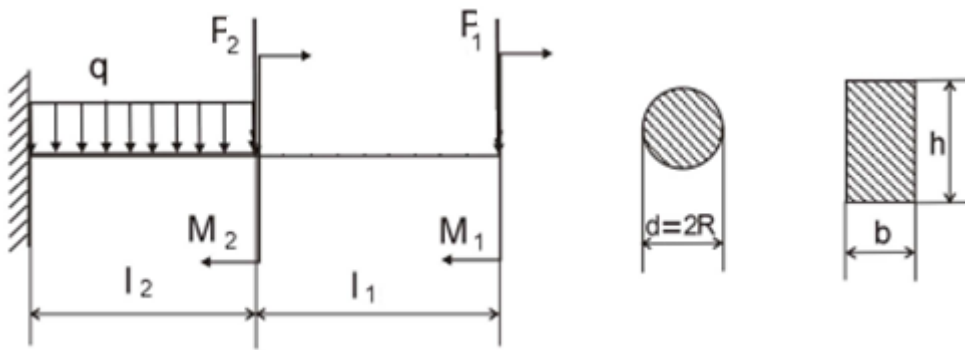


3. Расчет балки на прочность и жесткость



Для статически определимой балки, защемленной одним концом:

1. определить реакции закрепления;
2. построить эпюры Q_y и M_z ;
3. подобрать размеры круглого, прямоугольного ($h/b=2$) и двутаврового поперечного сечения;
4. проверить условие жесткости и, если оно не удовлетворяются, подобрать другой двутавр.

Принять модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Исходные данные:

A	q, кН/м	l₁, м	l₂, м	B	F₁, кН	F₂, кН	M₁, кН·м	M₂, кН·м
0	10	1,1	1,2	0	10	50	15	5
1	5	1,8	2,2	1	20	40	25	10
2	15	1,6	1,4	2	30	30	35	20
3	20	2,0	1,0	3	40	20	45	30
4	10	1,0	1,2	4	50	10	55	40
5	5	2,2	1,1	5	10	50	15	5
6	15	1,4	1,8	6	20	40	25	10
7	20	1,0	1,6	7	30	30	35	20
8	10	1,2	2,0	8	40	20	45	30
9	5	2,0	1,0	9	50	10	55	40

3. Расчет балки на прочность и жесткость

1. Определим реакции закрепления.

Составим уравнения равновесия заданной (рис.5) статически определимой балки:

$$\Sigma F_{ix} = 0, H_A = 0.$$

$$\Sigma F_{iy} = 0, R_A - q \cdot l_2 - F_1 - F_2 = 0, R_A = q \cdot l_2 + F_1 + F_2 = 71 \text{ кН}.$$

$$\Sigma M_{iA} = 0, M_A - (q \cdot l_2) \frac{l_2}{2} - F_2 \cdot l_2 - M_2 - F_1(l_1 + l_2) - M_1 = 0,$$

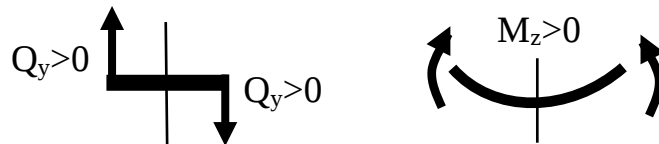
$$M_A = (q \cdot l_2) \frac{l_2}{2} + F_2 \cdot l_2 + M_2 + F_1(l_1 + l_2) + M_1 = 253,1 \text{ кНм}.$$

Проверка: $\Sigma M_{iK} = 0, M_A - R_A(l_1 + l_2) + (q \cdot l_2) \left(\frac{l_2}{2} + l_1 \right) + F_2 \cdot l_1 - M_2 - M_1 = 0,$

$0 \approx 0$, реакции опоры определены верно.

2. Построим эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z .

Для нахождения Q_y и M_z на каждом участке, воспользуемся методом сечений и правилом знаков:



1-1: $0 \leq x_1 \leq l_1 = 1,8 \text{ м}$

$$Q_{y1} = F_1 = 30 \text{ кН};$$

$$M_{z1} = -M_1 - F_1 \cdot x_1; M_{z1}(0) = -35 \text{ кНм}, M_{z1}(1,8) = -89 \text{ кНм}.$$

2-2: $0 \leq x_2 \leq l_2 = 2,2 \text{ м}$

$$Q_{y2} = R_A - q \cdot x_2; Q_{y2}(0) = 71 \text{ кН}, Q_{y2}(2,2) = 60 \text{ кН}.$$

$$M_{z2} = -M_A + R_A \cdot x_2 - q \cdot \frac{x_2^2}{2}; \quad M_{z2}(0) = -253,1 \text{ кНм},$$

$$M_{z2}(2,2) = -109 \text{ кНм}.$$

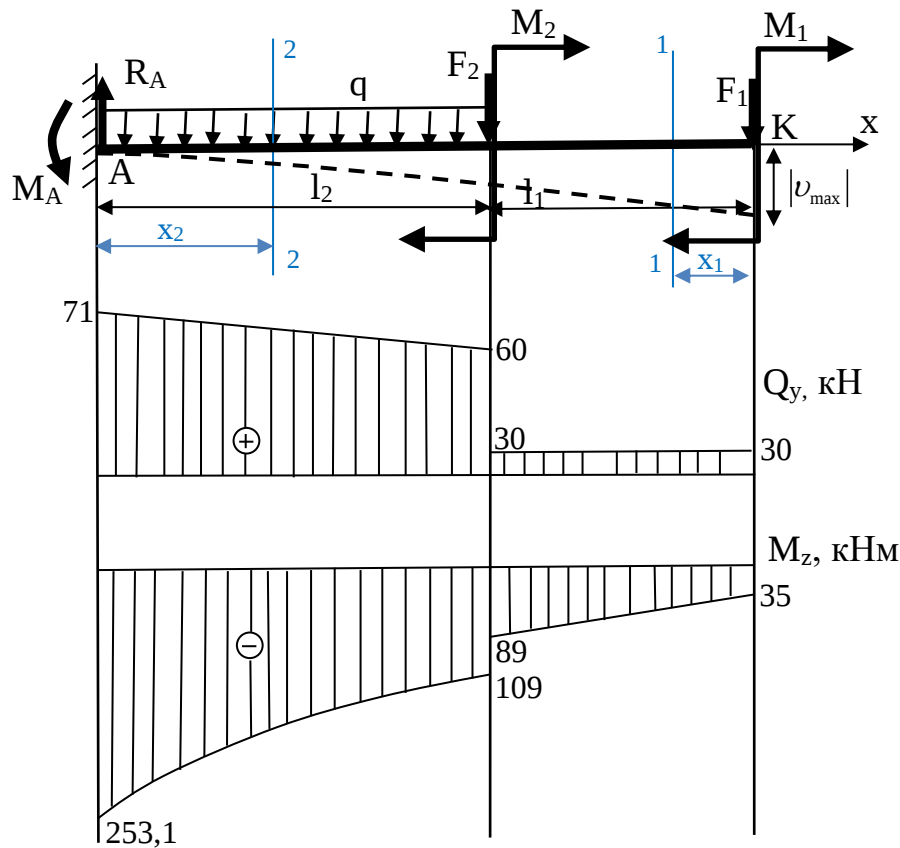


Рис.5

Анализируя вид эпюр, представленных на рис.5, можно отметить следующие свойства:

- на участке, где нет распределенной нагрузки q , эпюра поперечной силы Q_y постоянная, эпюра изгибающего момента M_z – линейная;
- на участке, где есть распределенная нагрузка q , эпюра Q_y линейная, эпюра M_z очерчена по параболе, направленной выпуклостью навстречу нагрузке;
- в сечении, где приложена сосредоточенная сила F , на эпюре Q_y имеется скачок на величину этой силы, на эпюре M_z – излом в направлении, противоположном силе (навстречу);

- в сечении, где приложен сосредоточенный момент M , на эпюре M_z – скачок на величину этого момента, на эпюре Q_y ничего не меняется.

3. Подберем из условия прочности размеры круглого, прямоугольного и двутаврового поперечного сечения, считая $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Опасное сечение (рис.5) – сечение, где приложен наибольший по модулю изгибающий момент $|M_{z \max}| = 253,1 \text{ кНм}$.

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{z \max}|}{W_z} \leq [\sigma] \quad W_z \geq \frac{|M_{z \max}|}{[\sigma]} = 1581,875 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

По полученному значению осевого момента сопротивления W_z по сортаменту ГОСТ 8239-89 выбираем двутавр №50:
 $W_z = (W_x \text{ в сортаменте}) = 1589 \text{ см}^3$, $I_z = (I_x \text{ в сортаменте}) = 39727 \text{ см}^4$.

Осевой момент сопротивления круглого сечения радиуса R вычисляется по формуле

$$W_z = \frac{\pi R^3}{4}; \quad R \geq \sqrt[3]{\frac{W_z \cdot 4}{\pi}} = 0,13 \text{ м}$$

Для прямоугольного сечения с соотношением сторон $h/b=2$ осевой момент сопротивления равен

$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{2 \cdot b^3}{3}; \quad b \geq \sqrt[3]{\frac{W_z \cdot 3}{2}} = 0,13 \text{ м}$$

Эпюра распределения нормальных напряжений σ по высоте сечения приведена на рис.6. Отметим, что нижние волокна балки в опасном сечении (и вообще по всей длине балки) сжаты ($\sigma < 0$), а верхние волокна растянуты ($\sigma > 0$).

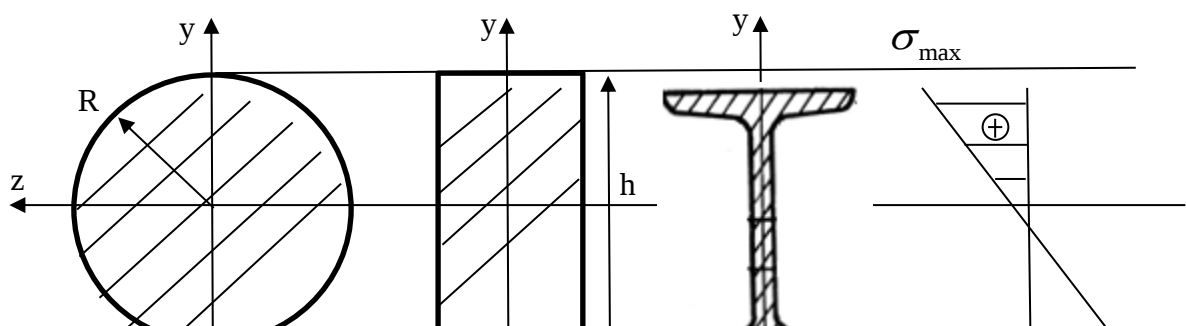




Рис.6

4. Проверим двутавровое сечение по условию жесткости: наибольший по модулю прогиб $|\nu_{\max}|$ не должен превышать допускаемого значения

$$|\nu_{\max}| \leq [\nu]_{\kappa}.$$

Допускаемое значение для консольной балки

$$[\nu]_{\kappa} = \frac{l_{\kappa}}{350} = \frac{1,8 + 2,2}{350} = 11,43 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Очевидно, что для рассматриваемой балки (рис.5) прогиб на свободном конце будет наибольшим, т.е. $|\nu_{\max}| = |\nu_K|$.

Для нахождения наибольшего перемещения составим приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, используя метод уравнивания постоянных интегрирования, выбрав сечение А в качестве начала отсчета:

$$EI_z \nu'' = -M_A \cdot x^0 + R_A \cdot x - q \frac{x^2}{2} \Big|_I + q \frac{(x-l_2)^2}{2} + M_2 \cdot (x-l_2)^0 - F_2 \cdot (x-l_2) \Big|_{II}$$

Интегрируя полученное уравнение дважды, получим

$$EI_z \nu' = C - M_A \cdot x + R_A \cdot \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6} \Big|_I + q \frac{(x-l_2)^3}{6} + M_2 \cdot (x-l_2) - F_2 \cdot \frac{(x-l_2)^2}{2} \Big|_{II}$$

– уравнение углов поворота;

$$EI_z \nu = D + C \cdot x - M_A \cdot \frac{x^2}{2} + R_A \cdot \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} \Big|_I + q \frac{(x-l_2)^4}{24} + M_2 \cdot \frac{(x-l_2)^2}{2} - F_2 \cdot \frac{(x-l_2)^3}{6} \Big|_{II}$$

– уравнение прогибов.

Постоянные интегрирования С и D определим из условий закрепления:

$$1) \nu'_A = \nu'(0) = 0 = C;$$

$$2) \nu_A = \nu(0) = 0 = D.$$

Таким образом, из уравнения прогибов получим выражение для вычисления $|\nu_{\max}| = |\nu_K| = |\nu(4)|$:

$$\nu(4) = \frac{1}{EI_z} \left[-M_A \cdot \frac{4^2}{2} + R_A \cdot \frac{4^3}{6} - q \frac{4^4}{24} \right]_I + \left[+ q \frac{(4-l_2)^4}{24} + M_2 \cdot \frac{(4-l_2)^2}{2} - F_2 \cdot \frac{(4-l_2)^3}{6} \right]_{II}.$$

Условие жесткости НЕ выполняется:

$$|\nu_{\max}| = |\nu_K| = |\nu(4)| = 16,55 \cdot 10^{-3} \text{ м} > [\nu]_K = 11,43 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Поэтому необходимо увеличить размер сечения:

$$I_z^{\text{нов}} = I_z \cdot k,$$

$$k = \frac{|\nu_{\max}|}{[\nu]_K} = \frac{16,55 \cdot 10^{-3}}{11,43 \cdot 10^{-3}} = 1,45$$

где

По полученному новому значению осевого момента инерции $I_z^{\text{нов}} = 57547,6 \text{ см}^4$ по сортаменту ГОСТ 8239-89 выбираем двутавр №55:

$$I_z = (I_x \text{ в сортаменте}) = 55962 \text{ см}^4, \quad W_z = (W_x \text{ в сортаменте}) = 2035 \text{ см}^3.$$