

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

КИНЕМАТИКА

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Задание К.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 20.

Пример выполнения задания. Исходные данные:

$$x = 4t; \quad y = 16t^2 - 1; \quad (1)$$

$$t_1 = 0,5 \text{ (} x \text{ и } y \text{ — в см, } t \text{ и } t_1 \text{ — в с).}$$

Решение. Уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1).

Получаем $y = x^2 - 1$, т. е. траекторией точки является парабола, показанная на рис. 67.

Вектор скорости точки

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \quad (2)$$

Вектор ускорения

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}$ — орты осей x и y ; v_x, v_y, a_x, a_y — проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= 4 \text{ см/с}; & a_x = \ddot{x} &= 0; \\ v_y = \dot{y} &= 32t; & a_y = \ddot{y} &= 32 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

По найденным проекциям определяются модуль скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4)$$

и модуль ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (5)$$

Таблица 20

Номер варианта	Уравнения движения		$t_1, \text{с}$
	$x=x(t), \text{см}$	$y=y(t), \text{см}$	
1	$-2t^2+3$	$-5t$	$1/2$
2	$4\cos^2(\pi t/3)+2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3)+3$	$\sin(\pi t^2/3)-1$	1
4	$4t+4$	$-4/(t+1)$	2
5	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3)+4$	1
6	$3t^2+2$	$-4t$	$1/2$
7	$3t^2-t+1$	$5t^2-5t/3-2$	1
8	$7\sin(\pi t^2/6)+3$	$2-7\cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t+2)$	$3t+6$	2
10	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3)-3$	1
11	$-4t^2+1$	$-3t$	$1/2$
12	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6)-3$	1
13	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	2
15	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2+1$	$1/2$
17	$7\sin^2(\pi t/6)-5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1+3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3)+3$	1
19	$-5t^2-4$	$3t$	1
20	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	0
21	$6\sin(\pi t^2/6)-2$	$6\cos(\pi t^2/6)+3$	1
22	$7t^2-3$	$5t$	$1/4$
23	$3-3t^2+1$	$4-5t^2+5t/3$	1
24	$-4\cos(\pi t/3)-1$	$-4\sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2-4$	1
26	$8\cos^2(\pi t/6)+2$	$-8\sin^2(\pi t/6)-7$	1
27	$-3-9\sin(\pi t^2/6)$	$-9\cos(\pi t^2/6)+5$	1
28	$-4t^2+1$	$-3t$	1
29	$5t^2+5t/3-3$	$3t^2+t+3$	1
30	$2\cos(\pi t^2/3)-2$	$-2\sin(\pi t^2/3)+3$	1

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = |dv/dt|, \quad (6)$$

или

$$a_\tau = |\vec{v} \cdot \vec{a}/v|; \quad (6')$$

$$a_\tau = |(v_x a_x + v_y a_y)/v|; \quad (6'')$$

dv/dt выражает проекцию ускорения точки на направление ее скорости. Знак «+» при dv/dt означает, что движение точки ускоренное, направления $\vec{a}_\tau$ и $\vec{v}$ совпадают; знак «-» — что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки

$$a_n = v^2/\rho. \quad (7)$$

Если радиус кривизны траектории ρ в рассмат-

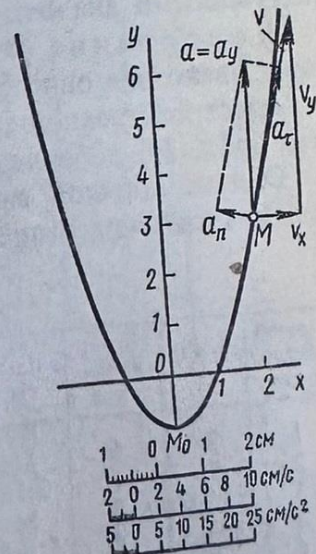


Рис. 67

риваемой точке неизвестен, то a_n можно определить по формуле

$$a_n = |\vec{v} \times \vec{a}|/v. \quad (8)$$

При движении точки в плоскости формула (8) принимает вид

$$a_n = |v_x a_y - v_y a_x|/v. \quad (8')$$

Модуль нормального ускорения можно определить и следующим образом:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \quad (9)$$

После того как найдено нормальное ускорение по формулам (8) или (9), радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения

$$\rho = v^2/a_n. \quad (10)$$

Результаты вычислений по формулам (3)–(6), (8) и (10) для заданного момента времени $t_1 = 0,5$ с приведены в табл. 21.

Таблица 21

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с ²					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
2,0	3,0	4,0	16,0	16,5	0	32,0	32,0	31,0	7,8	35,0

На рис. 67 показано положение точки M в заданный момент времени. Вектор $\vec{v}$ строим по составляющим $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$, причем этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор $\vec{a}$ строим по составляющим $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ и затем раскладываем на составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$. Совпадение величин a_τ и a_n , найденных из чертежа, с их значениями, полученными аналитически, служит контролем правильности решения.

Дополнение к заданию К.1. Данное задание может быть использовано для определения скорости и ускорения точки при ее движении по пространственной траектории. Для этого к двум уравнениям движения (см. табл. 20) добавляется третье уравнение (табл. 22).

Общий порядок выполнения задания в этом случае такой же, как и в приведенном выше примере.