m=3$. Следовательно, вероятность выиграть три партии из четырех

$$P_4^{(3)} = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!\,1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Когда n=8, а m=5, то

$$P_8^{(5)} = C_8^5 p^5 q^{8-5} = \frac{8!}{5!\,3!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}.$$

Следовательно, $P_4^{(3)} > P_8^{(5)}$.

Б) Вероятность выиграть не менее трех партий есть сумма вероятностей выиграть три или четыре партии из четырех, так как эти события несовместны, то

$$P_1 = P_4^{(3)} = P_4^{(4)} = \frac{1}{4} + C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4} + \frac{4!}{4!\,0!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

(Напомним, что 0!=1).

Аналогично, вероятность выиграть не менее пяти партий из восьми

$$P_2 = P_8^5 + P_8^6 + P_8^7 + P_8^8 = \frac{7}{32} + C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_8^7\left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \frac{1}{2} +$$

$$+ C_8^8\left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{7}{32} + \left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{8\cdot 7}{2} + 8 + 1\right) = \frac{93}{256}.$$

$P_2 > P_1$.

Следовательно, выиграть не менее пяти партий из восьми вероятнее.

Контрольная работа № 4. Задания.

1. Определить область сходимости ряда:

1.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$;

1.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n$;

1.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1} x^n$;

1.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$;

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{6n-1} x^n$;

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)}{n!} x^n$;

1.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{1+n} x^n$;

1.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n^2+1)} x^n$;

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{5^n} x^n$;

1.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!} x^n$;

1.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} x^n$;

1.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{2n+1} x^n$;

1.13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{2^n} x^n$;

1.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!} x^n$;

1.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n} x^n$;

1.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n} x^n$;

1.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} x^n$;

1.18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)}{2^n} x^n$;

1.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} x^n$;

1.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)}{7^n} x^n$.

2. Классическое определение вероятности.

2.1. Из слова «наугад» выбирается случайно одна буква. Какова вероятность, что эта буква «а»? Какова вероятность того, что это гласная?

2.2. Брошены 3 монеты. Найти вероятность того, что выпадут два герба?

2.3. В бригаде работают 6 мужчин и 4 женщины. Для производства работ в соседний цех откомандировали 5-х. Какова вероятность, что среди них 2 мужчин и 3 женщины?

2.4. Брошены два игральных кубика. Какова вероятность, что в сумме выпадет 7 очков?

2.5. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты: а) фигуру любой масти (фигура – дама, валет, король); б) карту пиковой масти; в) фигуру любой масти или карту масти пик?

2.6.На карточках написаны цифры 0; 1; 2; 3. Сколько четырехзначных чисел можно из них составить? Какова вероятность, что это число четное?

2.7. Какова вероятность того, что случайно сложив в ряд 5 карточек, на которых написаны буквы А, Г, И, К, и Н, прочитаем слово "КНИГА"?

2.8.Партия из 10 деталей содержит 7 стандартных и 3 нестандартных детали. Для контроля отбираются две. Какова вероятность, что обе детали стандартные?

2.9.Из колоды в 36 карт наудачу выбирают две. Какова вероятность что это: а) две дамы; б) два короля; в) дама и король в указанном порядке?

2.10 Человек забыл последнюю цифру почтового индекса. Какова вероятность того, что, написав ее наугад, он получит верный индекс?

2.11. Случайным образом выбирается двузначное число. Найти вероятность того, что оно делится либо на 2, либо на 5.

2.12. Найти вероятность того, что при подбрасывании игральной кости один раз выпадает шесть очков; не менее трех очков; четное число очков ?

2.13. На пяти карточках написаны буквы А, А, Б, Н и Н. Случайным образом карточки выложены в ряд. Какова вероятность того, что сложилось слово "банан"?

2.14.Из пяти карточек с буквами А; Б; В; Г; Д наугад одна за другой выбирают три и располагают в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово «ДВА»?

2.15. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Какова вероятность того, что студент знает: а) все три вопроса; б) только один вопрос экзаменационного билета?

2.16.Числа 1, 2,… , 9 расставляются случайным образом. Найти вероятность того, что числа 1 и 2 будут расположены рядом в порядке возрастания.

2.17. В кипе смешаны волокна хлопка, вискозы и шерсти в пропорции 2:3:1. Какова вероятность того, что наудачу взятое волокно окажется: а) хлопковым; б) вискозным; в) шерстяным?

2.18.В ящике среди 10 деталей две не стандартные. Какова вероятность того, что среди 6 наудачу взятых деталей не более одной нестандартной?

2.19.В вазе у продавца стоит 20 гвоздик, из них 5 красных, 5 желтых и 10 белых. Наудачу отбирают в букет 5 штук. Какова вероятность, что среди отобранных будут: а) 3 белых и 2 красных гвоздики; б) 1 белая, 2 желтых и 2 красных гвоздики?

2.20.Из колоды в 36 карт наудачу вытаскивают 6. Какова вероятность того, что они: а) одного цвета; б) одной масти?

3. Случайные события.

3.1.В цепь последовательно включены три независимо работающих элемента с вероятностями отказа соответственно 0,1; 0,15 и 0,2. Какова вероятность того, что по цепи ток не идет?
3.2.Для одной торпеды вероятность потопить корабль равна ½. Какова вероятность того, что четыре торпеды потопят корабль, если для потопления корабля достаточно одного попадания торпеды в цель?
3.3.Одновременно подбрасывают монету и игральную кость. Если на монете выпал герб, то выигрыш составляет 0 очков, а если решка - 2 очка. Эти очки суммируются с очками на кубике. Найти вероятность того, что суммарный выигрыш на кости и монете составит четыре очка.

3.4.Вероятность того, что можно выбить 10 очков на данной дистанции для данного стрелка при одном выстреле, равна 0,1, девять очков – 0,3. Какова вероятность того, что при трех выстрелах будет выбито более 27 очков?

3.5.Вероятность выигрыша на один билет 0,13. Какова вероятность хотя бы одного выигрыша для владельца пяти билетов/

3.6. Для игрока равновероятны все три исхода каждой партии (выигрыш, ничья, проигрыш). Найти вероятность того, что из четырех партий он а) не проиграет ни одного; б) проиграет хотя бы одну.

3.7.Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания первым, вторым и третьим стрелком равны соответственно 0,6; 0,5 и 0,4.

3.8.На склад поступает 60% продукции с первого участка и 40% со второго, причем с первого – 80% изделий первого сорта, а со второго – 75%. Какова вероятность того, что наудачу взятое изделие изготовлено на втором участке, если оно первого сорта.

3.9.Для контроля продукции, состоящей из пяти партий, отобрано наудачу одно изделие. Какова вероятность обнаружить брак, если в одной из партий $2/3$ деталей браковано, а в остальных четырех все годные.

3.10.Узел состоит из двух независимо работающих деталей, исправность каждой необходима для работы узла. Первая из деталей за рассматриваемый промежуток времени остается годной с вероятностью 0,8, а вторая – 0,9. Узел вышел из строя. Какова вероятность того, что это произошло из-за неисправности лишь второй детали ?

3.11.Рабочий обслуживает три станка. Вероятность выхода из строя за смену для них, соответственно, равна 0,75; 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что за смену выйдут из строя точно два станка.

3.12.Для игрока равновероятны все три исхода каждой партии (выигрыш, ничья, проигрыш). Найти вероятность того, что из четырех партий он а) не проиграет ни одного; б) проиграет хотя бы одну.

3.13.Студент сдает зачет, причем получает один вопрос из трех разделов. Первые два раздела одинаковы по объему, а третий в два раза больше первого. Студент знает ответы на 70% вопросов первого раздела, на 50% вопросов второго и на 80% вопросов третьего. Студент зачет сдал. Найти вероятность того, что ему попался вопрос из второго раздела.

3.14.Вероятность того, что деталь изготовленная на первом станке будет первосортной равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, а на втором – три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

3.15.В двух партиях изделий из 15 и 20 штук по 2 изделия бракованных. Из наудачу взятой партии выбрано одно изделие. Какова вероятность того, что оно бракованное?

3.16.В тире имеются пять ружей, вероятности попадания из которых равны 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет ружье наудачу.

3.17.Стрелок стреляет по мишени, которая состоит из круга и двух концентрических колец. Вероятность попадания в круг и кольца соответственно равны 0,2; 0,15; и 0,1. Определить вероятность попадания в мишень.

3.18.Хлопок смешан с вискозой в пропорции 1:2. Какова вероятность того, что в случайном соединении трех волокон два окажутся вискозными?

3.19. Студент - прогульщик может подняться в библиотеку либо на лифт, либо пешком. Вероятность встретиться с преподавателем в лифте 0,6, а на лестнице - 0,7. Найти вероятность того, что он избежит нежелательной встречи с преподавателем.

3.20.В порту ожидается прибытие трех судов с фруктами. Известно, что в 1% случаев груз начинает портиться в дороге. Найти вероятность того, что в порт прибудут с испорченным грузом а) два судна; б) менее двух судов.

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. - М.: Наука, 2005.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 2008.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике, т. 1 – 2.– М: АЙРИС ПРЕСС, 2011.
4. Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике, 2 курс. – М: АЙРИС ПРЕСС, 2007.
5. Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике, 1 курс. – М: АЙРИС ПРЕСС, 2008.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М: ФМ, 2006.
7. Сазонов А.Л., Шифф В.К. Статистический анализ. – М: СПБГУТД, 2007.
8. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М: ВШ, 2007.

Вопросы к экзамену.

1. Определение первообразной, свойства первообразной, определение неопределенного интеграла.
2. Свойства неопределенного интеграла, вытекающие из определения. Линейные свойства неопределенного интеграла.
3. Замена переменой в неопределенном интеграле. Простейшие замены.
4. Метод интегрирования по частям.
5. Площадь криволинейной трапеции. Определение определенного интеграла.
6. Свойства определенного интеграла, вытекающие из определения. Линейные свойства определенного интеграла.
7. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Вычисление площадей фигур. Вычисление объемов тел при помощи определенного интеграла.
9. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные определения.
10. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными переменными.
11. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
12. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
13. Дифференциальные уравнения второго порядка. Основные определения.
14. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка.
15. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
16. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка.
17. Ряды. Основные определения.Правила действия с рядами.
18. Признаки сходимости рядов с положительными членами.
19. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.
20. Степенные ряды. Основные определения.
21. Теорема Абеля сходимости степенных рядов (без доказательства).
22. Радиус сходимости, интервал и область сходимости степенного ряда.
23. Ряды Тейлора и МакЛорена.Основные определения теории вероятностей. Случайное событие. Классическая вероятность.
24. Алгебра событий. Совместные и несовместные события. Теоремы сложения вероятностей. Зависимые и независимые события. Теоремы умножения вероятностей. Вероятность хотя бы одного события.
25. Априорная и апостериорная вероятность (формула полной вероятности и формула Байеса).