§ 3. Сходимость в метрическом пространстве

9. Выписать несколько членов последовательности $x^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Установить, является ли последовательность $x^{(n)}$ фундаментальной и сходящейся в указанном пространстве.

1. a) l^3, $\quad x^{(n)} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \ldots\right)$

   b) l^1, $\quad x^{(n)} = \left(\frac{n+1}{1}, \frac{n+\sqrt{2}}{4}, \frac{n+\sqrt{3}}{9}, \frac{n+\sqrt{4}}{16}, \ldots\right)$

2. a) l^1, $\quad x^{(n)} = \left(1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{3} + \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$

   b) l^2, $\quad x^{(n)} = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2(n+2)}, \frac{1}{3(n+3)}, \frac{1}{4(n+4)}, \ldots\right)$

3. a) l^1, $\quad x^{(n)} = \left(\underbrace{\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}}_{n}, 0, 0, \ldots\right)$

   b) l^4, $\quad x^{(n)} = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{n+\sqrt{2}}{2n}, \frac{n+\sqrt{3}}{3n}, \frac{n+\sqrt{4}}{4n}, \ldots\right)$

4. a) l^∞, $\quad x^{(n)} = \left(\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n+1}, \frac{n+3}{n+2}, \frac{n+4}{n+3}, \ldots\right)$

   b) l^1, $\quad x^{(n)} = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n+1)^3}, \frac{1}{(n+1)^4}, \ldots\right)$

5. a) l^1, $\quad x^{(n)} = \left(\frac{1}{2^n n!}, \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}, \frac{1}{2^{n+2}(n+2)!}, \ldots\right)$

   b) l^5, $\quad x^{(n)} = \left(\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots\right)$

6. a) l^1, $\quad x^{(n)} = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, \underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \ldots\right)$

   b) l^4, $\quad x^{(n)} = \left(\frac{n-1}{n}, \frac{\sqrt{2}n-1}{2n}, \frac{\sqrt{3}n-1}{3n}, \frac{\sqrt{4}n-1}{4n}, \ldots\right)$

7. a) l^1, $\quad x^{(n)} = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, \underbrace{\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}}_{n}, 0, 0, \ldots\right)$

b) l^2, $x^{(n)} = \left(\frac{n+1}{1}, \frac{n+2}{4}, \frac{n+3}{9}, \frac{n+4}{16}, \ldots \right)$

8. a) l^2, $x^{(n)} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^n}, 0, 0, \ldots \right)$

b) l^4, $x^{(n)} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \ldots \right)$

9. a) l^1, $x^{(n)} = \left(\frac{1}{n^\lambda}, \frac{2}{n^\lambda}, \frac{3}{n^\lambda}, \ldots, \frac{n}{n^\lambda}, 0, 0, \ldots \right)$, $\lambda > 2$

b) l^∞, $x^{(n)} = \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}, \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}, \sqrt{\frac{n+2}{n+3}}, \sqrt{\frac{n+3}{n+4}}, \ldots \right)$

10. a) l^2, $x^{(n)} = \left(1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^4}, \ldots \right)$

b) l^∞, $x^{(n)} = \left(\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots \right)$

11. a) l^2, $x^{(n)} = \left(\frac{n+1}{1}, \frac{n+2^2}{2^3}, \frac{n+3^2}{3^3}, \frac{n+4^2}{4^3}, \ldots \right)$

b) l^3, $x^{(n)} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{n+2}}, \frac{1}{\sqrt{n+3}}, \ldots \right)$

12. a) l^2, $x^{(n)} = \left(1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \frac{1}{3} + \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots \right)$

b) l^6, $x^{(n)} = \left(\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots \right)$

13. a) l^3, $x^{(n)} = \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^{n+3}}, \ldots \right)$

b) l^∞, $x^{(n)} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots \right)$

14. a) l^1, $x^{(n)} = \left(\frac{2}{n^4}, \frac{4}{n^4}, \frac{6}{n^4}, \ldots, \frac{2n}{n^4}, 0, 0, \ldots \right)$

b) l^∞, $x^{(n)} = (n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0, 0, \ldots)$

15. a) l^2, $x^{(n)} = \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n}, 0, 0, 0, \ldots \right)$

b) l^4, $x^{(n)}=\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{\sqrt{2}(n+2)},\dfrac{1}{\sqrt{3}(n+3)},\dfrac{1}{\sqrt{4}(n+4)},\dots\right)$

16. a) l^1, $x^{(n)}=\left(\dfrac{2^n}{n!},\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!},\dfrac{2^{n+2}}{(n+2)!},\dfrac{2^{n+3}}{(n+3)!},\dots\right)$

b) l^2, $x^{(n)}=\left(\underbrace{2,\,2,\,2,\dots,2}_{n},\,0,\,0,\dots\right)$

17. a) l^1, $x^{(n)}=\left(\dfrac{1}{n^3},\dfrac{3}{n^3},\dfrac{5}{n^3},\dots,\dfrac{2n-1}{n^3},0,0,\dots\right)$

b) l^2, $x^{(n)}=\left(\dfrac{n-1}{n},\dfrac{2n-1}{4n},\dfrac{3n-1}{9n},\dfrac{4n-1}{16n},\dots\right)$

18. a) l^2, $x^{(n)}=\left(\dfrac{1}{3^n},\dfrac{1}{3^{n+1}},\dfrac{1}{3^{n+2}},\dfrac{1}{3^{n+3}},\dots\right)$

b) l^1, $x^{(n)}=\left(\underbrace{\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n},\dots,\dfrac{1}{n}}_{n},\,0,\,0,\dots\right)$

19. a) l^1, $x^{(n)}=\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{1},\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{3}}{9},\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{4}}{16},\dots\right)$

b) l^4, $x^{(n)}=\left(1,\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}},\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}},\dots,\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}},0,0,\dots\right)$

20. a) l^∞, $x^{(n)}=\left(\dfrac{n}{n+1},\dfrac{n+1}{n+2},\dfrac{n+2}{n+3},\dfrac{n+3}{n+4},\dots\right)$

b) l^1, $x^{(n)}=\left(1,\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^2},\dfrac{1}{n^3},\dfrac{1}{n^4},\dots\right)$

Указание к решению

Решение этой задачи опирается на определения сходящейся последовательности и фундаментальной последовательности в метрическом пространстве (конспект лекций, §3) и на формулы для вычисления расстояний в пространствах l^p (конспект лекций, §2). Заметим, что здесь n-ый член последовательности обозначен символом $x^{(n)}$, а не x_n, как обычно. Причина такой модификации в том, что в данной задаче n-ый член последовательности сам является бесконечной числовой последовательностью с координатами $x_k^{(n)}$.

Образец №1 решения

$$l^3, \quad x^{(n)} = \left(1, \frac{1}{\ln(n+1)}, \frac{1}{\ln^2(n+1)}, \frac{1}{\ln^3(n+1)}, \frac{1}{\ln^4(n+1)}, \ldots\right).$$

Пусть $x^{(n)} = \left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\right)$. По условию $x_k^{(n)} = \dfrac{1}{\ln^k(n+1)}$.

Выпишем несколько членов последовательности $x^{(n)}$ при $n = 1,2,3,4$:

$$x^{(1)} = \left(1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln^2 2}, \frac{1}{\ln^3 2}, \frac{1}{\ln^4 2}, \ldots\right),$$

$$x^{(2)} = \left(1, \frac{1}{\ln 3}, \frac{1}{\ln^2 3}, \frac{1}{\ln^3 3}, \frac{1}{\ln^4 3}, \ldots\right),$$

$$x^{(3)} = \left(1, \frac{1}{\ln 4}, \frac{1}{\ln^2 4}, \frac{1}{\ln^3 4}, \frac{1}{\ln^4 4}, \ldots\right),$$

$$x^{(4)} = \left(1, \frac{1}{\ln 5}, \frac{1}{\ln^2 5}, \frac{1}{\ln^3 5}, \frac{1}{\ln^4 5}, \ldots\right).$$

Легко видеть, что при $n \to \infty$

$$x_0^{(n)} \to 1,$$
$$x_k^{(n)} \to 0, \ \ k > 1.$$

<u>Гипотеза</u>: $x^{(n)} \to x$ в пространстве l^3, где $x = (1,0,0,0,0,\ldots)$. Заметим, что последовательность x также принадлежит пространству l^3, иначе гипотеза не имела бы смысла.

Проверим гипотезу по определению сходимости в пространстве l^3:

$$\rho_{l^3}\left(x^{(n)}, x\right) = \sqrt[3]{\sum_{k=0}^{\infty}\left|x_k^{(n)} - x_k\right|^3} = \sqrt[3]{|1-1|^3 + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\ln^k(n+1)} - 0\right|^3} = \sqrt[3]{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln^3(n+1)}\right)^k} =$$

(используем формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии)

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{1 - 1/\ln^3(n+1)} - 1} = \sqrt[3]{\frac{1}{\ln^3(n+1) - 1}} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, доказано, что $x^{(n)}$ – сходящаяся последовательность, а именно: $x^{(n)} \to x$ в пространстве l^3, где $x = (1,0,0,0,0,\ldots)$. Отсюда следует и фундаментальность последовательности $x^{(n)}$.

Образец №2 решения

$$l^\infty, \quad x^{(n)} = \left(\frac{\sqrt{n+1}}{1}, \frac{\sqrt{n+2}}{2}, \frac{\sqrt{n+3}}{3}, \frac{\sqrt{n+4}}{4}, \ldots\right).$$

Пусть $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\right)$. По условию $x_k^{(n)} = \dfrac{\sqrt{n+k}}{k}$.

Выпишем первые несколько членов последовательности $x^{(n)}$ при $n = 1,2,3,4$:

$$x^{(1)} = \left(\frac{\sqrt{2}}{1}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{4}, \ldots\right),$$

$$x^{(2)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{1}, \frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \ldots\right),$$

$$x^{(3)} = \left(\frac{\sqrt{4}}{1}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{7}}{4}, \ldots\right),$$

$$x^{(4)} = \left(\frac{\sqrt{5}}{1}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{\sqrt{8}}{4}, \ldots\right).$$

Отсюда видно, что каждая из координат $x_k^{(n)}$ неограниченно возрастает при $n \to \infty$. Действительно, для каждого фиксированного k имеем $x_k^{(n)} = \dfrac{\sqrt{n+k}}{k} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Гипотеза: последовательность $x^{(n)}$ не имеет предела в пространстве l^∞.

Чтобы окончательно доказать, что последовательность $x^{(n)}$ не обладает сходимостью в пространстве l^∞, покажем, что она даже не является фундаментальной в этом пространстве:

$$\rho_{l^\infty}\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) = \sup_{1 \le k < \infty}\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| = \sup_{1 \le k < \infty}\left|\frac{\sqrt{n+k}}{k} - \frac{\sqrt{m+k}}{k}\right| = \sup_{1 \le k < \infty}\frac{\left|\sqrt{n+k} - \sqrt{m+k}\right|}{k} =$$

$$= \sup_{1 \le k < \infty}\frac{|n-m|}{k\left(\sqrt{n+k} + \sqrt{m+k}\right)} = \frac{|n-m|}{\sqrt{n+1} + \sqrt{m+1}}.$$

Нельзя утверждать, что $\dfrac{|n-m|}{\sqrt{n+1} + \sqrt{m+1}} \to 0$ при $n, m \to \infty$. Действительно, выражение $\dfrac{|n-m|}{\sqrt{n+1} + \sqrt{m+1}}$ представляет из себя неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty - \infty}{\infty}\right]$ и может иметь разный предел при разном соотношении между числами n и m. Например, если взять $n = 2m$, то

$$\frac{|n-m|}{\sqrt{n+1} + \sqrt{m+1}} = \frac{m}{\sqrt{2m+1} + \sqrt{m+1}} \to \infty \text{ при } m, n \to \infty.$$

Таким образом, последовательность $x^{(n)}$ не фундаментальная в пространстве l^∞ и тем более не является сходящейся в этом пространстве.

10. Для функциональной последовательности $x_n(t)$ и функции $x(t)$ проверить наличие равномерной и среднеквадратичной сходимости $x_n \to x$ на промежутке $[a;b]$. Проиллюстрировать выводы графически (для построения графиков можно использовать математические пакеты).

1. a) $x_n(t) = \dfrac{nt}{\exp(nt^2)}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

   b) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;1]$.

2. a) $x_n(t) = \sqrt[n+1]{t} - \sqrt[n]{t}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;1]$.

b) $x_n(t) = \sin(n^2 t)\exp(-nt)$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;\pi]$.

3. a) $x_n(t) = \dfrac{tn\sqrt{n}}{e^{nt}}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;2]$.

b) $x_n(t) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{n}{1-t^2}\right), |t| < 1 \\ 0, |t| \geq 1 \end{cases}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [-2;2]$.

4. a) $x_n(t) = \dfrac{2nt}{1+n^2t^2}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;2]$.

b) $x_n(t) = \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{n^2}}$, $x(t) = |t|$, $[a;b] = \left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

5. a) $x_n(t) = \dfrac{nt}{n+t}$, $x(t) = t$, $[a;b] = \left[-\dfrac{1}{2};\, 2\right]$.

b) $x_n(t) = \dfrac{(n+1)^2 t^2}{n\exp(nt^2)}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [-3;3]$.

6. a) $x_n(t) = \sqrt[n]{t} - \sqrt[n]{t^2}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;1]$.

b) $x_n(t) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{n}{1-n^2t^2}\right), |t| < \dfrac{1}{n} \\ 0, |t| \geq \dfrac{1}{n} \end{cases}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [-1;1]$.

7. a) $x_n(t) = (t-1)^n$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;1]$.

b) $x_n(t) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{n^2}{n-t^2}\right), t^2 < n \\ 0, t^2 \geq n \end{cases}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [-2;2]$.

8. a) $x_n(t) = t^{2n}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [-1;1]$.

b) $x_n(t) = \dfrac{nt}{\exp(n^2 t)}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;2]$.

9. a) $x_n(t) = \dfrac{\cos nt}{n}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [-\pi;\pi]$.

b) $x_n(t) = \dfrac{nt\sqrt{t}}{\exp(2nt^2)}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;2]$.

10. a) $x_n(t) = \dfrac{t}{e^{nt}}$, $x(t) = 0$, $[a;b] = [0;4]$.

b) $x_n(t) = \sqrt[3]{t^3 + \dfrac{1}{n}}$, $x(t) = t$, $[a;b] = [0;2]$.

11. a) $x_n(t)=t^n$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;1]$.

b) $x_n(t)=\dfrac{tn^2}{\exp(tn)}$, $x(t)=0$, $[a;b]=\left[\dfrac{1}{2};\,3\right]$.

12. a) $x_n(t)=\dfrac{n\left(1-t^2\right)^n}{2n-1}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[-1;1]$.

b) $x_n(t)=(nt)^2\exp\left(-n^2t\right)$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;3]$.

13. a) $x_n(t)=\dfrac{t\sqrt{n}}{1+nt^2}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[-3;3]$.

b) $x_n(t)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{n}{1-nt^2}\right), t^2<\dfrac{1}{n}\\ 0,\ t^2\geq\dfrac{1}{n}\end{cases}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[-1;1]$.

14. a) $x_n(t)=\dfrac{nt\sqrt{t}}{\exp\left(nt^2\right)}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;3]$.

b) $x_n(t)=\dfrac{nt(1+nt)}{1+n^2t^2}$, $x(t)=1$, $[a;b]=\left[\dfrac{1}{2};\,4\right]$.

15. a) $x_n(t)=\dfrac{\sin nt}{n}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[-2\pi;2\pi]$.

b) $x_n(t)=\dfrac{(n+1)^2t}{n\cdot\exp(nt)}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;3]$.

16. a) $x_n(t)=\dfrac{n^2t}{e^{nt}}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;4]$.

b) $x_n(t)=(3t)^n(1-t)^n$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;1]$.

17. a) $x_n(t)=\sin(nt)\exp(-nt)$, $x(t)=0$, $[a;b]=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) $x_n(t)=\exp\left(-\dfrac{t^2}{n}\right)$, $x(t)=1$, $[a;b]=[-1;1]$.

18. a) $x_n(t)=\dfrac{t\sqrt{n}}{\exp\left(nt^2\right)}$, $x(t)=0$, $[a;b]=\left[\dfrac{1}{2};\,2\right]$.

b) $x_n(t)=\dfrac{2nt}{1+n^2t^2}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[-3;\,3]$.

19. a) $x_n(t)=\dfrac{t}{2+nt^2}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[-2;2]$.

b) $x_n(t)=\sqrt[2n]{t}-\sqrt[n]{t}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;1]$.

20. a) $x_n(t)=\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2t^2}}$, $x(t)=\dfrac{1}{t}$, $[a;b]=\left[\dfrac{1}{3};3\right]$.

b) $x_n(t)=\dfrac{nt^2}{e^{nt}}$, $x(t)=0$, $[a;b]=[0;3]$.

Образец решения

$$x_n(t)=t^n-t^{n+1},\quad x(t)=0,\quad [a;b]=[0;1].$$

Как указано в §3 конспекта лекций, под равномерной сходимостью понимают сходимость в пространстве $C[a;b]$. Среднеквадратичной сходимостью называют сходимость в пространстве $L^2(a;b)$. Причем равномерная сходимость – более сильное свойство, чем среднеквадратичная, иными словами, при наличии равномерной сходимости имеется и среднеквадратичная:

$$x_n\to x \text{ в } C[a;b] \quad\Rightarrow\quad x_n\to x \text{ в } L^2(a;b).$$

Если равномерной сходимости нет, то может быть более слабая – среднеквадратичная.

Для данных задачи проверим сначала, имеется ли равномерная сходимость. Вычислим расстояние между функциями $x_n(t)$ и $x(t)=0$ в пространстве $C[0;1]$:

$$\rho_{C[0;1]}(x_n,0) \;=\; \max_{t\in[0;1]}|x_n(t)-0| \;=\; \max_{t\in[0;1]}\left(t^n-t^{n+1}\right).$$

Найдем наибольшее значение функции $\varphi(t)=t^n-t^{n+1}$ на отрезке $[0;1]$. Как известно, наибольшее значение непрерывной функции следует искать среди ее значений на концах отрезка и локальных экстремумов внутри отрезка. Вычисляем $\varphi'(t)=nt^{n-1}-(n+1)t^n$. Из условия $\varphi'(t)=0$, $t\in(0;1)$, находим точку, в которой может быть локальный экстремум:

$$t_0=1-\frac{1}{n+1}.$$

Сравним значения функции φ в точке t_0 и на концах отрезка:

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0,$$

$$\varphi(t_0)=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Очевидно, $\varphi(t_0)$ – наибольшее значение функции φ на отрезке $[0;1]$.

Возвращаемся к вычислению расстояния между функциями $x_n(t)$ и $x(t)=0$.

$$\rho_{C[0;1]}(x_n,0) \;=\; \max_{t\in[0;1]}\left(t^n-t^{n+1}\right) \;=\; \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \;=$$

$$=\;\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n}-1\right)\;=\;\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\to 0 \quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \;=\; \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \;=\; 0\cdot e^{-1}=0.$

Таким образом, доказано, что $x_n\to x$ в пространстве $C[0;1]$.

Этот факт можно проиллюстрировать графически. Построим на отрезке $[0;1]$ графики некоторых членов последовательности x_n и график нулевой функции, совпадающий с осью абсцисс.

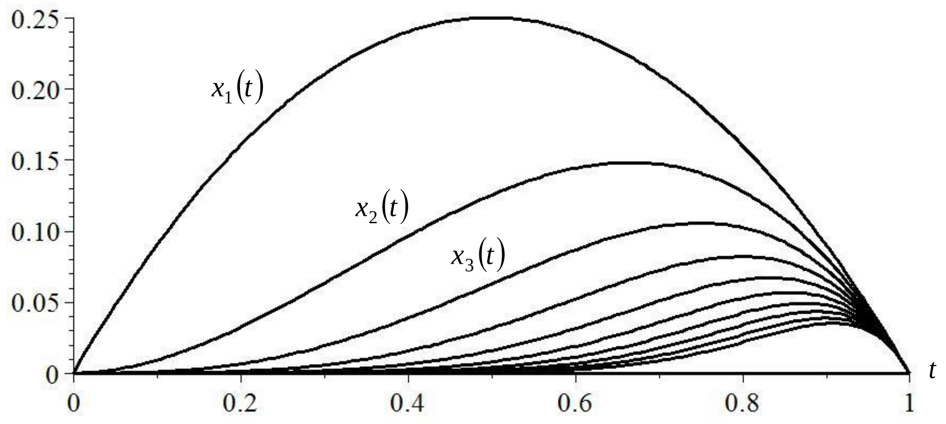

Рис. 3

Как видно на рисунке 3, расстояние $\rho_{C[0;1]}(x_n, 0)$ действительно реализуется в точке локального максимума функции x_n и это расстояние последовательно сокращается при $n \to \infty$.

Из наличия равномерной сходимости автоматически вытекает наличие среднеквадратичной сходимости.