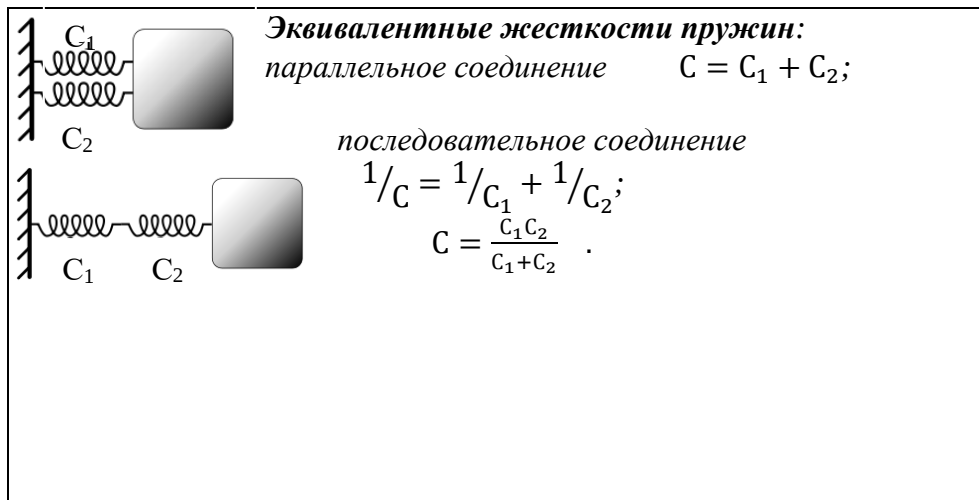


Колебания груза с учетом демпфирования

Цель работы:

1. Определить эквивалентную жесткость пружин
2. Составить дифференциальное уравнение колебаний груза без учета и с учетом сил вязкого трения.
3. Определить частоту и период свободных колебаний груза без учета демпфирования
4. Определить частоту и период свободных колебаний груза с учетом демпфирования
5. Найти декремент затухания δ
6. Получить решение рассматриваемого дифференциального уравнения колебаний для заданных начальных условий
7. Построить графики свободных колебаний груза при отсутствии и при наличии демпфирования.



Пример 1. Рассмотрим модель с вертикальным расположением груза и составим для нее дифференциальное уравнение колебаний.

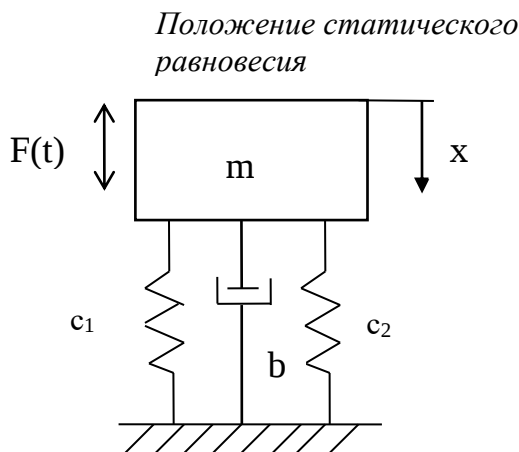


Рис.1. Колебательная система с 1 степенью свободы

Эквивалентная жесткость пружин.

В данном примере две пружины соединены параллельно, поэтому их жесткости суммируются

$$C_3 = C_1 + C_2$$

Показанная на рис.1 система может совершать вертикальные колебания около положения статического равновесия, имеет одну степень свободы, и

ее движение можно описать при помощи второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}} + \vec{F}(t),$$

где $\vec{G} = m\vec{g}$ – сила тяжести груза, $\vec{F}_{\text{упр}}$ – сила упругости пружины, $\vec{F}_{\text{сопр}}$ – сила сопротивления со стороны демпфирующего устройства, направленная против движения груза, $\vec{F}(t)$ – периодическая вынуждающая сила.

Направим ось x вниз. Зададим грузу смещение в положительную сторону координаты на расстояние x , и его скорость также направим в положительном направлении – вниз. Тогда в проекции на ось x уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{x} = mg - F_{\text{упр}} - F_{\text{сопр}} + F(t),$$

Модуль силы упругости пружины на основании закона Гука равен $|\vec{F}_{\text{упр}}| = c(x + \Delta)$, где Δ – начальная деформация пружины, появляющаяся вследствие действия силы тяжести. В положении равновесия эти силы уравновешены, так что $c\Delta = mg$.

Сила вязкого трения со стороны демпфера равна по модулю $|F_{\text{сопр}}| = b\dot{x}$

В итоге колебания груза около положения статического равновесия описываются уравнением

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x} + F(t),$$

называемого «уравнением линейного осциллятора»

Разделим каждое слагаемое на массу m и сгруппируем в левой части слагаемые, содержащие переменную x и ее производные $\dot{x}$, $\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{F}{m}.$$

Введем для удобства дальнейших преобразований обозначения

$$2n = \frac{b}{m}; \quad k^2 = \frac{c}{m}.$$

Таким образом, в случае вертикальных свободных колебаний груза получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \frac{F}{m}.$$

Пример 2. Рассмотрим пример составления дифференциального уравнения горизонтальных колебаний груза с помощью модели, изображенной на рис. 2

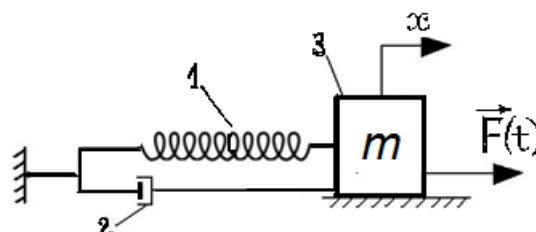


Рис.2. Модель вынужденных колебаний груза с амортизатором

На рисунке введены обозначения:

1 – упругий элемент (моделируется в виде пружины);

2 – демпфер (гаситель колебаний);

3 – инерционный элемент (груз);

x – отклонение груза от положения равновесия (деформация пружины);

$\vec{F} = \vec{F}(t)$ – возмущающая сила.

Рассмотрим наиболее общий случай, учитывая и присутствие демпфера (силы вязкого сопротивления), и возможное воздействие некоторой периодической возмущающей силы $\vec{F}(t)$.

Будем отсчитывать отклонение груза x по горизонтальной оси от положения статического равновесия.

В упругом элементе возникает сила упругости, которую полагаем подчиняющейся закону Гука

$$F_{\text{упр}} = cx,$$

где c – коэффициент жёсткости упругого элемента.

В демпфирующем устройстве будем считать трение вязким, так что сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости груза и определяется по формуле

$$\vec{F}_c = -b\vec{V},$$

где b – коэффициент сопротивления демпфера, $\vec{V}$ – скорость груза (сила направлена противоположно скорости).

Кроме того, на груз действует сила тяжести $\vec{G} = m\vec{g}$, реакция опоры по нормали $\vec{N}$, а также возможна возмущающая периодическая сила $\vec{F}$.

Основное уравнение динамики материальной точки (груза) принимает вид

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_c + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F},$$

где m , $\vec{a}$ – масса и ускорение груза.

В проекции на направление движения груза (ось x) получим

$$m\ddot{x} = F - F_{\text{упр}} - F_c,$$

$$m\ddot{x} = F - cx - b\dot{x}.$$

Разделим каждое слагаемое на массу m и сгруппируем в левой части слагаемые, содержащие переменную x и ее производные $\dot{x}$, $\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{b\dot{x}}{m} + \frac{c}{m}x = \frac{F}{m}.$$

Введем обозначения

$$2n = \frac{b}{m}; \quad k^2 = \frac{c}{m}.$$

Получили вновь то же самое **дифференциальное уравнение второго порядка** с отличной от нуля правой частью, т.е. «линейное неоднородное

дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами»

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \frac{F}{m}.$$

Это уравнение при различных значениях коэффициента b и силы F позволяет исследовать четыре вида колебаний:

Свободные колебания тела

а) $F = 0; \quad b = 0$ - свободные незатухающие колебания;

б) $F = 0; \quad b \neq 0$ - свободные затухающие колебания.

1. *Вынужденные колебания тела*

в) $F \neq 0; \quad b = 0$ - вынужденные колебания
без учёта силы сопротивления;

г) $F \neq 0; \quad b \neq 0$ - вынужденные колебания
с учётом силы сопротивления.

А. Свободные незатухающие колебания груза ($F=0$).

Свободными колебаниями называют колебания материального объекта, выведенного из состояния равновесия мгновенно приложенной к нему силой, после чего процесс колебаний в дальнейшем предоставлен самому себе.

Поскольку исследуются свободные колебания *без учета сил сопротивления*, то модель процесса колебания выглядит следующим образом (рис. 3).

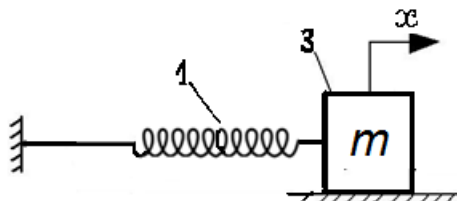


Рис. 3. Модель свободных колебаний груза без учета сопротивления

Пренебрегая демпфированием ($b=0$), имеем дифференциальное уравнение свободных колебаний в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) - однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение и определим его корни

$$\lambda^2 + k^2 = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \pm ik.$$

Поскольку корни уравнения *чисто мнимые*, общее решение дифференциального уравнения имеет вид суммы тригонометрических функций

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt. \quad (2)$$

Чтобы определить постоянные интегрирования c_1 и c_2 , следует воспользоваться начальными условиями – информацией о скорости и отклонении груза от положения равновесия в момент начала колебаний

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0. \quad (3)$$

Для этого продифференцируем уравнение (2)

$$\dot{x} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt \quad (4)$$

Подставим $t=0$ в правые части выражений (2) и (3), а начальное отклонение груза x_0 и начальное значение скорости $\dot{x}_0 = V_0$ – в левые части этих выражений. (ВНИМАНИЕ! Эти параметры не могут быть оба равными нулю, иначе свободные колебания не начнутся).

Подставляя (3) в (2) и (4), определяем постоянные интегрирования

$$c_1 = x_0; \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}. \quad (5)$$

Подставив значения найденных констант в первое уравнение (2),

имеем
$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt. \quad (6)$$

Уравнение (6) есть уравнение движения руза при свободных незатухающих колебаниях.

Чтобы определить амплитуду колебаний тела, удобно рассматривать выражение (6) как раскрытие синуса суммы

$$x = A \sin(kt + \varepsilon). \quad (7)$$

$$x = A \sin \varepsilon \cos kt + A \cos \varepsilon \sin kt$$

Поскольку амплитуда – это максимальное отклонения x от положения равновесия ($x=0$), то сомножитель A при $\sin = \pm 1$ в выражении (7) является искомой амплитудой.

Чтобы получить значение A , достаточно рассматривать постоянные интегрирования c_1 и c_2 как

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= A \sin \varepsilon \\ c_2 &= A \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (8)$$

Возведя в квадрат левую и правую часть равенства (8) и сложив их,

$$\left. \begin{aligned} c_1^2 &= A^2 \sin^2 \varepsilon \\ c_2^2 &= A^2 \cos^2 \varepsilon \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_1^2 + c_2^2 = A^2 \Rightarrow$$

находим в результате амплитуду свободных незатухающих колебаний

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}. \quad (9)$$

Из отношения постоянных интегрирования определяем ε - начальную фазу колебаний:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= A \sin \varepsilon \\ c_2 &= A \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} \Rightarrow tg \varepsilon = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow$$

$$tg \varepsilon = \frac{x_0 k}{\dot{x}_0};$$

$$\varepsilon = \arctg \left(\frac{x_0 k}{\dot{x}_0} \right). \quad (10)$$

Таким образом, уравнение свободных колебаний груза без учета сопротивления описывается гармонической функцией

$$x = A \sin(kt + \varepsilon) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2} \sin(kt + \varepsilon). \quad (11)$$

На рис.4 приводится график полученного уравнения движения – уравнения гармонических свободных незатухающих колебаний при отсутствии сил сопротивления.

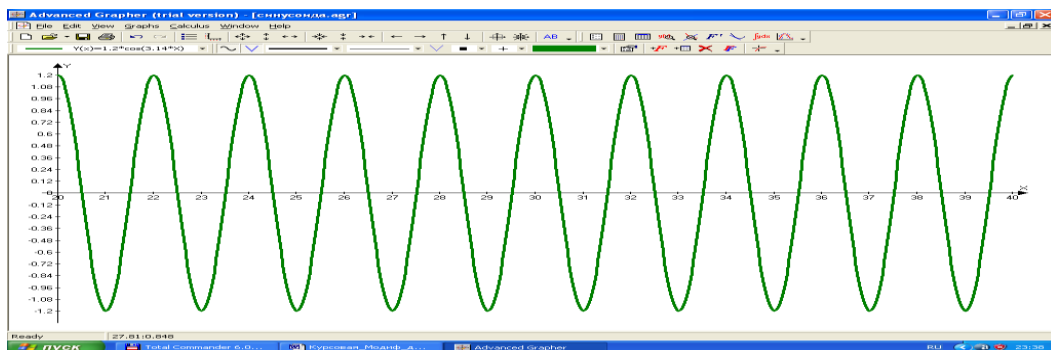


Рисунок 4. График свободных незатухающих колебаний.

Важным параметром колебаний является τ - период свободных незатухающих колебаний.

Период τ – это наименьший временной интервал между двумя одинаковыми положениями тела, в которых оно находится в одинаковых фазах колебаний (смещается в одну и ту же сторону).

Поскольку за период аргумент синуса изменится на $2\pi = k\tau$, период колебаний можно вычислить по формуле $\tau = \frac{2\pi}{k}$,

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – так называемая круговая (циклическая) частота, или собственная частота колебаний. Она равна числу колебаний совершаемых телом за 2π секунд

$$k = \frac{2\pi}{\tau} \text{ [рад/с]} = \frac{2\pi}{\tau} \text{ [с}^{-1}\text{]}.$$

Следует заметить, что в электротехнике употребляется несколько иное понятие частоты: принято оценивать колебания числом колебаний за 1 секунду, называемым просто частотой (технической частотой)

$$\nu = \frac{1}{T} \text{ [Гц]}.$$

Итоги.

- Дифференциальное уравнение свободных колебаний без трения (2) имеет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – частота свободных колебаний, а период $\tau = \frac{2\pi}{k}$.

- Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, это функция

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt = A \sin(kt + \varepsilon).$$

- Амплитуда колебаний определяется через начальные условия и собственную частоту по формуле $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}$.
- Период колебаний не зависит от начальных условий $\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$.

Б. Свободные затухающие колебания груза

Модель свободных затухающих колебаний (рис.5) теперь включает демпфер 2, обеспечивающий вязкое трение, пропорциональное скорости.

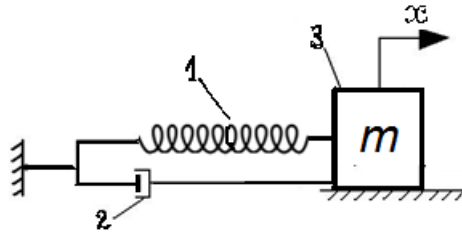


Рис.5. Модель свободных затухающих колебаний

Сила, выводящая из состояния покоя, рассматривается, как мгновенно приложенная к телу в начальный момент, после чего колебания происходят уже без воздействия этой силы. Действие силы учитывается заданием начальной скорости движения $\dot{x}_0 = V_0$.

Уравнение свободных колебаний с учетом вязкого трения имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \quad (12)$$

где $2n = \frac{b}{m}$; $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$; n – коэффициент сопротивления.

1. Случай малого сопротивления $n < k$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид убывающей колебательной функции

$$x = e^{-nt} (c_1 \cos k_1 t + c_2 \sin k_2 t). \quad (13)$$

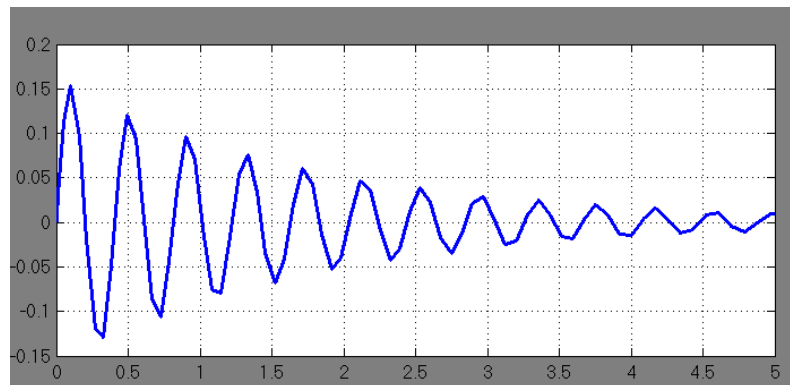


Рис. 6. График свободных затухающих колебаний при малом сопротивлении.

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий:

$t = 0, x_0 \neq 0, \dot{x}_0 \neq 0$:

$$c_1 = x_0; \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0 + bx_0}{k_1}.$$

Амплитуда колебаний и фаза колебаний определяются следующим обра-

ЗОМ:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)^2}{k_1^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{k_1 x_0}{\dot{x}_0 + nx_0}.$$

Период затухающих колебаний

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}}. \quad (14)$$

Отметим, что при слабом сопротивлении ($n \ll k$) условный период затухающих колебаний мало отличается от периода незатухающих свободных колебаний

$$\tau_1 = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} \approx \tau \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{k}\right)^2 \right] \approx \tau.$$

Логарифмический декремент затухания. Важной характеристикой скорости уменьшения размаха колебаний является показатель, называемый «логарифмическим декрементом затухания», – показатель степени экспоненты $\delta = n\tau$, где $\tau = \frac{2\pi}{k}$ – период свободных колебаний без трения.

Физический смысл. Логарифмический декремент равен величине, обратной числу колебаний N , через которое амплитуда уменьшится в $e = 2,71 \approx 3$ раза: $\delta = 1/N$. Как видно из примера графика на рис. 5, такое уменьшение амплитуды произошло за 4 цикла, т.е. $\delta \approx 0,25$.

2. Предельный случай критического сопротивления $n = k$

Решение имеет вид

$$x = e^{-nt} (c_1 + c_2 t).$$

Постоянные интегрирования определяем из начальных условий при $t = 0$,

$$x_0 \neq 0, \quad \dot{x}_0 \neq 0:$$

$$c_1 = x_0; \quad c_2 = \dot{x}_0 + nx_0.$$

При возрастании параметра $t \rightarrow \infty$ отклонение x становится неопределенностью типа $0 \cdot \infty$. Раскрывая ее по правилу Лопиталя, получим $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0$, т.е. материальная точка совершает апериодическое (т.е. не имеющее периодичности, не колебательное) затухающее движение.

3. Случай большого сопротивления $n > k$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda_1 = -n + \sqrt{b^2 - k^2}; \quad \lambda_2 = -n - \sqrt{b^2 - k^2}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

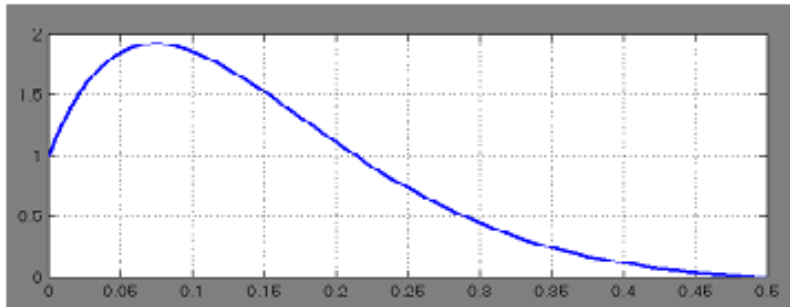


Рис.7 График аperiодического движения при большом сопротивлении

Постоянные интегрирования определяем из начальных условий при $t=0$, $x_0 \neq 0$, $\dot{x}_0 \neq 0$ следующим образом:

$$c_1 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0 - \lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

где $\lambda_1 = -n + \sqrt{b^2 - k^2}$; $\lambda_2 = -n - \sqrt{b^2 - k^2}$.

При $x \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ имеет место аperiодическое затухающее движение, при котором груз просто возвращается в исходное положение равновесия, без всяких колебаний.