

**МАТЕРИАЛЫ
для СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ СПбГЭТУ (ЛЭТИ)**

Курс «Математический анализ»

Кафедра ВМ-2
Курс 1
Семестр 2

Санкт - Петербург
2012 г

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие предназначено для самостоятельной работы студентов заочной и вечерней форм обучения. Пособие содержит список основных тем и разделов, изучаемых во втором семестре первого курса, а так же экзаменационные задачи и варианты контрольных работ.

Список литературы содержит учебники и пособия, которые могут помочь освоению этих курсов.

2. ПРОГРАММА КУРСА

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Множества, числа. Функции. Пределы, их свойства. Первый и второй замечательные пределы.
2. Бесконечно малые и большие величины. Эквивалентные функции. [5. Гл.5, § 13 – 18]
3. Непрерывность. Теорема о функциях, непрерывных на отрезке. Классификация разрывов. [5. Гл.5, § 19]

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Производная функция и ее геометрический смысл. Таблица производных. Свойства дифференцируемых функций, техника дифференцирования. [2, пп.90-102], [1, с.137-155]. Производные высших порядков. [2, пп.115-118, 121-122], [1, с.155-157]. Дифференциал функции, линеаризация и связь его с приближенными вычислениями. [2, пп.103-108,119-120], [1, с.157-163]. Правило Лопитала. [2, пп.150-151], [1, с.167-170]. Формула Тейлора и ее применение. [2, пп.123-127], [1, с.181-185].
2. Исследование функций с помощью производных: монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, выпуклость, вогнутость, точки перегиба, асимптоты. [2, пп.131-149], [1, с.171-181].

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Определение и свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов. [3, пп.251-253], [1, с.193-198]. Техника нахождения первообразных: непосредственное интегрирование, замена переменной, по частям. [3, пп.254-259], [1, с.198-203]. Интегрирование отдельных функций: дробно-рациональных, тригонометрических, иррациональных etc. [3, пп.260-277], [1, с.203-219].
2. Определенный интеграл: определение, свойства и геометрический смысл. [3, пп.282-295], [1, с.221-224,226-230, 233]. Формула Ньютона-Лейбница. [3, пп.296-298], [1, с.224-226]. Вычисление определенного интеграла заменой переменной, по частям. [3, пп.299-304], [1, с.230-233].
3. «Неберущиеся» интегралы: эллиптические, Пуассона, Френеля. [3, пп.278-281], [1, с.219-220].
4. Приложения определенного интеграла. [3, пп.305-308, 316-347], [1, с.237-254].

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Пределы, непрерывность и дифференцируемость функций нескольких переменных. Производная по направлению. Градиент.

3. ЛИТЕРАТУРА

1. Д.Т.Письменный. Конспект лекций по высшей математике. Ч.1. М.: Айрис - пресс, 2004.
2. Г.М.Фихтенгольц Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3-х томах. Т.1 М.: Физматлит, 2001.
3. Г.М.Фихтенгольц Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3-х томах. Т.2 М.: Физматлит, 2001.
4. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под редакцией А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича. М., "Наука", 1986.
5. Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Дифференциальное и интегральное исчисления. Ч.1-2 М.: Дрофа,2003.

4. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Пределы, Свойства пределов.
2. Замечательные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.
3. Непрерывность. Теорема о функциях, непрерывных на отрезке. Виды разрывов.
4. Производная функция. Геометрическая интерпретация производной.
5. Таблица производных и свойства дифференцируемых функций.
6. Техника дифференцирования.
7. Дифференциал функции.
8. Правило Лопиталя.
9. Производные высших порядков.
10. Формула Тейлора и ее применение.
11. Исследование функций с помощью первой производной: монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения
12. Асимптоты графика функции.
13. Исследование функций с помощью второй производной: выпуклость, вогнутость, точки перегиба.
14. Определение и свойства неопределенного интеграла (первообразной).
15. Таблица интегралов.
16. Техника вычисления первообразных: непосредственное интегрирование, замена переменной.
17. Формула интегрирования по частям.
18. Интегрирование дробно-рациональных функций.
19. Определенный интеграл: определение, свойства и геометрический смысл.
20. Способы вычисления определенного интеграла.
21. Формула Ньютона-Лейбница.
22. Приложения интеграла: площадь, длина дуги, объем и площадь тел вращения.
23. Частные производные функций нескольких переменных. Полный дифференциал.
24. Частные производные высших порядков.
25. Производная по направлению. Градиент.

5. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа №1.

1 вариант

Дифференциальное исчисление.

1. Найдите $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$

2. Найдите $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

3. Проверьте непрерывность функции $y = \begin{cases} \frac{1}{x-a}, & \text{при } 1 < x \\ x, & \text{при } x \leq 1 \end{cases}$ для $a = 2$.

Для точек разрыва установите их характер. При каком a функция будет непрерывной?

4. Найдите производные функций:

а). $y = \ln^2 \arctg \sqrt[3]{1-2x} - 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$.

б). $y = 3 \ln^3 \arctg e^{-x}$.

с). $y = \left(5x - e^{-x^2} \right)^{\operatorname{tg}^2(x/2)}$.

5. Вычислите дифференциалы первого и второго порядка для функции $y(t) = \sin t \cdot 2^{\sin t} + 2t$.

6. Проведите исследование функции и постройте эскиз ее графика:

а). $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$.

7. Найдите полный дифференциал функции $u = 2x^{yz}$.

8. Проверить, что функция $z = 2 \cos^2\left(y - \frac{x}{2}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

9. Найти производную функции $z = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$ в точке $M(1,1,0)$ по направлению к точке $A(1,2,-1)$.

Контрольная работа №2.

1 вариант

Интегральное исчисление.

1. Вычислите неопределенный интеграл $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$.

2. Найдите неопределенный интеграл $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$.

3. Вычислите определенный интеграл $\int_0^{1/2} \frac{x^3 dx}{x^2 - 3x + 2}$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$ и $y = x^3 / 3$.
Сделайте рисунок.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции, имеющим в полярных координатах уравнение $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ и $\rho = 2 - \cos 4\varphi$.
Сделайте рисунок.

6. Вычислите длину дуги кривой $y = \ln x$ при $\sqrt{3} < x < \sqrt{8}$.

Контрольная работа №1.

2 вариант

Дифференциальное исчисление.

1. Найдите $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3x - x^3}{1 + x^2 + 2x^3}$.

2. Найдите $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x - 5}{x + 3} \right]^{2x - 1}$.

3. При каких значениях c и h функция $f(x)$, будет непрерывна?

$$f(x) = \begin{cases} cx + 1, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ x^2 + h, & x > 2 \end{cases}$$

4. Найдите производные функций:

a). $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x - 1}) - 2 \ln(e^2 - 1)$.

б). $y = 5 \arctg^3 \sin \frac{x-1}{\sqrt{3}}$.

с). $y = \left(\ln 3 \times \sin \frac{x}{2} \right)^{\text{ctg} \sqrt{x}}$.

5. Составьте уравнение нормали и уравнение касательной к кривой в точке X_0 .

$$y = x^2 + 6\sqrt{x} - 24, \quad x_0 = 4$$

6. Проведите исследование функции и постройте эскиз ее графика:

a). $y = \frac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4}$.

7. Найдите полный дифференциал функции $z = xy e^{-xy^2}$.

8. Проверить, что функция $z = \ln(x^2 + y^2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

9. Найти производную функции $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z$ в точке $M(1,3,2)$ по направлению к точке $A(0,5,0)$.

Контрольная работа №2.

2 вариант

Интегральное исчисление.

1. Вычислите неопределенный интеграл $\int \frac{\cos x}{a^2 + \sin^2 x} dx$;

2. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx$.
3. Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.
Сделайте рисунок.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 3 \sin 2\varphi$.
Сделайте рисунок.
6. Вычислите длину дуги кривой $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, $0 \leq x \leq \frac{7}{9}$.